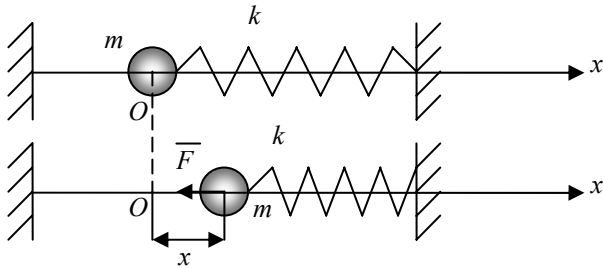


Н.Я. МОЛОТКОВ, О.В. ЛОМАКИНА

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ

Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОО ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

Н.Я. МОЛОТКОВ, О.В. ЛОМАКИНА

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Утверждено ученым советом ТГТУ
в качестве учебного пособия для студентов
специальностей 170500, 170600, 101600, 311300, 311900, 311400



Тамбов
Издательство ТГТУ
2007

УДК 534-16(075)
ББК В236.36я73
М758

Рецензенты:

Кандидат химических наук, доцент кафедры физики ТГТУ
Ю.М. Головин

Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры
теоретической и экспериментальной физики ТГУ им. Г.Р. Державина
В.И. Иволгин

Молотков, Н.Я.

М758 **Механические колебания** : учебное пособие / Н.Я. Молотков, О.В. Ломакина. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 88 с. – 250 экз. – ISBN 978-5-8265-0622-6.

Изложены основные вопросы теории механических колебаний, которые соответствуют учебным программам курса теоретической механики. Большое внимание уделяется физической сущности механических колебательных явлений и их различным применениям: автоколебания, релаксационные, параметрические, связанные и др. Рассматриваются свободные и вынужденные колебания в системе с большим числом степеней свободы.

Предназначено для студентов специальностей 170500, 170600, 101600, 311300, 311900, 311400 дневной формы обучения.

УДК 534-16(075)
ББК В236.36я73

ISBN 978-5-8265-0622-6

технический университет» (ТГТУ), 2007

© ГОУ ВПО «Тамбовский государственный

ВВЕДЕНИЕ

Колебательные и волновые процессы весьма часто встречаются в окружающей нас природе и технике. Значительная часть механических движений – движение периодически работающих машин, различные вибрации, почти все акустические явления, переменный ток, применяющийся в быту и в различных технических устройствах, радиотехнике и часть электроники, вся волновая оптика, волновые свойства частиц – далеко не полный перечень явлений и технических приложений, описываемых колебательными и волновыми явлениями. Эта общность широкого класса физических явлений не находят достаточного отражения в обычных вузовских и школьных курсах физики, что существенно снижает качество обучения. Часто в учебниках колебания рассматриваются весьма ограничено.

Механические колебания охватывают очень широкий круг явлений, которые реализуются в других областях знаний. В связи с этим в данном пособии рассматриваются не только традиционные вопросы теории колебаний (свободные, вынужденные и автоколебания), но и релаксационные, параметрические, связанные колебания, а также колебания систем с большим числом степеней свободы, что подводит обучаемых к пониманию волновых процессов. Такое углубленное изучение вопросов механических колебаний позволит студентам получить более глубокие знания для последующего изучения радиотехники, электроники, волновой оптики и квантовой физики. Можно сказать, что теория механических колебаний – это фундамент, на котором базируются многие технические дисциплины.

Авторы стремились, прежде всего, выяснить физическую сущность явлений и подчеркнуть общность математических методов, применяемых для описания различных по своей природе физических процессов, а также максимально использовать качественный подход к изучению вопросов теории колебаний. По мнению одного из выдающихся физиков Э. Ферми, «физическая сущность действительно понимаемого вопроса может быть объяснена без сложных формул»¹. В умении качественно объяснить сущность физических явлений и заключается истинное понимание математических уравнений, описывающих те или иные закономерности.

Волновые процессы, хотя и являются колебательными, все же обладают своими особенностями и требуют отдельного рассмотрения. Поэтому в данной работе они подробно не рассмотрены.

Пособие разработано для студентов технических специальностей, желающих углубить свои знания по теории механических колебаний.

¹Цит. по: Понтекорво Б.М. Энрико Ферми. – М. : Знание, 1971. – С. 27.

1. ПОНЯТИЕ О КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Под колебательным движением, или просто под механическим колебанием, понимают всякое движение, характеризуемое той или иной степенью повторяемости физических величин, которые определяют движение системы. Примерами колебательного движения могут служить колебания различных маятников, струн, мембран, мостов, поршней двигателей внутреннего сгорания и т.д.

Колебание называется *периодическим*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебательного движения, повторяются через равные промежутки времени. Простейшим примером периодических колебаний являются гармонические колебания, возникающие под действием восстанавливающих сил, которые могут иметь различную природу, но обладающие двумя свойствами: восстанавливающая сила пропорциональна мгновенному смещению или отклонению тела от положения устойчивого равновесия, и направлена всегда противоположно смещению. Природа восстанавливающих сил может быть различной. Например, восстанавливающая сила может быть обусловлена упругими свойствами пружины и возникает вследствие деформации пружины.

На рис. 1 показан пружинный маятник, который состоит из массивного шара, насаженного на горизонтальный стержень, вдоль которого он может скользить. На стержень надета стальная пружина, закрепленная на его конце и шаре. В состоянии равновесия шар находится в положении O (рис. 1, а). При смещении шара от положения равновесия на величину x на него действует сила упругости $F = -kx$, где k – коэффициент жесткости пружины.

Другим примером восстанавливающей силы является сила, возникающая при вертикальных отклонениях плавающих тел жидкости. В положении равновесия сила Архимеда уравнивается силой тяжести, т.е. $F_A = mg$ (рис. 2, а). При вертикальном смещении тела на величину x возникает дополнительная сила Архимеда $F'_A = -\rho g S x$, где ρ – плотность жидкости; S – площадь поперечного сечения тела; g – ускорение свободного падения (рис. 2, б).

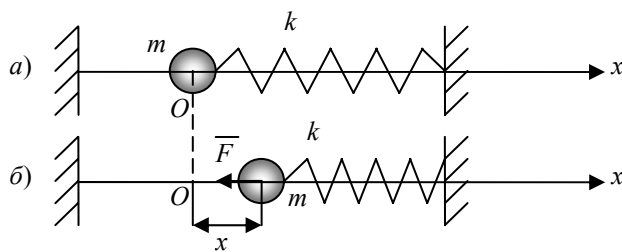


Рис. 1

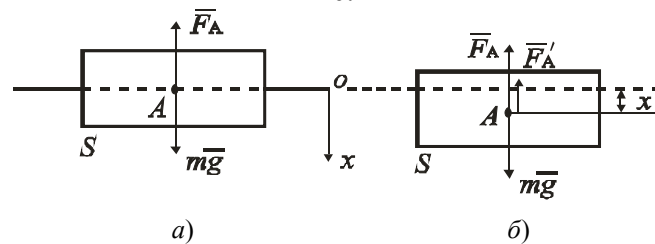


Рис. 2

Кроме восстанавливающих сил при колебательном движении действуют также силы сопротивления, зависящие от скорости. Это силы трения или силы сопротивления при движении тел в вязкой среде. На колеблющееся тело могут действовать возмущающие силы со стороны других тел, т.е. силы, которые являются заданными функциями времени.

Колебания, которые возникают в системе, не подверженной действию переменных внешних сил, называются *свободными*. Если в колебательной системе отсутствуют потери энергии, связанные с действием сил трения или вязкого трения, то колебания будут продолжаться бесконечно долго. Такие колебательные системы называются *идеальными*, а сами колебания собственными. В реальных колебательных системах всегда существуют потери энергии, обусловленные силами сопротивления, в результате чего колебания не могут продолжаться бесконечно долго, т.е. они являются *затухающими*.

2. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Исследуем более подробно колебания пружинного маятника, который состоит из материальной точки массой m и пружины жесткостью k . При отсутствии сил сопротивления (рис. 1, б) основное уравнение динамики для него в произвольный момент времени имеет вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0, \quad (2.1)$$

т.е. движение пружинного маятника описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Ниже покажем, что его решение имеет вид

$$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.2)$$

Данное уравнение называется *уравнением гармонических колебаний*. Исследуем его. Так как $\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ изменяется с течением времени от $+1$ до -1 , то величина мгновенного смещения x маятника от положения равновесия изменяется в пределах от $+x_m$ до $-x_m$. Максимальное смещение x_m маятника от положения равновесия называется *амплитудой колебаний*, которая зависит от начальных условий приведения маятника в колебание. Величина φ_0 называется *начальной фазой*, которая определяет смещение маятника от положения равновесия в начальный момент времени, т.е. $x_0 = x_m \sin \varphi_0$. Величина $(\omega t + \varphi_0)$ называется *фазой колебания*, которая определяет мгновенное смещение маятника в любой момент времени. Поскольку синус является периодической функцией с периодом 2π , то состояние системы повторяется через равные промежутки времени T . Следовательно, справедливо равенство

$$\sin[\omega_0(t+T) + \varphi_0] = \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + 2\pi),$$

откуда найдем

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.3)$$

где T – *период гармонических колебаний* – время, за которое совершается одно полное колебание. Учитывая, что период колебаний обратно пропорционален *частоте* ν , под которой понимается число полных колебаний, совершаемых системой за единицу времени $T = \frac{1}{\nu}$, получим

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \quad (2.4)$$

Величина ω_0 , показывающая число полных колебаний, совершаемых системой за 2π секунд, называется *круговой* или *циклической частотой*.

На основании изложенного уравнение гармонических колебаний может быть представлено в виде

$$x = x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) = x_m \sin(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

Временная диаграмма гармонических колебаний представлена на рис. 3, где $x_0 = x|_{t=0} = x_m \sin \varphi_0$ – смещение тела от положения равновесия в начальный момент времени.

Докажем, что выражение (2.2) является решением дифференциального уравнения (2.1). Для этого продифференцируем (2.2) по времени

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0); \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.6)$$

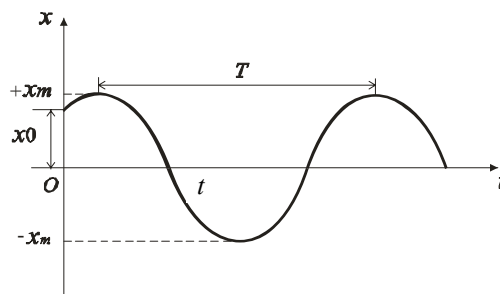


Рис. 3

Подставляя (2.2) и (2.6) в уравнение (2.1), после сокращения получим

$$-\omega_0^2 + \frac{k}{m} = 0.$$

Отсюда найдем значение круговой частоты для пружинного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.7)$$

На основании (2.3) и (2.4) получим

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{и} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.8)$$

Из полученных выражений следует, что период и частота колебаний пружинного маятника не зависят от начальных условий, а определяются параметрами колебательной системы: массой маятника и жесткостью пружины.

Выражения (2.5) и (2.6) можно использовать для анализа изменения скорости и ускорения при гармонических колебаниях. Мгновенная скорость равна

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_0 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = v_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.9)$$

где $v_m = \omega_0 x_m$ – максимальное значение мгновенной скорости.

Мгновенное ускорение

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.10)$$

где $a_m = \omega_0^2 x_m$ – амплитуда ускорения при гармонических колебаниях.

На рис. 4 графически представлено изменение смещения x , скорости v и ускорения a с течением времени при $\varphi_0 = 0$. Из сравнения

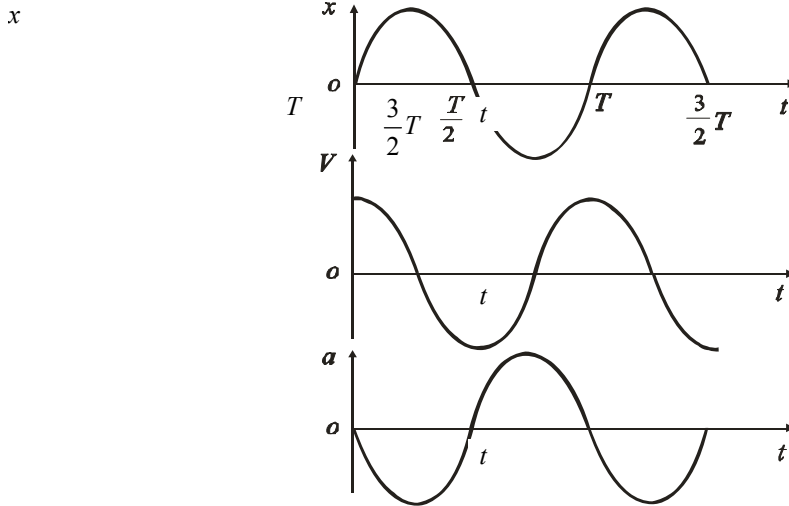


Рис. 4

графиков следует, что скорость опережает смещение на $\frac{\pi}{2}$; ускорение опережает скорость на $\frac{\pi}{2}$. Между мгновенным смещением и ускорением имеется разность фаз π . Другими словами, скорость колеблющейся точки максимальна в моменты прохождения ею положения равновесия ($x = 0$). При максимальных смещениях ($x = x_m$) скорость равна нулю. Ускорение колеблющейся точки равно нулю при прохождении точкой положения равновесия и достигает максимального значения при наибольших смещениях.

Колебательную систему принято характеризовать волновым сопротивлением ρ , которое определяется отношением амплитуды восстанавливающей силы к амплитуде скорости

$$\rho = \frac{F_m}{v_m}. \quad (2.11)$$

Для пружинного маятника имеем

$$\rho = \frac{kx_m}{\omega_0 x_m} = \sqrt{km}. \quad (2.12)$$

Динамическое состояние любой колебательной системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка, однозначно определяется двумя переменными: координатой x и скоростью v . Поэтому часто для качественного анализа возможных движений в системе с одной степенью свободы пользуются методом *фазовых диаграмм*, который заключается в следующем. На плоскости, называемой *фазовой плоскостью*, выбирают прямоугольную систему координат. По оси абсцисс откладывают мгновенное смещение x , а по оси ординат – мгновенную скорость v колебательной системы. Точка с координатами $(x; v)$ на фазовой плоскости, характеризующая состояние системы в данный момент времени, называется *изображающей точкой*. С течением времени изображающая точка описывает на фазовой плоскости некоторую кривую $f(x; v) = 0$, называемую *фазовой траекторией*.

Найдем уравнение фазовой траектории для гармонических колебаний. Пусть мгновенное смещение и мгновенная скорость колебаний маятника заданы уравнениями

$$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad v = v_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Чтобы найти уравнение фазовой траектории, необходимо из данных уравнений исключить время t . Перепишем их в виде

$$\frac{x^2}{x_m^2} = \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$\frac{v^2}{v_m^2} = \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Осуществив сложение этих выражений, получим уравнение фазовой траектории, которое представляет собой эллипс

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \frac{v^2}{v_m^2} = 1, \quad (2.13)$$

причем главные оси эллипса совпадают с осями координат (рис. 5).

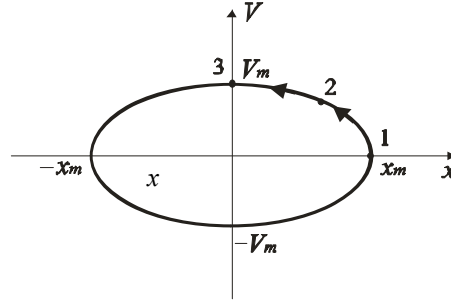


Рис. 5

Пусть в начальный момент времени $t = 0$, мгновенное смещение маятника максимально $x = x_m$. Изображающая точка 1 на фазовой диаграмме говорит о том, что в этот момент времени скорость $v = 0$. При $t > 0$ изображающая точка перемещается в положение 2 и далее, при $t = \frac{1}{4}T$ изображающая точка занимает положение 3. В этот момент $x = 0$, $v = v_m$. За время, равное периоду T колебаний, изображающая точка на фазовой траектории совершает один полный оборот. Анализируя фазовую траекторию, можно заметить, что скорость тела при гармонических колебаниях обращается в ноль при максимальных смещениях из положения равновесия $x = x_m$. При прохождении телом положения равновесия $x = 0$ величина мгновенной скорости приобретает максимальное значение, равное $v = v_m$.

В рассмотренном случае горизонтального пружинного маятника (рис. 1) сила тяжести не играет никакой роли в его колебательном движении. Если же пружинный маятник вертикален (рис. 6), то влияние силы тяжести скажется лишь на том, что положение равновесия, относительно которого происходят колебания, сместится на величину $x_{ст}$, которая определяет статическую величину деформации пружины под действием силы тяжести груза, т.е. $mg = kx_{ст}$. Если груз m сместить от положения равновесия на величину x , то на маятник будет действовать восстанавливающая сила, равная kx . При этом начало координат O на оси x совпадает с положением равновесия груза. Следовательно, уравнение движения маятника имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx,$$

что совпадает с формулой (2.1). Частота колебаний будет определяться формулой (2.2).

Рассмотрим вертикальные колебания груза массой m , который закреплен между двумя пружинами с жесткостью k_1 и k_2 (рис. 7, а). Начало оси координат x , т.е. точка O совпадает с положением равновесия груза. При отклонении тела по вертикали на расстояние x получим

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x = -k_{11}x,$$

так как обе силы упругости направлены к положению равновесия. Следова-

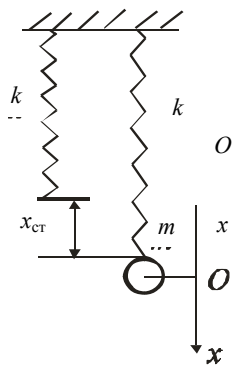


Рис. 6

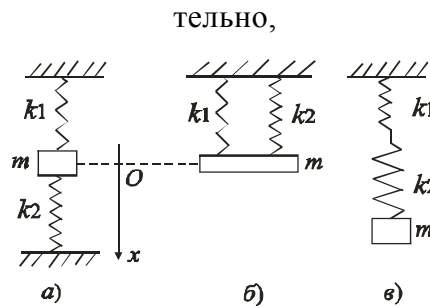


Рис. 7

эквивалентная жесткость таких «параллельно соединенных» пружин равна

$$k_{11} = k_1 + k_2 \quad (2.14)$$

и частота колебаний будет равна

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}, \quad (2.15)$$

а при равенстве жесткостей пружин $k_1 = k_2 = k$, получим

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{2k}{m}}. \quad (2.16)$$

Система, изображенная на рис. 7, б, также представляет собой «параллельно соединенные» пружины, так как при отклонении груза m от положения равновесия восстанавливающая сила при $k_1 = k_2 = k$ будет равна

$$F = -k_1x - k_2x = -2kx.$$

При «последовательном соединении» пружин (рис. 7, в) деформации пружин x_1 и x_2 не являются произвольными: их сумма равна смещению x от положения равновесия

$$x = x_1 + x_2.$$

Учитывая, что упругие силы пружин $f_1 = -k_1x_1$; $f_2 = -k_2x_2$ должны быть одинаковы ($f_1 = f_2 = f$), получим

$$x = -f \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = -\frac{f}{k_0}.$$

Следовательно, жесткость эквивалентной пружины, способной заменить две пружины, соединенные последовательно, равна

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \text{или} \quad k_0 = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}. \quad (2.17)$$

Поэтому частота колебаний маятника (рис. 7, в) равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1 + k_2)}}. \quad (2.18)$$

При $k_1 = k_2 = k$ получим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}. \quad (2.19)$$

Таким образом, $\omega_0 < \omega < \omega_{11}$, где под ω понимается частота при наличии одной пружины.

3. Энергия собственных гармонических колебаний

Колебательная система, состоящая из массивного шара и пружины, в произвольный момент времени характеризуется кинетической и потенциальной энергиями. Кинетическая энергия шара зависит от его мгновенной скорости и в соответствии с формулой (2.9) равна

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_m^2 \cos^2(\omega_0t + \varphi_0) \quad (3.1)$$

или

$$W_k = \frac{m\omega_0^2x_m^2}{4} [1 + \cos(2\omega_0t + 2\varphi_0)]. \quad (3.2)$$

Кинетическая энергия материальной точки при гармонических колебаниях периодически изменяется от 0 до $\frac{1}{2}m\omega_0^2x_m^2$, совершая колебания с циклической частотой $2\omega_0$ и амплитудой $\frac{m\omega_0^2x_m^2}{4}$ около среднего значения, равного $\frac{m\omega_0^2x_m^2}{4}$.

Потенциальная энергия деформированной пружины в соответствии с формулой (2.2) равна

$$W_{II} = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega_0t + \varphi_0) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_m^2 \sin^2(\omega_0t + \varphi_0) \quad (3.3)$$

или

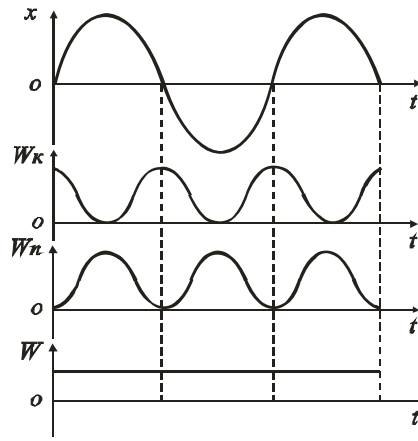


Рис. 8

$$W_n = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{4} [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)] = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{4} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0 + \pi)]. \quad (3.4)$$

Потенциальная энергия материальной точки периодически изменяется от 0 до $\frac{1}{2}m\omega_0^2 x_m^2$, совершая гармонические колебания с циклической частотой $2\omega_0$ и амплитудой $\frac{m\omega_0^2 x_m^2}{4}$ около среднего значения $\frac{m\omega_0^2 x_m^2}{4}$. Колебания потенциальной и кинетической энергии совершаются со сдвигом по фазе на π .

Так как в идеальной колебательной системе отсутствуют потери энергии, то ее полная энергия остается неизменной, в соответствии с законом сохранения механической энергии

$$W = W_k + W_n = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{2}.$$

На рис. 8 приведены графики для x , W_k , W_n , W .

4. Собственные колебания физического маятника и других колебательных систем

Физическим маятником называется любое тело, способное совершать колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси O , не проходящей через центр тяжести C тела (рис. 9).

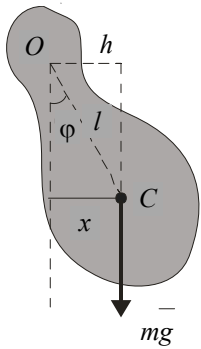


Рис. 9

Расстояние от центра масс маятника C до оси O обозначим через l . Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом φ . В произвольный момент времени на маятник массой m действует момент силы

$$M = -mgh = -mgl \sin \varphi,$$

который стремится возвратить маятник в положение равновесия. Закон динамики для вращательного движения маятника имеет вид $M = J_0 \varepsilon$, где $\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ – угловое ускорение, J_0 – момент инерции маятника относительно оси подвеса O . Следовательно, дифференциальное уравнение для колебаний физического маятника имеет вид

$$J_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi. \quad (4.1)$$

Для малых углов можно считать, что $\sin \varphi = \varphi$. После простых преобразований легко получить

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{J_0} \varphi = 0.$$

При малых углах отклонения маятника от положения равновесия можно считать, что угол φ пропорционален смещению x центра тяжести от положения равновесия. Вследствие этого можно записать

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{mgl}{J_0} x = 0.$$

Решением данного уравнения является гармоническая функция

$$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где круговая частота колебаний физического маятника определяется выражением

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J_0}}. \quad (4.2)$$

Математический маятник (рис. 10) можно рассматривать как предельный случай физического маятника. Если массивный шарик

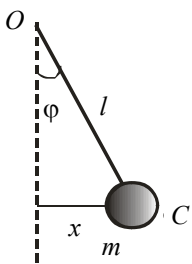


Рис. 10

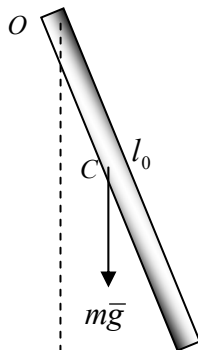


Рис. 11

представить материальной точкой, которая находится на расстоянии l от оси подвеса O , то его момент инерции относительно O равен

$$J_0 = ml^2.$$

Подставив (4.2) в (4.1) получим $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, а для периода колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.3)$$

В качестве примера рассмотрим физический маятник, представляющий собой стержень длиной l_0 , способный совершать колебания вокруг оси O , проходящей через один из его концов (рис. 11).

Учитывая, что расстояние от оси подвеса до центра масс данного маятника $l = \frac{l_0}{2}$, а его момент инерции $J_0 = \frac{1}{3}ml_0^2$ на основании (4.1) получим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l_0}} \text{ и } T = 2\pi\sqrt{\frac{2l_0}{3g}}. \quad (4.4)$$

Из изложенного следует, что период и частота гармонических колебаний не зависят от начальных условий, а определяются параметрами колебательной системы.

Рассмотрим несколько примеров механических колебательных систем.

1. Исследуем движение шарика массы m и радиуса ρ , катящегося без скольжения по желобу радиуса $R + \rho$, причем $R \gg \rho$ (рис. 12). При подъеме на высоту h шарик приобретает потенциальную энергию

$$W_{\text{п}} = mgh.$$

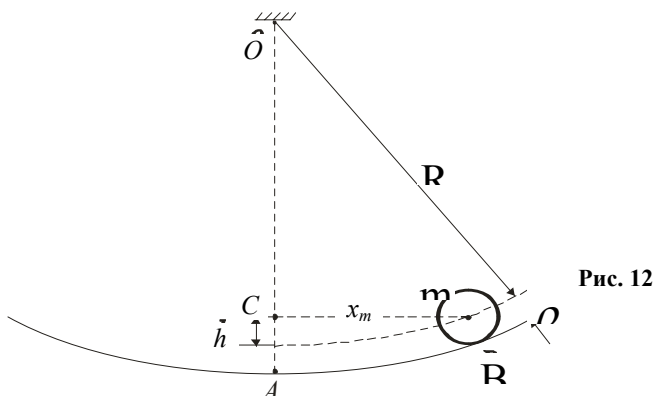


Рис. 12

При малом смещении шарика от положения равновесия можно считать, что амплитуда колебаний равна $x_m = CB$. Из треугольника OCB найдем

$$x_m^2 + (R - h)^2 = R^2.$$

Откуда получим

$$x_m^2 = 2Rh - h^2 \approx 2Rh,$$

т.е. $h = \frac{x_m^2}{2R}$. Поэтому

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} mg \frac{x_m^2}{R}. \quad (4.5)$$

Кинетическая энергия шарика при прохождении положения равновесия равна

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2} mv_m^2 + \frac{1}{2} J\Omega^2. \quad (4.6)$$

Линейная скорость шарика

$$v_m = \omega x_m = \Omega \rho, \quad (4.7)$$

где ω – частота колебаний шарика; Ω – угловая скорость вращения шарика вокруг его оси.

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2} m\omega^2 x_m^2 + \frac{1}{2} J \frac{\omega^2 x_m^2}{\rho^2}.$$

Учитывая, что момент инерции

$$W_{\text{к}} = \frac{7}{10} m\omega^2 x_m^2. \quad (4.8)$$

На основании закона сохранения шарика

$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{7R}} = 0,84\omega_0,$$

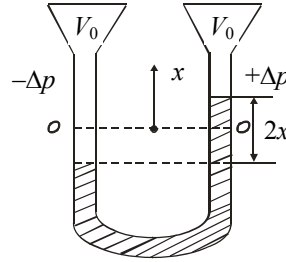


Рис. 13

шарика $J = \frac{2}{5} m\rho^2$, окончательно получим

энергии: $W_{\text{п}} = W_{\text{к}}$. Найдем частоту колебаний

$$(4.9)$$

где ω_0 – частота колебаний маятника, который получится, если подвесить шарик на нити длиной R и убрать желобок.

2. Рассмотрим колебания столба жидкости, заполняющей изогнутую трубку, заканчивающуюся большими резервуарами объема V_0 (рис. 13), содержащими идеальный газ при давлении P_0 . При смещении жидкости из положения равновесия, указанного пунктиром OO' , возникает восстанавливающая сила

$$F_x = -2S\Delta P - 2\rho g x S,$$

где S – сечение трубки; ρ – плотность жидкости.

Так как колебания довольно медленные, то процесс сжатия газа можно считать изотермическим

$$PV = \text{const}; \quad \Delta P = -\frac{P}{V} \Delta V \approx \frac{P_0}{V_0} Sx.$$

Следовательно, получим

$$F_x = -2Sx \left[\frac{P_0 S}{V_0} + \rho g \right] = -kx, \quad (4.10)$$

где

$$k = 2S \left[\frac{P_0 S}{V_0} + \rho g \right]. \quad (4.11)$$

Восстанавливающая сила действует на массу жидкости $m = \rho l S$, где l – длина столба жидкости (массой газа можно пренебречь). Получим следующее уравнение движения

$$\rho l S \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{glS} x = 0. \quad (4.12)$$

Частота колебаний жидкости будет равна

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \left(\frac{P_0 S}{V_0} + \rho g \right)}{\rho l}}. \quad (4.13)$$

При $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$; $P_0 = 10^5 \text{ Па}$; $S = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $V_0 = 10^{-3} \text{ м}^3$; $l = 1 \text{ м}$, получим: $\omega = 11 \text{ с}^{-1}$. При открытых концах трубки частота уменьшается до величины

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}} = 4,5 \text{ с}^{-1}.$$

3. Лодка, плавающая в спокойной воде, также представляет колебательную систему (рис. 14). В состоянии равновесия центр тяжести лодки лежит в точке C , точка приложения силы Архимеда – точка A . При случайном наклоне лодки ее центр тяжести C сохраняется, но центр приложения силы Архимеда смещается в точку A_1 . Возникающая пара сил создает вращающий момент

$$M = -F_A l \sin \varphi,$$

где $l = BC$. Данный момент сил стремится вернуть лодку в положение равновесия, если метациентр B лежит выше центра тяжести лодки. Учитывая, что $F_A = mg$, получим

$$M = -mgl \sin \varphi. \quad (4.14)$$

Уравнение движения лодки

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi.$$

При малых углах, найдем

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{J} \varphi = 0. \quad (4.15)$$

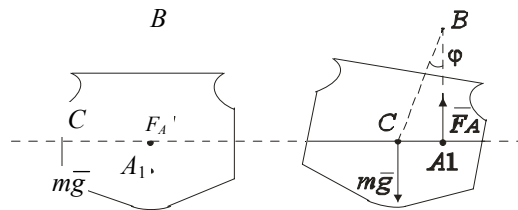


Рис. 14

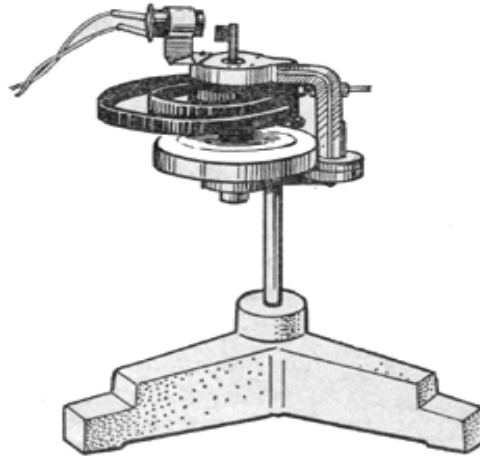


Рис. 15

Следовательно, бортовая качка лодки происходит с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}, \quad (4.16)$$

где J – момент инерции лодки относительно ее продольной оси. Если же наклоняется продольная ось лодки, то возникает килевая качка, которая анализируется аналогичным образом. Изменение объема погруженной части лодки создает дополнительную вертикальную силу и вертикальную качку.

4. В качестве еще одного примера гармонических колебаний рассмотрим так называемые *крутильные* или *торсионные* колебания. Их можно получить, используя спиральную пружину, соединенную одним концом с осью массивного диска, а другим – с неподвижной опорой (рис. 15). При повороте диска вокруг вертикальной оси на угол φ закручивающая пружина создает вращающий момент, который возвращает диск в положение равновесия. Но, продолжая вращаться, массивный диск закручивает пружину в обратном направлении. Далее процесс повторяется. При достаточно малых углах закручивания пружины можно считать, что момент силы упругости пропорционален углу поворота диска

$$M = -D\varphi, \quad (4.17)$$

где D – постоянная кручения пружины.

Уравнение движения маятника можно получить на основе закона динамики вращательного движения, согласно которому

$$J\varepsilon = M, \quad (4.18)$$

где J – момент инерции диска относительно оси вращения; ε – угловое ускорение диска. Так как $\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$, то с учетом формул (4.17) и (4.18) получим дифференциальное уравнение движения крутильного маятника

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D\varphi = 0,$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{J}\varphi = 0. \quad (4.19)$$

Полученное уравнение аналогично уравнению (4.1) для физического маятника. Следовательно, крутильные колебания являются гармоническими. Решение уравнения (4.19) может быть записано в виде

$$\varphi = \varphi_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (4.20)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$ – круговая частота собственных крутильных колебаний.

5. НЕГАРМОНИЧЕСКИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Примером негармонических механических колебаний является периодически повторяющееся падение мяча с некоторой высоты на горизонтальную поверхность, при котором удар является абсолютно упругим. При этом падение мяча на плоскость является ускоренным, а движение вверх – равнозамедленным, причем ускорение равно g – ускорению свободного падения.

На рис. 16 показаны временные диаграммы смещения, скорости и ускорения при негармонических колебаниях мяча. За начало координат принимается точка, соответствующая положению мяча в верхней точке, ось x целесообразно направить вниз по ходу движения мяча в начальный момент времени.

Как видно из рис. 16, *а*, при движении мяча вниз или вверх его координата изменяется пропорционально квадрату времени $x = \frac{1}{2}gt^2$ или $x = v_m t - \frac{gt^2}{2}$, что говорит о негармоническом характере данных колебаний. Из рис. 16, *б* следует, что при колебаниях мяча его мгновенная скорость изменяется прямо пропорционально времени: при движении вниз она возрастает по абсолютной величине $v = gt$, а при движении вверх убывает $v = v_m - gt$. Достигая нижней точки, мяч приобретает максимальную скорость v_m . Вследствие изменения направления движения при ударе скорость скачком изменяется от v_m до $-v_m$.

В выбранной системе отсчета ускорение имеет отрицательное значение при движении мяча. При переходе мячом нижней точки, вследствие изменения скорости от $-v_m$ до v_m за конечный промежуток времени Δt , ускорение становится положительной величиной: $a = \frac{v_m - (-v_m)}{\Delta t} = \frac{2v_m}{\Delta t} > 0$. Эти кратковременные импульсы ускорения отмечены на рис. 16, *в*.

Другим примером негармонических колебаний является известный маятник Максвелла (рис. 17), который представляет собой массивный маховик, подвешенный с помощью нитей за ось OO' радиуса R . Рассмотрим кратко теорию вопроса.

В произвольный момент времени сила тяжести создает вращающий момент относительно точки C равный $M = mgR$ (рис. 18). Согласно закону динамики для углового ускорения маховика имеем

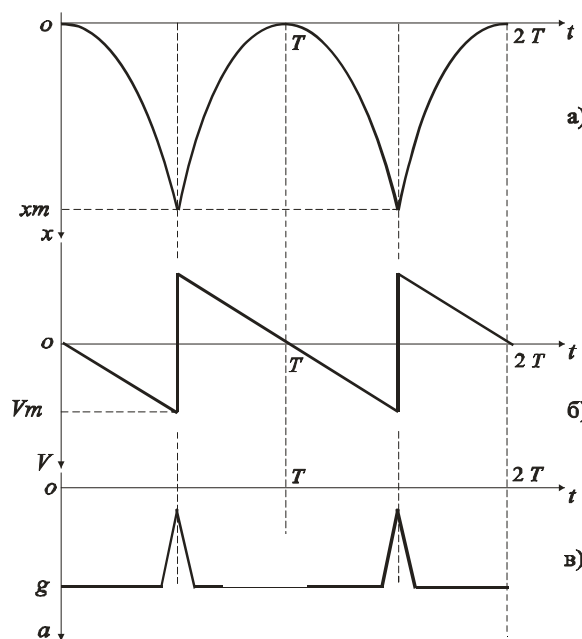


Рис. 16

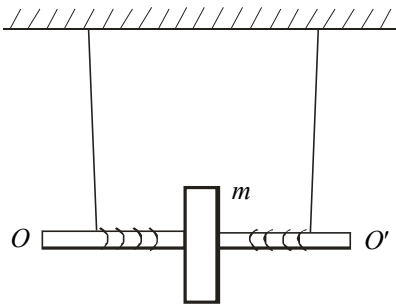


Рис. 17

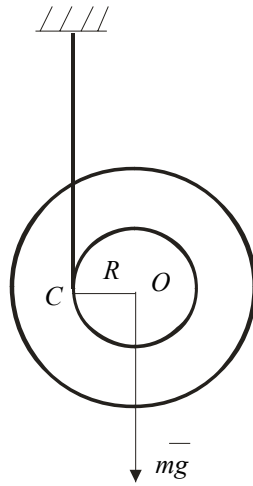


Рис. 18

$$\varepsilon = \frac{M}{J_C} = \frac{mgR}{J_C},$$

где J_C – момент инерции маховика относительно точки C .

По теореме Штейнера имеем

$$J_C = J_O + mR^2,$$

где J_O – момент инерции маховика относительно оси, проходящей через его центр масс O .

Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{mgR}{J_O + mR^2} = \frac{g}{R \left(1 + \frac{J_O}{mR^2} \right)}.$$

Угловое ускорение связано с тангенциальным ускорением точки C выражением $\varepsilon = \frac{a}{R}$. Приравнявая последние два выражения, найдем

$$a = \frac{g}{1 + \frac{J_O}{mR^2}}.$$

Таким образом, колебания маятника Максвелла являются негармоническими, так как они происходят при постоянном ускорении, как и при упругих периодических ударах мяча о поверхность. Отличие состоит лишь в величине ускорения.

6. Свободные колебания при наличии вязкого трения

Все реальные колебательные механические системы являются диссипативными, т.е. полная энергия такой системы постепенно расходуется, например, против сил трения. Поэтому реальные колебания не могут продолжаться бесконечно долго. Допустим, что на пружинный маятник кроме восстанавливающей силы $F_1 = -kx$ действует также линейная сила вязкого трения $F_2 = -rv = -r \frac{dx}{dt}$, которая зависит от мгновенной скорости v материальной точки, совершающей колебания, где r – коэффициент сопротивления. Знак минус в последнем выражении обусловлен тем, что векторы \vec{F}_2 и \vec{v} имеют противоположные направления.

Уравнение динамики имеет вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_1 + F_2 \quad \text{или} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -r \frac{dx}{dt} - kx.$$

После элементарных преобразований получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Введем обозначения:

$$\frac{r}{m} = 2\delta \quad \text{или} \quad \delta = \frac{r}{2m}, \quad (6.1)$$

где δ – принято называть коэффициентом затухания; $\frac{k}{m} = \omega_0^2$.

Заметим, что ω_0 представляет собой ту частоту, с которой совершались бы свободные колебания маятника при отсутствии сопротивления среды, т.е. при $r = 0$. Физический смысл величины δ выясним позже. С учетом введенных обозначений дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6.2)$$

Данное уравнение имеет различные решения в зависимости от величины сил сопротивления. Рассмотрим два основных случая.

1. Пусть коэффициент сопротивления r меньше удвоенного волнового сопротивления ρ , т.е. $r < 2\rho$. Учитывая выражения (2.12) и (6.1) получим $\delta < \omega_0$. Другими словами, мы рассматриваем случай малых сил сопротивления. При этих условиях решение дифференциального уравнения (6.2) может быть представлено в виде

$$x = x_{m_0} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (6.3)$$

которое называется *уравнением затухающих колебаний*, так как при $t \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$.

Частота затухающих колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \text{или} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2},$$

т.е. частота затухающих колебаний всегда меньше частоты собственных колебаний ($\omega < \omega_0$). Множитель $\sin(\omega t + \varphi_0)$ в выражении (6.3) имеет тот же физический смысл, что и в случае идеальных колебаний. Множитель $x_{m_0} e^{-\delta t}$ в (6.3) указывает на то, что мгновенная амплитуда реальных колебаний уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону

$$x_m = x_{m_0} e^{-\delta t}, \quad (6.4)$$

где x_{m_0} – амплитуда колебаний в начальный момент времени при $t = 0$ и $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Движение, описываемое уравнением (6.3), не является гармоническим, так как с течением времени последовательные максимальные отклонения точки от положения равновесия уменьшаются. Изобразим временную диаграмму затухающих колебаний. Построим вначале графики $x = x_{m_0} e^{-\delta t}$ и $x = -x_{m_0} e^{-\delta t}$ (рис. 19), а затем и график самой функции (6.3).

Таким образом, уравнение (6.3) можно рассматривать как периодическое движение с частотой ω и амплитудой, уменьшающейся по закону (6.4). Быстрота затухания определяется коэффициентом затухания δ . Выясним его физический смысл. Возьмем промежуток времени τ такой, что $\tau = \frac{1}{\delta}$. Тогда на основании (6.4) имеем

$$x_m = x_{m_0} e^{-1} = \frac{x_{m_0}}{e}.$$

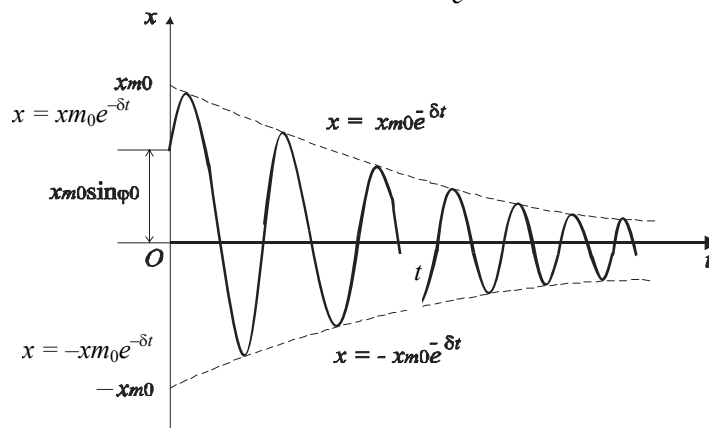


Рис. 19

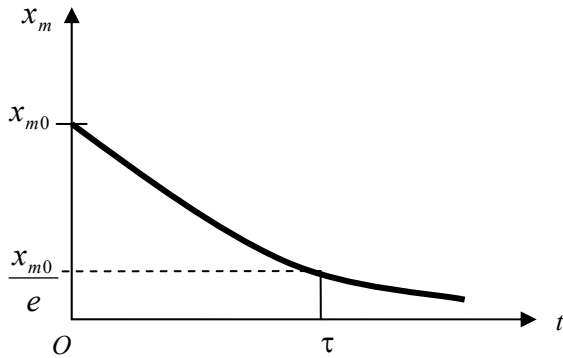


Рис. 20

Следовательно, обратная величина коэффициента затухания есть время, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз (рис. 20).

Найдем фазовую траекторию для затухающих колебаний.

Продифференцируем выражение (6.3) по времени

$$v = \frac{dx}{dt} \approx \omega x_m e^{-\delta t} \cos \omega t. \quad (6.5)$$

Исключив из уравнений (6.3) и (6.5) время t , получим

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \frac{v^2}{\omega^2 x_m^2} = e^{-2\delta t}.$$

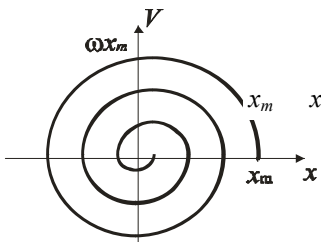


Рис. 21

Следовательно, фазовая диаграмма затухающих колебаний представляет собой спираль (рис. 21). Быстроту затухания принято характеризовать *логарифмическим декрементом затухания*, который численно равен натуральному логарифму отношения двух мгновенных амплитуд, отличающихся во времени на период $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\lambda = \ln \frac{x_{mt}}{x_{m(t+T)}}. \quad (6.6)$$

Другими словами, декремент затухания характеризует относительную убыль амплитуды затухающих колебаний за период. С учетом выражения (6.4) найдем

$$\lambda = \ln \frac{x_{m0} e^{-\delta t}}{x_{m0} e^{-\delta(t+T)}} = \ln e^{\delta T} = \delta T. \quad (6.7)$$

Учитывая то, что коэффициент затухания $\delta = \frac{1}{\tau}$, обратно пропорционален времени τ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз, найдем

$$\lambda = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \quad (6.8)$$

где N_e – число полных колебаний, совершив которые амплитуда уменьшается в e раз.

Для характеристики затухания колебательной системы часто применяется величина Q , называемая *добротностью*, которая определяет относительную убыль энергии за период, подобно тому, как декремент затухания определяет относительную убыль амплитуды.

Полный запас энергии системы в одном из положений наибольшего отклонения равен

$$W = \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-2\delta t}. \quad (6.9)$$

Работа против силы трения за период равна

$$A = \int_L \bar{F}_{mp} d\bar{l} = \int_0^T F_{mp} \dot{x} dt = - \int_0^T r \dot{x}^2 dt. \quad (6.10)$$

Если уравнение затухающих колебаний имеет вид

$$x = x_m e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

то мгновенная скорость примерно равна

$$\dot{x} = -\omega x_m e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Учитывая данное выражение, найдем

$$A = r\omega^2 x_m^2 e^{-2\delta t} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt = r\pi\omega^2 x_m^2 e^{-2\delta T}. \quad (6.11)$$

Найдем добротность

$$Q = 2\pi \frac{W}{A} = \frac{k}{r\omega} = \frac{\sqrt{km}}{r}. \quad (6.12)$$

Согласно формуле (6.1) $r = 2\delta m$, тогда

$$Q = \frac{\sqrt{km}}{2\delta m} = \frac{1}{2\delta} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega}{2\delta}.$$

Учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\delta = \frac{\lambda}{T}$, окончательно найдем

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (6.13)$$

Добротность обратно пропорциональна декременту затухания. Так как $\lambda = \frac{1}{N_e}$, то $Q = \pi N_e$.

Из определения добротности следует: чем больше затухание в системе (δ и λ), тем меньше время затухания τ и число колебаний N_e , совершив которые амплитуда уменьшается в e раз, и тем меньше величина добротности Q .

. Пусть коэффициент сопротивления больше удвоенного волнового сопротивления $r > 2r$ или $\delta > \omega_0$. Учитывая, что период затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$, то даже при $\delta \rightarrow \omega_0$, $T \rightarrow \infty$. Движение маятника перестает быть периодическим. Можно показать, что решение дифференциального уравнения (6.2) имеет вид

$$x = x_{m_0} t e^{-\delta t}.$$

Движение маятника носит *апериодический* характер, т.е. выведенный из положения равновесия маятник (при $t = 0: x = x_{m_0}$, $v = 0$) медленно возвращается в положение равновесия (рис. 22, а). Если такому

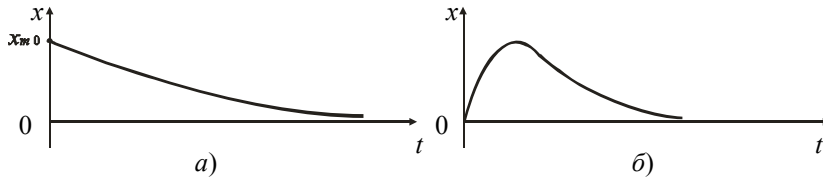


Рис. 22

маятнику, находящемуся в положении равновесия при $t = 0$ сообщить скорость, то его движение будет иметь вид, показанный на рис. 22, б. Апериодическое движение используется в различных успокоительных устройствах механических систем, где осуществляется так называемое *демпфирование*.

7. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ

Решение многих задач в теории колебаний значительно облегчается и становится более наглядным, если колебания изображать графически на плоскости в виде вращающихся векторов. Такой способ представления колебаний называется методом векторных диаграмм.

Пусть гармоническое колебание задано уравнением

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (7.1)$$

Проведем на плоскости прямую линию OP и построим вектор \vec{x}_m , численно равный амплитуде x_m и направленный из точки O под углом φ_0 к опорной линии OP (рис. 23).

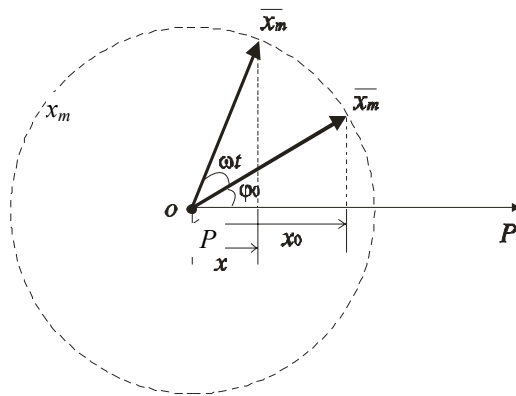


Рис. 23

Проекция вектора \bar{x}_m на опорную линию OP равна

$$x_0 = x_m \cos \varphi_0 = x|_{t=0},$$

т.е. равна мгновенному смещению точки от положения равновесия в начальный момент времени. Пусть вектор \bar{x}_m вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω . В произвольный момент времени t вектор \bar{x}_m займет положение, при котором его проекция на опорную линию OP равна

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0),$$

т.е. мы получили уравнение колебаний (7.1). Следовательно, при вращении вектора \bar{x}_m , равного амплитуде колебаний с частотой ω , его проекция на опорную линию изменится по гармоническому закону. Представление колебания в виде вращающегося вектора, проекция которого на опорную линию изменяется по гармоническому закону и составляет суть метода векторных диаграмм.

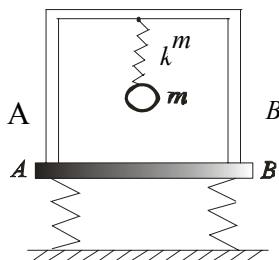
8. Сложение двух гармонических колебаний, направленных по одной прямой

Часто материальная точка участвует не в одном, а в нескольких гармонических колебаниях. Пусть имеется маятник m на пружине жесткостью k , установленный на опоре AB , которая сама может совершать колебания в том же направлении благодаря наличию двух пружин (рис. 24). Относительно неподвижной лабораторной системы отсчета маятник участвует в двух колебательных вертикальных движениях: относительно подставки AB и вместе с подставкой. Результирующее движение шарика будет складываться из колебаний подставки AB и колебаний шарика относительно последней.

Рассмотрим частный случай сложения однонаправленных колебаний одинаковых частот, т.е. колебания маятника и подставки имеют равные частоты, но произвольные амплитуды и начальные фазы

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{m_1} \cos(\omega_0 t + \varphi_1); \\ x_2 &= x_{m_2} \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Так как колебания совершаются вдоль от положения равновесия относительно



одной прямой, то мгновенное смещение маятника неподвижной системы отсчета

Рис. 24

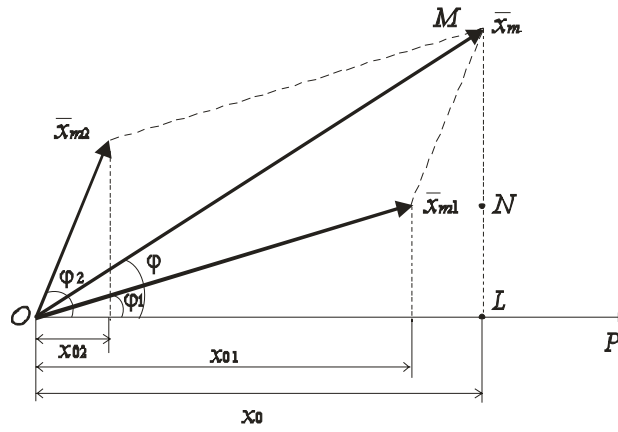


Рис. 25

равно $x = x_1 + x_2$. Предположим, что результирующее колебание маятника имеет вид

$$x = x_1 + x_2 = x_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где x_m – амплитуда результирующего колебания; ω – его круговая частота; φ – начальная фаза. Для нахождения этих величин воспользуемся методом векторных диаграмм (рис. 25). Построим векторную диаграмму двух колебаний (8.1) для момента времени $t = 0$.

Проекции векторов \bar{x}_{m_1} и \bar{x}_{m_2} на опорную линию определяют смещение маятника x_{01} и x_{02} при $t = 0$. Так как векторы \bar{x}_{m_1} и \bar{x}_{m_2} вращаются с одинаковой угловой скоростью ω_0 , то угол $(\varphi_2 - \varphi_1)$ между ними остается неизменным. Поэтому в любой момент времени результирующее колебание может быть изображено вектором

$$\bar{x}_m = \bar{x}_{m_1} + \bar{x}_{m_2},$$

вращающимся с той же частотой $\omega = \omega_0$. Проекция этого вектора на опорную линию равна результирующему смещению маятника в начальный момент времени

$$x_0 = x_{01} + x_{02}.$$

Учитывая, что все три вектора вращаются с одинаковой скоростью, легко понять, что проекции этих векторов на опорную линию связаны соотношением $x = x_1 + x_2$.

Следовательно, результирующее движение маятника описывается уравнением

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

С помощью векторной диаграммы без использования громоздких тригонометрических преобразований легко найти амплитуду результирующего колебания

$$x_m^2 = x_{m_1}^2 + x_{m_2}^2 + 2x_{m_1}x_{m_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (8.2)$$

Векторная диаграмма позволит определить и начальную фазу результирующего колебания

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{LN + NM}{x_{01} + x_{02}} = \frac{x_{m_1} \sin \varphi_1 + x_{m_2} \sin \varphi_2}{x_{m_1} \cos \varphi_1 + x_{m_2} \cos \varphi_2}. \quad (8.3)$$

Из выражения (8.2) следует, что результирующая амплитуда зависит не только от амплитуд складываемых колебаний, но и от их разности начальных фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$. Колебания одинаковых частот, разность начальных фаз которых постоянна или равна нулю, называются *когерентными*. Исследуем, как зависит амплитуда результирующего колебания от разности фаз.

1. Пусть разность фаз складываемых колебаний равна четному числу π :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi, \quad (8.4)$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, т.е. складываемые колебания синфазные. Для этого необходимо пружинный маятник (рис. 24) в начальный момент сместить от положения равновесия по отношению к подставке вниз на величину x_{m_1} и сместить саму подставку относительно неподвижной системы координат в том же направлении на величину x_{m_2} , а затем отпустить. Учитывая выражение (8.4), получим $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$. Следовательно, согласно формуле (8.2) найдем амплитуду результирующего колебания ника

$$x_m^2 = x_{m_1}^2 + x_{m_2}^2 + 2x_{m_1}x_{m_2} = (x_{m_1} + x_{m_2})^2 \quad \text{или} \quad x_m = x_{m_1} + x_{m_2}. \quad (8.5)$$

Таким образом, если разность фаз двух складываемых когерентных однонаправленных колебаний равна четному числу π , то амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых колебаний. На рис. 26 приведены графики колебаний x_1 и x_2 , а также временная диаграмма результирующего колебания x . На рис. 27 приведена векторная диаграмма сложения двух когерентных колебаний при $\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$.

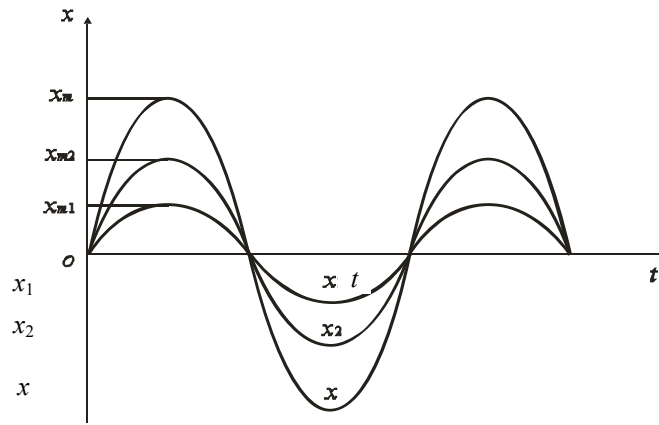


Рис. 26

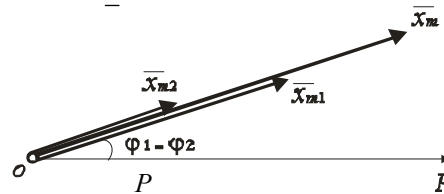


Рис. 27

2. Пусть разность фаз двух когерентных колебаний равна нечетному числу π :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (2n - 1)\pi, \quad (8.6)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$, т.е. складываемые колебания находятся в противофазе. Для этого необходимо пружинный маятник (рис. 24) в начальный момент сместить вниз по отношению к подставке на величину x_{m1} , а саму подставку сместить вверх относительно неподвижной системы координат на величину x_{m2} и отпустить. Учитывая выражение (8.6), получим $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$. Следовательно, согласно формуле (8.2) найдем амплитуду результирующего колебания маятника относительно неподвижной системы отсчета

$$x_m^2 = x_{m1}^2 + x_{m2}^2 - 2x_{m1}x_{m2} = |x_{m1} - x_{m2}|^2 \quad \text{или} \quad x_m = |x_{m1} - x_{m2}|. \quad (8.7)$$

В частном случае при $x_{m1} = x_{m2}$ имеем $x_m = 0$. Таким образом, если разность фаз двух когерентных однонаправленных колебаний равна нечетному числу π , то амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний. На рис. 28 показаны временные диаграммы колебаний x_1 , x_2 и x .

На рис. 29 показана векторная диаграмма всех трех колебаний.

Таким образом, в зависимости от разности фаз двух когерентных колебаний амплитуда результирующего колебания может быть заключена в пределах

$$|x_{m1} - x_{m2}| \leq x_m \leq |x_{m1} + x_{m2}|.$$

в частном случае при $x_{m1} = x_{m2}$ имеем $0 \leq x_m \leq 2x_{m1}$. Учитывая, что энергии когерентных колебаний пропорциональны соответствующим амплитудам: $W_1 \sim x_{m1}^2$, $W_2 \sim x_{m2}^2$, на основании формулы (8.2) найдем энергию результирующего колебания

$$W = W_1 + W_2 + 2\sqrt{W_1W_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (8.8)$$

которая также зависит от разности начальных фаз складываемых колебаний.

а) Пусть $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$, тогда $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$. Следовательно, энергия результирующего колебания $W = W_1 + W_2 + 2\sqrt{W_1W_2}$ будет больше суммы энергий складываемых колебаний, т.е. $W > W_1 + W_2$.

б) Пусть $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n - 1)\pi$, тогда $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$. Следовательно, энергия результирующего колебания $W = W_1 + W_2 - 2\sqrt{W_1W_2}$ будет меньше суммы энергий складываемых колебаний, т.е. $W < W_1 + W_2$.

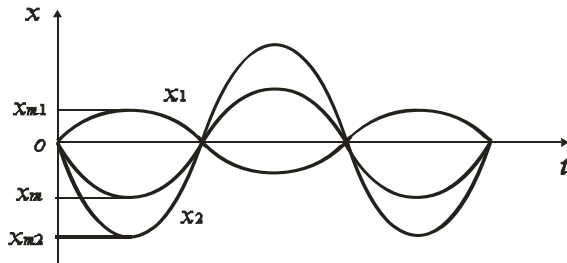


Рис. 28

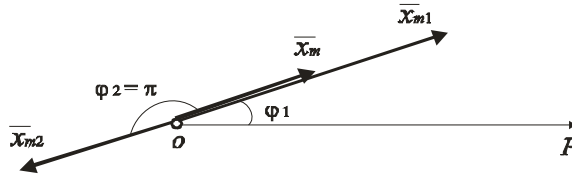


Рис. 29

Рассмотрим случай сложения двух колебаний, направленных по одной прямой, но незначительно отличающихся по частоте. Такие колебания будут некогерентными. Колебания шарика (см. рис. 24) относительно подставки совершаются с частотой ω , а колебания подставки с частотой $(\omega + \Delta\omega)$:

$$x_1 = x_{m1} \cos \omega t;$$

$$x_2 = x_{m2} \cos(\omega + \Delta\omega)t. \quad (8.9)$$

Для простоты будем считать, что $x_{m1} = x_{m2} = x_m$. Дадим анализ сложения указанных колебаний на основе векторной диаграммы (рис. 30). Пусть в начальный момент времени векторы \bar{x}_{m1} и \bar{x}_{m2} совпадают по фазе и амплитуда результирующего бания максимальна и равна

$$x_p = x_{m1} + x_{m2} = 2x_m.$$

Вектор \bar{x}_p при $t = 0$ совпадает с опорной линией. В силу того, что частоты складываемых колебаний различны, то векторы \bar{x}_{m1} и \bar{x}_{m2} рассматриваемых колебаний на векторной диаграмме вращаются с различной скоростью, поэтому результирующая амплитуда x_p с течением времени будет уменьшаться. Наступит такой момент, когда разность фаз между колебаниями будет равна $\varphi = \pi$ и результирующая амплитуда будет равна $x_p = x_{m1} - x_{m2} = 0$. Далее разность фаз между рассматриваемыми колебаниями будет возрастать до $\varphi = 2\pi$ и амплитуда результирующего колебания снова будет равна $x_{p0} = 2x_{m0}$. Далее изменение результирующей амплитуды будет повторяться. Такое периодическое изменение амплитуды результирующего колебания при сложении колебаний с близкими частотами называются *биениями*.

Временную диаграмму биений можно получить теоретически сложив уравнения (8.9)

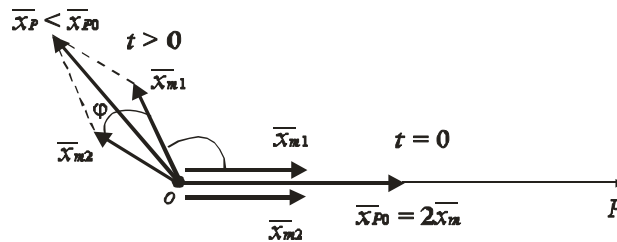


Рис. 30

$$x = x_1 + x_2 = 2x_m \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \omega t.$$

Это уравнение можно рассматривать как колебание с частотой ω , у которого амплитуда $\left(2x_m \cos \frac{\Delta\omega}{2} t\right)$ периодически изменяется с течением времени (рис. 31). Период биений равен $T_6 = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

Согласно векторной диаграмме (см. рис. 24) результирующая амплитуда при сложении колебаний с близкими частотами может быть найден аналитически в любой момент времени по формуле (8.2), а энергия по формуле (8.8). Однако, так как разность фаз $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ между складываемыми колебаниями периодически изменяется, то и энергия результирующего колебания периодически изменяется с частотой $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_6}$. Для нахождения амплитуды результирующего колебания двух некогерентных колебаний усредним значение косинуса за достаточно большой промежуток времени: $\overline{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 0$. На основании (8.8) найдем

$$W = W_1 + W_2 + 2\sqrt{W_1 W_2} \overline{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = W_1 + W_2.$$

Следовательно, энергия результирующего колебания при сложении двух некогерентных колебаний за достаточно большой промежуток времени равна сумме энергий складываемых колебаний.

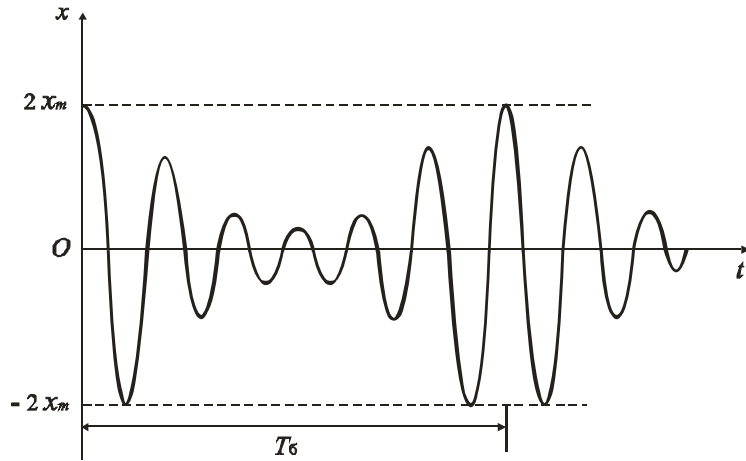


Рис. 31

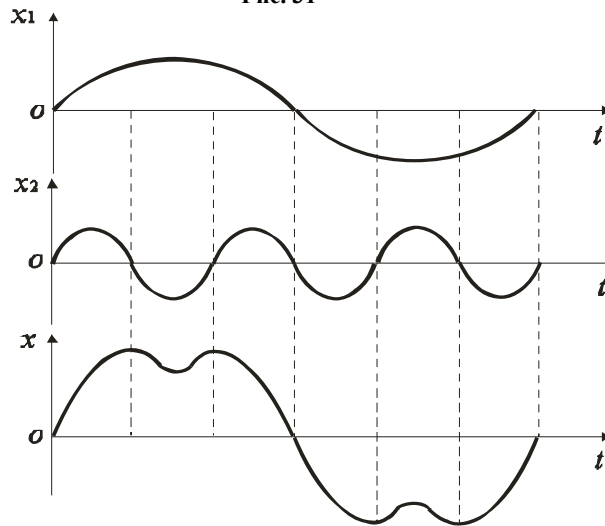


Рис. 32

Рассмотрим еще один случай сложения однонаправленных колебаний с кратными частотами, например $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = 3\omega$. На рис. 32 показаны временные диаграммы этих колебаний и построение результирующего колебания

$$x = x_1 + x_2 = x_{m1} \sin \omega t + x_{m2} \sin 3\omega t .$$

Легко видеть, что при сложении гармонических колебаний с кратными частотами образуется негармоническое, но периодическое колебание. Справедлива обратная теорема: любое негармоническое периодическое колебание может быть представлено как сумма гармонических колебаний с кратными частотами (теорема Фурье).

9. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний

Существует ряд явлений, при которых тело может участвовать одновременно в двух колебаниях, совершающихся по взаимно перпендикулярным направлениям. Например, пусть математический маятник (массивный шар, подвешенный на нити) совершает колебания вдоль оси x . Если во время движения шара ударить его киянкой в направлении, перпендикулярном к оси x , то в зависимости от момента удара и его величины маятник в плоскости xOy может описывать прямую линию, эллипс или окружность.

Рассмотрим сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, но различных амплитуд x_m и y_m . Допустим, что рассматриваемые колебания имеют разность начальных фаз δ , т.е.

$$x = x_m \sin \omega t ; \tag{9.1}$$

$$y = y_m \sin(\omega t + \delta) . \tag{9.2}$$

Для нахождения траектории движения маятника в плоскости xOy исключим из данных уравнений время t . Из выражения (9.2) найдем

$$\frac{y}{y_m} = \sin \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \delta. \quad (9.3)$$

Из формулы (9.1) найдем

$$\sin \omega t = \frac{x}{x_m}; \quad \cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_m^2}}.$$

Подставив эти величины в выражение (9.3), получим

$$\frac{y}{y_m} = \frac{x}{x_m} \cos \delta + \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_m^2}} \sin \delta \quad \text{или} \quad \frac{y}{y_m} - \frac{x}{x_m} \cos \delta = \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_m^2}} \sin \delta.$$

Возведя данное выражение в квадрат, найдем уравнение траектории

$$\frac{x^2}{x_m^2} - 2 \frac{xy}{x_m y_m} \cos \delta + \frac{y^2}{y_m^2} = \sin^2 \delta. \quad (9.4)$$

Данное выражение является неканоническим уравнением эллипса. При этом главные полуоси эллипса не совпадают с осями координат. Рассмотрим некоторые частные случаи сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковых частот.

а) Пусть разность фаз складываемых колебаний $\delta = 0$. Тогда из уравнения (9.4) получим

$$\left(\frac{x}{x_m} - \frac{y}{y_m} \right)^2 = 0 \quad \text{или} \quad y = \frac{y_m}{x_m} x,$$

т.е. траектория результирующего движения является прямой линией (рис. 33, а). При этом угол наклона траектории к оси x равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_m}{x_m}.$$

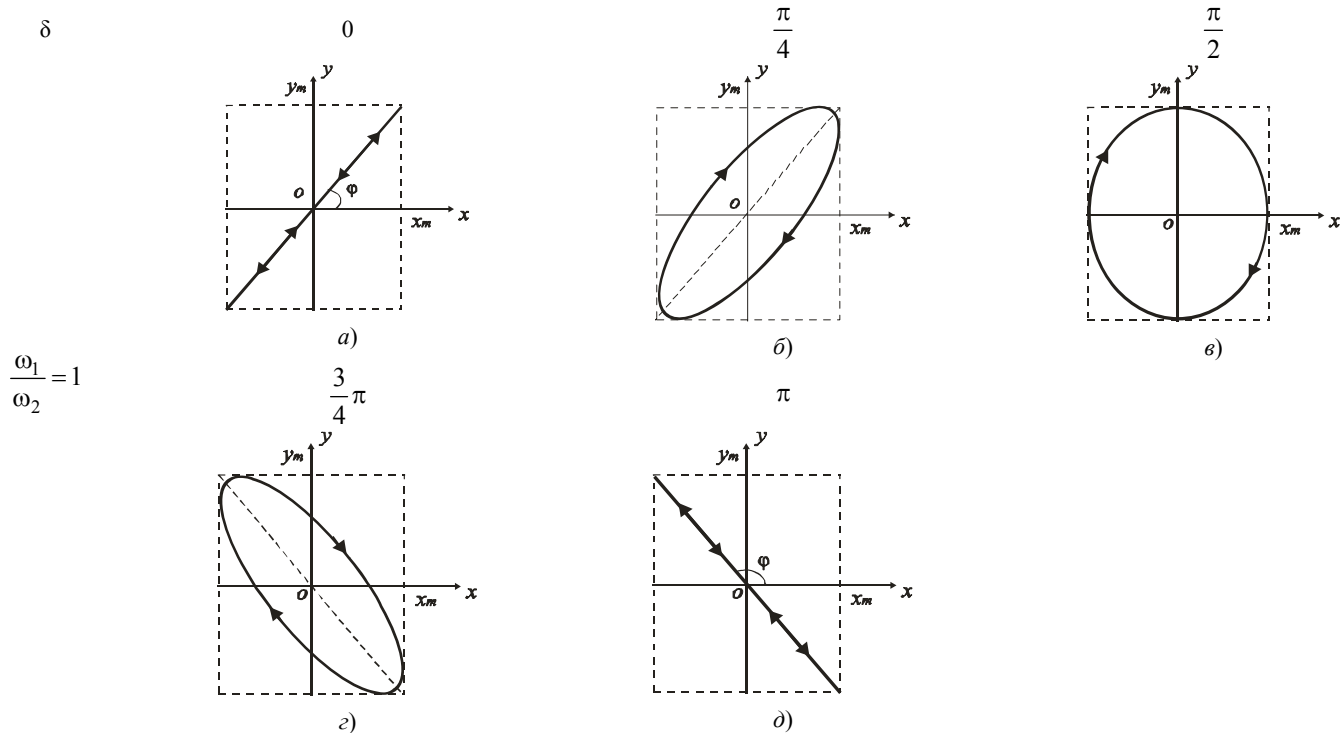


Рис. 33

Если $y_m = x_m$, то $\varphi = 45^\circ$. Чтобы наблюдать данный случай экспериментально, необходимо шар математического маятника, движущегося по оси x ударить киянкой в направлении, перпендикулярном скорости, когда он проходит положение равновесия.

б) Пусть разность фаз взаимно перпендикулярных колебаний $\delta = \frac{\pi}{4}$. Из уравнения (9.4) получим

$$\frac{x^2}{x_m^2} - \sqrt{2} \frac{xy}{x_m y_m} + \frac{y^2}{y_m^2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, уравнение движения маятника представляет собой эллипс (рис. 33, б), полуоси которого не совпадают с осями координат. Для экспериментального наблюдения данного явления необходимо осуществить удар перпендикулярно к его движению в момент, когда смещение x маятника удовлетворяет условию $0 < x < x_m$.

в) Допустим, что $\delta = \frac{\pi}{2}$. Из выражения (9.4) получим

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \frac{y^2}{y_m^2} = 1,$$

т.е. уравнение траектории представляет собой эллипс, главные полуоси которого совпадают с осями координат и равны соответственно x_m и y_m (рис. 33, в). Если будет справедливо дополнительное условие равенства амплитуд складываемых колебаний $x_m = y_m$, то траектория будет представлять собой окружность. Для наблюдения этого явления опытным путем необходимо удар осуществить в момент, когда маятник имеет максимальное смещение от положения равновесия.

г) При $\delta = \frac{3}{4}\pi$ уравнение траектории имеет вид (рис. 33, з)

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \sqrt{2} \frac{xy}{x_m y_m} + \frac{y^2}{y_m^2} = \frac{1}{2}.$$

д) При $\delta = \pi$ из (9.4) получим

$$\left(\frac{x}{x_m} + \frac{y}{y_m} \right)^2 = 0 \quad \text{или} \quad y = -\frac{y_m}{x_m} x.$$

Траектория движения вырождается в прямую линию (рис. 33, д), причем $\text{tg}\varphi = -\frac{y_m}{x_m}$. В частном случае при $x_m = y_m$ $\varphi = 135^\circ$. Можно показать, что при $\delta = \frac{5}{4}\pi$ траектория будет такой же, что и при $\delta = \frac{3}{4}\pi$, но направление обхода будет противоположным. При $\delta = \frac{3}{2}\pi$ траектория аналогична той, что и при $\delta = \frac{\pi}{2}$. При $\delta = 2\pi$ траектория аналогична той, что и при $\delta = 0$. Далее все будет повторяться. Таким образом, при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковых частот образуется результирующее движение по эллипсу, который может вырождаться в окружность или прямую линию.

При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний кратных частот получаются более сложные траектории результирующего движения, которые называют фигурами Лиссажу. Пусть имеются два колебания с частотами ω и 2ω :

$$x = x_m \cos 2\omega t; \quad (9.5)$$

$$y = y_m \cos \omega t. \quad (9.6)$$

Последнее выражение можно представить в виде $y = y_m \sqrt{\frac{1 + \cos 2\omega t}{2}}$, откуда найдем

$$2y^2 - y_m^2 = y_m^2 \cos 2\omega t. \quad (9.7)$$

Разделив (9.7) на (9.5), получим:

$$\frac{2y^2 - y_m^2}{x} = \frac{y_m^2}{x_m} \quad \text{или} \quad 2x_m y^2 - y_m x^2 = y_m^2 x_m.$$

Это – уравнение параболы.

10. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Под *вынужденными колебаниями* понимают колебания, возникающие в какой-либо системе под действием переменной внешней силы. Это, например, могут быть колебания механической конструкции под действием переменной нагрузки, колебания мембраны телефона под действием переменного магнитного поля и т.д.

Для экспериментального исследования вынужденных колебаний можно использовать установку (рис. 34), состоящую из двух маятников:

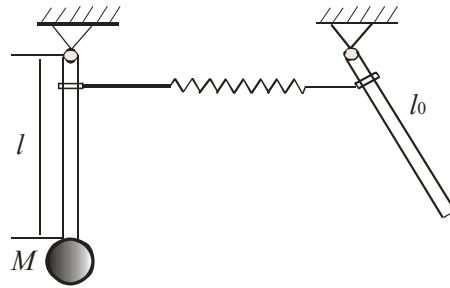


Рис. 34

ведущего с массивным грузом M и ведомого, выполненного в виде легкого стержня длиной l_0 . Маятники вблизи точек подвеса соединены легкой пружиной с малой жесткостью. Маятник с массивным грузом имеет достаточно большую добротность, и время его затухания составляет несколько минут. Ведомый маятник обладает малой добротностью, и время его затухания составляет несколько секунд. Ведомый маятник имеет постоянную собственную частоту колебаний, которая определяется формулой (4.4)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l_0}}. \quad (10.1)$$

Частота же колебаний ведущего маятника может изменяться благодаря перемещению груза, т.е. изменению его длины l .

Если ведущему маятнику предоставить совершать свободные колебания, то благодаря слабой связи ведомый маятник совершает вынужденные колебания под действием внешней периодической силы. Следует отметить, что в начальный момент времени вынужденные колебания происходят с периодически изменяющейся амплитудой, а затем становятся устойчивыми и амплитуда остается неизменной. Объясняется это тем, что в начальный момент времени колебания ведомого маятника складываются из собственных колебаний частоты ω_0 и вынужденных колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (10.2)$$

Если разность этих частот невелика, то результирующее движение ведомого маятника в начальный момент представляет собой биения. Но так как собственные колебания ведомого маятника достаточно быстро затухают, то в последующем вынужденные колебания становятся устойчивыми и имеют постоянную амплитуду.

Исследуем, как зависит амплитуда вынужденных установившихся колебаний от частоты вынуждающей силы.

а) Устанавливают груз M ведущего маятника на максимальном расстоянии l от оси подвеса, т.е. $l \geq l_0$. Согласно формулам (10.1) и (10.2) частота вынуждающей силы будет меньше собственной частоты колебаний ведомого маятника ($\omega < \omega_0$). Из опыта следует, что амплитуда вынужденных колебаний ведомого маятника невелика и составит не более 20° . При этом фазы колебаний маятников совпадают, т.е. фаза вынужденных колебаний совпадает по фазе с вынуждающей силой.

б) Устанавливают груз M ведущего маятника на минимальном расстоянии от оси подвеса. Так как $l \ll l_0$, то частота внешней периодической силы будет больше собственной частоты колебаний ведомого маятника ($\omega > \omega_0$). Наблюдая за установившимися колебаниями маятника, отмечают, что их амплитуда невелика, но маятники совершают колебания в противофазе. Следовательно, вынужденные колебания отстают по фазе от изменения внешней силы на π .

в) Устанавливают груз M ведущего маятника на расстоянии $l = \frac{2}{3}l_0$ от оси подвеса. В этом случае частота внешней периодической силы будет совпадать с собственной частотой ведомого маятника. Из опыта следует, что амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения. При этом вынужденные колебания отстают по фазе от изменения внешней силы на $\frac{\pi}{2}$.

Теоретический анализ вынужденных колебаний дадим на примере рассмотрения пружинного маятника, на который кроме силы упругости $F_1 = -kx$ и силы вязкого трения $F_2 = -rv$ действует еще внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону

$$F = F_0 \sin \omega t. \quad (10.3)$$

Дифференциальное уравнение движения маятника имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin \omega t \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (10.4)$$

Учитывая, что $\frac{r}{2m} = \delta$ и $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (10.5)$$

Решение этого уравнения в установившемся режиме будет иметь вид

$$x = x_m \sin(\omega t - \varphi), \quad (10.6)$$

где x_m – амплитуда вынужденных колебаний; ω – частота вынужденных колебаний; φ – разность фаз между мгновенным смещением вынужденных колебаний и периодической силы (10.3).

Убедимся в правильности выбранного решения. Для этого продифференцируем выражение (10.6) по времени

$$\frac{dx}{dt} = \omega x_m \cos(\omega t - \varphi) = \omega x_m \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Подставляя это выражение в уравнение (10.5), получим

$$(\omega_0^2 - \omega^2) x_m \sin(\omega t - \varphi) + 2\delta\omega x_m \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t.$$

Для анализа этого тождества воспользуемся векторной диаграммой (рис. 35). На основании теоремы Пифагора получим

$$\frac{F_0^2}{m^2} = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 x_m^2 + 4\delta^2 \omega^2 x_m^2 \quad \text{или} \quad \frac{F_0^2}{m^2} = [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2] x_m^2.$$

Откуда найдем амплитуду вынужденных колебаний

$$x_m = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \quad (10.7)$$

а также фазу

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (10.8)$$

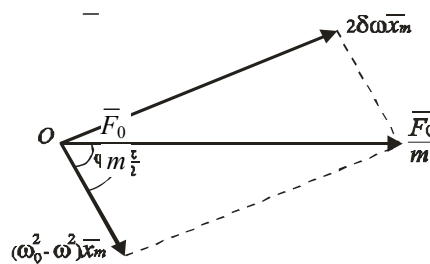


Рис. 35

Из формулы (10.7) следует, что при $\omega \rightarrow 0$, $x_{m0} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ – это статическое отклонение точки от положения равновесия под действием амплитуды силы F_0 . При $\omega \rightarrow \infty$ имеем $x_m \rightarrow 0$. При $\omega = \omega_0$ имеет место резонанс

$$x_{mp} = \frac{F_0}{2\delta\omega_0}.$$

На рис. 36 показана зависимость амплитуды вынужденных колебаний x_m от частоты ω вынуждающей силы. При увеличении добротности колебательной системы $Q_2 > Q_1$ резонанс проявляется более отчетливо и с большей амплитудой x_{mp} .

На рис. 37 показана теоретическая зависимость фазы φ вынужденных колебаний от частоты ω вынуждающей силы, которая следует из формулы (10.8). Из рисунка следует, что при $\omega \rightarrow 0$ фаза вынужденных колебаний $\varphi = 0$; при $\omega \rightarrow \infty$ $\varphi = \pi$, а при резонансе $\omega = \omega_0$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, что подтверждается экспериментально.

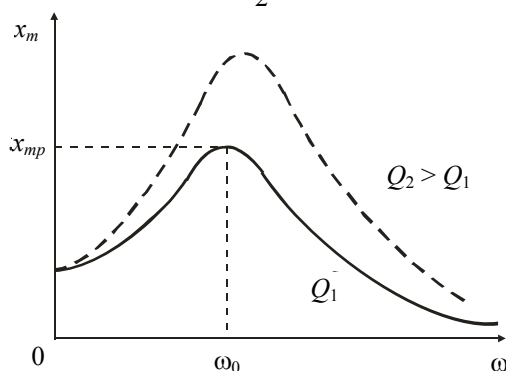


Рис. 36

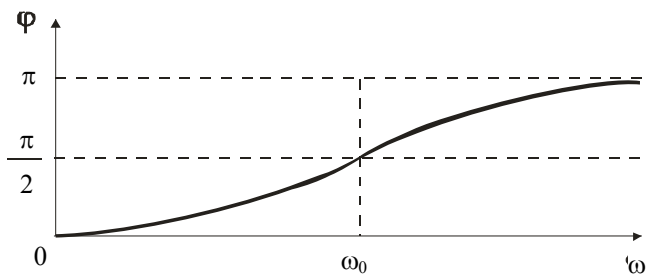


Рис. 37

11. МЕХАНИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ

К автоколебательным системам относится широкий класс устройств различной физической природы: от простейших часовых механизмов до оптических квантовых генераторов (лазеров). Проблема состоит в том, чтобы получить незатухающие колебания. Свободные незатухающие колебания могут существовать лишь в системах, где отсутствуют потери энергии. Но в природе таких идеальных систем нет. Очевидно, для того чтобы колебания, например, математического маятника были незатухающими, его необходимо периодически подталкивать, т.е. сообщать ему некоторые порции энергии для компенсации потерь на трение. При этом направление толчков должно совпадать с направлением движения маятника в момент создания толчка. Для того, чтобы колебания маятника меньше отличались от гармонических, подталкивания необходимо производить один или два раза за период. Очевидно, чтобы колебания маятника были незатухающими, т.е. имели постоянную амплитуду, необходимо, чтобы порции энергии, поступающие к маятнику за время, равное периоду колебаний, были равны потерям энергии за тот же промежуток времени.

Таким образом, для получения незатухающих колебаний необходимо выполнение двух условий: 1) порции энергии, поступающие от источника энергии к колебательной системе, полностью компенсировали потери энергии в ней за тот же промежуток времени (условие баланса амплитуд); 2) моменты поступления порций энергии в колебательную систему были согласованы с колебаниями самой системы (условие баланса фаз). Устройство, с помощью которого получают незатухающие колебания, характеризуется тем, что колебательная система с потерями, входящая в это устройство, «самостоятельно», т.е. автоматически управляет процессом поступления энергии от источника к самой системе в узком смысле этого слова. Поэтому подобные устройства называют *автоколебательными*. Автоматическое поступление порций энергии, которые регламентированы по величине и согласованы с колебаниями самой системы, достигается использованием специальных регуляторов или клапанов.

Рассмотрим работу часового механизма. Его основными элементами являются: 1) колебательная система, обладающая потерями энергии – маятник; 2) источник энергии – груз, поднятый над землей, приводящий во вращение храповое колесо; 3) устройство, регулирующее поступление энергии от вращающегося храпового колеса к маятнику – анкер (рис. 38). Рычаги анкера жестко скреплены с маятником. Благодаря этому при колебаниях маятника поверхности *a* и *b* скосов анкера периодически входят в зацепление с зубьями храпового колеса, т.е. маятник самостоятельно управляет положением поверхностей *a* и *b* скосов анкера по отношению к зубьям колеса.

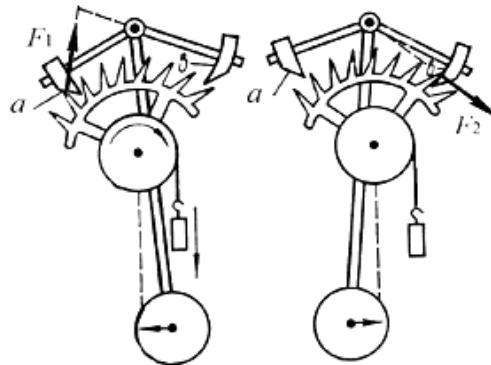


Рис. 38

В первый полупериод, когда маятник движется влево (рис. 38, *a*), зуб храпового колеса давит с силой \vec{F}_1 перпендикулярно к поверхности *a* скоса анкера. Так как момент силы \vec{F}_1 относительно оси подвеса маятника отличается от нуля, то в течение первого полупериода колебаний зуб колеса, проскальзывая по поверхности *a* скоса анкера, поднимает его вверх и тем самым подталкивает маятник по ходу движения. Во второй полупериод, когда маятник движется вправо (рис. 38, *b*) в зацепление с зубом храпового колеса входит поверхность *b* анкера. Но эта поверхность является цилиндрической, ось которой совпадает с осью подвеса маятника. Так как линия действия силы \vec{F}_2 , действующая со стороны зуба колеса на поверхность анкера, проходит через ось подвеса маятника, то ее вращающий момент относительно оси равен нулю. Следовательно, если отвлечься от трения между зубом храпового колеса и поверхностью *b* анкера, то маятник в течение второго полупериода колебаний движется свободно и энергия ему не сообщается, груз и храповое колесо при этом находятся в покое.

Таким образом, маятник, управляя анкером, один раз за период получает энергию, открывая и закрывая в нужный момент доступ энергии от храпового колеса, которое приводится в движение грузом.

Проведенный анализ работы часового механизма является приближенным. Во-первых, момент силы \vec{F}_1 , действующей на маятник со стороны храпового колеса, в первый полупериод не является постоянным. Этот момент силы нелинейно зависит от угла поворота маятника, вследствие чего за каждый период колебаний маятника на него действует один кратковременный толчок в направлении движения. Во-вторых, при движении маятника во второй полупериод зуб храпового колеса, проскальзывая

по поверхности b анкера, создает дополнительное трение, а следовательно и дополнительные потери по сравнению со свободными колебаниями.

Другим примером механической автоколебательной системы является маятник Фроуда, представляющий собой физический маятник, жестко скрепленный с кольцевой муфтой, свободно насаженной на равномерно вращающийся вал (рис. 39).

Между муфтой маятника и валом необходимо создать условия существования сухого трения. При неподвижном вале колебания маятника быстро затухают. Однако, если частота вращения вала Ω равна собственной частоте ω_0 колебаний маятника, то его колебания становятся незатухающими, т.е. система становится автоколебательной. Дадим элементарное объяснение возникновения автоколебаний. Линейная скорость V_0 точек поверхности вала относительно неподвижной системы отсчета постоянна. Муфта маятника совершает колебания вместе с ним, поэтому скорость любой точки поверхности муфты маятника относительно той же системы отсчета изменяется с течением времени по гармоническому закону: скорость v точек трущихся поверхностей муфты равна нулю при максимальном отклонении маятника от положения равновесия; скорость v максимальна при прохождении маятником положения равновесия. Мгновенная скорость муфты изменяется не только по величине, но и по направлению. В первый полупериод, когда маятник движется влево (рис. 40, а), а муфта вращается навстречу вращающемуся валу, относительная скорость трущихся поверхностей $\bar{v}_{отн} = \bar{v}_0 - \bar{v}$ вала и муфты имеет максимальное значение. Возможно, что $v_{отн} = 2v_0$ при $\Omega = \omega_0$. Во второй полупериод, когда маятник движется вправо (рис. 40, б), а муфта вращается в том же направлении, что и вал, относительная скорость трущихся поверхностей $\bar{v}_{отн} = \bar{v}_0 - \bar{v}$ имеет минимальное значение. При $\Omega = \omega_0$ возможно, что $v_{отн} = 0$. Известно, что сила сухого трения нелинейно зависит от относительной скорости трущихся поверхностей, причем чем меньше $v_{отн}$, тем больше сила сухого трения и наоборот. Следовательно, в первый полупериод со стороны вращающегося вала на муфту маятника действует сила сухого трения \bar{F}'_m , но она минимальна, так как $v_{отн}$ максимальна. Во второй полупериод со стороны вращающегося вала на муфту маятника действует максимальная сила сухого трения \bar{F}'_m , а точнее сила сухого трения покоя. При этом $F'_m > F_m$.

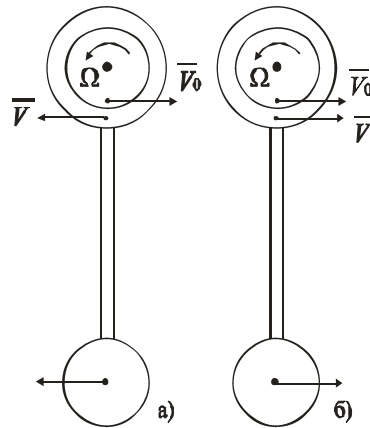


Рис. 40

Таким образом за каждый период колебаний маятника на короткое время между валом и муфтой возникает сухое трение покоя, которое больше силы трения во все другие моменты времени рассматриваемого периода колебаний. Это приводит к тому, что если за первую половину периода колебаний, когда муфта вращается в направлении, противоположном направлению вращающегося вала (рис. 40, а), сила трения минимальна, она тормозит движение маятника. За вторую половину периода, когда муфта вращается в том же направлении, что и вал (рис. 40, б), максимальная сила трения, действующая на муфту со стороны вращающегося вала, подталкивает маятник, сообщая ему максимально возможную кинетическую энергию, которая полностью компенсирует потери энергии за первый полупериод. Другими словами, со стороны вращающегося вала, как источника энергии, на муфту маятника за каждый период колебаний действует один толчок в направлении его движения, что и позволяет поддерживать колебания маятника незатухающими. Колебания маятника, работающего в автоколебательном режиме вследствие воздействия на него кратковременных толчков, не являются гармоническими. В отличие от фазовой диаграммы незатухающих колебаний, на фазовой диаграмме автоколебаний маятника Фроуда (рис. 41) имеется характерный изгиб. Толчок, действующий со стороны вращающегося вала, скачком увеличивает мгновенную скорость $\dot{\varphi}$ маятника, а, следовательно, и его кинетическую энергию.

Если обозначить угол отклонения маятника от вершины φ , момент инерции маятника J , массу маятника m и его приведенную длину l , то уравнение движения физического маятника запишется в виде

$$J\ddot{\varphi} + mg l \sin \varphi = M,$$

где M – момент силы трения. Для малых углов ($\sin \varphi \approx \varphi$) уравнение имеет вид

$$J\ddot{\varphi} + mg l \varphi = M. \quad (11.1)$$

Момент силы трения является функцией скорости взаимного движения трущихся поверхностей, т.е. функцией угловой скорости Ω вращения муфты маятника относительно вала

$$M = f(\dot{\varphi} - \Omega).$$

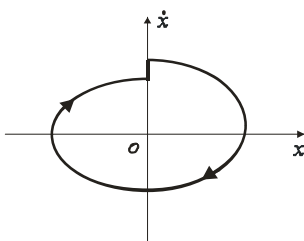


Рис. 41

В случае малого отличия скоростей вала и муфты эту функцию в окрестности $\dot{\varphi} = \Omega$ можно записать в виде

$$M = -f(0) \frac{(\dot{\varphi} - \Omega)}{|\dot{\varphi} - \Omega|} - |f'(0)| (\dot{\varphi} - \Omega). \quad (11.2)$$

В данной формуле учтено, что сила сухого трения направлена против скорости. Для сухого трения уравнение (11.1) с учетом (11.2) принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{f'(0)}{J} \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = - \frac{f(0)(\dot{\varphi} - \Omega)}{J|\dot{\varphi} - \Omega|} + \frac{f'(0)\Omega}{J}. \quad (11.3)$$

Из-за падающей характеристики (рис. 42) зависимости сил сухого трения от скорости ($f'(0) < 0$) левая часть уравнения (11.3) показывает возрастание амплитуды колебаний со временем, т.е. отрицательный знак коэффициента при скорости в уравнении (11.3) означает подачу энергии в колебательную систему из внешнего источника. Так было бы, если бы правая часть уравнения была равна нулю. Но в правой части уравнения (11.3) стоит не равный нулю момент сил трения, состоящий из двух слагаемых, постоянных по величине, но по знаку постоянно только второе слагаемое, а знак первого определяется соотношением величин и знаков скоростей вала и муфты.

Одновременное поступление в систему энергии из внешнего источника и ее рассеяние вследствие трения создают возможность осуществления в системе стационарных (незатухающих) колебаний в случае уравновешенности поступления и потерь энергии. Рассмотрим условие реализации этой возможности.

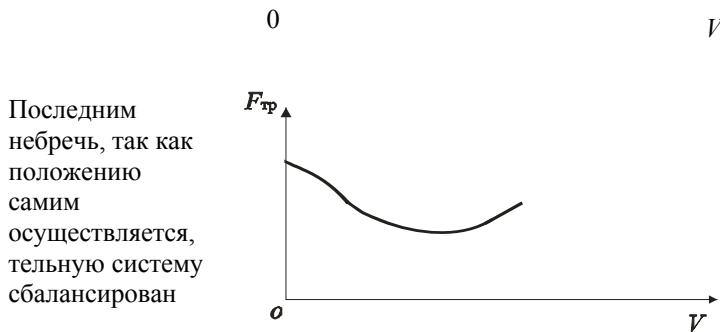


Рис. 42

Последним небрежь, так как положению самим осуществляется, тельную систему сбалансирован

слагаемым в правой части уравнения (11.3) можно пре- постоянный момент сил имеет отношение только к равновесия, около которого возможны колебания, но не к колебаниям. Стационарный колебательный режим если среднее за период поступление энергии в колеба- равно энергии потерь, т.е. импульс момента сил

$$\int_0^T M dt = \int_0^T \left[-f(0) \frac{(\dot{\varphi} - \Omega)}{|\dot{\varphi} - \Omega|} - f'(0)\dot{\varphi} \right] dt = 0. \quad (11.4)$$

Если подынтегральное выражение в течение всего периода больше нуля, то равенство (11.4) невозможно и, следовательно, невозможны автоколебания при $|\dot{\varphi}| < \Omega$. Физически это означает, что при больших угловых скоростях вала мы не попали на падающий участок (рис. 42) характеристики сил трения. В этом случае колебания затухают и положение равновесия маятника легко найти из уравнения (11.3), приняв $\dot{\varphi} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$

$$\varphi_0 = \frac{f(0) + f'(0)\Omega}{J\omega_0^2}.$$

Следовательно, необходимым условием осуществления автоколебаний маятника Фроуда является малая угловая скорость вращения вала, т.е.

$$\Omega \leq |\dot{\varphi}|.$$

12. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Особый важный случай незатухающих колебаний представляют *разрывные колебания*, которые часто называют *релаксационными*. Механическим примером является полый открытый сверху цилиндр B (рис. 43), способный вращаться вокруг горизонтальной оси OO' .

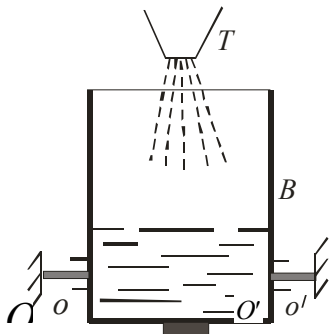


Рис. 43

h
 h_m

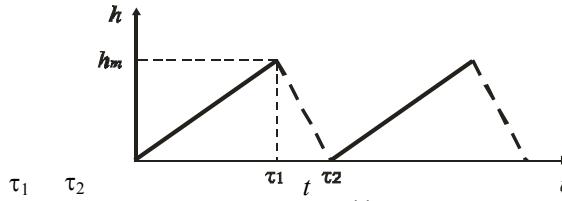


Рис. 44

У пустого цилиндра центр тяжести лежит ниже оси OO' , для чего ко дну цилиндра прикрепляют небольшой груз, создавая тем самым устойчивое положение равновесия. Когда же уровень жидкости в цилиндре повышается вследствие наполнения его водой через трубку T , центр тяжести повышается, равновесие становится неустойчивым и цилиндр опрокидывается. Быстро опрокидываясь, цилиндр возвращается в исходное положение. После этого процесс повторяется. Периодичность релаксационных колебаний зависит от емкости цилиндра и скорости подачи воды. Уровень жидкости в сосуде изменяется так, что его график имеет характерную пилообразную форму (рис. 44): τ_1 – время заполнения цилиндра водой, $(\tau_2 - \tau_1)$ – время опорожнения цилиндра.

Другим примером механических релаксационных колебаний является так называемый сосуд Тантала (рис. 45). Пока уровень жидкости в сосуде мал (рис. 45, а), сифон не заполнен жидкостью, и уровень жидкости h повышается по линейному закону.

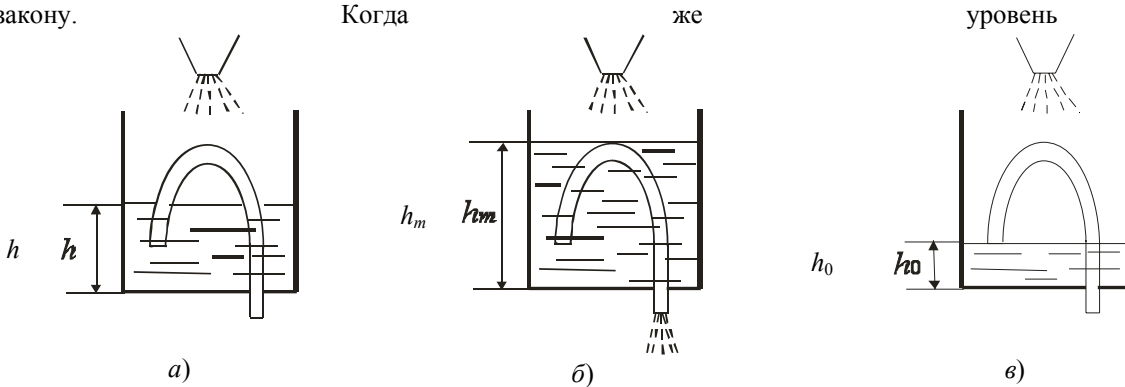


Рис. 45

достигает максимальной высоты h_m (рис. 45, б), сифон начинает действовать и уровень жидкости быстро падает до значения h_0 (рис. 45, в). После этого процесс повторяется.

13. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Под параметрическим возбуждением понимают такой вид возбуждения колебаний, когда внешняя периодическая сила действует не на колебательную систему, а только изменяет периодически один из ее параметров. Так, параметрами математического маятника являются его длина l и ускорение свободного падения g , так как эти величины определяют период его колебаний. Следовательно, возможны два основных способа возбуждения параметрических колебаний математического маятника: путем изменения его длины или путем изменения веса маятника. Возможно и смешанное возбуждение, при котором оба параметра изменяются одновременно. Примером параметрических колебаний является раскачивание качелей.

1. Простейшая установка для возбуждения параметрических колебаний показана на рис. 46. Маятник, который по своим параметрам близок к математическому, представляет собой стальной шар, подвешенный на легкой нити. Под маятником установлен электромагнит, создающий сильное магнитное поле. Вследствие того, что параметрический резонанс наступает при наличии начальных колебаний, перед проведением опыта необходимо привести маятник в колебание с малой амплитудой. После этого при полностью отклоненном маятнике от положения равновесия с помощью ключа S включают ток в обмотке электромагнита на время, равное четверти периода колебаний, а при прохождении им положения равновесия ток в обмотке отключают на то же самое время. Другими словами, при приближении маятника к положению равновесия вследствие действия магнитного поля вес маятника увеличивается, а при удалении маятника от положения равновесия этого не происходит – вес остается прежним.

Таким образом, частота изменения тока в обмотке должна быть в два раза больше собственной частоты колебаний системы. Возникающее магнитное поле периодически увеличивает притяжение стального шарика к электромагниту, что эквивалентно периодическому изменению силы тяжести, действующей на него, т.е. изменению одного из параметров колебательной системы.

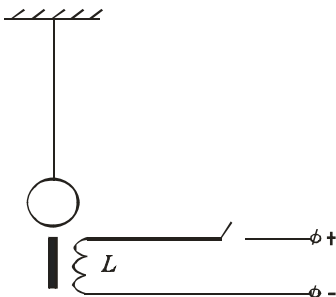


Рис. 46



Рис. 47

Если работа внешних сил по увеличению силы тяжести за период окажется больше, чем потери энергии маятника за тот же промежуток времени, то энергия маятника с течением времени будет возрастать, а, следовательно, и амплитуда колебаний будет увеличиваться. Если энергия, сообщаемая маятнику за период, окажется равной потерям энергии за то же время, то колебания маятника становятся незатухающими.

2. Возбуждение параметрических колебаний маятника, когда изменяемым параметром является его длина, можно показать с помощью установки, изображенной на рис. 47. Небольшой шар B подвешен на тонкой нити длиной 1,5 м. Свободный конец нити D переброшен через неподвижный блок C . Если свободный конец D нити закрепить, а шар отклонить в сторону и затем отпустить, то маятник будет совершать колебания с частотой ω_0 , соответствующей длине подвеса $l_0 = BC$. Колебания в этом случае будут затухающими. Однако если после запуска маятника с небольшой амплитудой периодически с частотой ω в два раза большей, чем собственная частота колебаний маятника ($\omega = 2\omega_0$), укорачивать и увеличивать на величину Δl длину подвеса маятника, то амплитуда колебаний маятника увеличивается; причем для наступления параметрического резонанса необходимо укорачивать длину подвеса, когда он проходит положение равновесия и увеличивать длину, когда он находится в крайних точках.

Рассмотрим возбуждение параметрических колебаний с энергетической точки зрения. Пусть в начальный момент времени маятник находится в положении 1 (рис. 48) и имеет потенциальную энергию

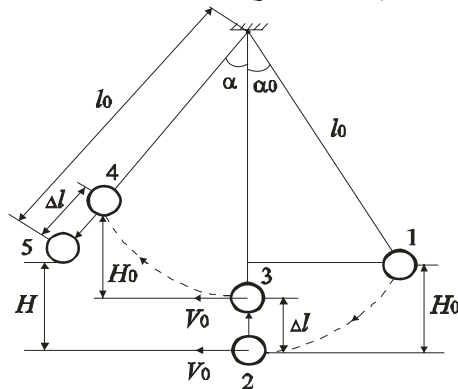


Рис. 48

$W_1 = mgH_0$. Через четверть периода колебаний маятник будет находиться в положении 2 и обладать кинетической энергией

$W_2 = \frac{mv_0^2}{2}$. На основании закона сохранения энергии $W_1 = W_2$ найдем скорость маятника при прохождении положения равновесия $v_0 = \sqrt{2gH_0}$. Когда маятник проходит положение 2 равновесия, укоротим длину маятника на величину Δl и переведем маятник в положение 3. Так как перемещение происходит перпендикулярно к скорости, то кинетическая энергия маятника не изменяется и равна $W_3 = \frac{mv_0^2}{2}$. За счет этой энергии при переходе в точку 4 маятник поднимается относительно

точки 3 на высоту H_0 в соответствии с законом сохранения энергии $W_4 = W_3$, т.е. $mgH_0 = \frac{mv_0^2}{2}$. Но так как длина маятника стала $(l_0 - \Delta l)$ и она меньше l_0 , то для поднятия на высоту H_0 маятник должен отклониться от положения равновесия на угол $\alpha > \alpha_0$. В момент, когда маятник находится в положении 4, увеличим длину маятника на величину Δl , т.е. восстановим первоначальную длину маятника l_0 . Так как в положении 5 угол $\alpha > \alpha_0$, то он имеет потенциальную энергию $W_5 = mgH$, которая больше, чем W_1 . Таким образом, при соответствующем изменении длины маятника амплитуда будет возрастать.

Подсчитаем работу, совершаемую внешними силами, при укорачивании его длины на величину Δl , т.е. при переводе маятника из положения 2 в положение 3. При прохождении маятником положения равновесия сила натяжения нити T долж-

на уравниваться силой тяжести и центробежной силой $T = mg + \frac{mv_0^2}{l}$. Следовательно, работа внешних сил на участке 2-3 равна

$$A_{23} = T\Delta l = mg\Delta l + \frac{mv_0^2}{l}\Delta l.$$

При увеличении длины маятника на величину Δl при переводе его из положения 4 в положение 5 сила тяжести совершает работу

$$A_{45} = -mg \cos \alpha \Delta l.$$

Легко видеть, что $|A_{23}| > |A_{45}|$, т.е. за счет периодического изменения длины маятника он получает энергию $\Delta W = A_{23} + A_{45}$. Если эта энергия будет компенсировать потери энергии на трении, то колебания станут незатухающими.

Интересным примером параметрического возбуждения является устройство (рис. 49), в котором точка подвеса математического маятника постоянной длины l_0 нити совершает гармонические колебания в вертикальном направлении. Для получения прямолинейных гармонических колебаний точки подвеса маятника его нить прикреплена к штоку, который совершает возвратно-поступательные вертикальные движения. Гармоническое колебание в вертикальном направлении,

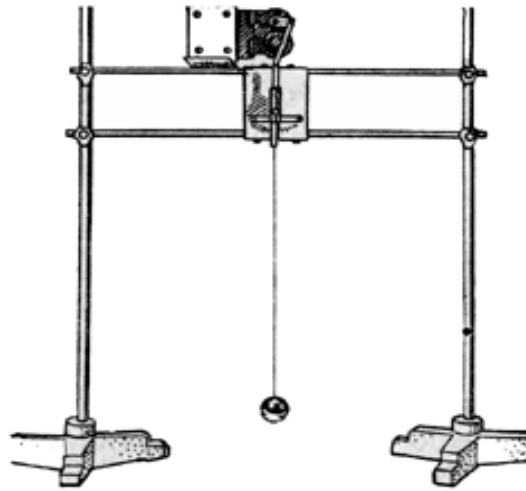


Рис. 49

а следовательно, и точки подвеса маятника достигается благодаря преобразованию вращательного движения вала, приводимого в равномерное движение электродвигателем МПП-3 с редуктором, в возвратно-поступательное – с помощью кривошипного механизма. Скорость вращения кривошипа может плавно регулироваться путем изменения напряжения, подаваемого от выпрямителя ВС-24 на электродвигатель.

Перед проведением опытов определяют собственную частоту ω_0 колебаний маятника при неподвижной точке подвеса. Устанавливают частоту ω вращения кривошипа такой, чтобы она была в два раза больше собственной частоты ω_0 колебаний маятника, т.е. $\omega = 2\omega_0$. Включив двигатель, запускают маятник при небольшом отклонении из крайнего положения в тот момент, когда шток опускается. Другими словами, фазовое соотношение между колебаниями точки подвеса и колебаниями маятника при запуске должно быть таким, чтобы при прохождении маятником положения равновесия шток поднимался вверх, а при прохождении крайних точек шток опускался. Если при данных фазовых соотношениях условие $\omega = 2\omega_0$ строго выполняется, то амплитуда колебаний маятника после запуска возрастает, а угол максимального отклонения маятника при установлении параметрического резонанса более 45° . Если соотношение $\omega = 2\omega_0$ не выполняется, то после запуска маятника опытным путем подбирают необходимую частоту вращения кривошипа до наступления параметрического резонанса.

Легко видеть, что в данном случае изменяемым параметром системы является вес маятника. Действительно, при прохождении маятником положения равновесия вследствие ускоренного подъема точки подвеса, вес маятника увеличивается на величину $m\bar{a}_1$, где \bar{a}_1 – среднее ускорение подъема маятника. Так как уравнение колебаний точки подвеса имеет вид

$$x = R \sin \omega t,$$

где R – радиус кривошипа, то среднее ускорение точки подвеса при подъеме маятника равно

$$\bar{a}_1 = \ddot{x} = -\omega^2 R \overline{\sin \omega t} = -\omega^2 R \overline{\sin 2\omega_0 t},$$

где среднее значение синуса берется за время, равное половине периода колебаний кривошипа, или за время, равное четверти периода колебаний маятника. Аналогично, при прохождении маятником крайних точек вследствие ускоренного опускания штока вес маятника будет уменьшаться на величину $m\bar{a}_2$, где

$$\bar{a}_2 = -R\omega^2 \overline{\sin \omega t \cos \alpha},$$

α – угол отклонения маятника от положения равновесия в крайних точках. Работа, совершаемая внешними силами при подъеме маятника, будет положительной, а при опускании – отрицательной, причем при подъеме маятника внешние силы

будут совершать по абсолютной величине большую работу, чем та отрицательная работа, которая будет совершаться при опускании маятника в крайних точках. Следовательно, за каждый период колебаний маятника внешние силы совершают положительную работу, которая идет на увеличение энергии маятника. Если эта энергия будет превосходить потери энергии маятника, то амплитуда параметрических колебаний будет возрастать.

Различие между параметрическими и вынужденными колебаниями удобно объяснить на примере опыта Мельде, в котором с помощью камертона возбуждают два типа колебаний легкой нити. Более наглядно опыт Мельде можно реализовать, если вместо камертона воспользоваться электрическим вибратором, который собирается на основе электробритвы «Оксамит-80». Для этого у бритвы снимается двухножевой гребенчатый блок и к электроприводу с помощью хомутика прикрепляется стальная пластинка – вибратор длиной 4-5 см. Вместо нити удобно воспользоваться тонкой резиновой лентой длиной около 15 см и шириной 0,5 см. Резиновая лента одним концом крепится к вибратору, а другим – к стойке, которая может перемещаться микрометрическим винтом для создания необходимого статического натяжения ленты.

Для наблюдения *вынужденных* колебаний ленты электробритву располагают так, чтобы вибратор возбуждал в ней *поперечные* колебания. Расстояние от вибратора до закрепленного конца ленты подбирается таким, чтобы лента возбуждалась на втором обертоне. Так как частота колебаний вибратора достаточно велика (100 Гц), изображение ленты при обычном освещении расплывается и на ее длине укладывается *две пучности* мгновенных смещений. Так как поперечные воздействия вибратора раскачивают ленту, сообщая ей кинетическую энергию для покрытия потерь на трение, то частота вынужденных колебаний ленты совпадает с частотой вибратора. Действительно, если в этом опыте ленту наблюдать в стробоскопическом освещении, когда частота вспышек света равна частоте вибратора, то сам вибратор и лента видны в одном положении (рис. 50).

Для наблюдения *параметрических* колебаний ленты поворачивают вибратор вместе с электробритвой на угол 90° так, чтобы вибратор возбуждал в ленте *продольные* колебания. При этом расстояние до закрепленного конца ленты должно быть прежним. Периодическое изменение вибратором натяжения ленты возбуждает в ней интенсивные поперечные колебания. При обычном освещении изображение ленты

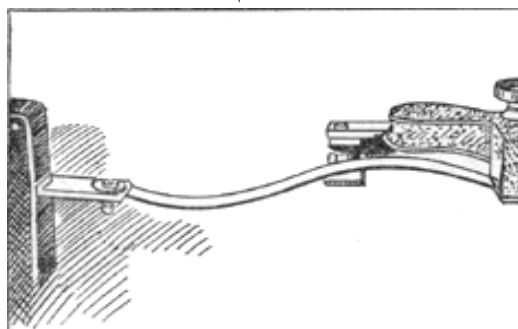


Рис. 50

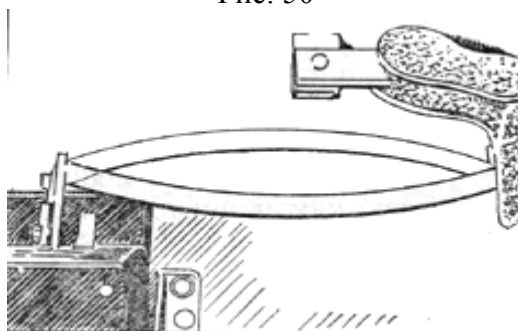


Рис. 51

расплывается и на ее длине укладывается *одна пучность* мгновенного смещения. Это говорит о том, что частота параметрических колебаний ленты в два раза меньше частоты колебаний вибратора. Действительно, если ленту в этом опыте наблюдать в стробоскопическом освещении при частоте вспышек 100 Гц, то вибратор, как и прежде, виден в одном положении, а лента – в двух положениях (рис. 51).

14. СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим два математических маятника одинаковой длины l , связанные легкой пружиной с малой жесткостью k (рис. 52). При отсутствии указанной связи каждый маятник имеет собственную частоту колебаний. Если один из связанных маятников

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (14.1)$$

привести в движение, то оба маятника совершают достаточно сложные колебания.

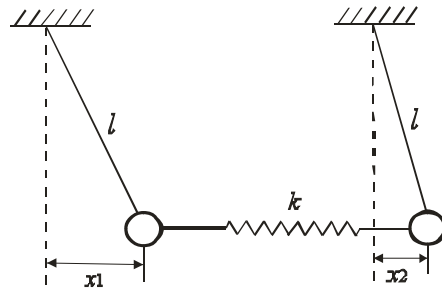


Рис. 52

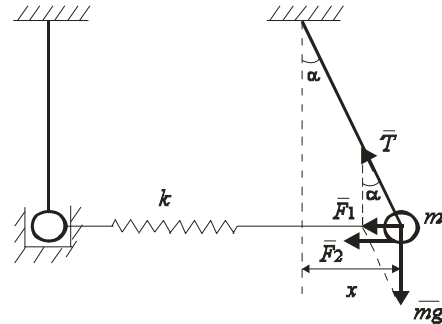


Рис. 53

Рассмотрим более простой случай, когда один из связанных маятников закреплен неподвижно, а другой может совершать колебания (рис. 53). В положении равновесия связанных маятников пружина не деформирована. При смещении подвижного маятника от положения равновесия на величину x , на него действуют две восстанавливающие силы

$$F_1 = -mg \operatorname{tg} \alpha \quad \text{и} \quad F_2 = -kx.$$

При малых углах отклонения $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha = \frac{x}{l}$, получим $F_1 = -\frac{mg}{l} x$. Следовательно, дифференциальное уравнение движения подвижного маятника имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_1 + F_2 \quad \text{или} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{mg}{l} x + kx = 0.$$

Разделив последнее выражение на массу, получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} \right) x = 0. \quad (14.2)$$

Один из связанных маятников, когда второй закреплен, совершает гармоническое колебание с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}}. \quad (14.3)$$

Движение одного из связанных маятников, когда второй маятник закреплен неподвижно, называется *парциальным движением*, а частота ω называется *парциальной частотой*, причем $\omega > \omega_0$.

Существуют два способа приведения связанных маятников в колебания, при которых они имеют одинаковые частоты и равные амплитуды.

Первый способ: в начальный момент отклоняют в одном направлении оба маятника от положения равновесия на величину x_m и отпускают (рис. 54). Так как во время движения пружина остается недеформированной, то частота колебаний маятников равна

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (14.4)$$

т.е. $\omega_1 = \omega_0$. Колебания маятников имеют одинаковые фазы, т.е. они являются синфазными, и одинаковые амплитуды x_m . Уравнения движения маятников имеют вид

$$x'_1 = x_m \cos \omega_1 t, \quad x'_2 = x_m \cos \omega_2 t.$$

Второй способ: отклоняют маятники от положения равновесия на одинаковую величину x_m , но в противоположные стороны и отпускают. Другими словами, предоставляют маятникам возможность совершать колебания с разностью фаз π , т.е. противофазно (рис. 55). При таких колебаниях связанных маятников пружина периодически деформируется на величину вдвое большую, чем при парциальных колебаниях.

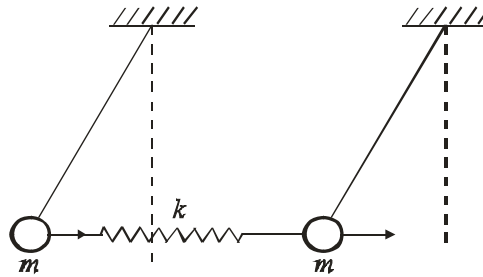


Рис. 54

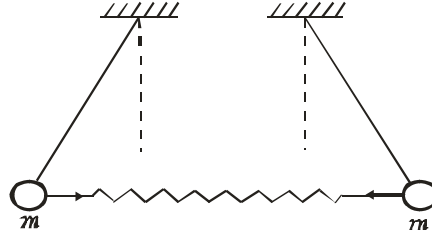


Рис. 55

Вследствие этого частоты связанных противофазных колебаний будут равны

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}, \quad (14.5)$$

т.е. $\omega_2 > \omega_1$, а уравнения имеют вид

$$x_1'' = x_m \cos \omega_2 t, \quad x_2'' = -x_m \cos \omega_2 t.$$

Рассмотренные два вида движения связанных маятников, при которых их частота и амплитуда одинаковы, называются *нормальными колебаниями* или *модами движения*. Частоты ω_1 и ω_2 , соответствующие двум модам движения, называются *нормальными частотами*.

Число различных типов нормальных колебаний и соответствующих им частот равно числу степеней свободы колебательной системы. В связи с этим в изучаемой системе двух связанных маятников других типов нормальных колебаний, кроме двух рассмотренных выше, нет.

Покажем, что любое сложное колебание двух связанных маятников можно представить как суперпозицию их нормальных мод. Приведем в колебание один из связанных маятников ударом киянки. Отмечают, что с течением времени и второй маятник начинает постепенно раскачиваться. Амплитуда колебаний первого маятника при этом уменьшается, и он совсем останавливается, в то время как амплитуда колебаний второго достигает максимального значения. Потом колебания второго маятника угасают, а амплитуда колебаний первого достигает максимального значения. Далее процесс повторяется. Другими словами, амплитуда каждого маятника изменяется точно так же, как при биениях, возникающих при сложении двух колебаний близких частот. Такое поведение колебательной системы связанных маятников можно понять, обращаясь к нормальным модам. При возбуждении одного из связанных маятников ударом киянки, каждый маятник участвует в двух движениях с частотами ω_1 и ω_2 , находящимися в определенной относительной фазе. Но поскольку нормальные частоты ω_1 и ω_2 отличаются друг от друга, то изменяется и относительная фаза нормальных колебаний. Когда для первого (второго) маятника нормальные колебания оказываются совпадающими по фазе, его амплитуда колебаний будет максимальной; для второго (первого) маятника в этот момент нормальные колебания имеют разность фаз равную π и его амплитуда равна нулю.

Уравнения движения маятников при суперпозиции нормальных колебаний будут иметь вид

$$x_1 = x_m \cos \omega_1 t + x_m \cos \omega_2 t = 2x_m \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \omega t;$$

$$x_2 = x_m \cos \omega_1 t - x_m \cos \omega_2 t = 2x_m \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \sin \omega t,$$

где $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ – средняя частота; $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ – разность частот нормальных колебаний. Так как $\Delta\omega \ll \omega$, то правые части уравнений движения можно рассматривать как уравнения синусоидальных колебаний с частотой ω и медленно изменяющейся амплитудой. Графики колебаний каждого маятника при сложных связанных колебаниях показаны на рис. 56.

Представляет интерес рассмотреть связанные колебания с энергетической точки зрения. При запуске первого связанного маятника толчком, вся энергия сосредоточена в нем. В результате связи через

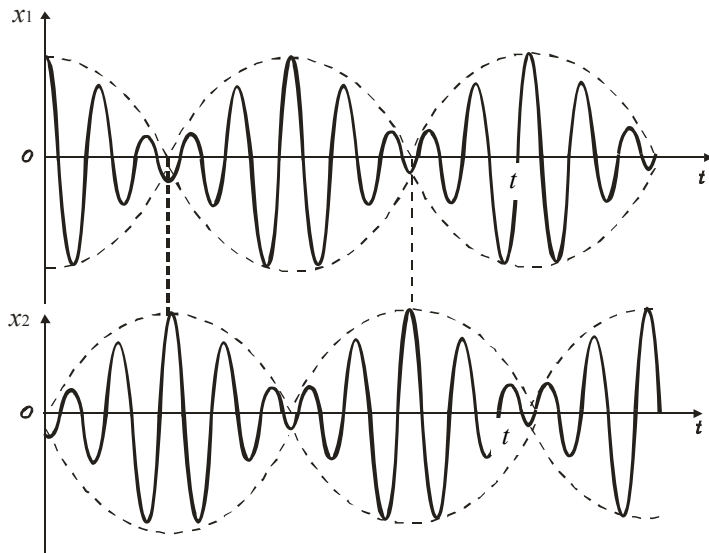


Рис. 56

пружину энергия постепенно передается от первого маятника ко второму до тех пор, пока вся энергия не скопится во втором маятнике. Время T_0 , необходимое для перехода энергии от первого маятника ко второму и обратно, равно периоду биений

$T_0 \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$. Время, необходимое для передачи энергии от одного маятника к другому, равно $\tau_0 = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1}$. При этом τ_0

значительно больше периода собственных колебаний.

Рассмотрим связанные колебания трех маятников (рис. 57). В положении равновесия пружины, соединяющие маятники, не должны

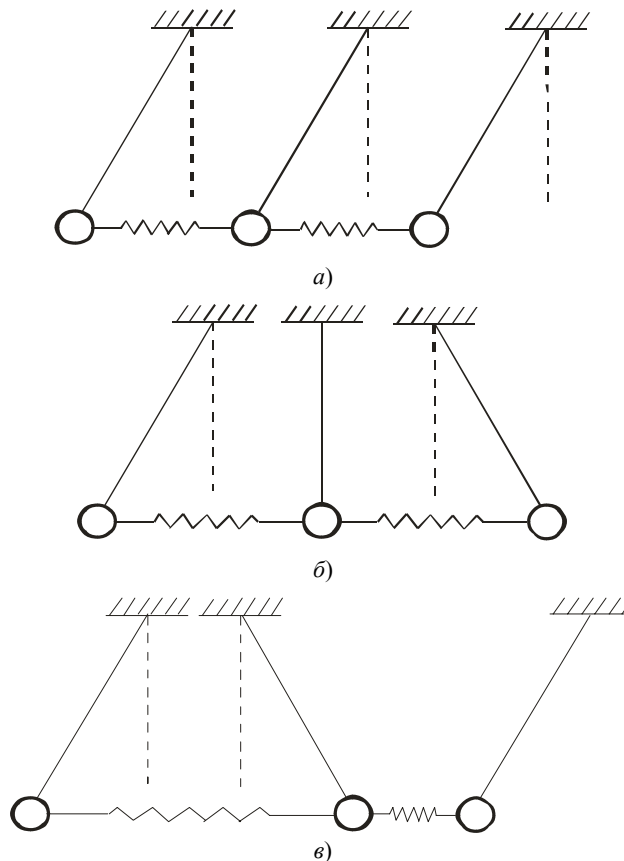


Рис. 57

быть деформированы. Для наблюдения первой моды движения связанных маятников (рис. 57, а) их одновременно отклоняют от положения равновесия и отпускают. Пружины при этом остаются недеформированными и частота первой моды движения равна $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Для наблюдения второй моды движения (рис. 57, б) крайние маятники отклоняют в разные стороны и отпускают. Средний маятник колебаний при этом не совершает. Частота второй моды движения равна $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}}$, при этом $\omega_2 > \omega_1$.

Для наблюдения третьей моды движения маятники приводят в колебания так, чтобы они совершали противофаз-

ные колебания (рис. 57, в). Нормальная частота противофазных колебаний $\omega_3 > \omega_2$. Другими словами, нормальные частоты связанных колебаний трех маятников удовлетворяют неравенству $\omega_3 > \omega_2 > \omega_1$.

При сложных колебаниях трех связанных маятников, когда один из них возбуждается, например, ударом киянки, колебания передаются от первого маятника ко второму, а от второго к третьему и обратно. Однако, время передачи энергии от одного к другому маятнику значительно меньше, чем в случае двух связанных маятников, т.е. $\tau \ll \tau_0$. Время передачи энергии становится сравнимым с полупериодом колебаний маятников и даже меньше.

15. Собственные колебания в системе с большим числом степеней свободы

Экспериментальное исследование собственных колебаний в системе с произвольным числом степеней свободы более наглядно можно провести на основе использования дискретной периодической структуры, представляющей собой систему связанных маятников (рис. 58).

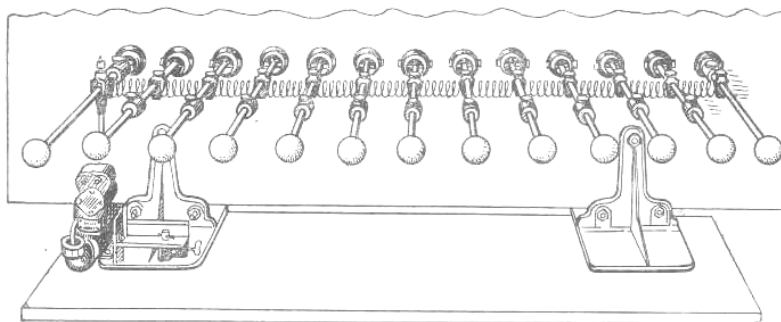


Рис. 58

Механическая дискретная периодическая структура состоит из тринадцати ($N = 13$) одинаковых металлических стержней длиной 0,7 м, расположенных в горизонтальной плоскости параллельно друг другу на расстоянии 8 см. Каждый стержень имеет поперечную ось вращения, укрепленную с помощью опорных винтов в цилиндрическом кольце. Все тринадцать колец, удерживающих стержни, с помощью боковых фланцев укреплены в отверстиях вертикально расположенного листа фанеры толщиной 10 мм и размером 1,6 × 0,6 м. Стержни, выполняющие роль маятников, связаны легкой пружиной с малой жесткостью. Чтобы было лучше наблюдать за колебаниями стержней, с лицевой стороны прибора они снабжены шарами диаметром 35 мм. С противоположной стороны прибора стержни уравниваются массивными грузами (рис. 59).

С помощью рычагов, связанных с длинной рейкой, все кольца вместе с маятником могут одновременно поворачиваться в вертикальной плоскости на угол 90° . Благодаря этому оси вращения маятников могут устанавливаться или горизонтально или вертикально. Тем самым с помощью дискретной периодической структуры имеется возможность наблюдать как поперечные, так и продольные колебания системы с большим числом степеней свободы.

Дискретная периодическая структура позволяет исследовать свободные колебания в системе, состоящей из одной, двух, трех и т.д. степеней свободы, а также колебания в системе, имеющей одиннадцать степеней свободы. Для наблюдения свободных колебаний с одной степенью свободы закрепляют первый и третий элементы структуры (нумерация элементов осуществляется слева направо) неподвижно с помощью стопорных винтов. Отклоняют второй элемент от положения равновесия и предоставляют ему возможность совершать свободные

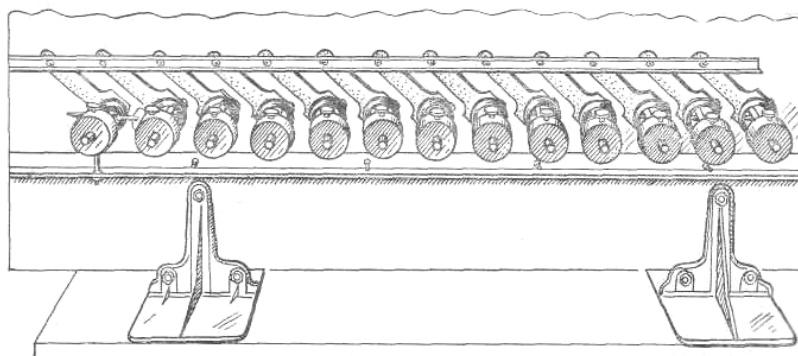


Рис. 59

колебания. В данном случае мы имеем систему с одной степенью свободы, которая характеризуется одной модой ($m = 1$) движения (рис. 60, а), частота колебаний ω_{11} . Закрепляют первый и четвертый элементы структуры неподвижно. Отклоняют второй и третий элементы в одну сторону и предоставляют им возможность совершать свободные колебания. Отмечают, что колебания этих элементов происходят с одинаковой частотой ω_{21} , одинаковой амплитудой и фазой. Отклоняют второй и третий элементы в противоположные стороны и, отпустив их, наблюдают противофазные колебания элементов с частотой ω_{22} , причем $\omega_{22} > \omega_{21}$. Указанные две моды движения системы с двумя степенями свободы показаны на рис. 60, б и подробно рассмотрены в п. 14. Отметим только, что если возбудить колебания второго из связанных элементов толчком, то его колебания с течением времени уменьшаются по амплитуде, а колебания третьего элемента увеличиваются. Время передачи

энергии τ от одного элемента к другому в случае двух связанных элементов значительно больше периода колебаний самих маятников.

Для исследования свободных колебаний в системе, имеющей три степени свободы, закрепляют неподвижно первый и пятый элементы дискретной периодической структуры. Для наблюдения первой моды движения отклоняют в одну сторону второй, третий и четвертый элементы от положения равновесия и предоставляют возможность совершать свободные колебания. Отмечают, что колебания всех трех элементов происходят в одинаковой фазе, с одинаковой частотой ω_{31} , но

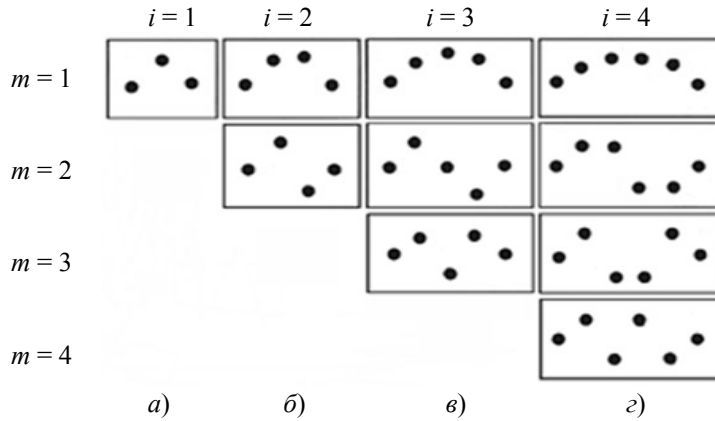
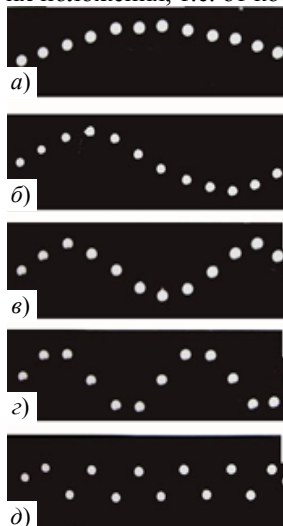


Рис. 60

различной амплитудой. Третий элемент имеет максимальную амплитуду колебаний. Для наблюдения второй моды движения отклоняют в противоположные стороны второй и пятый элементы и предоставляют им возможность совершать свободные колебания. При этом второй и пятый элементы совершают противофазные колебания с частотой $\omega_{32} > \omega_{31}$, причем третий элемент колебаний не совершает. Для наблюдения третьей моды движения отклоняют второй и четвертый элементы в одну сторону от положения равновесия, а третий – в другую сторону, и отпустив их, отмечают противофазные колебания всех трех элементов с одинаковой амплитудой и частотой $\omega_{33} > \omega_{32}$. Рассмотренные три моды движения показаны на рис. 60, в. Если возбудить толчком второй элемент структуры, то его колебания последовательно передаются сначала к третьему элементу, а затем к четвертому и обратно. Этот периодический процесс передачи колебаний повторяется вдоль цепочки элементов несколько раз. При этом время передачи энергии от одного элемента к соседнему становится значительно меньше периода собственных колебаний элементов.

Моды собственных колебаний в системе, состоящей из четырех элементов, показаны на рис. 60, г. С переходом к более высоким модам движения частота колебаний увеличивается $\omega_{44} > \omega_{43} > \omega_{42} > \omega_{41}$. В случае предельной моды элементы структуры совершают противофазные колебания и мода имеет «зигзагообразный» характер. При возбуждении толчком или ударом одного из крайних элементов колебательное движение передается вдоль линии слева направо и обратно. Время τ передачи энергии от одного элемента к другому становится малым и передача колебаний носит характер волнового процесса.

Для изучения свободных колебаний системы с большим числом степеней свободы закрепляют неподвижно крайние элементы дискретной периодической структуры. Легко видеть, что дискретная система в данном случае имеет $i = N - 2 = 11$ степеней свободы. Следовательно, у рассматриваемой системы связанных маятников имеется $m = 11$ мод собственных движений. Как показано в предыдущих опытах, форма каждой моды зависит от начальных условий возбуждения колебаний и имеет собственную нормальную частоту. Для наблюдения первой моды $m = 1$ выводят центральный маятник периодической структуры из положения равновесия и предоставляют ему возможность совершать свободные колебания. Наблюдая за колебаниями элементов системы, отмечают, что все они, кроме крайних закрепленных, совершают колебания с одинаковой частотой ω_1 , но различной амплитудой (рис. 61, а), т.е. $\psi = \psi_0(x) \sin \omega_1 t$, где $\psi_0(x)$ – амплитуда элементов, которая зависит от их положения, т.е. от координаты x . Эта зависимость для первой моды движения может быть представлена в виде



$$\psi_0(x) = \psi_m \sin \frac{\pi}{L} x,$$

где L – длина периодической дискретной структуры. Таким образом, уравнение колебаний любого элемента структуры для первой моды имеет вид

$$\psi = \psi_m \sin \frac{\pi}{L} x \sin \omega_1 t.$$

Для возбуждения второй моды $m = 2$ движения приводят в колебания элементы с порядковыми номерами $n = 4$ и $n = 10$ так, чтобы они совершали свободные колебания с разностью фаз, равной π (рис. 61, б). Наблюдая за колебаниями системы, отмечают, что все элементы структуры колеблются с одинаковой частотой ω_2 , причем $\omega_2 > \omega_1$, но с различной амплитудой. Амплитуда колебаний крайних элементов и центрального равна нулю. Уравнение движения элементов для второй моды имеет вид

$$\psi = \psi_m \sin 2 \frac{\pi}{L} x \sin \omega_2 t.$$

На рис. 61, в показана конфигурация третьей моды ($m = 3$). Движение элементов подчиняется уравнению

Рис. 61

$$\psi = \psi_m \sin 3 \frac{\pi}{L} x \sin \omega_3 t .$$

Конфигурация четвертой моды (рис. 61, з) описывается уравнением

$$\psi = \psi_m \sin 4 \frac{\pi}{L} x \sin \omega_4 t .$$

Следовательно, колебания элементов структуры для произвольной моды подчиняются уравнению

$$\psi = \psi_m \sin m \frac{\pi}{L} x \sin \omega_m t .$$

Из опытов следует, что с повышением моды движения увеличивается частота собственных колебаний структуры, т.е. $\omega_4 > \omega_3 > \omega_2 > \omega_1$. Поэтому перепишем уравнение

$$\psi = \psi_m \sin k_m x \sin \omega_m t ,$$

где $k_m = \frac{m\pi}{L}$ – волновое число, которое

$$k_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} . \text{ Отсюда получим } L = \frac{\lambda_m}{2} m .$$

Таким образом, в периодической структуре, закрепленной с двух сторон, возможны такие собственные число полуволн.

Легко заметить, что наблюдаемые моды структуры те же, что и в случае непрерывной стоячих волн, различие состоит лишь в свободе бесконечно велико и для нее дискретной периодической структуры с самой высокой модой $m = i = 11$. Форма этой моды d). В случае предельной моды элементы совершают противофазные колебания с самой большой возбудить колебания одного из элементов колебательное движение последовательно передается вдоль структуры и имеет вид, характерный для волнового движения.

Опыт по наблюдению распространения колебаний в дискретной периодической структуре проводится следующим образом. Закрепляют правый последний элемент структуры неподвижно с помощью винта. Отклонив первый элемент структуры от положения равновесия, быстро возвращают его в исходное состояние. Наблюдая за колебаниями ДПС, отмечают, что по ней бежит короткий «импульс» (рис. 62, а, б, в, г). Дойдя до закрепленного конца периодической структуры «импульс» меняет полярность (рис. 62, д) и распространяется в противоположную сторону (рис. 62, е).

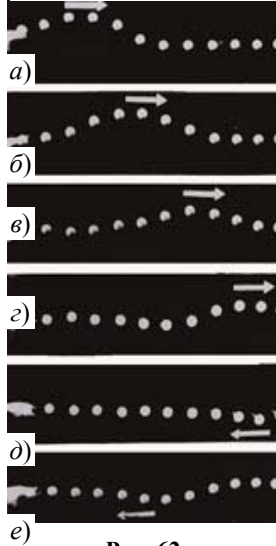


Рис. 62

связано с длиной волны соотношением

дискретной структуре, закрепленной с двух

колебания, на длине которой укладывается целое

число собственных колебаний периодической струны, закрепленной с двух сторон, и имеют том, что для непрерывной струны число степеней нельзя указать самой высокой моды. Для конечным число степеней свободы имеется моды имеет «зигзагообразный» характер (рис. 61, периодической структуры совершают частотой, называемой критической. Если структуры с помощью толчка или удара, то характерный для волнового движения.

16. Вынужденные колебания в механической периодической дискретной структуре

Приведем в поперечные колебания первый элемент дискретной периодической структуры силой, изменяющейся по гармоническому закону, когда все остальные элементы находятся в положении устойчивого

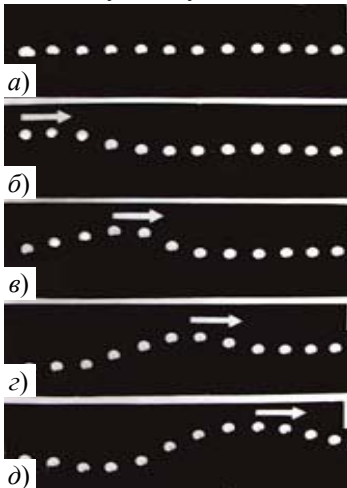


Рис. 63

равновесия (рис. 63). Возбуждение первого элемента структуры производится при помощи кривошипного механизма, приводимого в движение электрическим двигателем с понижающим редуктором. При указанном способе возбуждения мгновенное угловое смещение первого элемента изменяется по закону

$$\psi = \psi_m \cos \omega t ,$$

где ψ_m – амплитуда; ω – частота вынужденных колебаний. На опыте убеждаются, что в колебания последовательно приходят и другие элементы структуры, причем они совершают колебания с той же частотой и амплитудой, если не учитывать имеющиеся незначительное затухание. Однако, вследствие инертных и упругих свойств дискретной структуры, колебания элементов, следующих за первым, запаздывают по фазе. Причем, чем дальше элемент находится от источника колебаний, тем он позже начинает совершать колебания и его колебания запаздывают по фазе на большую величину по сравнению с колебаниями первого элемента.

На рис. 63 показано положение элементов периодической структуры в последовательные моменты времени, отличающиеся на $\Delta t = \frac{T}{4}$, т.е. на четверть периода коле-

баний. Таким образом, под действием вынужденных колебаний элементы структуры последовательно приходят в движение, которое воспринимается как распространение бегущей монохроматической когерентной волны. Следует отметить, что при

вынужденных колебаниях периодической структуры происходит перемещение ее состояния, т.е. движение формы или конфигурации, а не перенос самих элементов структуры. Под фазовой скоростью бегущей монохроматической волны понимается быстрота перемещения формы или конфигурации волны, т.е. воображаемой точки, имеющей постоянную фазу колебаний. О величине фазовой скорости можно судить по быстроте перемещения, например, любого выбранного «гребня» бегущей волны.

Таким образом, при возбуждении дискретной структуры гармонической силой в ней распространяется возмущение так, что мгновенное смещение с порядковым номером n описывается уравнением

$$\psi_n = \psi_m \cos(\omega t - n\beta),$$

где β – величина, характеризующая отставание по фазе последующего элемента структуры от предыдущего. При этом считается, что номер первого элемента равен $n = 0$. Учитывая, что волновое число k численно равно разности фаз колебаний двух элементов структуры, отстоящих на единичном расстоянии друг от друга, можно записать

$$k = \frac{\beta}{a},$$

где a – расстояние между соседними элементами структуры, находящимися в положении устойчивого равновесия. Учитывая, что $\beta = ka$, уравнение примет вид

$$\psi_n = \psi_m \cos(\omega t - kna) = \psi_m \cos(\omega t - kx), \quad (16.1)$$

где $x = na$ – координата произвольного элемента структуры. Данное уравнение называют *уравнением бегущей монохроматической волны*.

Процесс распространения волн в дискретной периодической структуре зависит от ее свойств. Найдем волновое уравнение для продольных колебаний структуры (рис. 64). Уравнение движения любого элемента с порядковым номером n ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) можно получить из основного закона динамики вращательного движения вокруг неподвижной точки O

$$J\ddot{\psi}_n = M_n,$$

где J – момент инерции одного из элементов относительно оси O вращения; ψ_n – угол поворота элемента с порядковым номером n ; M_n – момент сил, действующих на рассматриваемый элемент со стороны пружин.

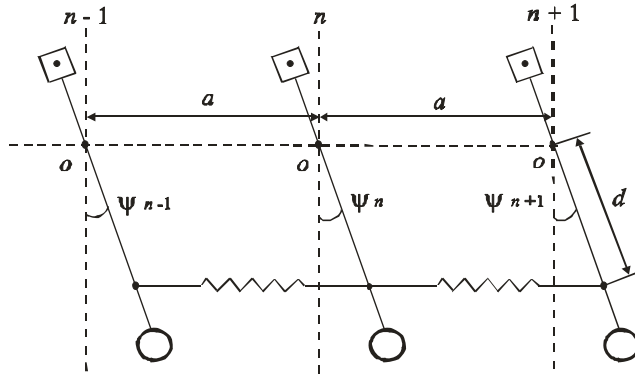


Рис. 64

Можно показать, что при малых углах отклонения элементов от положения равновесия при продольных колебаниях смещение элемента с порядковым номером n пропорционально величине

$$\Delta x_n = d(\psi_{n+1} - \psi_n) - d(\psi_n - \psi_{n-1}) \quad \text{или} \quad \Delta x_n = d(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}),$$

где d – расстояние от оси вращения элемента до точки крепления пружин к стержню. Сила упругости, действующая на элемент структуры с порядковым номером n , равна

$$F_n = \mu \Delta x_n = \mu d (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}),$$

где μ – коэффициент жесткости пружин.

Соответственно, момент сил, действующих на рассматриваемый элемент, относительно оси O при малых углах отклонения равен

$$M_n = F_n d = \mu d^2 (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}).$$

Подставляя это выражение в закон динамики вращательного движения, получим волновое уравнение движения произвольного элемента структуры при продольных колебаниях

$$\ddot{\psi}_n(t) = \frac{\mu d^2}{J} [\psi_{n+1}(t) - 2\psi_n(t) + \psi_{n-1}(t)].$$

Аналогично можно найти волновое уравнение для поперечных колебаний дискретной периодической структуры

$$\ddot{\psi}_n(t) = \frac{T_0 d^2}{aJ} [\psi_{n+1}(t) - 2\psi_n(t) + \psi_{n-1}(t)], \quad (16.2)$$

где T_0 – натяжения пружин, когда элементы находятся в положении равновесия; a – расстояние между элементами структуры, находящимися также в состоянии устойчивого равновесия.

Покажем, что уравнение бегущей волны (16.1) является решением волнового уравнения (16.2). Для этого в соответствии с формулой (16.1) запишем уравнение колебаний для элементов с порядковыми номерами $n, n+1, n-1$:

$$\begin{aligned} \psi_n &= \psi_m \cos[\omega t - n\beta]; \\ \psi_{n-1} &= \psi_m \cos[\omega t - (n-1)\beta]; \\ \psi_{n+1} &= \psi_m \cos[\omega t - (n+1)\beta]. \end{aligned}$$

Из формулы (16.1) имеем

$$\ddot{\psi}_n = -\omega^2 \psi_m \cos[\omega t - n\beta].$$

Подставляя полученные уравнения в (16.2), получим

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \psi_m \cos(\omega t - n\beta) = \\ & = -\frac{T_0 d^2}{aJ} \psi_m \{2 \cos(\omega t - n\beta) - \cos[\omega t - (n-1)\beta] - \cos[\omega t - (n+1)\beta]\} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \omega^2 \cos(\omega t - n\beta) = \\ & = \frac{T_0 d^2}{aJ} \{2 \cos(\omega t - n\beta) - \cos[(\omega t - n\beta) + \beta] - \cos[(\omega t - n\beta) - \beta]\}. \end{aligned}$$

Используя тригонометрическую формулу

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta,$$

получим после сокращения на $\cos(\omega t - n\beta)$

$$\omega^2 = 2 \frac{T_0 d^2}{aJ} (1 - \cos \beta).$$

Учитывая, что $(1 - \cos \beta) = 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$, найдем

$$\omega^2 = 4 \frac{T_0 d^2}{aJ} \sin^2 \frac{\beta}{2} \quad \text{или} \quad \omega = 2d \sqrt{\frac{T_0}{aJ}} \sin \frac{\beta}{2} = 2d \sqrt{\frac{T_0}{aJ}} \sin \frac{ka}{2},$$

где k – волновое число. Полученное выражение называется *уравнением дисперсии* для поперечных колебаний в дискретной структуре. Аналогичное уравнение можно получить для продольных колебаний

$$\omega = 2d \sqrt{\frac{\mu}{J}} \sin \frac{\beta}{2} = 2d \sqrt{\frac{\mu}{J}} \sin \frac{ka}{2}.$$

Из уравнений дисперсии следует: поскольку максимальная величина $\sin \frac{\beta}{2}$ равна единице, то самая высокая частота колебаний, которые могут распространяться в дискретной периодической структуре, равна $\omega_0 = 2d \sqrt{\frac{T_0}{aJ}}$ или $\omega_0 = 2d \sqrt{\frac{\mu}{J}}$, соответственно, для поперечных и продольных волн. Эти частоты называются *критическими*. Следовательно, в общем виде уравнение дисперсии можно записать

$$\omega = \omega_0 \sin \frac{\beta}{2} = \omega_0 \sin \frac{ka}{2}. \quad (16.3)$$

Так как при критической частоте $\sin \frac{\beta}{2} = 1$, то $\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, при возбуждении периодической структуры с частотой, равной критической, соседние элементы должны совершать колебания с разностью фаз π .

Прежде чем изучать поведение дискретной периодической структуры при различной частоте возбуждения ее переменной силой, исследуем уравнение дисперсии (16.3). График зависимости частоты от волнового числа, построенный на основании этой формулы, показан на рис. 65. Из графика следует, что отношение частоты к волновому числу не является постоянной величиной, а следовательно, фазовая скорость бегущих волн $v_{\text{фаз}} = \frac{\omega(k)}{k}$ зависит от частоты возбуждения периодической структуры. Найдем эту зависимость. Из уравнения (16.3) имеем

$$\frac{1}{2}ka = \arcsin \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Подставляя в это выражение вместо волнового числа его значение $k = \frac{\omega}{v_{\text{фаз}}}$, получим

$$v_{\text{фаз}} = \frac{1}{2} a \omega \frac{1}{\arcsin \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{или} \quad v_{\text{фаз}} = \frac{1}{2} a \omega_0 \frac{\omega / \omega_0}{\arcsin \frac{\omega}{\omega_0}}. \quad (16.4)$$

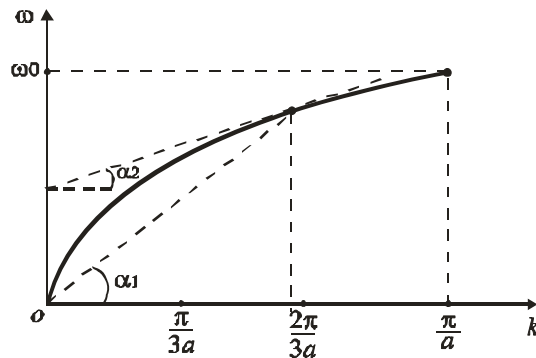


Рис. 65

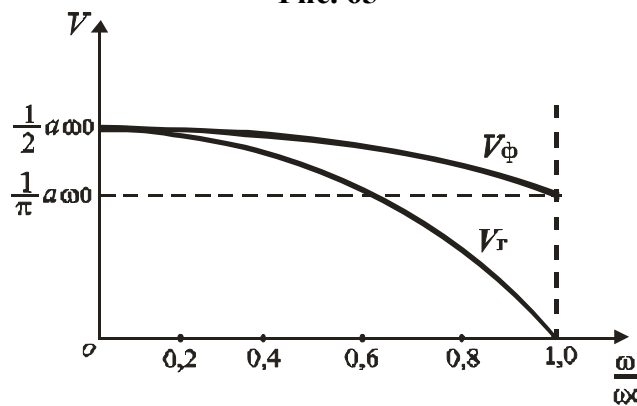


Рис. 66

Графическая зависимость фазовой скорости волн в дискретной структуре от частоты возбуждения представлена на рис. 66.

Легко показать, что фазовая скорость волн принимает максимальное значение $v_{\text{ф max}} = \frac{1}{2} a \omega_0$ при частоте $\omega \rightarrow 0$. Действительно,

пользуясь правилом Лопиталя для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$, имеем

$$\lim_{\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0} \frac{\omega / \omega_0}{\arcsin \frac{\omega}{\omega_0}} = \lim_{\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = 1.$$

Из формулы (16.4) видно, что при критической частоте $\omega = \omega_0$ фазовая скорость имеет минимальное значение

$$v_{\text{ф min}} = \frac{1}{2} a \omega_0 \frac{1}{\arcsin 1} = \frac{1}{\pi} a \omega_0.$$

Таким образом, при увеличении частоты возбуждения структуры фазовая скорость бегущей волны уменьшается, что подтверждается опытами. Особенно это уменьшение становится заметным при приближении к критической частоте. При увеличении частоты возбуждения структуры уменьшается длина бегущей волны. При частоте ω , равной критической ω_0 , разность фаз колебаний между соседними элементами достигает значения $\beta = \pi$, и все элементы совершают противофазные колебания, а длина волн становится минимальной $\lambda_{\text{min}} = 2a$, где a – расстояние между соседними элементами в состоянии покоя. При частоте $\omega > \omega_0$ длина волны окажется меньше, чем $2a$ и распространение бегущих волн становится невозможным.

Из графика дисперсии (рис. 65) следует, что фазовая скорость бегущей волны при частоте ω определяется наклоном хорды, проведенной из начала координат в эту точку, т.е.

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega(k)}{k} = \text{tg}\alpha_1.$$

Групповая скорость, согласно ее определению, характеризуется наклоном касательной в этой точке, т.е.

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \text{tg}\alpha_2.$$

Следовательно, групповая скорость волн отличается от фазовой скорости. Найдем связь между этими скоростями. На основании уравнения дисперсии (16.3) имеем

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} a\omega_0 \cos \frac{ka}{2}.$$

Учитывая, что $k = \frac{\omega}{v_{\text{фаз}}}$, получим связь между фазовой и групповой скоростями

$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{2} a\omega_0 \cos \frac{\omega a}{2v_{\text{фаз}}}.$$

Для нахождения зависимости групповой скорости от частоты возбуждения подставим в полученную формулу выражение (16.4)

$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{2} a\omega_0 \cos \arcsin \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Учитывая, что $\arcsin \frac{\omega}{\omega_0} = \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$, окончательно получим

$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{2} a\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

График зависимости групповой скорости от частоты возбуждения структуры представлен на рис. 66. Из полученной формулы следует, что при $\omega \rightarrow 0$ групповая скорость имеет максимальное значение

$$v_{\text{гр max}} = \frac{1}{2} a\omega_0,$$

которое совпадает с $v_{\text{ф max}}$. При критической частоте $\omega \rightarrow \omega_0$ $v_{\text{гр min}} = 0$.

Наличие дисперсии в периодической дискретной структуре приводит к тому, что кратковременный импульс или волновой цуг ограниченной протяженности, представляющий собой суперпозицию гармонических волн с различными волновыми числами, будут менять свою форму по мере движения в структуре, так как составляющие его компоненты с различными длинами волн распространяются с разной фазовой скоростью. Это явление можно наблюдать на опыте. Действительно, отклонив первый элемент вверх от положения равновесия и возвратив его быстро в исходное положение, наблюдают движение импульса с групповой скоростью (рис. 67, а, б). По мере движения импульса вдоль структуры замечают его уширение. Очевидно, что уширение импульса будет тем больше, чем больше расстояние он пройдет вдоль линии. Поэтому уширение отраженного импульса от неподвижного конца линии проявится особенно заметно (рис. 67, в).

17. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

Изучая звук и свет, механические и электромагнитные колебания, мы сталкиваемся с поразительной общностью этих явлений. Значительная часть механических движений, акустические процессы, переменный ток, радиотехника, волновая оптика, многие вопросы атома и ядра – вот далеко не полный перечень явлений, которые описываются на уровне колебательных процессов. Несмотря на различную природу физических процессов в колебательных системах, все они описываются единым математическим аппаратом, что позволяет проводить далеко идущие аналогии, которые имеют важное значение в науке и технике. Сравним механические и электрические колебательные системы.

Механическая система (рис. 68)

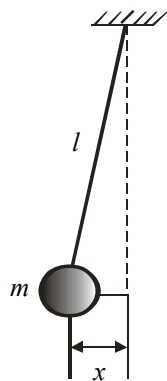


Рис. 68

Механические величины

- Смещение относительно положения равновесия x
- Скорость $v = x'$
- Ускорение $a = x''$
- Масса груза m
- Коэффициент сопротивления r
- Внешняя сила F
- Отношение силы тяжести к длине маятника $\frac{mg}{l}$

Электрическая система (рис. 69)

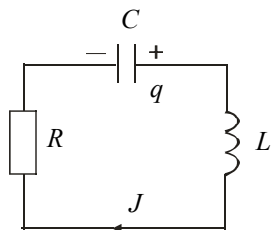


Рис. 69

Электрические величины

- Электрический заряд q
- Электрический ток $J = q'$
- Скорость изменения тока $J' = q''$
- Индуктивность L
- Активное сопротивление R
- Внешняя ЭДС ε
- Величина, обратная емкости $\frac{1}{C}$

Для пружинного маятника величиной, аналогичной величине $\frac{1}{C}$, является жесткость k . В связи с этим для получения соотношений, справедливых для пружинного маятника, необходимо в формулу математического маятника сделать подстановку

$$\frac{g}{l} \rightarrow \frac{k}{m}.$$

Собственные незатухающие колебания

Уравнения, описывающие колебания в механической и электрической системах

Второй закон Ньютона при достаточно малых смещениях маятника от положения равновесия

$$mx'' = -\frac{mg}{l}x,$$

$$x'' + \frac{g}{l}x = 0.$$

Так как $\frac{g}{l} = \omega_0^2$, то уравнение принимает вид

$$x'' + \omega_0^2 x = 0.$$

Второе правило Кирхгофа

$$Lq'' + \frac{1}{C}q = 0,$$

$$q'' + \frac{1}{LC}q = 0$$

Так как $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, то уравнение принимает вид

$$q'' + \omega_0^2 q = 0.$$

Решение этих уравнений (что легко проверить подстановкой) имеет вид

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где x_m – амплитуда колебаний.

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где q_m – амплитудное значение заряда.

Период собственных колебаний

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Собственные затухающие колебания

Механическая система с трением, сила которого пропорциональна первой степени скорости: $F_m = -rx'$

Электрический контур с активным сопротивлением R

Уравнения, описывающие колебания в системах

$$mx'' = -rx' - \frac{mg}{l}x,$$

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0,$$

$$x'' + \frac{r}{m}x' + \frac{g}{l}x = 0.$$

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Полученные уравнения принято записывать в виде

$$x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = 0,$$

$$q'' + 2\alpha q' + \omega_0^2 q = 0,$$

где введено обозначение

$$\alpha = \frac{r}{2m}.$$

где

$$\alpha = \frac{R}{2L}.$$

Коэффициент α называется *показателем затухания*. Решение дифференциальных уравнений приводит к следующим результатам.

1. *Потери энергии в системе малы* ($\alpha < \omega_0$). Решение имеет вид:

$$x = x_m e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$q = q_m e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

где $e = 2,718$ – основание натуральных логарифмов, а

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Постоянные величины x_m , q_m и φ_0 определяются начальными условиями возбуждения колебаний. Вследствие затухания колебания в системе не являются строго периодическими. Под их периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ обычно понимают интервал времени между двумя последовательными отклонениями от положения равновесия в одну сторону. Как видно из решений, амплитуда собственных колебаний в реальной системе убывает со временем. *Логарифмический декремент затухания* определяет отношение двух любых последовательных максимальных смещений, разделенных во времени одним периодом

$$\delta = \ln \frac{x_{mt}}{x_{m(t+T)}} = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\omega},$$

и характеризует относительную убыль амплитуды за период. Добротность колебательной системы обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания и определяет относительную убыль энергии колебаний за период

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha T}.$$

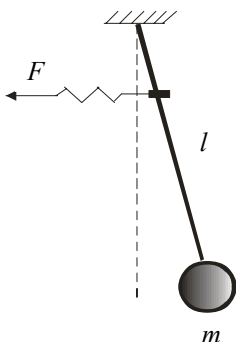
2. *Потери энергии в системе велики* ($\alpha > \omega_0$). При большом трении в механической системе движение имеет аperiодический характер, и возникновение в ней колебаний становится невозможным. При большом активном сопротивлении колебательного контура в нем происходит аperiодический разряд конденсатора. Сопротивление, при повышении которого в системе нет колебаний, называется *критическим*

$$r_{кр} = 2m\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Вынужденные колебания возникают в колебательных системах под действием внешней периодической силы F или ЭДС.

Механическая система



Электрическая система

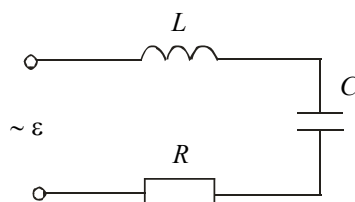


Рис. 70

На математический маятник со стороны пружины, длина которой периодически изменяется, действует сила, изменяющаяся по закону

$$F = F_m \cos \omega t ,$$

где F_m – амплитудное значение вынуждающей силы.

Дифференциальные уравнения движения принимают вид

$$x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = \frac{F_m}{m} \cos \omega t .$$

В случае установившегося движения решения дифференциальных уравнений имеют вид

$$x = x_m \cos(\omega t - \varphi) .$$

Амплитуды x_m или q_m и фаза φ вынужденных колебаний не зависят от начальных условий и определяются параметрами системы и силой или ЭДС

$$x_m = \frac{F_m}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} .$$

Установившиеся вынужденные колебания являются также гармоническими с частотой, равной вынуждающей частоте. Исследуя зависимость амплитуды вынужденных колебаний от вынуждающей частоты на максимум, можно убедиться, что $x_m(\omega)$ и $q_m(\omega)$ имеют максимум при

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} .$$

Эта частота называется *резонансной*, а само явление возрастания амплитуды при приближении к резонансной частоте ω_p называется *резонансом*. При малых затуханиях можно считать, что

$$\omega_p \cong \omega_0 .$$

Фаза вынужденных колебаний при $\omega \ll \omega_p$ совпадает с фазой вынуждающего воздействия, в области резонанса при $\omega = \omega_p$ разность фаз φ близка к $\pi/2$, а при $\omega \gg \omega_p$ разность фаз стремится к π .

Часто (а в электрических явлениях почти всегда) большой интерес представляет резонансная кривая для скорости $v_m(\omega)$ или тока $J_m(\omega)$

$$x' = \omega x_m \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) ,$$

или

$$v = v_m \cos(\omega t - \psi) ,$$

где

$$v_m = \omega x_m = \frac{\omega F_m}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}} ,$$

Рис. 71

На колебательный контур воздействует периодическая ЭДС от внешнего источника

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos \omega t ,$$

где ε_m – амплитудное значение ЭДС.

$$q'' + 2\alpha q' + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_m}{L} \cos \omega t .$$

$$q_m = \frac{\varepsilon_m}{L\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} .$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

$$q' = \omega q_m \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) ,$$

$$J = J_m \cos(\omega t - \psi) ,$$

$$J_m = \omega q_m = \frac{\omega \varepsilon_m}{L\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}} ,$$

$$\psi = \varphi - \frac{\pi}{2} .$$

Произведя несложные преобразования, получим

$$v_m = \frac{F_m}{\sqrt{\left(\omega m - \frac{mg}{\omega l}\right)^2 + r^2}},$$

$$J_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}.$$

Для фазового угла ψ между скоростью маятника и вынуждающей силой или между током и ЭДС получаем

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\omega m - \frac{mg}{\omega l}}{r},$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Разность фаз между скоростью (током) и силой (ЭДС) при $\omega \ll \omega_0$ стремится к $-\pi/2$; при резонансе $\psi = 0$, а при $\omega \gg \omega_0$ разность фаз ψ приближается к $+\pi/2$. Максимальные значения скорости и тока при резонансе равны

$$v_{mp} = \frac{F_m}{r}.$$

$$J_{mp} = \frac{\varepsilon_m}{R}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии рассмотрены лишь основные вопросы теории механических колебаний, необходимые студентам для последующего изучения колебательных явлений другой физической природы: переменный ток, электромагнитные колебания и волны, световые и квантововолновые процессы и т.д.

Колебательные процессы любой физической природы описываются едиными математическими уравнениями, что позволяет проводить далеко идущие аналогии и осуществлять в процессе обучения единый подход к их рассмотрению. Плодотворность такого метода сравнений и аналогий общеизвестна не только в педагогической, но и научной мысли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горелис, Г.С. Колебания и волны / Г.С. Горелис. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 572 с.
2. Малов, Н.Н. Основы теории колебаний / Н.Н. Малов. – М. : Просвещение, 1971. – 198 с.
3. Молотков, Н.Я. Изучение колебаний на основе современного эксперимента / Н.Я. Молотков. – Киев : Радянська школа, 1988. – 160 с.
4. Стрелков, С.П. Введение в теорию колебаний / С.П. Стрелков. М. : Наука, 1964. – 437 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ПОНЯТИЕ О КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ	4
2. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА	5
3. ЭНЕРГИЯ СОБСТВЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ	12
4. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА И ДРУГИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ	13
5. НЕГАРМОНИЧЕСКИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ...	20
6. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ	23
7. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ	28
8. СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ, НАПРАВЛЕННЫХ ПО ОДНОЙ ПРЯМОЙ	29
9. СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ	36
10. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ	40
11. МЕХАНИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ	45
12. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ	50
13. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ	52
14. СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ	58
15. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ	64
16. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЧЕСКОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ СТРУКТУРЕ	69
17. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ	77
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	84
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	85

