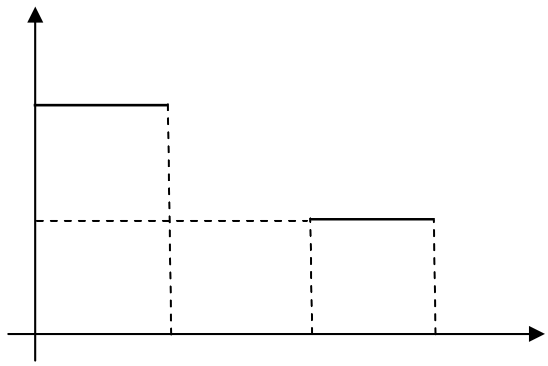
ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ИННОВАЦИИ



♦ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ♦

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ИННОВАЦИИ

Методические указания
для студентов, обучающихся по направлению
подготовки бакалавров 220600 «Инноватика»

Тамбов
Издательство ТГТУ
2007

УДК 330:001.895
ББК Уя73-5
П58

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Р е ц е н з е н т

Доктор экономических наук, доцент
Л.В. Пархоменко

С о с т а в и т е л ь

А.И. Попов

П58 Экономические модели в теории инноваций : метод. указ. / сост. А.И. Попов. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 28 с. – 30 экз.

Систематизированы основные подходы к разработке экономико-математических моделей в теории управления инновациями, приведен список рекомендуемой литературы и задачи для самостоятельной работы.

Предназначены для проведения практических занятий по курсу «Теория инноваций» для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 220600 «Инноватика».

УДК 330:001.895
ББК Уя73-5

Учебное издание

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ИННОВАЦИЙ

Методические указания

Составитель

ПОПОВ Андрей Иванович

Редактор З.Г. Чернова
Компьютерное макетирование Т.Ю. Зотовой
Корректор О.М. Ярцева

Подписано в печать 17.10.2007
Формат 60×84/16. 1,63 усл. печ. л. Тираж 30 экз. Заказ № 616

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Логика развития экономических моделей ничем не отличалась от развития, скажем, моделей механических и состояла в последовательном движении от простых к более сложным. В частности, от статических соотношений (соотношений, не зависящих от времени) – к динамическим (рассматривающих развитие процессов во времени), от скалярных задач (задач с одной переменной) – к многомерным, от линейных – к нелинейным. Однако, если в классической механике прогресс был неразрывно связан с математикой и наоборот, то активное вовлечение уже прекрасно разработанных к тому времени методов математического анализа в экономику пришлось лишь на вторую половину прошлого века. Во многом это обусловлено трудностями моделирования экономики как объекта природы (до сих пор нет такого набора общепризнанных экономических законов, которые были бы столь же широко применяемы, как, скажем, закон Гука или закон Кулона).

Первые попытки применения математических методов в моделировании экономики имели место несколько веков назад. Дифференциальное исчисление одним из первых использовал О. Курно (1838). Благодаря использованию этого аппарата Вальрас (1874) и Парето (1908) сформулировали теорию общего экономического равновесия, развитую впоследствии в «Величине и капитале» Хиксом (1939) и «Основах экономического анализа» Самуельсоном (1937). В ту же эпоху была разработана и успешно применена методика межотраслевых балансовых моделей (30-е годы, Госплан СССР), аппарат производственных функций (Митчерлих, Ч. Кобб, П. Дуглас, 20 – 30-е годы XX века).

С развитием аппарата теории автоматического управления появились школы, рассматривающие экономику как одну из ее прикладных областей (Форрестер, 1960-е годы). Во второй половине XX века нашли применение в экономике и такие новейшие разделы математики, как выпуклый анализ, топология, теория катастроф и детерминированного хаоса (Никайдо, 1968; Эрроу и Хан, 1971; В.-Б. Занг, 1999 и др.).

При изучении теории инноваций целесообразно опираться на хорошо разработанный аппарат теории автоматического управления. Это и определяет инструменты моделирования: мы должны постараться описать процессы, происходящие в экономических системах, дифференциальными (или конечно-разностными) уравнениями. Обычно это линейные стационарные уравнения, однако в некоторых случаях окажется необходимым использовать нестационарные и нелинейные дифференциальные уравнения.

В тех случаях, когда ставится задача не только анализа, но и управления экономикой, оказываются востребованными теория неавтономных (неоднородных) дифференциальных уравнений или теория управления, в том числе аппарат теории оптимального управления.

ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ*

1. КИБЕРНЕТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОТРАСЛИ

«Кибернетическое представление» означает, что мы рассматриваем некоторую систему (техническую, биологическую, экономическую) с точки зрения соотношения «вход»–«выход». В данном случае считаем, что на вход отрасли поступают определенные ресурсы, а выходом является конечное *потребление*, иными словами, «съем» с отрасли, тот продукт, который ни в каком виде в отрасль не возвращается. Эта картина представлена на рис. 1, где введены переменные: W – ресурсы, C – непроизводственное (конечное) потребление

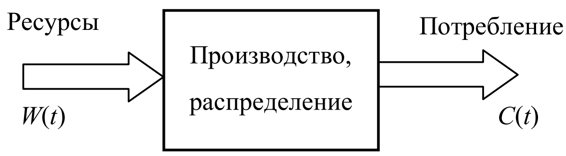


Рис. 1. Представление экономической системы в параметрах «вход»–«выход»

В соответствии со сложившимся в макроэкономике набором показателей можно представить процессы, происходящие внутри блока «Производство, распределение» более подробно (рис. 2)

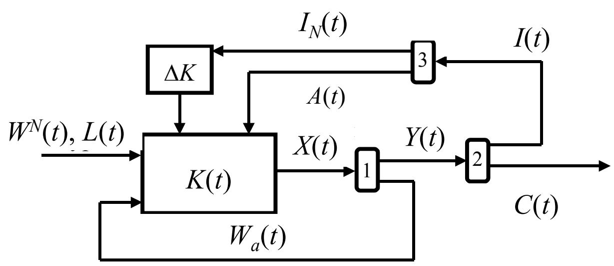


Рис. 2. Схема потоков производства и распределения продукта

На схеме более детально представлен процесс производства и распределения продукта в рамках одной отрасли. «Сердцем» отрасли является процесс производства продукта, для чего необходимо оборудование, помещения и т.п. Эти активы называют *основными фондами* или *основным капиталом* (блок $K(t)$).

* Использованы материалы, подготовленные Институтом инноватики СПб. ГПУ.

«Скругленные» прямоугольные блоки на схеме обозначают разделение (перераспределение) товарного или финансового потока. Так, в блоке 1 необходимо «оставить» часть произведенного продукта для обеспечения производственного процесса. Например, при производстве электрической энергии необходимо освещать машинный зал – эта часть произведенного *валового продукта* называется *производственным потреблением*. Остальное называется *чистым* или *конечным продуктом*.

В блоке 2 происходит разделение чистого продукта на часть, которая потребляется населением, и часть, которая вернется в производство в виде *инвестиций*. Наиболее вероятно, что инвестиции означают финансовые средства, т.е. в блоке 2 распределяется то, что отдается (потребление), и то, что продается (инвестиции).

Средства, вырученные от продажи (инвестиции), тоже разделяются в блоке 3 на *амортизационные расходы* (расходы по поддержанию основных фондов в порядке) и на средства, которые предполагается вложить в развитие производства, т.е. на ввод в строй новых производственных фондов (*чистые инвестиции*).

Отметим, что некоторые потоки возвращаются обратно в производство и поэтому выглядят на схеме как обратные связи, хорошо известные по курсу теории автоматического управления. Однако важно иметь в виду, что в обратной связи «распределения» сигнала не происходит, сигнал – это информация, поэтому его можно просто скопировать. А в нашей модели поток не копируется, а разделяется.

Вводимые переменные:

W^N – природные ресурсы;
X – валовой продукт, в данном случае его можно назвать и ВВП;
C – непроизводственное потребление;
L – труд;
K – средства труда (основные производственные фонды);
W_a – производственное потребление;
Y – конечный продукт;
I – валовые капитальные вложения;
N – чистые капитальные вложения;
I_N – чистые инвестиции;
A – амортизационные отчисления.

Одноотраслевые соотношения баланса

Если в распределяющих органах не происходит потерь (нет хищений), то должны выполняться соотношения баланса, т.е. то, что пришло в блок распределения, должно быть равно сумме того, что из него вышло. Запишем эти утверждения формально:

$$I(t) = I_N(t) + A(t); \qquad X(t) = Y(t) + W_a(t); \qquad Y(t) = I(t) + C(t);$$

или
$$X(t) = I(t) + C(t) + W_a(t). \tag{1}$$

Все переменные должны быть приведены к одной размерности. Самым коротким путем к этому стало бы стоимостное выражение каждого продукта. При этом отметим, что, как правило, переменные в балансовых соотношениях имеют размерность потока, т.е., например, млн. р. в год.

2. ОДНООТРАСЛЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ

Как мы уже предположили, инвестиции, сделанные за некоторый период времени, идут на приращение производственных фондов и амортизационные расходы. Переведем это на математический язык в предположении, что этот период времени равен одному году:

$$I_t = q\,\Delta K_t + A\,,$$

где $\Delta K_t = K_{t+1} - K_t$ – прирост основных производственных фондов в году t; q – коэффициент пропорциональности, параметр модели, отражающий возможное несоответствие инвестиций стоимости основных фондов, на них построенных. Обычно будем предполагать, что $q = 1$.

Предположим теперь, что изменение производственных фондов происходит без скачков и изломов. Это предположение в достаточной мере соответствует действительности, если мы рассматриваем макроэкономические процессы, где любой параметр и переменная неизбежно являются результатом осреднения. В математике такую функцию называют дифференцируемой. Итак, если $K(t)$ дифференцируема, то в последнем уравнении можно перейти от дискретного времени к непрерывному. Тогда получаем следующее соотношение в приращениях:

$$I(t)dt = dK(t)+A(t)d. \tag{2}$$

С учетом балансовых соотношений (1) получаем

$$\frac{dK(t)}{dt} = X(t) - A(t) - C(t) - W_a(t)\,. \tag{3}$$

Учтем еще некоторые связи между переменными, прямо вытекающие из их экономического смысла. Во-первых, амортизационные расходы, как правило, составляют некоторую долю от производственных фондов:

$$A(t) = \mu K(t).$$

Коэффициент μ называют *коэффициентом амортизации*, и величина его зависит от типа производства. Скажем, для недвижимости он невысок, для автотранспорта – выше, для электронно-вычислительной техники – еще выше. Понятно также, что экономический смысл требует, чтобы $0 < \mu < 1$. (Если бы μ оказался больше единицы, это означало, что из-за амортизации основные фонды за единицу времени сокращаются более, чем на 100 %).

Далее производственные расходы также обычно составляют некоторую, меняющуюся от отрасли к отрасли, долю валового продукта:

$$W_a(t) = aX(t).$$

Для коэффициента, характеризующего производственное потребление, также возможно принимать значения в области $0 < a < 1$. Его называют *коэффициентом прямых затрат* или *нормой производственного потребления* или *материалоемкостью*.

Учитывая эти предположения, получаем более замкнутое соотношение между введенными параметрами:

$$\frac{dK(t)}{dt} = -\mu K(t) + (1-a)X(t) - C(t)\,. \qquad (4)$$

2.1. Открытая одноотраслевая модель Леонтьева

Соотношение (4) получено в более чем осторожных экономических предположениях, и потому его применимость весьма ограничена. Действительно, для того чтобы выяснить, как будут развиваться производственные фонды, нужно знать не только параметры (константы), но и функции, описывающие валовый продукт и конечное потребление. Хорошо бы попробовать сократить число неизвестных, выдвинув новые гипотезы о связях между ними.

Одну из таких гипотез принято называть именем американского экономиста русского происхождения, лауреата Нобелевской премии Василия Леонтьева.

В рамках этой гипотезы считается, что амортизационные расходы отсутствуют, а инвестиции за некоторый период времени вызывают пропорциональный прирост в валовом продукте:

$$dX(t) = 1/\eta\, I(t)dt\,.$$

Коэффициент пропорциональности η отражает возможное несоответствие цены продукта и размера инвестиций. Отметим, что этим производственные фонды как бы выводятся за рамки рассмотрения. По существу, вводится некоторый элементарный прообраз производственной функции, которая будет рассмотрена позже.

Тогда из баланса (1), учитывая то, что $A(t) = 0$ и $W_a(t) = aX(t)$, получаем

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{1}{\eta}\big[(1-a)X(t) - C(t)\big]. \qquad (5)$$

Это соотношение именуется открытой одноотраслевой моделью Леонтьева, так как для вычисления валового продукта нам необходимо знать конечное потребление. Действительно, для этого можно воспользоваться квадратурной формой решения данного неоднородного дифференциального уравнения

$$X(t) = \frac{1}{\eta}\left[X_0 e^{(1-a)t} - \int_0^t e^{(1-a)\tau} C(t-\tau)d\tau\right],$$

где $X_0 = X(0)$ – уровень валового производства в базовый (нулевой) момент времени.

2.2. Замкнутая одноотраслевая модель Леонтьева

Для получения замкнутой модели делаются дополнительные предположения:

1. Количество трудоспособного населения (трудовые ресурсы) пропорционально общественному потреблению (конечному потреблению). Коэффициент пропорциональности γ называют *нормой потребления*:

$$C(t) = \gamma L(t).$$

2. Валовый выпуск пропорционален количеству трудоспособного населения (трудовым ресурсам). Коэффициент пропорциональности b называют *нормой трудоемкости*.

$$L(t) = bX(t).$$

Отметим, что эти дополнительные предположения позволяют, наконец, связать валовой продукт и потребление в последнем уравнении и получить так называемую замкнутую модель. Тогда имеем

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{1-a-b\gamma}{\eta}X(t)\,.$$

С математической точки зрения полученное уравнение относится к простейшему типу: однородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянным коэффициентом. Его решение

$$X(t) = X_0 e^{pt}\,,$$

где

$$p = \frac{1-a-b\gamma}{\eta},\;\; X_0 = X(0)\,.$$

2.3. Нестационарные модели Леонтьева

Предположения о неизменности (стационарности) параметров, введенных для описания экономики отрасли, могут не соответствовать действительности. Скажем, с развитием технологии доля производственного потребления a может из года в год уменьшаться. Тогда мы приходим к тем же по структуре уравнениям, но с переменными коэффициентами. Зная закон изменения параметров, решение можно найти и в этом случае.

В самом общем случае предполагаем, что все параметры зависят от времени:

$$\gamma = \gamma\ (t);\quad \eta = \eta(t);\quad a = a(t);\quad b = b(t);$$

тогда

$$y = C_0 e^{\int_0^t p(t)dt}.$$

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

Приведем еще две модели экономики, которые обходятся без моделирования производства (путем введения производственной функции, т.е. описания того, как ресурсы превращаются в продукт).

Вернемся к соотношениям баланса, в частности, к ключевому соотношению распределения конечного продукта между потреблением и инвестициями, написанным для какого-то года t:

$$Y_t = C_t + I_t\ .$$

Сделаем предположение о том, что ВВП следующего года полностью определяется спросом текущего года, т.е. о том, что предприниматели производят не столько, сколько смогут, а столько, каков спрос. Это означает, что справедливо следующее соотношение:

$$C_t + I_t = Y_{t+1}. \tag{6}$$

Если C_t и I_t являются независимыми (заданными извне, экзогенными) функциями, то задача определения зависимости от времени (динамики) конечного продукта тривиальна. Однако интуитивно ясно, что существует связь между результатом труда и потреблением. Если нам довелось заработать больше, то мы позволим себе потратить несколько больше, чем обычно. Формализация этих предположений относится к заслугам Кейнса, Самуельсона и Хикса. Суть двух предложенных ниже моделей заключается в различных гипотезах о том, как спрос зависит от ВВП в текущем году.

3.1. Модель Кейнса

Кейнс предполагает, что инвестиции являются некоторой заданной величиной (экзогенной), а спрос текущего года является величиной, зависящей от производства в этом году. Иными словами, предполагается, что спрос составляет не постоянную величину, а постоянную величину плюс некоторая доля от ВВП:

$$C_t = C_A + cY_t,\qquad 0 < c < 1. \tag{7}$$

Неизменным остается уровень автономного потребления C_A. Параметр, характеризующий долю: c – *склонность к потреблению*.

Подставляя эти соотношения в (6), получаем конечно-разностное уравнение:

$$Y_{t+1} - cY_t = C_A + I_t\ .$$

Последнее уравнение составлено в целях наглядности для дискретного времени. Перейдем к непрерывным переменным: тогда 1 в индексе «заменяется» на Δt, и в пределе получаем

$$\frac{1}{1-c}\frac{dY}{dt} + Y = \frac{C_A + I}{1-c}\ .$$

Здесь инвестиции предполагаются независимой функцией, т.е. они «появляются» не как результат продажи продукта, а «извне». Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. Если задаться какой-либо схемой инвестирования (программой) в $I^*(t)$ и начальными условиями (начальным уровнем ВВП) $Y(t_0)$, уравнение можно разрешить относительно Y и получить картину изменения уровня ВВП во времени.

Можно решать и обратную задачу: по требуемому уровню $Y(T)$, где T – горизонт планирования, определить требуемый для этого закон инвестирования $I^*(t)$. В частности, в последнее время признана чрезвычайно актуальной следующая постановка задачи: $Y(T) = 2Y(t_0)$, где $t_0 = 2004$ год, $T = 2008$ год.

3.2. Модель Самуельсона–Хикса

Самуельсон и Хикс к предположениям Кейнса добавляют еще и то, что спрос на инвестиции в текущем году является линейной функцией от прироста ВВП за предыдущий год:

$$I_t = I_A + r(Y_t - Y_{t-1}).$$

Неизменным (автономным) остается уровень автономных инвестиций I_A . Параметр, характеризующий зависимость: r – *акселератор*. Учитывая (6) и (7), получаем для дискретного времени:

$$Y_{t+1} - 2Y_t + Y_{t-1} = C_A + I_A - (1-c)Y_t - (1-r)(Y_t - Y_{t-1})\ .$$

Аналогичным образом, переходя к непрерывным переменным, получаем

$$\frac{1}{1-c}\cdot\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{1-r}{1-c}\cdot\frac{dY}{dt} + Y = \frac{C_A + I_A}{1-c}\ .$$

Поскольку мы предположили постоянство автономных инвестиций и потребления, то, зная их значения, мы можем легко определить динамику изменения $Y(t)$. Для этого необходимо знать два начальных условия: $Y(t_0)$, $\dot{Y}(t_0)$.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В ОСВОЕНИИ КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЙ

Вернемся к общей схеме потоков отрасли (предприятия), приведенной на 0. Верхняя часть схемы относится к процессу превращения инвестиций Idt в новые основные фонды dK. Этот процесс мы договорились описывать уравнением (2). Наличие или отсутствие амортизационных расходов будет не важно для основных выводов данного параграфа. Примем, что амортизация есть и подчиняется простой модели $A = \mu K$.

В соответствии с (2) преобразование «инвестиции–фонды» происходит мгновенно. В реальной жизни, очевидно, для того, чтобы перевести полученные инвестиции в новые производственные мощности (часто говорят «освоить инвестиции»), требуется время. Например, от нескольких дней, если речь идет о покупке новых компьютеров, до нескольких лет, если речь идет о строительстве новых корпусов завода. Тогда в (2) необходимо заменить $I(t)$ на новую, вообще говоря, независимую переменную $V(t)$, которая и является фактическим объемом новых основных фондов, вводимых в момент времени t:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + V . \tag{8}$$

Наша задача – предложить экономически разумную математическую модель превращения инвестиций в новые основные фонды с учетом эффекта запаздывания.

Для учета запаздывания в кибернетике обычно используют так называемое «звено чистого запаздывания на время τ». Его математическое описание в пространстве времени выглядит весьма просто:

$$V(t) = I(t-\tau). \tag{9}$$

В экономике τ называют *лагом* или *сосредоточенным* или *фиксированным лагом*. Эта модель запаздывания хорошо работает для учета задержек, связанных, скажем, с банковскими операциями или транспортировкой продукта. Однако для моделирования процесса постепенного, от 0 до 100 % освоения выделенного объема средств, эта схема, очевидно, подходит плохо. Для этого используют модель звена с распределенным запаздыванием.

Предположим, что некоторая функция, описывающая поток инвестиций во времени, задана. Также предположим, что у вводимых в момент времени t основных фондов доля, появляющаяся благодаря инвестициям, сделанным в момент времени τ, равна N. Это значит, что мы считаем заданной функцию $N(t, \tau)$.

Тогда, суммируя все за историю инвестиции, получаем, что в данный момент времени t

$$V(t) = \int_{-\infty}^{t} N(t,\tau) I(\tau) d\tau . \tag{10}$$

Будем также считать, что запаздывание в освоении капиталовложений не меняется со временем. Иными словами мы считаем, что для освоения одной и той же суммы всегда (например, что сейчас, что 20 лет назад) нужно было одно и то же количество времени. (Естественно, это некоторая идеализация, так как в действительности, как правило, происходит сокращение времени освоения ввиду, например, совершенствования технологий.) Это означает, что нам нет смысла рассматривать $N(t, \tau)$ как функцию двух аргументов, так как на самом деле можно говорить о доле осваиваемых инвестиций как функции запаздывания: $N(\theta)$, где $\theta = t - \tau$. В таком случае принято говорить о *стационарности* $N(\theta)$, так как она не зависит явно от времени t. Тогда (10) упрощается и допускает замену переменных с изменением пределов интегрирования:

$$V(t) = \int_{0}^{\infty} I(t-\theta) N(\theta) d\theta . \tag{11}$$

Это уравнение вместе с уравнением (8), вообще говоря, составляют полную систему уравнений, описывающих динамику основных фондов при наличии распределенного запаздывания в освоении инвестиций. Однако система уравнений, составленная частично из интегральных, частично из дифференциальных, нуждается в доведении до вида, более удобного для анализа. В частности, вряд ли легко вывести или найти формулы нахождения общего решения такой системы, критерии ее устойчивости и т.п. Поставим задачу свести (11) к дифференциальному уравнению. Это удобно сделать, учтя некоторые свойства $N(\theta)$, которые можно предугадать, еще не выбрав или не найдя некоторую конкретную функцию.

1. Эффект запаздывания «размазывает» (перераспределяет) во времени поток инвестиций, однако сумма инвестиций за весь период при этом не имеет права измениться. Это означает, что должно быть выполнено условие нормировки 1:

$$\int_{0}^{\infty} N(\theta)\, d\theta = 1 .$$

2. Кроме того, разумно ожидать, что доля вводимых благодаря сделанным ранее инвестициям основных фондов тем меньше, чем раньше они были сделаны. Это означает, что функция $N(\theta)$ должна монотонно убывать с ростом θ.

Получим теперь уравнение для скорости ввода капитальных вложений. Для этого продифференцируем левую и правую части (11):

$$\dot{V}(t) = \int_{0}^{\infty} \frac{\partial I(t-\theta)}{\partial t} N(\theta) d\theta .$$

Поскольку $\frac{\partial I(t-\theta)}{\partial t} = -\frac{\partial I(t-\theta)}{\partial t}$, применяя правило дифференциро-вания по частям и учитывая то, что $\lim\limits_{\theta\to\infty} N(\theta) = 0$, получим

$$\dot{V}(t) = N(0)I(t) + \int\limits_0^\infty I(t-\theta)\dot{N}(\theta)d\theta\,. \tag{12}$$

Упростить последнее выражение можно, лишь задавшись какой-либо конкретной функцией запаздывания $N(\theta)$. Они бывают различных видов. Воспользуемся экспоненциальным, одним из самых распространенных:

$$N(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta}\,, \tag{13}$$

где λ – константа.

Легко проверить, что функция запаздывания (13) удовлетворяет выдвинутым ранее условиям 1) и 2). Чем больше λ, тем быстрее стремится к нулю $N(\theta)$, т.е. тем меньший эффект имеют ранее сделанные инвестиции во вводимых в данный момент производственных фондах. Иными словами, тем быстрее «забывает» капитальное строительство ранее сделанные вклады. При этом площадь под кривыми для разных λ всегда равна 1 (см. рис. 3).

Подставив (13) в (12), получим

$$\dot{V}(t) = \lambda I(t) - \lambda\int\limits_0^\infty I(t-\theta)N(\theta)d\theta\,,$$

последнее слагаемое которого, в силу (10), равно $\lambda V(t)$. Таким образом, мы пришли к дифференциальному уравнению

$$\dot{V}(t) = -\lambda V(t) + \lambda I(t)\,.$$

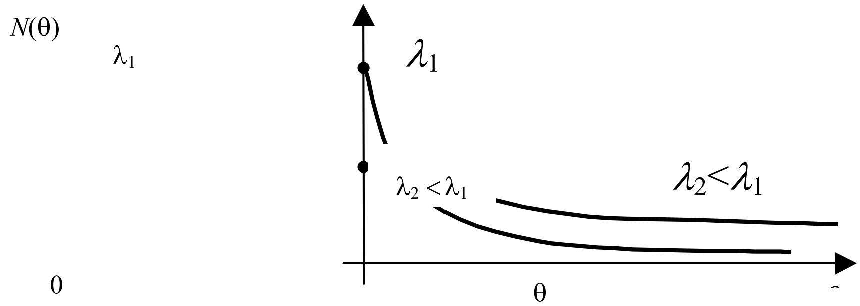


Рис. 3. Доля освоенных инвестиций: экспоненциальные функции

Окончательные уравнения динамики фондов односекторной экономики с учетом распределенного лага (13) в освоении инвестиций

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = -\mu K(t) + V(t); \\ \dot{V}(t) = -\lambda V(t) + \lambda I(t). \end{cases} \tag{14}$$

Итак, мы пришли к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка. Это незамкнутая система: для того чтобы определить, как будут вести себя основные фонды $K(t)$ и вводимые фонды $V(t)$, нужно, помимо начальных условий, задать и функцию инвестиций $I(t)$. С точки зрения классической теории управления, мы имеем дело с уравнениями управляемой системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\,,$$

где

$$x(t) = \begin{bmatrix} V(t) \\ K(t) \end{bmatrix}; \quad u(t) = I(t); \quad A = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\mu \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, если наши гипотезы верны, то мы получаем ценный инструмент моделирования экономики. С помощью него можно стандартными методами теории автоматического управления решать, например, задачи определения минимального количества инвестиций для вывода основных фондов в заданную точку или, наоборот, предсказания изменения основных фондов при заданной программе капиталовложений.

Модель Леонтьева с запаздыванием

Если в дополнение к (12) считать верными еще несколько гипотез, то полученную выше систему уравнений можно замкнуть, т.е. однозначно определять по начальному состоянию ее конечное состояние. Эти гипотезы связывают объем основных фондов и выпуск простейшей формулой

$$X(t) = fK(t)\,,$$

где f – *коэффициент фондоемкости*.

Далее воспользуемся равенством валового выпуска сумме конечного продукта и производственного потребления $X(t) = W_a(t) + Y(t)$, вспомним, что конечный продукт распределяется на инвестиции и конечное потребление $Y(t) = C(t) + I(t)$, и примем, что (подобные предположения делались в модели Леонтьева) производственное потребление пропорционально выпуску $W_a(t) = aX(t)$.

Подставляя полученное выражение для инвестиций в систему дифференциальных уравнений (14), получаем

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = -\mu K(t) + V(t); \\ \dot{V}(t) = -\lambda V(t) + \lambda(1-a) f K(t) - C(t). \end{cases}$$

Наконец, предположим, что потребление не является независимой функцией, а составляет некую долю от конечного продукта: $C(t) = uX(t)$, величину u обычно называют *нормой потребления*, очевидно, $0 < u < 1$. Тогда приходим к замкнутой системе двух линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = -\mu K(t) + V(t); \\ \dot{V}(t) = -\lambda V(t) + \lambda(1-a)(1-u) f K(t). \end{cases}$$

Теория дифференциальных уравнений дает ответ на вопрос: когда эта система устойчива (т.е. переменные $V(t)$ и $K(t)$ стремятся к нулю при увеличении t). Для этого надо составить характеристическое уравнение этой системы второго порядка и выяснить, при какой комбинации параметров его корни имеют положительные действительные части. Это дает следующее условие:

$$1 - \frac{\mu}{f(1-a)} < u < 1 .$$

«Устойчивость» в данной задаче является, скорее, недостатком, чем достоинством, и означает, что при достаточно большой доле потребления u происходит «проедание» основных фондов.

5. МНОГООТРАСЛЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Теперь рассмотрим экономику, имеющую несколько взаимосвязанных отраслей или экономических агентов. Взаимосвязь обычно выражается в том, что часть валового продукта каждой отрасли используется как производственное потребление в других отраслях. Кроме того, возможна связь путем перераспределения конечного продукта данной отрасли, когда часть его отправляется в другие в виде инвестиций. Таким образом, в случае двух отраслей, взаимодействие можно изобразить как на рис. 4.

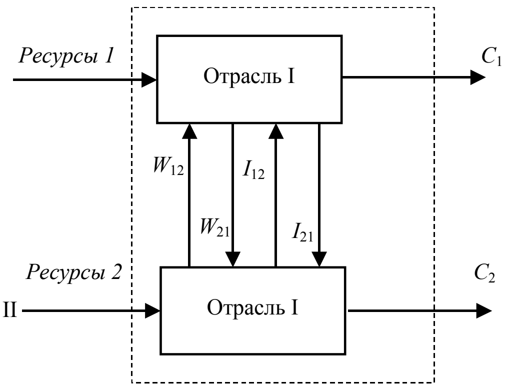


Рис. 4. Схема взаимосвязи отраслей в двухпродуктовой экономике

Так, открытая модель Леонтьева (5) обобщается на двумерный случай следующим образом:

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \eta_{11}\dfrac{dX_1}{dt} + \eta_{12}\dfrac{dX_2}{dt} + C_1 \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \eta_{21}\dfrac{dX_1}{dt} + \eta_{22}\dfrac{dX_2}{dt} + C_2 \end{cases} \qquad (15)$$

и требует задания двух начальных условий $X_1(t_0)$, $X_2(t_0)$.

Очевидно, попытка описать экономическую систему из N отраслей приведет к набору уравнений, которые удобно записать в матричной форме:

$$X = AX + N\dot{X} + C ,$$

где X – вектор размерности $N \times 1$ валовых выпусков по отраслям; A – матрица размерности $N \times N$ производственных расходов; C – вектор размерности $N \times 1$ конечного потребления продуктов отраслей.

Таким образом, мы получили аппарат моделирования сложных экономических систем путем разбиения их на однопродуктовые отрасли и формализации связей между ними. Очевидно, чем более детально прорабатывается уникальность отраслей, тем больше размерность матрицы A и выше порядок системы дифференциальных уравнений. В этой детализации может утонуть главное преимущество – качественная интерпретируемость получаемых результатов. Отметим два в некотором смысле полярных подхода. Колемаев В.А. предлагает вводить лишь три различающиеся по вкладу в конечный продукт сектора экономики: материальный (производство предметов труда: топлива, сырья и т.п.), фондосоздающий (производство машин и оборудования) и потребительский (предметы потребления). Получающиеся трехсекторные модели достаточно просты, чтобы ряд результатов был получен аналитически [3]. Модели Форрестера подразумевают, напротив, тщательнейшее моделирование экономической системы в виде сети элементов. Каждый элемент, как правило, записывается как преобразование «вход»–«выход» с определенным запаздыванием. Параметры элементов задаются как из формализации экономических или производственных законов, так и экспертных, статистических оценок и т.п. Это приводит к получению системы из сотен дифференциальных уравнений.

С этой системой проводят имитационные эксперименты, вычисляя траектории движения интересующих нас переменных при определенном изменении параметров модели или внешних воздействий.

Вернемся к уравнению баланса, связывающему валовый выпуск и конечный продукт:

$$X = aX + Y\,,$$

где a – коэффициент производственного потребления.

Очевидно, в случае многоотраслевой экономики это соотношение записывается как

$$X = AX + Y, \qquad (16)$$

где A – матрица материалоемкости (матрица коэффициентов прямых затрат).

Если выписать i-ю строку баланса (16), получим

$$X_i = a_{i,1}X_1 + a_{i,2}X_1 + \ldots + a_{i,N}X_N + Y_j\,.$$

Теперь очевиден смысл элементов матрицы прямых затрат a_{ij} – это то, сколько единиц валового продукта отрасли i нужно потратить, чтобы произвести единицу валового продукта отрасли j.

Таким образом, если известны технологии, по которым работают отрасли (иными словами, известны нормы затрат материальных ресурсов), то известны все коэффициенты a_{ij}, иными словами, матрица A задана. Межотраслевой баланс (16) предстает в виде

$$(1–A)X = Y. \qquad (17)$$

Это соотношение позволяет дать ответ на вопрос: как задать план валового выпуска по отраслям X, чтобы обеспечить заданный конечный выпуск Y? Очевидно, такая постановка задачи весьма жизненна при плановой экономике. Поэтому неудивительно, что первый межотраслевой баланс был разработан Центральным статистическим управлением СССР еще в 1925 году как составная часть баланса народного хозяйства за 1923–1924 годы. Эти идеи нашли применение в математической модели межотраслевого баланса В. Леонтьева. Итак, если такой план удалось определить, то систему называют продуктивной или работоспособной. Очевидно, это эквивалентно неотрицательной обратимости матрицы $(1–A)$.

Теорема Фробениуса–Перрона позволяет утверждать, что модель статического межотраслевого баланса продуктивна тогда и только тогда, когда максимальное собственное число матрицы A меньше единицы. Если это так, то можно записать (17) в виде

$$X = (1–A)^{-1}Y$$

и гарантировать, что все элементы X будут неотрицательны. Матрицу $A^* = (1–A)^{-1}$ принято называть матрицей полных затрат, поскольку ее коэффициенты a^*_{ij} показывают, сколько требуется произвести единиц i-го продукта для производства единицы j-го конечного продукта.

Заметим, что структура уравнения (17) подразумевает, что в каждой отрасли производится только один продукт. Это ограничение может быть снято, если ввести матрицу выпуска B и переписать (17) в виде

$$BX = AX + Y\,.$$

Такую систему принято называть моделью Неймана.

Наконец, добавим, что модель можно замкнуть, если ввести в нее потребителей (домашние хозяйства) как $(N + 1)$-ю отрасль, которая потребляет конечную продукцию других отраслей Y с коэффициентами прямых затрат c_i, производит труд $L = X_{N+1}$, а другие отрасли потребляют продукцию $(N + 1)$-й отрасли с коэффициентами прямых затрат b (норма трудоемкости, см. замкнутую однопродуктовую модель Леонтьева).

Производственные функции

Производственной называют функцию, связывающую наличие определенных ресурсов с выпуском продукции. Как правило, этими ресурсами принято считать труд и капитал (объем основных фондов). Таким образом, в общем виде производственная функция запишется как

$$X = F(K, L).$$

Еще до того, как задаться некоторой производственной функцией (ПФ), можно ожидать, что она будет иметь определенные свойства. Действительно, следует ожидать, что область значений и область определения функции положительна, при отсутствии какого-либо из ресурсов производство невозможно, при увеличении какого-либо ресурса выпуск растет, однако скорость роста выпуска убывает. Эти предположения (при дифференцируемости ПФ по обоим аргументам) записываются формально следующими выражениями:

1) $K > 0,\ L > 0$;
2) $F(K, 0) = F(0, L) = 0$;
3) $\dfrac{\partial F}{\partial K} > 0\,,\ \dfrac{\partial F}{\partial L} > 0\,;$
4) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0\,,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0\,.$

ПФ, удовлетворяющие этим предположениям, называются *неокейнсианскими*. Собирая статистические данные о количестве занятых и объеме основных фондов в определенном производстве и сопоставляя их с выпуском, можно пытаться подобрать вид (структуру) ПФ и затем выбрать наилучшую комбинацию ее параметров из условия максимальной близости полученной функции статистическим данным. Последняя задача выглядит рутинной: можно воспользоваться, например, методом наименьших квадратов. В качестве основных (базовых) структур ПФ, которые удовлетворяют «почти всем» свойствам 1) – 3), обычно используются следующие:

а) $X = aK + bL$, ***линейная ПФ***. Отметим, что она не удовлетворяет свойству 2) и, строго говоря, свойству 3);

б) $X=\min\left\{\dfrac{K}{a},\dfrac{L}{b}\right\}$, ***ПФ с фиксированными коэффициентами***, отражающая невозможность производства при ограниченности одного из ресурсов. Она не удовлетворяет свойству дифференцируемости, однако это препятствие можно обойти, введя производные «справа» и «слева» от точки излома. Но и тогда на всей области определения обе вторые и в области ограниченности одного из аргументов первая ее производные – ноль;

в) $X = AK^{\alpha}L^{\beta}$, ***мультипликативная ПФ***. Она удовлетворяет всем свойствам при $0 < \alpha, \beta < 1$. Параметр A называют *коэффициентом нейтрального технического прогресса*.

Таким образом, наибольшее доверие вызывают мультипликативные ПФ. Ее параметры можно получить, решая задачу, например, оптимальной квадратичной аппроксимации (МНК) статистических данных по годам. Отметим, что для этого удобнее пользоваться логарифмическим масштабом, так как в нем мультипликативная ПФ выглядит линейной:

$$\ln X = \ln A + \alpha\ln K + \beta\ln L. \tag{18}$$

Так, например [4], ПФ валового выпуска Российской Федерации в зависимости от стоимости основных производственных фондов (млрд р.) и числа занятых (млн человек) по данным за 1960 – 1994 годы (все стоимост-ные показатели даны в сопоставимых ценах для этого периода):

$$X = 0{,}931K^{0{,}539}L^{0{,}534}.$$

Введем и вычислим для мультипликативной ПФ несколько важных характеристик.

Частные производные выпуска по факторам называются предельными продуктами или предельными эффективностями факторов:

$\dfrac{\partial X}{\partial K}$ – *предельный продукт фондов*, или *предельная фондоотдача*;

$\dfrac{\partial X}{\partial L}$ – *предельный продукт труда*, или *предельная производительность труда*, или *предельная эффективность труда*.

Предельные эффективности показывают, насколько увеличится выпуск, если на малую единицу прирастет фактор. Легко показать, что для мультипликативной ПФ предельная эффективность пропорциональна средней эффективности с соответствующими коэффициентами:

$$\frac{\partial X}{\partial K}=\alpha\frac{X}{K}; \qquad \frac{\partial X}{\partial L}=\beta\frac{X}{L}.$$

Логарифмические производные факторов ПФ называются их *эластичностями*:

$\varepsilon_K=\dfrac{\partial\ln X}{\partial\ln K}=\lim\limits_{\Delta K\to 0}\dfrac{\Delta X/X}{\Delta K/K}$ – *эластичность выпуска по основным фондам*;

$\varepsilon_L=\dfrac{\partial\ln X}{\partial\ln L}=\lim\limits_{\Delta L\to 0}\dfrac{\Delta X/X}{\Delta L/L}$ – *эластичность выпуска по труду*.

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов вырастет выпуск, если фактор вырастет на один процент. В случае мультипликативной ПФ, учитывая (18), легко определить, что $\varepsilon_K = \alpha\ \varepsilon_L = \beta$.

3. Кривую на плоскости K–L, полученную при $X = \mathrm{const} = X_0$, называют *изоквантой* ПФ. Изокванта (линия постоянного уровня) определяет множество комбинаций труда и капитала, обеспечивающих один и тот же выпуск X_0, т.е. характеризует взаимозаменяемость ресурсов.

В случае мультипликативной ПФ получаем

$$K^{\alpha}=\frac{X_0}{A}L^{-\beta},$$

т.е. уравнение ее изокванты – степенная гипербола (рис. 5).

Очевидно, на изокванте должно выполняться соотношение

$$dX=\frac{\partial X}{\partial L}dL+\frac{\partial X}{\partial K}dK=0 \text{ или } \frac{dK}{dL}=-\frac{\partial X}{\partial L}\Big/\frac{\partial X}{\partial K}.$$

Это означает, что, ввиду свойства 3) ПФ, наклон изоквант всегда отрицательный, т.е. при сохранении уровня выпуска уменьшение основных фондов можно скомпенсировать увеличением трудовых ресурсов. Для мультипликативной ПФ этот наклон, очевидно, находится как

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}.$$

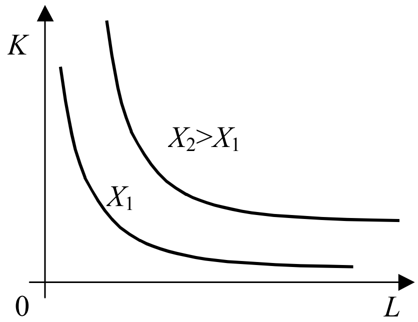


Рис. 5. Эскиз изоквант мультипликативной ПФ

Модуль коэффициента наклона логично называть *предельной нормой замены* одного фактора другим. Так, для мультипликативной ПФ имеем

$S_K = \left|\frac{dK}{dL}\right| = \frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}$ – *предельная норма замены труда фондами*;

$S_L = \left|\frac{dL}{dK}\right| = \frac{\alpha}{\beta}\frac{L}{K} = \frac{1}{S_K}$ – *предельная норма замены фондов трудом*.

4. ПФ называется *однородной степени однородности* γ, если $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^\gamma F(K, L)$. ПФ, описывающей производство, следует быть однородной, когда при расширении производства путем масштабирования ресурсов выпуск растет пропорционально этому масштабированию. Такое увеличение выпуска иногда называют *экспансией*. Легко показать, что мультипликативная ПФ однородна со степенью однородности $\gamma = \alpha + \beta$.

Обычно выпуск увеличивается во столько раз, во сколько расширяется производство, т.е. следует ожидать, что $\gamma = 1$. Мультипликативную ПФ, у которой $\alpha + \beta = 1$, называют *производственной функцией Кобба–Дугласа*. Очевидно, она записывается как

$$X = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}.$$

Однородные ПФ обладают важным свойством: вместо них можно рассматривать ПФ одной переменной. Действительно, введем

$$k = K/L .$$

Переменную k резонно называть *фондовооруженностью*, она показывает количество средств производства на одного работающего. Тогда для однородной функции справедливо

$$F(K, L) = L^{\gamma}F(K,1).$$

Очевидно, ПФ F в последнем представлении имеет лишь один аргумент. Таким образом, для однородных ПФ можно записать

$$F(K, L) = L^{\gamma}f(k).$$

Легко показать, что если исходная ПФ является неокейнсианской, то $f(k)$ обладает следующими свойствами:

$$f(0) = 0; \quad f(k) > 0; \quad \frac{df(k)}{dk} > 0; \quad \frac{d^2 f(k)}{dk^2} < 0 .$$

В случае ПФ Кобба–Дугласа имеем $f(k) = Ak^{\alpha}$.

ЗАДАЧИ

1. Основы динамического моделирования экономики. Модели Кейнса, Самуельсона–Хикса, Леонтьева

1.1. Товарный выпуск экономики подчиняется предположениям Кейнса. Параметры модели считать известными. Исходный уровень выпуска принимается за нулевой. Спрогнозировать выпуск при инвестициях, имеющих заданную структуру (рис. 6).

1.2. Товарный выпуск экономики подчиняется предположениям Кейнса. Параметры модели считать известными. Исходный уровень выпуска принимается за нулевой. Спрогнозировать выпуск при инвестициях, имеющих заданную структуру (рис. 7).

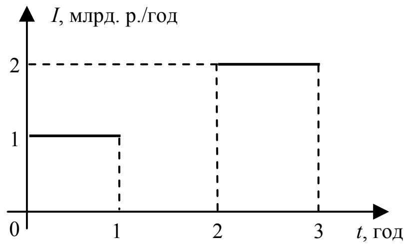


Рис. 6

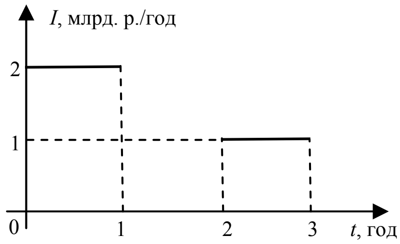


Рис. 7

1.3 Товарный выпуск экономики подчиняется предположениям Кейнса. Параметры модели считать известными. Исходный уровень выпуска y = 0,5 млрд. р./год. Спрогнозировать выпуск при инвестициях, имеющих заданную структуру (рис. 8).

1.4. Товарный выпуск экономики подчиняется предположениям Кейнса. Параметры модели считать известными. Исходный уровень выпуска y = 0,5 млрд. р./год. Спрогнозировать выпуск при инвестициях, имеющих заданную структуру (рис. 9).

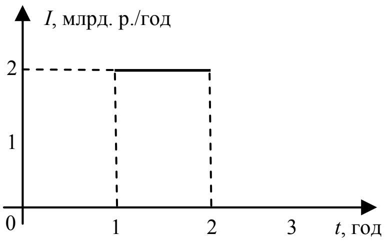


Рис. 8

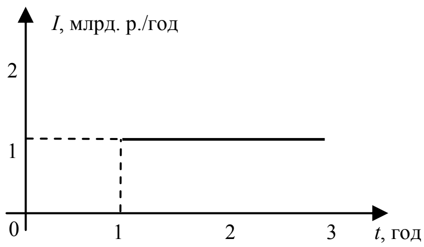


Рис. 9

1.5. Товарный выпуск экономики подчиняется предположениям Кейнса. Параметры модели считать известными. Исходный уровень выпуска принимется нулевым. Спрогнозировать выпуск при инвестициях, стартующих в момент времени $t = 0$ и имеющих заданную структуру: $I(t) = e^{-\gamma t}$ млрд. р./год.

1.6. Рассматривается модель освоения инвестиций без запаздывания с учетом амортизации. Начальный уровень основных фондов считается нулевым. Инвестиции поступают по указанному плану. Спрогнозировать состояние основных фондов (рис. 10).

1.7. Рассматривается модель освоения инвестиций без запаздывания с учетом амортизации. Начальный уровень основных фондов считается нулевым. Инвестиции поступают по указанному плану. Спрогнозировать состояние основных фондов (рис. 11).

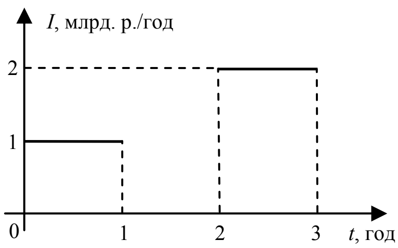


Рис. 10

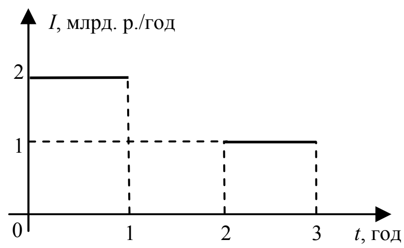


Рис. 11

1.8. Рассматривается модель освоения инвестиций без запаздывания с учетом амортизации. Начальный уровень основных фондов равен 1 млрд. р. нулевым. Инвестиции поступают по указанному плану. Спрогнозировать состояние основных фондов (рис. 12).

1.9. Рассматривается модель освоения инвестиций без запаздывания с учетом амортизации. Начальный уровень основных фондов равен 1 млрд. р. нулевым. Инвестиции поступают по указанному плану. Спрогнозировать состояние основных фондов (рис. 13).

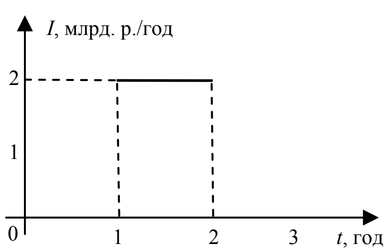


Рис. 12

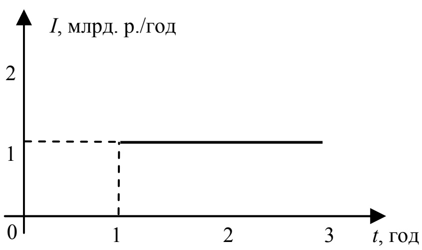


Рис. 13

1.10. Рассматривается модель освоения инвестиций без запаздывания с учетом амортизации. Начальный уровень основных фондов считается нулевым. Спрогнозировать состояние основных фондов при инвестициях, стартующих в момент времени $t = 0$ и имеющих заданную структуру: $I(t) = e^{-\gamma t}$ млрд. р./год.

1.11. В открытой однопродуктовой модели Леонтьева оценить *установившиеся* параметры выпуска, если спрос имеет сезонный характер и может быть описан как

$$C(t) = C_0 + A\sin\omega t, \qquad \omega = 2\pi \text{ рад/год}.$$

Все константы, описывающие модель, считать заданными.

1.12. Пусть исходный уровень основных фондов равен единице, а инвестиции отсутствуют. Пусть амортизационные отчисления составляют μ процентов от уровня основных фондов. По одной схеме амортизационные отчисления рассчитывают постоянно, по другой – один раз в год. Показать прогноз уменьшения фондов в первом и втором случаях, сделать вывод о том, какая схема расчета выгоднее руководителю.

1.13. Пусть экономика отрасли описывается моделью Кейнса, начальный уровень считать нулевым. Пусть при этом предполагается, что инвестиции составляют постоянную долю от произведенной продукции α. Спрогнозировать реакцию такой экономики на ступенчатую инвестицию, сравнить установившиеся значения выпуска в такой модели и в обычной модели Кейнса.

1.14. Экономика описывается моделью Самуельсона–Хикса. Описать *установившуюся* реакцию экономики на инвестиции, меняющиеся во времени по закону

$$I(t) = I_0 + A\sin\omega t, \quad \omega = 2\pi \text{ рад/год}.$$

1.15. Две экономики, выпуск ВВП которых описывается:

а) моделью Кейнса;

б) моделью Самуельсона–Хикса,

имеют одинаковый начальный уровень выпуска y_0. Инвестиции отсутствуют. Определить, какая из них обеспечит выпуск большего количества продукта за время t. (Считать автономное потребление и склонность к потреблению в обеих моделях равными, коэффициент акселерации принять равным r, скорость изменения выпуска в начальный момент времени нулевой).

1.16. Экономика описывается моделью Самуельсона–Хикса. Начальный уровень ВВП и начальная его скорость нулевая. Параметры таковы, что переходные процессы апериодичны. Спрогнозировать выпуск при следующем плане инвестиций (рис. 14).

1.17. Экономика описывается моделью Самуельсона–Хикса. Начальный уровень ВВП и начальная его скорость нулевая. Параметры таковы, что переходные процессы апериодичны. Спрогнозировать выпуск при следующем плане инвестиций (рис. 15).

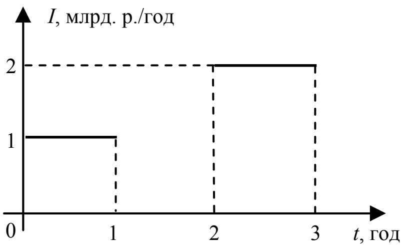


Рис. 14

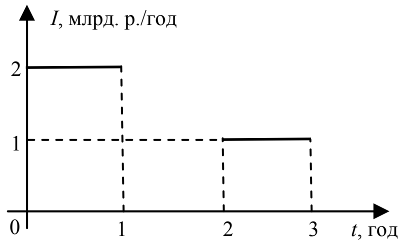


Рис. 15

1.18. Экономика описывается моделью Самуельсона–Хикса. Начальный уровень производства ВВП равен 0,5 млрд. р. Инвестиции поступают по указанному плану. Спрогнозировать состояние основных фондов (рис.16).

1.19. Экономика описывается моделью Самуельсона–Хикса. Начальный уровень производства ВВП равен 0,5 млрд. р. Инвестиции поступают по указанному плану. Спрогнозировать состояние основных фондов (рис. 17).

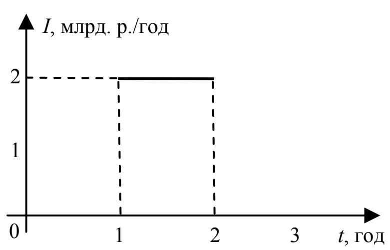


Рис. 16

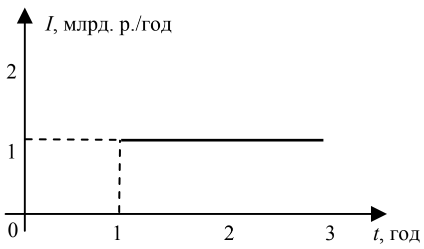


Рис. 17

1.20. Экономика описывается моделью Самуельсона–Хикса. Начальный уровень производства ВВП нулевой. Инвестиции поступают по плану $I(t) = e^{-\gamma t}$. Спрогнозировать динамику ВВП.

1.21. Пусть экономика описывается моделью Кейнса. Модифицируйте модель Кейнса так, чтобы она могла учесть распределенное запаздывание при освоении инвестиций. Считать, что запаздывание задается распреде-ленным лагом $N(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta}$. Как будет реагировать ВВП в такой экономике на ступенчатую инвестицию? (начальные условия нулевые).

1.22. Экономика описывается моделью Самуельсона–Хикса. Начальный уровень ВВП и начальная его скорость нулевая. Параметры таковы, что переходные процессы апериодичны. Модифицируйте модель Кейнса так, чтобы она могла учесть распределенное запаздывание при освоении инвестиций. Считать, что запаздывание задается распределенным лагом $N(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta}$. Как будет реагировать ВВП в такой экономике на ступенчатую инвестицию?

2. Производственные функции

2.1. Изоклиналями называются линии наибольшего роста ПФ. Очевидно, они перпендикулярны изоквантам, т.е. их направление в каждой точке (K, L) задается градиентом $\left(\frac{\partial F}{\partial K}, \frac{\partial F}{\partial K}\right)$, уравнение изоклинали записывается в форме $\frac{dK}{\partial F/\partial K} = \frac{dL}{\partial F/\partial L}$.

Построить изоклинали для:

а) линейной ПФ;

б) мультипликативной ПФ;

в) ПФ с фиксированными коэффициентами.

2.2. Однородную ПФ удобно представлять относительно фондовооруженности $k = K/L$:

$$F(K, L) = L^{\gamma} F(K, 1) = L^{\gamma} f(k).$$

Получить выражение и эскиз графика $f(k)$ для линейной ПФ.

2.3. Однородную ПФ удобно представлять относительно фондовооруженности $k = K/L$:

$$F(K, L) = L^{\gamma} F(K, 1) = L^{\gamma} f(k) .$$

Получить выражение и эскиз графика $f(k)$ для ПФ с фиксированными коэффициентами.

2.4. Производственная функция $F = 5L^{0,5} K$, где L – расход труда, K – расхода капитала. Найти предельный продукт капитала, если расход труда равен 4, капитала – 7.

2.5. Производственная функция $F = K^{0,5}L$. Найти предельную норму замещения ресурса при расходе (4,8).

2.6. Какова отдача от роста масштаба производства для следующих производственных функций: а) $K L$; б) $2L + 3K$; в) $(LK)^{0,5}$; г) $L^{0,3}K^{0,6}$; д) $K^{0,5}$.

2.7. Для сборки 20 автомобилей требуется либо 30 станков и 400 рабочих, либо 25 станков и 500 рабочих. Сколько рабочих соберут 20 автомобилей вручную, если производственная функция линейна?

3. Статический межотраслевой баланс

3.1. Найти валовый выпуск, если задана матрица прямых затрат A и товарный выпуск Y:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

3.2. В системе имеется шахта и электростанция. Для производства 1 кг угля требуется 0,3 кг угля и 1кВт·ч электроэнергии. Для производства 1 кВт·ч требуется 0,6 кг угля и 0,2 кВт·ч электроэнергии. Может ли система производить 100 кг угля и 140 кВт·ч электроэнергии?

3.3. У Марии есть корова, а у Ивана – яблоня. Семья Марии потребляет 60 % надоенного молока, а семья Ивана – 50 % выращенных яблок. Для производства 1 л молока Мария использует в качестве корма 0,3 кг яблок. Мария продает на рынке 40 л молока, а Иван – 80 кг яблок. Записать матрицу прямых затрат. Найти валовый выпуск молока и яблок.

3.4. Какой режим перераспределения средств опаснее в смысле потери устойчивости экономической системы в форме параметрического резонанса:

$$\alpha(t) = A\sin(\Omega t), \text{ или } \alpha(t) = A\operatorname{sign}(\sin(\Omega t))?$$

3.5. Провести анализ устойчивости модели Солоу для случая, когда ПФ описывается линейной ПФ или ПФ с фиксированными коэффициентами. Найти область устойчивости в пространстве параметров для таких моделей.

3.6. Получить уравнение динамики модели Солоу с учетом запаздывания в освоении инвестиций. Считать, что запаздывание описывается распределенным лагом с экспоненциальной долей освоенных инвестицией $N(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моделирование народнохозяйственных процессов : учеб. пособие для вузов по спец. «Экономическая кибернетика» / И.В. Котов [и др.] ; под общ. ред. И.В. Котова. – 2-е изд., испр. и доп. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1990. – 285 с.
2. Кротов, В.Ф. Основы теории оптимального управления : учеб. пособие / В.Ф. Кротов [и др.] ; под ред. В.Ф. Кротова. – М. : Высшая школа, 1990. – 430 с.
3. Колемаев, В.А. Математическая экономика : учеб. для вузов / В.А. Колемаев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 399 с.
4. Чечурин, Л.С. Периодически нестационарные модели экономической динамики / Л.С. Чечурин, И.М. Шахов, А.Н. Михайлов // Инновации в науке, образовании и производстве : сб. тр. – СПб. : ГПУ, 2004. – С. 87 – 101.
5. Занг, В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / В.-Б. Занг ; пер. с англ. – М. : Мир, 1999. – 335 с.