

Ю.Ю. Громов  
Н.А. Земской  
О.Г. Иванова  
А.В. Лагутин  
В.М. Тютюнник

# **ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ПРОЦЕССЫ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ**

• ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ •

Министерство образования и науки Российской Федерации

**ГОУ ВПО «ТАМБОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, О.Г. Иванова,  
А.В. Лагутин, В.М. Тютюнник

# Фрактальный анализ и процессы в компьютерных сетях

*Допущено УМО вузов по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 230201 – «Информационные системы и технологии»*

Издание второе, стереотипное



---

ТАМБОВ  
Издательство ТГТУ  
2007

УДК 004.414.2(07)  
ББК ←965-01я73

Ф82

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор  
*Ю.Л. Муромцев*

Доктор физико-математических наук, профессор  
*А.И. Булгаков*

Ф82 Фрактальный анализ и процессы в компьютерных сетях : учеб. пособие / Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, О.Г. Иванова, А.В. Лагутин, В.М. Тютюнник. – 2-е изд., стереотип. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 108 с. – 110 экз. – ISBN 978-5-8265-0628-8.

Учебное пособие рассматривает один из важных аспектов развития методов анализа и синтеза информационно-управляющих систем – исследование процессов в компьютерных сетях, их идентификацию и формирование на базе полученного математического описания этих процессов моделей управления сетевым трафиком. Математическое описание процессов строится на основе использования фрактального анализа.

Рекомендовано Ученым советом ТГТУ для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям 230201 «Информационные системы и технологии», 090105 «Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем», и для студентов среднего профессионального образования, обучающихся по специальности 230105 «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем».

УДК 004.414.2(07)  
ББК ←965-01я73

ISBN 978-5-8265-0628-8

© ГОУ ВПО «Тамбовский государственный  
технический университет» (ТГТУ), 2007

Учебное издание

ГРОМОВ Юрий Юрьевич,  
ЗЕМСКОЙ Николай Александрович,  
ИВАНОВА Ольга Геннадьевна,  
ЛАГУТИН Андрей Владимирович,  
ТЮТЮННИК Вячеслав Михайлович

# **Фрактальный анализ и процессы в компьютерных сетях**

Учебное пособие

Издание второе, стереотипное

Редактор Т.М. Глинкина  
Инженер по компьютерному макетированию Т.А. Сынкova

Подписано к печати 15.10.2007.  
Формат 60 × 84/16. 6,28 усл. печ. л.  
Тираж 110 экз. Заказ № 654

Издательско-полиграфический центр  
Тамбовского государственного технического университета  
392000, Тамбов, ул. Советская, 106, к. 14

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

В связи с тенденциями интеграции различных коммуникационных приложений на основе универсальной сетевой инфраструктуры передачи данных актуальной задачей становится разработка методов анализа и синтеза информационно-управляющих систем, построенных с использованием современных компьютерных технологий. Предлагаемое пособие посвящено одному из важных аспектов развития таких методов: исследованию процессов в компьютерных сетях, их идентификации и формированию на базе полученного математического описания моделей этих процессов управления сетевым трафиком. Сложность решения такой задачи состоит в том, что сетевые процессы в современных компьютерных сетях имеют случайный характер. Анализ результатов многочисленных экспериментов по исследованию сетевых процессов показывает, что переход к технологии пакетной коммутации и создание интегрированных информационных приложений сопровождается появлением сложных явлений, исследование которых может быть проведено в рамках теоретико-вероятностных подходов. Быстрый научно-технический прогресс в области создания и внедрения информационно-управляющих систем, а также необходимость эффективной и надежной их работы стимулировал интерес к исследованиям теоретических проблем статистического моделирования и управления сетевым трафиком. К сожалению, большинство публикаций на эти темы носит узкоспециальный характер, а отсутствие учебно-методических работ существенно ограничивает круг специалистов, принимающих участие в обсуждении данной актуальной научно-технической проблемы. В предлагаемом пособии систематизированы сведения о статистических методах описания процессов в компьютерных сетях, основанные на использовании результатов, полученных в [1] и частично изложенных в [2, 3].

## ВВЕДЕНИЕ

---

Компьютеры и компьютерные сети являются неотъемлемыми компонентами современных технологий управления и производства. В настоящее время их основные ресурсы – производительность процессоров и пропускная способность линий связи – даже для настольных компьютерных систем сравнима с характеристиками супервычислителей начала 1990-х гг. Возросшие вычислительные и коммуникационные возможности компьютеров стали предпосылкой для создания нового класса интегрированных сетевых приложений: видеоконференций, интернет-телефонии, анимации в реальном времени, распознавания голоса, распределенных вычислений, интерактивной графики, виртуальной реальности и др. Все перечисленные выше приложения функционируют в интегрированной сетевой среде передачи данных и используют методы пакетной коммутации. Созданная совокупность сетевых устройств, протоколов и средств управления составляет основу временной инфраструктуры обработки, хранения и передачи данных высокоскоростных компьютерных телекоммуникаций. В результате компьютерные технологии, развиваясь из концепции «компьютер – это сеть», получили инверсную, хотя и менее лаконичную формулировку «сеть – это распределенное вычислительное устройство для обработки и передачи пакетного трафика». В такой сети взаимодействие между устройствами или приложениями осуществляется путем создания статистически мультиплексируемых виртуальных соединений и передачи по ним сигналов или сетевых потоков различной природы: аудио, видео и компьютерных данных. На характеристики этих сигналов существенное влияние оказывают особенности организации сетевой структуры и случайное поведение сигналов в сети.

Экспериментальные исследования и анализ многочисленных измерений информационных потоков на пакетном уровне указывают на специфическую природу процессов в компьютерных сетях, не укладывающуюся в традиционные рамки известных случайных моделей. Этим обстоятельством объясняются многочисленные исследования, проводимые в настоящее время с целью изучения влияния различных факторов, приводящих к возникновению сложных сетевых процессов.

Характерным для описания процессов передачи данных пакетным трафиком являются обнаруженные на практике свойства самоподобия или масштабной инвариантности статистических характеристик. В современной научной литературе эти свойства связывают с особым классом физических процессов – фрактальными процессами.

В связи с обнаружением этих особенностей сетевых процессов особую актуальность приобретают вопросы разработки конструктивных методов исследования фрактальности применительно к современным компьютерным приложениям и учет влияния на характер формирования управляющих воздействий при передаче пакетного трафика. В этом случае ключевым звеном в структуре распределенного сетевого управления процессами должна стать система прогнозирования состояния виртуальных соединений, в которой учитываются особенности стохастической природы сетевого трафика.

В этих условиях разработка новых сетевых технологий и повышение эффективности работы современных телекоммуникационных систем требуют создания математических моделей, наиболее полно отражающих отмеченные выше свойства сетевых процессов.

# 1. ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

## 1.1. БЕРЕГОВАЯ ЛИНИЯ НОРВЕГИИ

Сколь велика длина береговой линии Норвегии? Взгляните на рис. 1.1. В масштабе карты хорошо видны глубокие фиорды на западном побережье. Более мелкие детали очертаний побережья к северо-востоку от южной оконечности различимы хуже, но на картах береговая линия выглядит так же, как западное побережье на рис. 1.1. Идя под парусом, вы то и дело встречаете скалы, острова, бухты, обрывы и узкости, которые похожи друг на друга, даже если они не обозначены на подробных картах. Прежде чем ответить на вопрос, с которого начинается эта глава, необходимо решить, стоит ли включать в береговую линию острова. Как быть с реками? В каком месте фиорд перестает быть фиордом и где именно он переходит в реку? Ответить на этот вопрос иногда легко, иногда не очень. Но даже если мы сумеем удовлетворительно ответить на все вопросы такого рода, одна трудность все же остается. Дело в том, что можно придать циркулю раствор, соответствующий  $\delta$  км, и сосчитать число шагов  $N(\delta)$ , которые понадобились бы, чтобы пройти по карте из конца в конец все побережье. В спешке можно было бы выбрать раствор циркуля настолько большим, что не понадобилось бы заботиться даже о самых глубоких фиордах, и принять за длину береговой линии величину  $L = N(\delta)\delta$ . Можно было бы выбрать меньший раствор циркуля  $\delta$ . Тогда в длину береговой линии вошли бы и наиболее глубокие фиорды, но юго-восточное побережье по-прежнему было бы пройдено за несколько шагов. Для еще более точного подсчета длины береговой линии понадобились бы такие карты, которыми пользуются соседи при решении вопросов о том, где должен проходить забор между земельными участками, или о том, как далеко по реке простираются границы рыбной ловли. Ясно, что при решении такого рода вопросов уточнения можно вносить бесконечно. Всякий раз, когда будет увеличиваться разрешающая способность, длина береговой линии будет разрастаться. Кроме того, при использовании циркуля могут возникнуть проблемы с островами и реками. Альтернативный способ измерения длины береговой линии состоит в том, чтобы покрыть карту сеткой, как показано в верхней части рис. 1.1. Пусть квадратные ячейки сетки имеют размеры  $\delta \times \delta$ . Число  $N(\delta)$  таких ячеек, необходимых, чтобы покрыть береговую линию на карте, приближенно равно числу шагов, за которое можно обойти по карте береговую линию циркулем с раствором  $\delta$ . Уменьшение  $\delta$  приводит к увеличению числа ячеек, необходимых для покрытия береговой линии. Если бы береговая линия Норвегии имела вполне определенную длину  $L_N$ , то можно было бы ожидать, что число шагов циркуля или число квадратных ячеек  $N(\delta)$ , необходимых для покрытия береговой линии на карте, будет обратно пропорционально  $\delta$ , а величина  $L(\delta) = N(\delta)\delta$  при уменьшении  $\delta$  будет стремиться к постоянной  $L_N$ .

Как видно из рис. 1.2, при уменьшении длины  $\delta$  шага измеренная длина возрастает. График на этом рисунке выполнен в дважды логарифмическом масштабе и показывает, что при уменьшении  $\delta$  измеренная длина береговой линии отнюдь не стремится к постоянному значению. Наоборот, измеренная длина прекрасно описывается приближенной формулой

$$L(\delta) = A\delta^{1-D}. \quad (1.1)$$

Для обычной кривой можно было бы ожидать, что  $A = L_N$  (по крайней мере при достаточно малых  $\delta$ ) и показатель  $D$  равен единице. Но для береговой линии Норвегии, как видно из графика,  $D \approx 1,52$ . Береговая линия – фрактал с фрактальной размерностью  $D$ .

На рис. 1.3 воспроизведен график, на котором показана кажущаяся длина береговых линий и сухопутных границ. Все точки выстраиваются (в дважды логарифмическом масштабе) вдоль прямых.

Угловой коэффициент этих прямых равен  $1 - D$ , где  $D$  – фрактальная размерность береговой линии (или сухопутной границы). Береговая линия Великобритании имеет  $D \sim 1,3$ . Мандельброт приводит также данные для окружности и находит, как и следовало ожидать, что  $D_{\text{окр}} = 1$  [4].

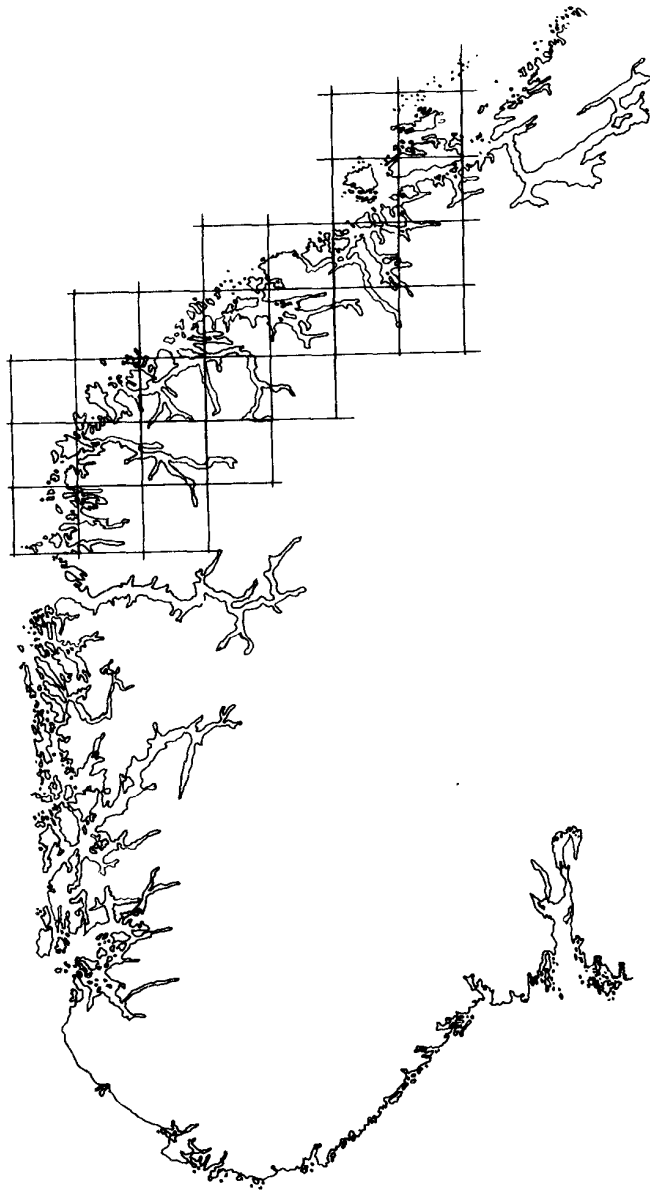


Рис. 1.1. Побережье южной части Норвегии. Береговая линия перечерчена из географического атласа и представлена в цифровом виде с помощью раstra, состоящего примерно из  $1800 \times 1200$  ячеек. Изображенная сверху квадратная решетка имеет шаг  $\delta \sim 50$  км

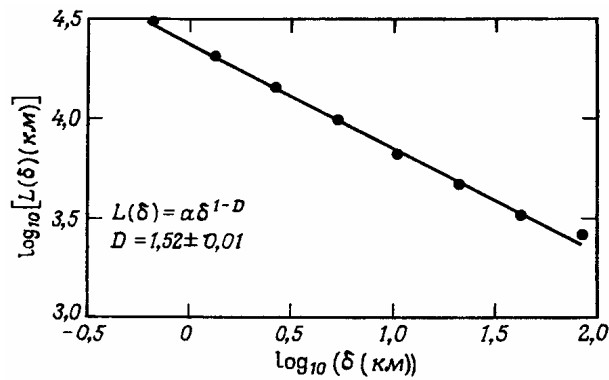


Рис. 1.2. Измеренная длина береговой линии, изображенной на рис. 1.1, как функция шага  $\delta$  (км) – длины стороны  $\delta \times \delta$  квадратных ячеек, образующих покрытие береговой линии на карте. Прямая на графике в дважды логарифмическом масштабе соответствует зависимости  $L(\delta) = A\delta^{1-D}$ , где  $D \approx 1,52$



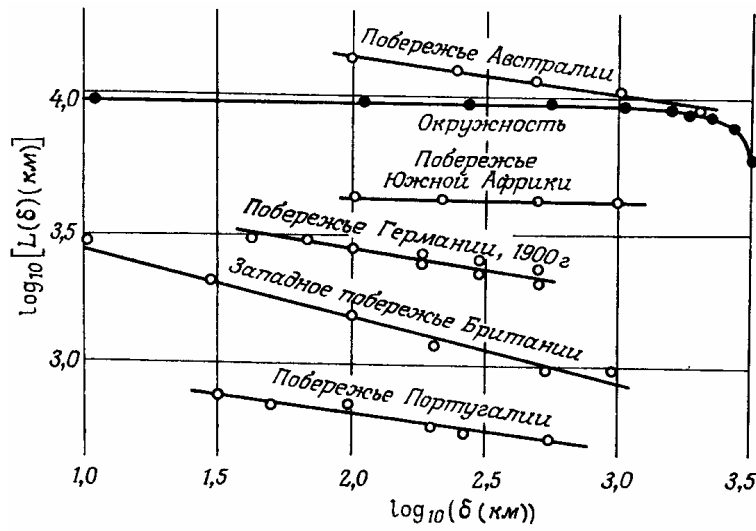


Рис. 1.3. Длина береговых линий как функция выбранного шага  $\delta$  (км)

## 1.2. ПАРАДОКС ШВАРЦА С ПЛОЩАДЬЮ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

Измерение площади – процедура, не всегда легко осуществляемая на практике. Рассмотрим боковую поверхность цилиндра (радиусом  $R$  и высотой  $H$ ), изображенную на рис. 1.4. Ее площадь равна  $A = 2\pi RH$ . Но если мы попытаемся измерить площадь боковой поверхности этого цилиндра на практике с помощью линеек, то придется тем или иным образом триангулировать поверхность, например так, как это показано на рис. 1.4. Разделив поверхность на  $m$  полос и  $N$  секторов, как показано на этом рисунке, мы получим оценку площади боковой поверхности цилиндра в виде суммы  $A_\Delta$  площадей всех малых треугольников. Разбивая поверхность на все более мелкие треугольники, т.е. устремляя  $N \rightarrow \infty$  и  $m \rightarrow \infty$ , мы ожидаем, что и  $A_\Delta \rightarrow A$ . Но подобный прогноз верен не всегда. Площадь всех треугольников можно записать в виде

$$A_\Delta = \pi RH \frac{\pi}{2n} \sin \frac{\pi}{2n} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2 \frac{\pi^4 m^2}{n^4} \left(\frac{2n}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n}\right)^4} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi RH \left\{ 1 + \sqrt{1 + (R/H)^2 (\pi^2 m/n^2)^2} \right\}. \quad (1.2)$$

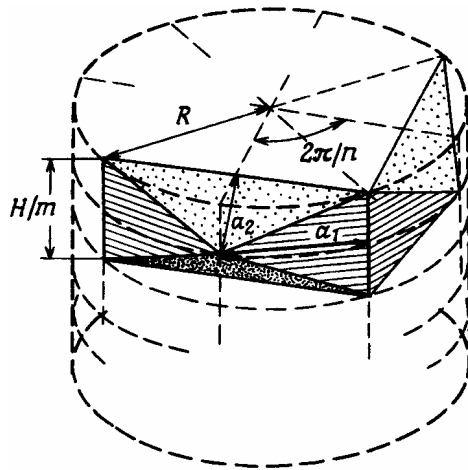


Рис. 1.4. Боковая поверхность цилиндра радиусом  $R$  и высотой  $H$  равна  $2\pi RH$ . Поверхность аппроксимируется с помощью триангуляции, как показано на рисунке

Первые слагаемые здесь соответствуют треугольникам того типа, который на рис. 1.4 обозначен  $a_1$ . Вторые, те, что с квадратным корнем, соответствуют треугольникам, обозначенным на рис. 1.4 через  $a_2$ . Нетрудно видеть, что если  $m/N^2 \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  и  $N \rightarrow \infty$ , то суммарная площадь треугольников стремится к ожидаемому пределу. Но если мы воспользуемся триангуляцией, для которой  $m = \lambda N^2$ , то обнаружим, что  $A_\Delta > A$  и что в действительности  $A_\Delta$  может принимать сколь угодно большие значения. Выбирая  $m = N^\beta$ , мы получаем  $A_\Delta \sim N^{\beta-2}$  при  $\beta > 2$ . Следовательно, когда отдельные треугольники становятся все меньше и меньше, суммарная площадь треугольников неограниченно возрастает. Вместо того, чтобы улучшаться, аппроксимация при уменьшении величины треугольников ухудшается. К аналогичным проблемам приводят и многие другие способы триангуляции. Возникающая ситуация известна под названием парадокса Шварца с площадью боковой поверхности

цилиндра. Нетрудно понять, в чем здесь дело. При увеличении отношения  $m / N^2$  аппроксимирующая поверхность, состоящая из треугольников, все сильнее и сильнее складывается в гармошку, и в пределе треугольнички типа  $a_2$  практически перпендикулярны поверхности цилиндра.

Можно возразить, что возникшие трудности связаны с плохим выбором триангуляции. Но как следует выбирать «хорошую» триангуляцию, если нужно оценить площадь более сложной или неровной поверхности? Оказывается, что для этого лучше воспользоваться методами, которые изложены в следующем разделе. Методы, о которых идет речь, применимы и в более простом случае классических гладких кривых и поверхностей, и в более сложном случае кривых, поверхностей и объемов «монстров».

### 1.3. ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

Мандельброт предложил следующее пробное определение фрактала.

**Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа – Безиковича которого строго больше его топологической размерности.**

Это определение в свою очередь требует определений терминов множества, размерности Хаусдорфа – Безиковича ( $D$ ) и топологической размерности ( $D_T$ ), которая всегда равна целому числу. Позже Мандельброт сузил свое предварительное определение, предложив заменить его следующим.

**Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.**

Строгого и полного определения фракталов пока не существует. Дело в том, что первое определение при всей правильности и точности слишком ограничительно. Оно исключает многие фракталы, встречающиеся в физике. Второе определение содержит существенный отличительный признак, подчеркиваемый в данном пособии и наблюдаемый в эксперименте [4, 5]: фрактал выглядит одинаково, в каком бы масштабе его ни наблюдать. Взять хотя бы некоторые прекрасные кучевые облака. Они состоят из огромных «горбов», на которых возвышаются «горбы» поменьше, на тех – «горбы» еще меньше и т.д. вплоть до самого малого масштаба, который вы в состоянии разрешить. На самом деле, располагая только внешним видом облаков и не используя никакой дополнительной информации, размер облаков оценить невозможно.

Фракталы, о которых пойдет речь далее, можно рассматривать как множества точек, вложенные в пространство. Например, множество точек, образующих линию в обычном евклидовом пространстве, имеет топологическую размерность  $D_T = 1$  и размерность Хаусдорфа – Безиковича  $D = 1$ . Евклидова размерность пространства равна  $E = 3$ . Так как для линии  $D = D_T$ , линия, согласно определению Мандельброта, не фрактальна, что подтверждает разумность определения. Аналогично множество точек, образующих поверхность в пространстве с  $E = 3$ , имеет топологическую размерность  $D_T = 2$  и  $D = 2$ . Мы видим, что и обычная поверхность не фрактальна независимо от того, насколько она сложна. Наконец, шар, или полная сфера, имеет  $D = 3$  и  $D_T = 3$ . Эти примеры позволяют определить некоторые из рассматриваемых нами типов множеств.

Центральное место в определении размерности Хаусдорфа – Безиковича и, следовательно, фрактальной размерности  $D$  занимает понятие расстояния между точками в пространстве. Как измерить «величину» множества  $Y$  точек в пространстве? Простой способ измерить длину кривых, площадь поверхностей или объем тела состоит в том, чтобы разделить пространство на небольшие кубы с ребром  $\delta$ , как показано на рис. 1.5. Вместо кубов можно было бы взять небольшие сферы диаметром  $\delta$ . Если поместить центр малой сферы в какой-нибудь точке множества, то все точки, находящиеся от центра на расстоянии  $\delta$ , окажутся покрытыми этой сферой. Подсчитывая число сфер, необходимых для покрытия интересующего нас множества точек, мы получаем меру величины множества. Кривую можно измерить, определяя число  $N(\delta)$  прямолинейных отрезков длины  $\delta$ , необходимых для того, чтобы покрыть ее. Разумеется, для обычной кривой  $N(\delta) = L_0 / \delta$ . Длина кривой определяется предельным переходом

$$L = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^0.$$

В пределе при  $\delta \rightarrow 0$  мера  $L$  становится асимптотически равной длине кривой и не зависит от  $\delta$ .

Множеству точек можно поставить в соответствие и площадь. Например, площадь кривой можно определить, указывая число кругов или квадратов, необходимых для ее покрытия. Если  $N(\delta)$  – число этих квадратов, а  $\delta^2$  – площадь каждого из них, то площадь кривой равна

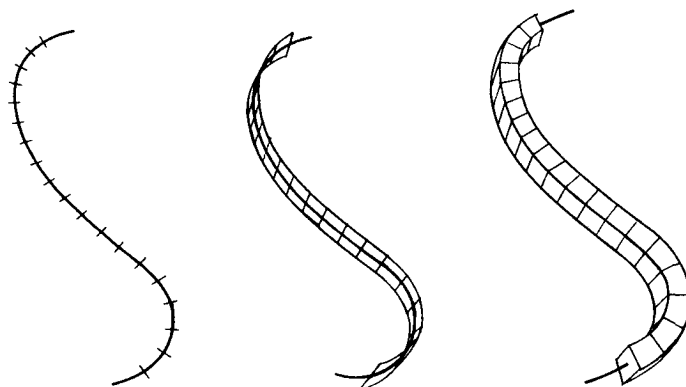


Рис. 1.5. Измерение «величины» кривой

$$A = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0 \delta^0.$$

Аналогично объем  $V$  кривой можно определить как величину

$$V = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0 \delta^0,$$

разумеется, что для обычных кривых  $A$  и  $V$  обращаются в нуль при  $\delta \rightarrow 0$ , и единственной представляющий интерес мерой является длина кривой.

Рассмотрим далее множество точек, образующих поверхность (рис. 1.6). Нормальной мерой такого множества служит площадь  $A$ , и мы имеем

$$S = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0 \delta^0.$$

Как нетрудно видеть, для обычной поверхности число квадратов, необходимых для ее покрытия, определяется в пределе при  $\delta \rightarrow 0$  выражением  $N(\delta) = A_0 / \delta^2$ , где  $A_0$  – площадь поверхности.

Поверхности можно поставить в соответствие объем, образуя сумму объемов кубов, необходимых для покрытия поверхности

$$V = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0 \delta^0.$$

При  $\delta \rightarrow 0$  этот объем, как и следует ожидать, обращается в нуль.

Можно ли поверхности поставить в соответствие какую-нибудь длину? Формально мы можем принять за такую длину величину

$$L = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0 \delta^0,$$

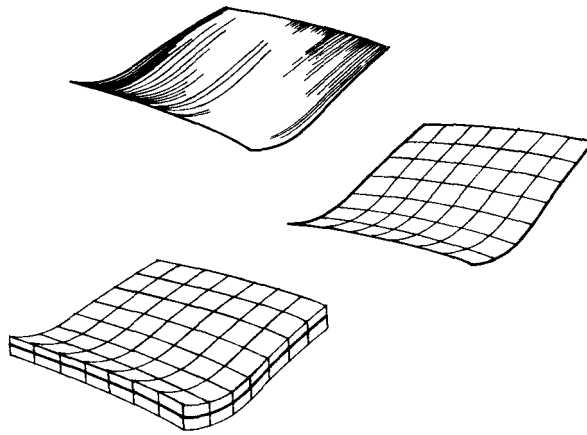


Рис. 1.6. Измерение «величины» поверхности

которая расходится при  $\delta \rightarrow 0$ . Этот результат имеет смысл, так как поверхность невозможно покрыть конечным числом прямолинейных отрезков. Можно заключить, что единственной содержательной мерой множества точек, образующих поверхность в трехмерном пространстве, является площадь.

Нетрудно видеть, что множества точек, образующих кривые, могут быть закрученными так сильно, что длина их окажется бесконечной, и, действительно, существуют кривые (кривые Пеано), заполняющие плоскость. Существуют также поверхности, изогнутые столь причудливым образом, что они заполняют пространство. Для того чтобы можно было рассматривать и такие необычные множества точек, полезно обобщить введенные меры величины множества.

До сих пор, определяя меру величины множества точек  $L$  в пространстве, мы выбирали некоторую пробную функцию  $h(\delta) = \gamma(d)\delta^d$  – отрезок прямой, квадрат, круг, шар или куб – и покрывали множество, образуя меру  $M_d = \sum h(\delta)$ . Для прямолинейных отрезков, квадратов и кубов геометрический коэффициент  $\gamma(d) = 1$ , для кругов  $\gamma = \pi/4$  и для сфер  $\gamma = \pi/6$ . Мы заключаем, что в общем случае при  $\delta \rightarrow 0$  мера  $M_d$  равна нулю или бесконечности в зависимости от выбора  $d$  – размерности меры. Размерность Хаусдорфа – Безиковича  $D$  множества  $L$  есть критическая размерность, при которой мера  $M_d$  изменяет свое значение с нуля на бесконечность:

$$M_d = \sum \gamma(d)\delta^d = \gamma(d)N(\delta)\delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{при } d > D; \\ \infty & \text{при } d < D. \end{cases} \quad (1.3)$$

$M_d$  можно назвать  $d$ -мерой множества. Значение  $M_d$  при  $d = D$  часто конечно, но может быть равно нулю или бесконечности; существенно, при каком именно значении  $d$  величина  $M_d$  изменяется скачком. В приведенном выше определении размерность Хаусдорфа – Безиковича фигурирует как локальное свойство в том смысле, что эта размерность характеризует свойства множеств точек в пределе при исчезающе малом диаметре или размере  $\delta$  пробной функции, используемой для покрытия множества. Следовательно, фрактальная размерность  $D$  может также быть локальной характеристикой множества. В действительности здесь существует несколько тонких пунктов, заслуживающих рассмотрения. В частности, определение размерности Хаусдорфа – Безиковича позволяет покрывать множество «шарами» не обязательно одного и того же размера

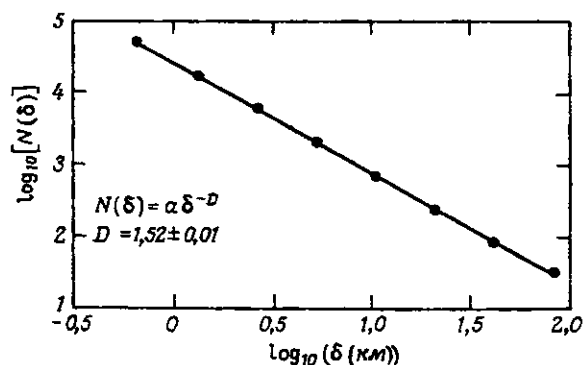
при условии, что диаметры всех шаров меньше  $\delta$ . В этом случае  $d$ -мера есть нижняя грань, т.е., грубо говоря, минимальное значение, получаемое при всех возможных покрытиях.

Знакомыми являются случаи  $D = 1$  для линий,  $D = 2$  для плоскостей и искривленных гладких поверхностей и  $D = 3$  для шаров и других тел конечного объема. Как будет показано на многочисленных примерах, существуют множества, для которых размерность Хаусдорфа – Безиковича не является целой и называется фрактальной.

Определение (1.3) фрактальной размерности может быть использовано на практике. Обратимся снова к береговой линии, изображенной на рис. 1.1. Она покрыта множеством квадратов со стороной  $\delta$ , за единицу длины принята протяженность обреза карты. Подсчитав число квадратов, необходимых для покрытия береговой линии, получим число  $N(\delta)$ . Далее можно поступить так, как подсказывает формула (1.3), и вычислить  $M_{\underline{d}}(\delta)$  или продолжить подсчет и найти  $N(\delta)$  при меньших значениях  $\delta$ . Так как из формулы (1.3) следует, что асимптотически, в пределе при малых  $\delta$ :

$$N(\delta) \sim \frac{1}{\delta^D}, \quad (1.4)$$

можно определить фрактальную размерность береговой линии, измерив угловой коэффициент (наклон) графика  $\ln N(\delta)$  как функции от  $\ln \delta$ . Для береговой линии, изображенной на рис. 1.1, такой график построен на рис. 1.7. Как показывают вычисления,  $D \approx 1,5$ . Размерность  $D$ , определяемую по формуле (1.4) путем подсчета числа клеток или ячеек, необходимых для покрытия множества в зависимости от размера клетки, принято называть размерностью, определяемой по подсчету клеток, или клеточной размерностью.



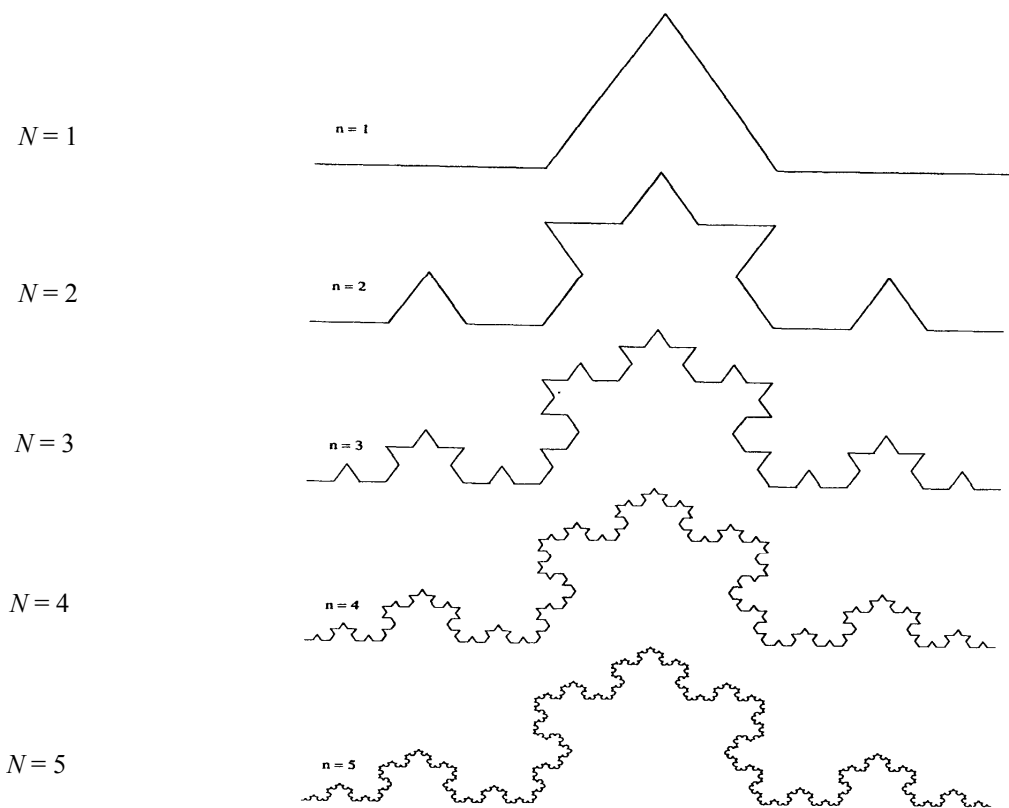
**Рис. 1.7.** Число ячеек размером  $\delta \times \delta$ , необходимых для покрытия береговой линии, изображенной на рис. 1.1 как функция шага  $\delta$  (км). Прямая в дважды логарифмических координатах соответствует зависимости  $N(\delta) = \alpha\delta^{-D}$  и построена по результатам измерений. Фрактальная размерность  $D \approx 1,52$

#### 1.4. ТРИАДНАЯ КРИВАЯ КОХА

На рис. 1.8 показано, как построить триадную кривую Коха. Триадная кривая Коха – один из стандартных примеров, приводимых в подтверждение того, что кривая может иметь фрактальную размерность  $D > 1$ .

Построение кривой Коха начинается с прямолинейного отрезка единичной длины  $L(1) = 1$ . Этот исходный отрезок называется затравкой и может быть заменен каким-нибудь многоугольником, например равносторонним треугольником, квадратом. Затравка – это 0-е поколение кривой Коха. Построение кривой Коха продолжается: каждое звено затравки мы заменяем образующим элементом, обозначенным на рис. 1.8 через  $N = 1$ . В результате такой замены получается 1-е поколение – кривая из четырех прямолинейных звеньев, каждое длиной по  $1/3$ .

Длина всей кривой 1-го поколения составляет величину  $L(1/3) = 4/3$ . Следующее поколение получается при замене каждого прямолинейного звена уменьшенным образующим элементом. В результате получается кривая 2-го поколения, состоящая из  $N = 4^2 = 16$  звеньев, каждое длиной  $\delta = 3^{-2} = 1/9$ . Длина кривой 2-го поколения равна  $L(1/9) = (4/3)^2 = 16/9$ . Заменяя все звенья предыдущего поколения кривой уменьшенным образующим элементом, получаем новое поколение кривой. Кривая  $N$ -го поколения при любом конечном  $N$  называется предфракталом.



**Рис. 1.8. Построение триадной кривой Коха**

В виде исключения проследим во всех подробностях за тем, как получается выражение для  $D$ . Длина предфрактала  $N$ -го поколения определяется формулой

$$L(\delta) = (4/3)^N.$$

Длина каждого звена составляет

$$\delta = 3^{-N}.$$

Замечая, что число поколений  $N$  представимо в виде

$$N = -\ln \delta / \ln 3,$$

запишем длину предфрактала в виде

$$L(\delta) = (4/3)^n = \exp\left(-\frac{\ln \delta [\ln 4 - \ln 3]}{\ln 3}\right) = \delta^{1-D}. \quad (1.5)$$

Формула (1.5) имеет вид приближенной формулы (1.1), в которой

$$D = \ln 4 / \ln 3 \sim 1,2628.$$

Число сегментов равно  $N(\delta) = 4^N = 4^{-\ln \delta / \ln 3}$  и может быть записано в виде

$$N(\delta) = \delta^{-D}. \quad (1.6)$$

Как будет показано дальше,  $D$  – фрактальная размерность триадной кривой Коха. Прежде всего заметим, что построение Коха позволяет в любом поколении получать нормальную кривую конечной длины. Мандельброт называет такие кривые предфракталами. Но при увеличении числа поколений величина  $\delta$  стремится к нулю и длина кривой расходится. Ясно, что множество точек, которое получают как предел бесконечно большого числа итераций процедуры Коха, не является кривой, для которой длина является удобной мерой. Но если выбрать пробную функцию  $h(\delta) = \delta^d$ , то получится  $d$ -мера

$$M_d = \sum h(\delta) = N(\delta)h(\delta) = \delta^{-D}\delta^d.$$

Таким образом, мера  $M_D$  остается конечной и равна единице только в том случае, если размерность  $D$ , входящая в пробную функцию  $h(\delta)$ , равна  $D$ . Можно заключить, что критическая размерность и, следовательно, размерность Хаусдорфа – Безиковича для триадной кривой Коха равна  $D = \ln 4 / \ln 3$ . На каждой стадии построения предфракталы Коха могут быть растянуты в прямую линию, поэтому топологическая размерность триадной кривой Коха равна  $D_T = 1$ . Так как размерность Хаусдорфа – Безиковича  $D$  для кривой Коха больше ее топологической размерности  $D_T$ , можно заключить, что кривая Коха есть фрактальное множество с фрактальной размерностью  $D = \ln 4 / \ln 3$ .

## 1.5. ПОДОБИЕ И СКЕЙЛИНГ

Прямая – особое множество точек в пространстве: при любом изменении масштаба мы получим то же самое множество точек. Кроме того, если произвести над прямой параллельный перенос, снова получится то же самое множество точек. Прямая инвариантна относительно параллельного переноса и изменения масштаба, или скейлинга, – можно сказать, что прямая самоподобна.

Зададим точки в пространстве их декартовыми координатами  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Прямая, проходящая через точку  $x_0$  в направлении  $a = (a_1, a_2, a_3)$ , есть множество точек  $L$ , определяемое соотношением

$$x = x_0 + ta, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Параметр  $t$  здесь любое действительное число. Если изменить масштаб длины в одно и то же число раз  $r$  для всех компонент радиус-вектора  $x$ , точки  $x$  отобразятся в новые точки  $x' = rx = (rx_1, rx_2, rx_3)$ , и мы получим новое множество точек  $r(L)$ , определяемое соотношением

$$x' = r(x_0 + ta) = x_0 + t'a - (1 - r)x_0. \quad (1.7)$$

Здесь  $t' = rt$  снова любое действительное число. Если сдвинуть новое множество точек  $r(L)$ , подвергнув все его точки параллельному переносу на величину  $(1 - r)x_0$ , то в результате мы получим исходное множество точек  $L$ : прямая инвариантна относительно изменения масштаба длины. Прямая инвариантна и относительно параллельного переноса  $x \rightarrow x + aN$ , где  $N$  – любое действительное число.

Как показывают аналогичные соображения, плоскость инвариантна относительно параллельных переносов в любом направлении, лежащем в ней самой, и относительно изменения масштабов длины. Наконец, трехмерное пространство инвариантно относительно параллельных переносов в любом направлении и относительно изменения масштабов длины.

Другие множества точек не обладают столь прочными симметриями-инвариантностью относительно параллельных переносов и скейлинга. Окружность не инвариантна ни относительно параллельного переноса, ни относительно скейлинга, а инвариантна относительно поворотов вокруг собственного центра. Фракталы также не обладают свойствами некоторых или даже всех этих простых инвариантностей. Полезно рассмотреть ограниченные множества, такие, как конечный отрезок прямой. Отрезок прямой не обладает трансляционной симметрией – любой сдвиг его всегда порождает новое множество точек. Но если изменить длины в  $r$  раз, где  $r < 1$ , то получится новое множество точек  $L' = r(L)$ , которое составит небольшую часть прямой. Этим отрезком прямой, подвергнув его параллельному переносу, можно покрыть часть исходного прямолинейного отрезка  $L$ . При надлежащем выборе числа  $r$  мы можем однократно покрыть исходный отрезок  $N$  непересекающимися отрезками. Можно сказать, что множество  $L$  самоподобно с коэффициентом подобия  $r$ . Для отрезка прямой единичной длины мы можем выбрать  $r(N) = 1/N$ , где  $N$  – любое целое число. Прямоугольный участок плоскости можно покрыть его уменьшенными копиями, если их длины изменить в  $r(N) = (1/N)^{1/2}$  раз. Аналогично прямоугольный параллелепипед можно покрыть его уменьшенными копиями, если выбрать  $r(N) = 1/N^{1/3}$ . В общем случае масштабный множитель следует выбирать равным

$$r(N) = (1/N)^{1/d}. \quad (1.8)$$

Размерность подобия  $d$  для прямых, плоскостей и кубов равна соответственно 1, 2 и 3.

Рассмотрим теперь кривую Коха на рис. 1.8. С масштабным множителем  $r = 1/3$  мы получаем первую треть всей кривой. Нам необходимо  $N = 4$  таких фрагментов, чтобы покрыть исходное множество его уменьшенными копиями, подвергая их повторным параллельным переносам и поворотам. Мы можем также выбрать масштабный множитель  $r = (1/3)^N$  и покрыть исходное множество его  $N = 4^N$  уменьшенными копиями. Как было показано, для триадной кривой Коха масштабный множитель определяется выражением

$$r(N) = (1/N)^{1/D} \quad (1.9)$$

с размерностью подобия  $D_s$ , равной размерности Хаусдорфа – Безиковича

$$D_s = \ln 4 / \ln 3.$$

В общем случае размерность подобия  $D_s$  определяется выражением

$$D_s = -\ln N / \ln r(N). \quad (1.10)$$

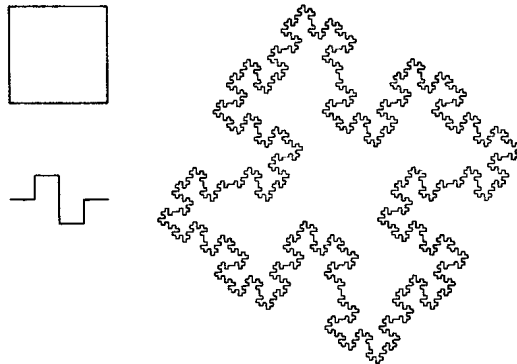
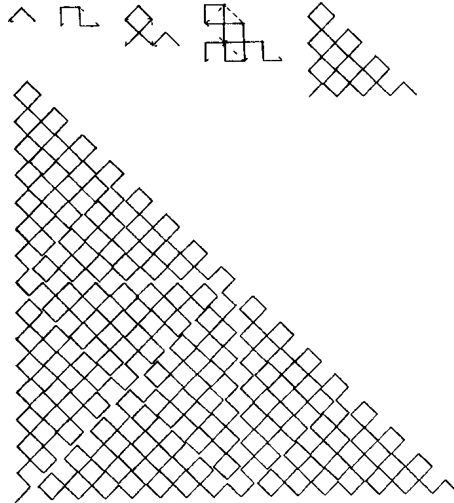


Рис. 1.9. Построение квадратной кривой Коха

Для самоподобных фракталов размерность Хаусдорфа – Безиковича  $D$  равна  $D_s$ , и для таких фракталов мы будем опускать индекс «s» у размерности подобия.

Размерность подобия легко поддается определению для различных фракталов, получающихся с помощью различных вариантов построения Коха. Рассмотрим предфрактал Коха, построенный с единичным квадратом в качестве затравки и с образующим элементом, состоящим из  $N = 8$  ломаных длиной  $r = 1/4$ , изображенных на рис. 1.9. Эта кривая имеет размерность подобия  $D = -\ln 8 / \ln 1/4 = 3/2$  и равна размерности Хаусдорфа – Безиковича множества, получающегося после бесконечно большого числа итераций. Однако, поскольку в качестве затравки мы используем единичный квадрат, фигура в целом не выдерживает преобразования подобия. Каждый фрагмент «береговой линии» самоподобен, но, если уменьшить всю кривую в  $r$  раз, то получим уменьшенную копию оригинала, и вполне возможно, что оригинал нельзя будет покрыть такими уменьшенными множествами. Дело в том, что фрактальная скейлинговая инвариантность достигается только в пределе при  $\delta \rightarrow 0$ , и можно заключить, что фрактальная природа кривых Коха есть, строго говоря, локальное свойство. Замечательная кривая Коха изображена на рис. 1.10. Эта кривая без самопересечений заполняет прямоугольный равнобедренный треугольник. Затравкой служит единичный интервал, а образующий элемент, показанный на рис. 1.10, состоит из  $N = 2$  звеньев длиной  $r = 0,99 \cdot 1/\sqrt{2}$ . Коэффициент 0,99 выбран для того, чтобы было легче проследить за структурой кривой, так как при  $r = 1/\sqrt{2}$  каждое поколение выглядит просто как бумага «в клеточку».



**Рис. 1.10. Треугольный невод,  $D = 1,944$ . Для нескольких первых поколений ломаных предыдущее поколение показано штриховыми линиями. Каждое из поколений изображено в увеличенном виде, чтобы можно было проследить структуру кривой**

Определяемое этим построением фрактальное множество имеет размерность  $D = -\ln 2 / \ln (0,99/\sqrt{2}) = 1,944$ . Как видно из рис. 1.10, образующий элемент используется в двух вариантах: один сдвигает середину отрезка прямой влево, другой – вправо. Кроме того, каждое новое поколение предфракталов начинается с чередующихся левых и правых образующих элементов. На рис. 1.10 каждое новое поколение показано в увеличенном виде. Это сделано для того, чтобы прямолинейные отрезки имели заданную длину и за структурой кривой можно было следить без ухудшения разрешающей способности.

Попытаемся теперь слегка изменить правила построения. Пусть при первом использовании образующего элемента середина образующего отрезка смещается влево. Каждое последующее поколение начинается с образующего элемента, смещенного вправо, а затем смещения середины вправо и влево чередуются. Несколько первых поколений и 11-е поколение показаны на рис. 1.11. Предельная фрактальная кривая называется драконом Хартера – Хейтуэя.

Если сохранить правила построения треугольного невода, но воспользоваться при этом образующим элементом, изображенным на рис. 1.12, то получится самопересекающаяся кривая, заполняющая плоскость. 10-е поколение показано на рис. 1.12. Образующий элемент разбивает единичный отрезок на две части, расположенные под прямым углом друг к другу. Длинный катет изменяется с масштабным множителем  $r_1 = 2/\sqrt{5}$ , а короткий – с другим масштабным множителем  $r_2 = 1/\sqrt{5}$ . В этом случае мы уже не можем при определении размерности подобия использовать формулу (1.10). Мандельброт определил размерность подобия  $D$  как размерность, для которой выполняется соотношение

$$\sum_i r_i^D = 1. \quad (1.11)$$

В рассматриваемом случае  $D = 2$ . Верно также, хотя и не доказано, утверждение о том, что эта размерность совпадает с размерностью Хаусдорфа – Безиковича данного фрактального множества. Кроме того, при использовании соотношения (1.11) возникает вопрос о том, как быть с перекрывающимися частями кривой. Впрочем, стоит лишь перейти от простейших фракталов к чуть более сложным, как возникает множество далеко не простых вопросов.

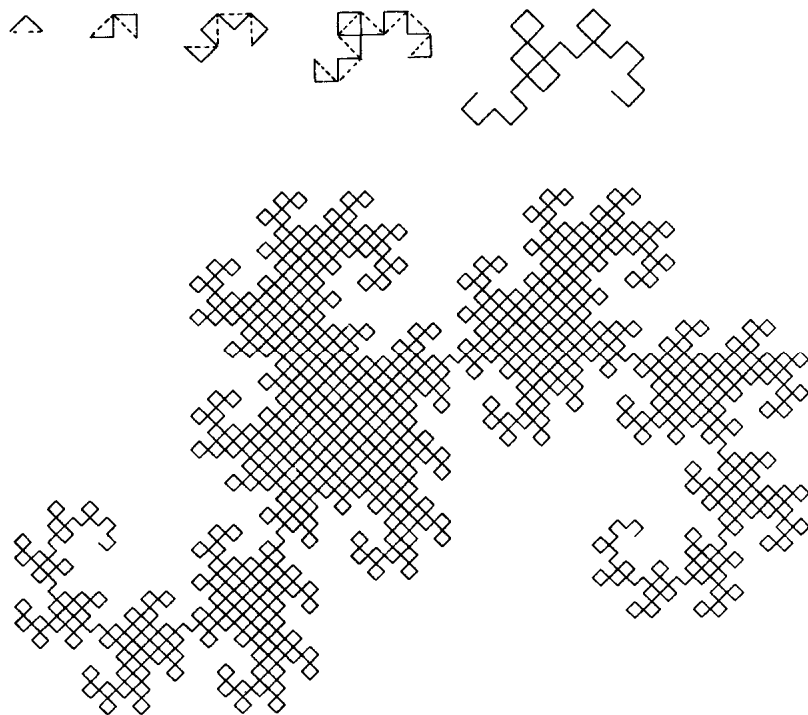


Рис. 1.11. Дракон Хартера – Хейтуэя,  $D = 2$

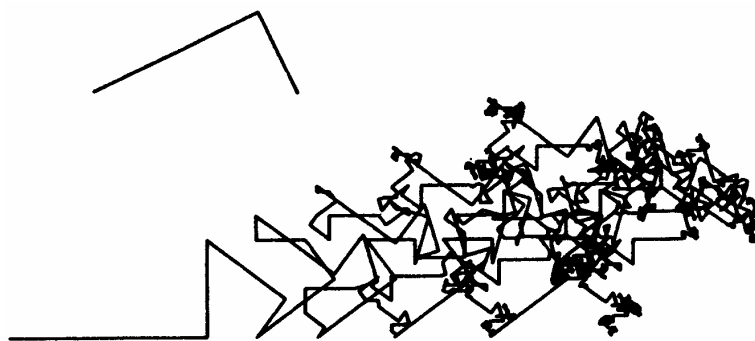


Рис. 1.12. Модифицированный треугольный невод,  $D = 2$ .  
Образующий элемент, изображенный в левом верхнем углу,  
покрывает единичный отрезок и преобразуется  
с двумя коэффициентами подобия  $r_1 = 2/\sqrt{5}$  и  $r_2 = 1/\sqrt{5}$

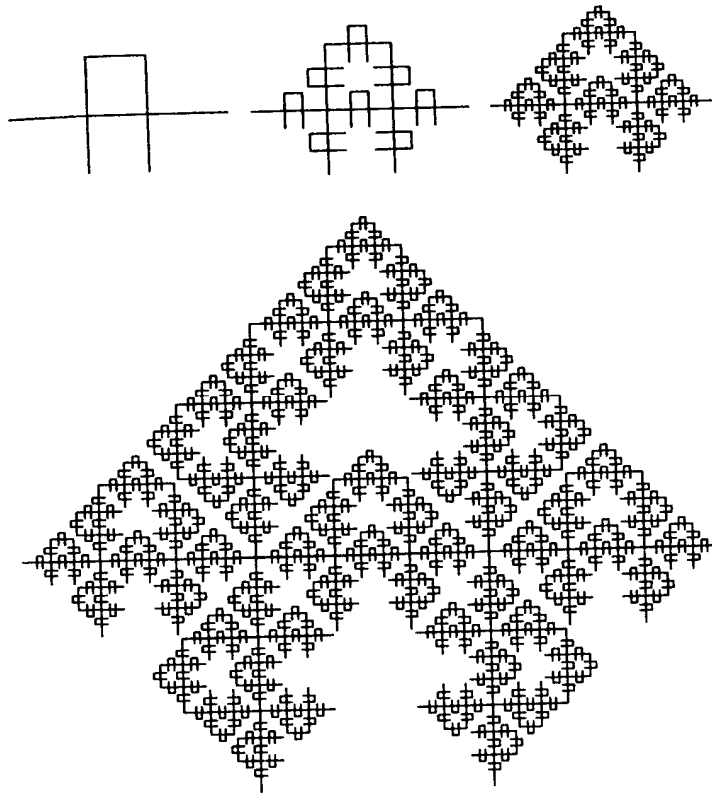
## 1.6. КРИВЫЕ МАНДЕЛЬБРОТА – ГИВЕНА И СЕРПИНСКОГО

Построение кривых Коха, изображенное на рис. 1.13, принадлежит Мандельброту и Гивену. Образующий элемент для этой кривой делит прямолинейный отрезок на части длиной  $r = 1/3$  и соединяет их в петлю, состоящую из трех частей, к которой пристраиваются две ветви.

Мандельброт и Гивен использовали эту кривую и аналогичные кривые в качестве моделей перколяционных кластеров. Кривая Мандельброта – Гивена интересна тем, что имеет петли всех возможных размеров и ветви (выступы) всех возможных размеров. И выступы, и петли декорированы петлями и выступами и т.д. При каждой итерации (переходе от одного поколения предфракталов к следующему) образующий элемент производит замену каждого прямолинейного звена в предфрактале на  $N = 8$  звеньев, уменьшенных с  $r = 1/3$ . Используя формулу (1.10) для размерности подобия, мы заключаем, что кривая Мандельброта – Гивена имеет фрактальную размерность  $D = \ln 8 / \ln 3 = 1,89 \dots$

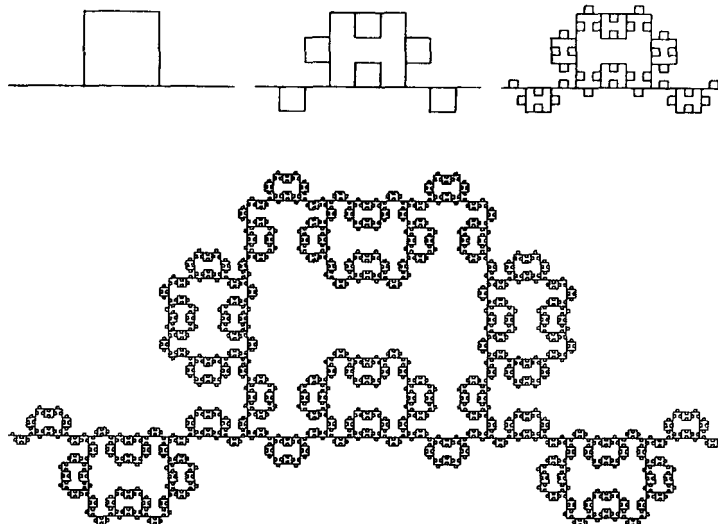
Пусть кривая Мандельброта – Гивена изготовлена из какого-нибудь электропроводного материала, и ток течет от левого конца кривой к правому. Ясно, что ни в одной ветви, возникающей из двух вертикальных отрезков образующего элемента, тока не будет. Ток будет течь только по остоу, по кривой, которая получится, если от кривой Мандельброта – Гивена отсечь все ветви, соединенные с исходным прямолинейным отрезком (затравкой) только одной связью. Отбросив все ветви, мы получим кривую, изображенную на рис. 1.14.





**Рис. 1.13. Последовательные этапы построения кривой  
Мандельброта – Гивена. Высота образующего элемента несколько  
уменьшена, чтобы можно было проследить структуру кривой.  
Фрактальная размерность  $D_v = \ln 8 / \ln 3 = 1,89\dots$  .  
Мандельброт и Гивен описывают также случайные варианты этой кривой**

При построении этой кривой образующий элемент применялся в таких направлениях, чтобы углы получающейся ломаной не соприкасались между собой. Фрактальная размерность такой кривой без свободных («висячих») концов равна  $D_v = \ln 6 / \ln 3 = 1,63\dots$ , так как образующий элемент заменяет каждый прямолинейный отрезок  $N = 6$  отрезками, уменьшенными ( $r = 1/3$ ) копиями заменяемого отрезка. В скольких местах можно перерезать ординарную (односвязную) связь, чтобы концы затравки оказались разъединенными? Каждый раз, применяя образующий элемент, мы порождаем  $N = 2$  односвязных связей, поэтому эти связи образуют множество точек с фрактальной размерностью  $D_{sc} = \ln 2 / \ln 3 = 0,63\dots$  .



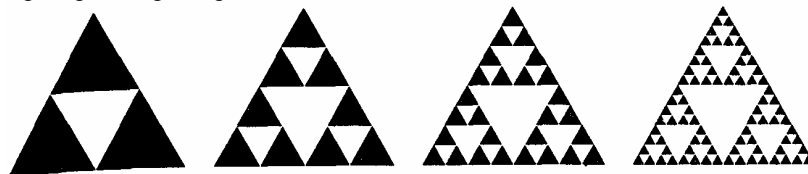
**Рис. 1.14. Построение кривой Мандельброта – Гивена без ветвей.**

**Эта кривая получена с помощью образующего элемента с одной петлей. Фрактальная размерность  $D_v = \ln 6 / \ln 3 = 1,63\dots$**

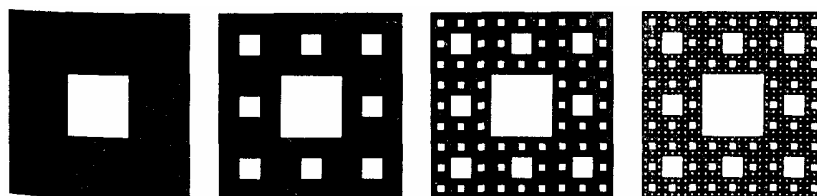
Кривые Мандельброта – Гивена обладают многими интересными геометрическими свойствами, которые не находят отражения в фрактальной размерности кривой как целого. Действительно, такие подмножества, как остов, односвязные связи и другие, также являются фрактальными множествами со своими собственными фрактальными размерностями. Многие физические процессы естественным образом выбирают те подмножества структур, на которых они происходят, и поэтому при рассмотрении таких процессов необходимо использовать много фрактальных размерностей.

Существует еще одно построение, порождающее кривую с петлями всех размеров. Это салфетка Серпинского, изображенная на рис. 1.15. При каждом применении образующего элемента треугольник, рассматриваемый вместе с внутренними

точками, заменяется  $N = 3$  треугольниками, уменьшенными с коэффициентом  $r = 1/2$ , поэтому из соотношения (1.10) следует, что размерность подобия в этом случае равна  $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,58\dots$ . С салфеткой Серпинского тесно связана другая кривая – так называемый ковер Серпинского. Он изображен на рис. 1.16. Бесконечно много поколений предфракталов порождают фрактальную кривую. «Толстые» (черные) участки предфракталов при переходе к предельной фрактальной кривой исчезают, а полный периметр дыр в ковре Серпинского становится бесконечным.



**Рис. 1.15. Построение треугольной салфетки Серпинского. Затравка-треугольник со всеми внутренними точками. Образующий элемент исключает из затравки центральный треугольник. Справа: четвертое поколение предфракталов; фрактальная кривая получается в пределе при бесконечно большом числе поколений и имеет фрактальную размерность  $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,58\dots$**



**Рис. 1.16. Построение ковра Серпинского. Затравка-квадрат, а образующий элемент (слева) состоит из  $N = 8$  квадратов, полученных из затравки преобразованием подобия (сжатием) с коэффициентом подобия  $r = 1/3$ . Справа: четвертый этап построения; размерность подобия  $D = \ln 8 / \ln 3 = 1,89\dots$**

Кривые Серпинского использовались в качестве моделей многих физических явлений.

## 1.7. ЕЩЕ О СКЕЙЛИНГЕ

К обсуждению масштабной инвариантности, или скейлинга, часто бывает полезно подходить с другой точки зрения. Рассмотрим изображенную на рис. 1.8 кривую Коха как график некоторой функции  $f(t)$ . Этот график представляет собой геометрическое место точек  $(x_1, x_2)$  плоскости, заданное соотношением  $(x_1, x_2) = (t, f(t))$ . Если  $\lambda = r = (1/3)^N$  при  $N = 0, 1, 2, \dots$  есть масштабный множитель, то триадная кривая Коха обладает тем свойством, что

$$f(\lambda t) = \lambda^\alpha f(t)$$

с показателем  $\alpha = 1$ . Заметим, что в случае кривой Коха функция  $f(t)$  неоднозначна. Тем не менее скейлинговое соотношение выполняется для любой точки множества. Аналогичное построение применимо и к функциям, заданным на всех положительных действительных числах. Например, степенная функция  $f(t) = bt^\alpha$  удовлетворяет соотношению однородности

$$f(\lambda t) = \lambda^\alpha f(t) \quad (1.12)$$

при всех положительных значениях масштабного множителя  $K$ . Функции, удовлетворяющие соотношению (1.12), принято называть однородными. Однородные функции играют очень важную роль в описании термодинамики фазовых переходов. Многое из того, что удалось достичь в последние годы в понимании критических явлений вблизи фазовых переходов второго рода, укладывается в следующее утверждение: критическая часть свободной энергии у таких систем удовлетворяет скейлинговому соотношению

$$F_c(\lambda t) = \lambda^{2-\alpha} F_c(t). \quad (1.13)$$

Здесь  $t = |T_c - T| / T$  есть относительная температура, измеряемая от температуры фазового перехода  $T_c$ , а  $\alpha$  в данном случае – критический показатель удельной теплоемкости. Выбирая  $\lambda$  так, чтобы выполнялось равенство  $\lambda t = 1$  (такой выбор масштабного множителя допустим, поскольку соотношение (1.13) выполняется при любом значении  $\lambda$ ), получаем критическую часть свободной энергии в виде

$$F_c(\lambda t) = \lambda^{2-\alpha} F_c(t).$$

Из термодинамического определения теплоемкости  $C = -T \partial^2 F / \partial t^2$  следует, что при  $t \rightarrow 0$  удельная теплоемкость ведет себя как  $C \sim t^{-\alpha}$  (такое поведение согласуется с экспериментальными данными). Аналогичная скейлинговая зависимость описывает статистические свойства протекания, или перколяции, вблизи порога протекания. Современная ренормгрупповая теория критических явлений объясняет, почему свободная энергия имеет скейлинговую форму и позволяет вычислять критические показатели.

Разумеется, и степенная функция, и многие другие функции, удовлетворяющие скейлинговому соотношению, не являются фрактальными кривыми. Однако масштабно-инвариантные фракталы обладают изящной скейлинговой симметрией, и большинство рассматриваемых Мандельбротом фракталов в том или ином смысле масштабно-инвариантны. Мандельброт отмечает, что масштабно-инвариантные фракталы могут использоваться в качестве приближения при описании природы – аналогично тому, как ранее использовались при описании природных тел прямые, плоскости и другие гладкие кривые и поверхности.

### 1.8. ФУНКЦИЯ ВЕЙЕРШТРАССА – МАНДЕЛЬБРОТА

В качестве примера масштабно-инвариантной фрактальной кривой рассмотрим фрактальную функцию Вейерштрасса – Мандельброта  $W(t)$ , определяемую соотношением

$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{ib^n t}) e^{i\varphi_n}}{b^{(2-D)n}}. \quad (1.14)$$

Следует заметить, что  $W(t)$  зависит от  $b$  тривиальным образом, так как только параметр  $b$  определяет, какая часть кривой видна, когда аргумент  $t$  изменяется в заданном интервале. Параметр  $D$  должен принимать значения в диапазоне  $1 < D < 2$ ,  $\varphi_n$  – произвольная фаза (каждый выбор фазы  $\varphi_n$  соответствует другой функции  $W(t)$ ). Функция Мандельброта – Вейерштрасса непрерывна, но не дифференцируема ни в одной точке. Простая разновидность этой функции получается, если положить  $\varphi_n = 0$ . Косинусной фрактальной функцией Вейерштрасса – Мандельброта называется действительная часть функции  $W(t)$ :

$$C(t) = \operatorname{Re} W(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos b^n t)}{b^{(2-D)n}}. \quad (1.15)$$

Принято считать, что эта функция фрактальна с размерностью  $D$ . Известно, что она действительно имеет размерность  $D$ , если под этим термином понимать клеточную размерность, но, по-видимому, не размерность Хаусдорфа – Безиковича. Фрактальная размерность  $D(W_b)$  функции Вейерштрасса-Мандельброта заключена в пределах

$$D - (B/b) [D(W_b)] D.$$

Входящая в это неравенство постоянная  $B$  достаточно велика для того, чтобы оно выполнялось и при больших  $b$ . Были вычислены значения функции Вейерштрасса – Мандельброта при нескольких значениях параметров в интервале «времени»  $0 \leq t \leq 1$  (рис. 1.17). При малых значениях  $D$  функция по существу гладкая, но когда  $D$  возрастает до 2, начинает сильно флуктуировать и напоминает шум в электронных цепях. Этот шум накладывается на общий тренд к возрастанию. Функция  $C(t)$  – однородная и удовлетворяет соотношению однородности

$$C(bt) = b^{2-D} C(t). \quad (1.16)$$

Следовательно, если мы знаем функцию  $C(t)$  на некотором интервале значений  $t$ , то тем самым она известна при любых  $t$ . В качестве примера сравним функцию  $C(t)$  при  $b = 1,5$  и  $D = 1,8$  (рис. 1.18, а) с той

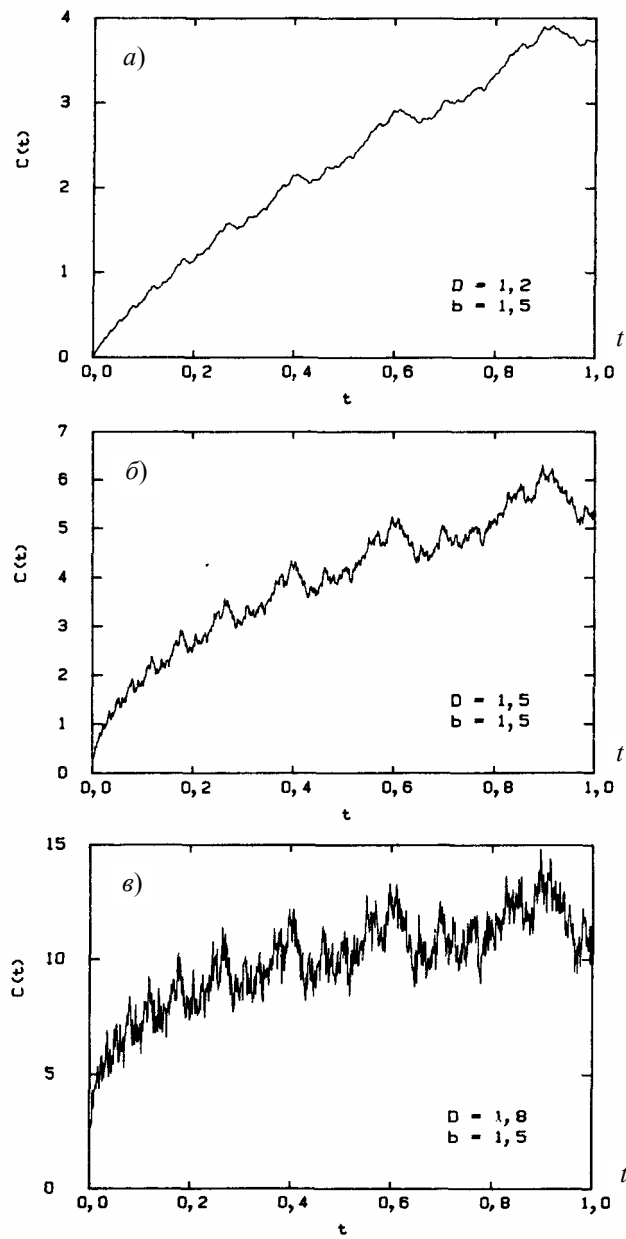
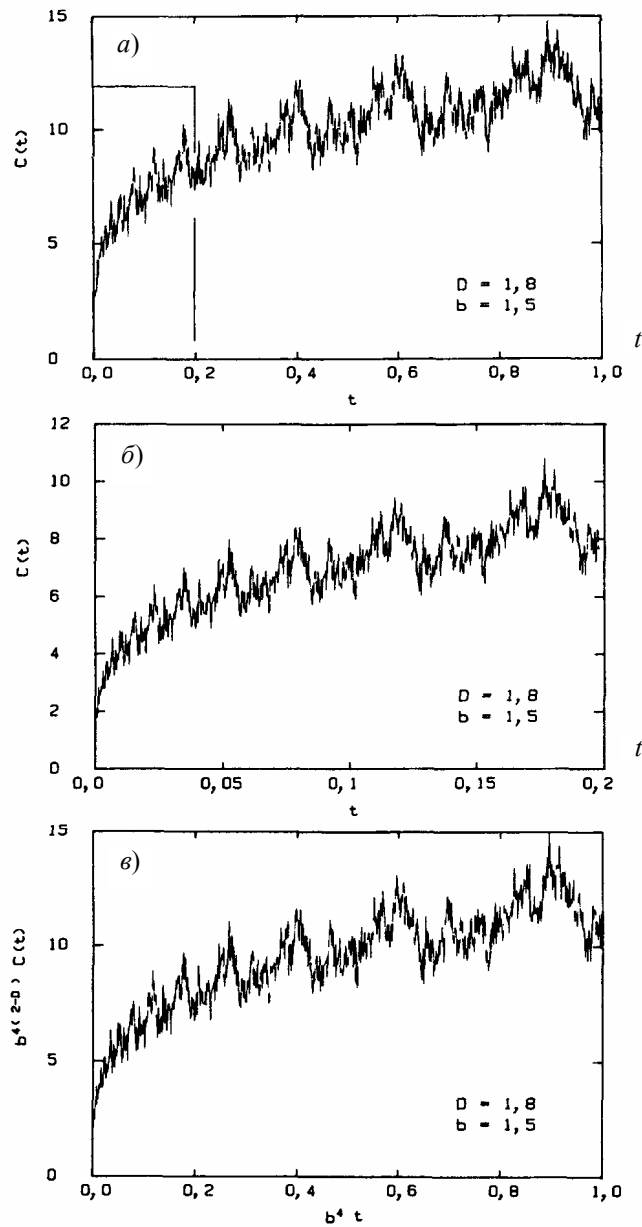


Рис. 1.17. Фрактальная функция Вейерштрасса – Мандельброта  $C(t)$  с  $b = 1,5$ :  
 $a - D = 1,2$ ;  $б - D = 1,5$ ;  $в - D = 1,8$



**Рис. 1.18. Косинусоида Вейерштрасса – Мандельброта с  $D = 1,8$  и  $b = 1,5$ :**

$a - 0 \leq t \leq 1$ ;  $b - 0 \leq t \leq b^{-4}$ ;  $c -$  кривая из примера  $b$ , преобразованная к отрезку  $[0, 1]$

же функцией, вычисленной в интервале  $0 \leq t \leq b^{-4}$  (рис. 1.18,  $b$ ). Нетрудно видеть, что графики на обоих рисунках подобны. Действительно, из соотношения (1.16) следует, что если в кривой, изображенной на рис. 1.18,  $b$ , заменить  $t$  на  $b^4 t$  и  $C(t)$  на  $b^{4(2-D)} C(t)$ , как это сделано на рис. 1.18,  $c$ , то в результате получится исходная функция, изображенная на рис. 1.18,  $a$ . В этом и проявляются скейлинговые свойства функции  $C(t)$ .

Следует подчеркнуть, что кривая  $C(t)$  не самоподобна, а самоаффинна, так как и в направлении оси  $t$ , и в направлении оси  $C(t)$  мы использовали различные масштабные множители  $r$ .

Функцию Вейерштрасса-Мандельброта можно использовать для получения случайных фрактальных кривых, выбирая случайным образом фазу  $\varphi_N$  из интервала  $(0, 2\pi)$ .

Анализ результатов экспериментальных исследований поведения сетевого трафика, представленный в работах [18, 23 – 25], позволил сделать вывод, что ему присуще свойство самоподобности.

В связи с обнаружением этих особенностей сетевых процессов особую актуальность приобретают вопросы разработки конструктивных методов исследования фрактальности применительно к современным компьютерным приложениям и учета влияния на характер формирования управляющих воздействий при передаче пакетного трафика. В этом случае ключевым звеном в структуре распределенного сетевого управления процессами должна стать система прогнозирования состояния виртуальных соединений, в которой учитываются особенности стохастической природы сетевого трафика.

В этих условиях разработка новых сетевых технологий и повышение эффективности работы современных телекоммуникационных систем требуют создания математических моделей, наиболее полно отражающих отмеченные выше свойства сетевых процессов.

## 2. ФРАКТАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

При исследовании различных объектов природного происхождения уже длительное время предметом пристального внимания являются характерные для этих объектов определенные уровни регулярности и фрагментации. Эти свойства проявляются, например в том, что профиль горы имеет сходство с контурами образующих ее холмов, контуры берегов рек и морей – с отдельными составляющими береговую линию фрагментами, профиль дерева имеет сходство со структурой ветвей и т.д. Для анализа геометрических свойств рассматриваемых структур были введены математические объекты – фракталы. С формальной точки зрения фракталы это объекты, которые обнаруживают некоторую форму самоподобия: части целого могут характеризовать все целое путем масштабирования своей структуры. Связь между масштабируемостью и фрактальностью обнаруживается не только для геометрических объектов, но и в различных физических явлениях, при химических превращениях, а также во многих других наблюдаемых объектах, в том числе и в случайных процессах. Данные вопросы достаточно подробно рассматривались в гл. 1.

Подчеркнем еще раз, что геометрические факторы и характеризующие их некоторые параметры, например размерность меры, имеют важное значение при описании как природных объектов, так и объектов искусственного происхождения, полученных в результате интеллектуальной деятельности человека. Оказывается, при более детальном изучении макро(микро)поведения систем необходимы нетрадиционные подходы, выходящие за рамки евклидовой геометрии [5 – 7]. Предметом исследования становятся геометрические объекты с дробной размерностью, занимающие промежуточное положение между точкой и кривой, кривой и поверхностью и т.д. Круг новых идей, связанных с изучением необычайных, с точки зрения общепринятых представлений, физических или технических объектов, оформился в специальное научное направление – фрактальную геометрию.

Для их описания, формирования результатов общего характера необходимо подобрать достаточно универсальную математическую конструкцию. Рассматриваемые ниже канторовские множества являются именно теми математическими моделями, позволяющими проиллюстрировать особенности поведения фракталов. Образующим элементом для построения одного из вариантов канторовских множеств служит отрезок единичной длины. Разделим этот отрезок на три равные части ( $\varphi = 1/3$ ). Отбрасываем открытую среднюю часть, оставляя слева и справа от нее два отрезка длины  $1/3$ . Применим эту процедуру к оставшимся отрезкам, получаем четыре отрезка длины  $(1/3)^2$ . Продолжая далее эту процедуру разбиения на отрезки, приходим для  $n$ -го этапа разбиения к отрезкам длины  $\delta_i = (1/3)^n$ ,  $i = 1, N$  общим числом  $N = 2^n$ . Мера определяется при  $L_0 = 1$  в соответствии с выражением вида

$$L_\beta = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n (1/3)^{n\beta} = \delta^{\beta-B}.$$

Эта мера не расходится или не стремится к нулю, если  $\beta = B$ . Указанному условию соответствует  $2^n (1/3)^{n\beta} = 1$  или  $\beta = \ln 2 / \ln (1/\xi) = \ln 2 / \ln 3$ . Таким образом, канторовское множество является фракталом, его размерность имеет дробную величину. Заметим, что, во-первых, топологическая размерность канторовского множества равна нулю (мера неплотного множества точек, покрытых элементарными отрезками, равна нулю), во-вторых, при  $\xi = 1/2$  ( $\beta = 1$ ) множество перестает быть фрактальным. Нетрудно дать геометрическое истолкование эволюции канторовского множества. В процессе разбиения исходного отрезка часть состояний (отрезков) неовратно теряется. На  $n$ -м этапе разбиения отношение оставшихся состояний  $2^n$  к общему количеству состояний  $3^n$  в дважды логарифмическом масштабе точно равняется размерности канторовского множества  $\beta$ . Обобщим полученные результаты на случай разбиения исходного отрезка длины  $t$ . Имеем после  $n$ -го этапа разбиения число оставшихся отрезков  $2^n$ , длина каждого из которых  $\delta_i = (1/3)^n t$ ,  $i = 1, N$ . Мера канторовского множества равна

$$L_\beta = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n (1/3)^{n\beta} t^\beta = \delta^{\beta-B}.$$

Так как  $2^n (1/3)^{n\beta} = 1$ , получаем при  $\beta = B$

$$L_\beta = L_0 = t^\beta.$$

Приведенное разбиение отрезка не является единственно возможным. Так, при разбиении исходного (единичного) отрезка на  $k$  более мелких отрезков, сумма длин которых  $k\xi < 1$  (для предыдущего случая  $2\xi < 1$ ), фрактальная размерность канторовского множества оказывается равной  $\beta = \ln k / \ln (1/\xi)$ . К другому варианту этого множества можно прийти при разбиении исходного отрезка на  $\mu$  неодинаковых отрезков, но так, чтобы выполнялось неравенство  $\sum_{i=1}^{\mu} \xi_i < 1$ . Можно по-

строить канторовское множество и для случайных значений  $\xi_i$  при выполнении  $\bar{\mu}\bar{\xi} < 1$ , где среднее значение  $\bar{\xi} = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\mu} \xi_i$ .

Весьма полезным оказывается использование идей фрактальной геометрии канторовских множеств для понимания особенностей поведения процессов с так называемой неполной памятью. В теории линейных систем известно соотношение, связывающее выходной процесс системы с входным (интеграл свертки)

$$u(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad (2.1)$$

где импульсная переходная функция  $h(t)$  определяет полную память системы, т.е. на состояние  $u(t)$  в момент времени  $t$  оказывают влияние все предыдущие значения  $f(\tau)$ ,  $0 < \tau < t$ .

К другому крайнему случаю можно прийти, если в качестве импульсной переходной функции использовать дельта-функцию. Подставляя в формулу (2.1) выражение  $h(t - \tau) = \delta(t - \tau)$ , на основании фильтрующих свойств этой функции получаем  $u(t) = f(t)$ , что говорит об отсутствии памяти, так как на протекание процесса  $u(t)$  не оказывают влияние предыдущие значения  $f(\tau)$ ,  $0 < \tau < t$ . Оказывается, существуют системы с неполной памятью. Процессы в них занимают промежуточное положение. В ходе функционирования этих систем при формировании выходного процесса участвуют не все состояния системы: система как бы неовозвратно теряет часть своих состояний на некоторых интервалах времени. Поэтому вполне логичным является использование для описания функционирования таких систем канторовского множества.

Выберем импульсную переходную функцию вида

$$h(\tau) = \begin{cases} 1/t, & \tau \in (0, t); \\ 0, & \tau < 0, \tau > t, \end{cases}$$

которая пронормирована на единицу:  $\int_0^t h(\tau) d\tau = 1$ . Процессу  $u(t)$  на выходе системы с полной памятью соответствует процедура усреднения на интервале  $(0, t)$  временной оси

$$u(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Исходным для построения канторовского множества служит упомянутый временной интервал величины  $t$  (рис. 2.1). На каждом этапе разбиения производится перенормировка на единицу оставшихся состояний интеграла. Как и для предыдущего построения, выбираем

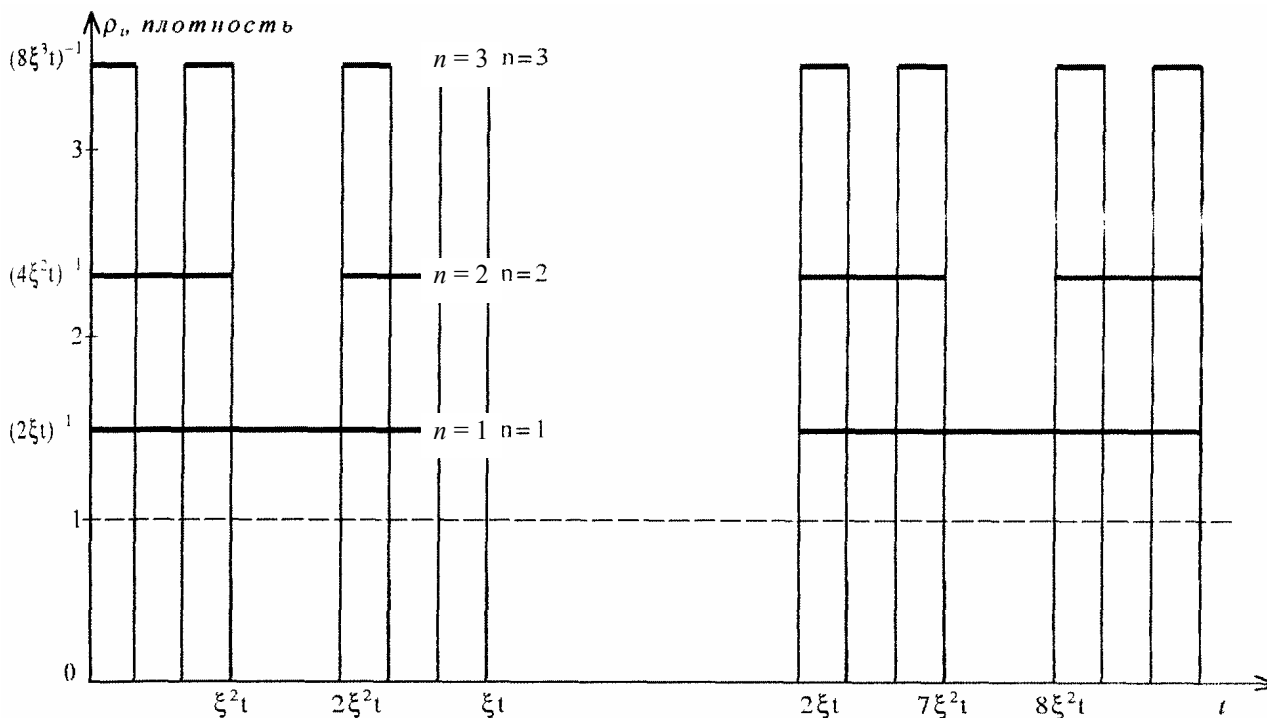


Рис. 2.1. Процесс построения множества Кантора

$\xi = 1/3$ . Исходный интервал делится на три части. Отбрасывают среднюю часть, оставляя слева и справа от нее два подынтервала длиной  $\xi t$ . Координаты оставшихся подынтервалов  $(0, \xi t)$  и  $(2, \xi t)$  в результате перенормировки на единицу плотности состояний после первого этапа разбиения  $1/2\xi t$ . Продолжая эту процедуру, на втором этапе имеем четыре подынтервала длиной  $\xi^2 t^2$  с координатами  $(0, \xi^2 t^2)$ ,  $(2\xi^2 t^2, 3\xi^2 t^2)$ ,  $(6\xi^2 t^2, 7\xi^2 t^2)$ ,  $(8\xi^2 t^2, 9\xi^2 t^2)$  и плотностью  $1/(2\xi^2 t^2)$ . На  $n$ -м этапе разбиения имеем  $2^n$  подынтервалов, каждый длиной  $\xi^n t$  с координатами  $(t_m^{(n)}, t_m^{(n)} + \xi^n t)$ ,  $m = 1, 2^n$ , где  $t_m^{(n)}$  – начальная координата оставшихся подынтервалов,  $t_1^{(n)} = 0$  для всех  $n$ .

Плотность состояний определяется выражением  $1/(2\xi)^n t$ . Интеграл (2.2) на  $n$ -м этапе разбиения с учетом вклада оставшихся подынтервалов и нормировки принимает вид

$$u(t) = \frac{1}{(2\xi)^n t} \int_0^t f(\tau) \left[ 1_{\left( t_m^{(n)} \leq \tau < t_m^{(n)} + \xi^n t \right)} \right] d\tau, \quad m = \overline{1, 2^n}, \quad (2.3)$$

где единичная функция

$$1(t_m^{(n)}, t_m^{(n)} + \xi^n t) = \begin{cases} 1, & \tau \in (t_m^{(n)}, t_m^{(n)} + \xi^n t); \\ 0, & \tau < t_m^{(n)}, \tau_m^{(n)} + \xi^n t_m. \end{cases}$$

После предельного перехода  $n \rightarrow \infty$  (операции свертки интеграла на канторовское множество), используя методику работы [8], получаем одну из форм записи дробного интеграла.

$$u(t) = B_\xi \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Запись вида (1.5) справедлива, если  $f(t)$  является постоянной величиной или стационарным случайным процессом. В последнем случае с его помощью определяют статистики первого и второго порядка фрактального стационарного случайного процесса. Запишем соотношение (2.3) в форме интеграла свертки

$$u(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (2.5)$$

где

$$h(\tau) = K_0 \tau^{\beta-1}, \quad (2.6)$$

**импульсная переходная функция, удовлетворяющая условию нормировки**

$$\int_0^1 h(\tau) d\tau = 1, \quad K_0 = B_\phi \Gamma^{-1}(\beta) t^{-\beta}.$$

Иная форма записи интеграла (2.3) при сохранении его значения, равного значению интеграла (2.2), а также другой вид импульсной переходной функции является следствием эволюции состояний системы не на всем непрерывном интервале  $(0, t)$ , а на неплотном канторовском множестве точек (на остальных «потерянных» участках этого интервала у системы отсутствует память). Для этого случая функционирования системы с неполной памятью интеграл от  $f(t)$  на непрерывном интервале  $(0, t)$  заменяется на интеграл от этой функции, умноженной на бесконечную последовательность  $\delta$ -функций с координатами в точках канторовского множества и интенсивностями, равными в сумме единице. Хотя топологическая мера этого интеграла в силу свойств канторовского множества равна нулю, значение его теперь определяется суммой бесконечно малых скачков этой функции в точках канторовского множества.

Рассмотрим соотношение вида  $t^\beta u(t)$ , где  $u(t)$  определяется выражением (2.3). Переходя обратно к допредельному случаю (параметр разбиения  $n$  – конечная величина), а также учитывая, что согласно (1.2) мера канторовского множества  $t^\beta$  должна заменяться на величину  $(2\xi)^n t$  – сумму длин оставшихся на  $n$ -м этапе разбиения подынтервалов, приходим к выражению

$$\int_0^t f(\tau) [1(t_m^{(n)} \leq \tau < t_m^{(n)} + \xi^n t)] d\tau,$$

которому соответствует исходный интеграл другого вида

$$\phi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Таким образом, умножению исходного интеграла (2.2) на  $t$  соответствует умножение дробного интеграла (2.3) на  $t^\beta$ :

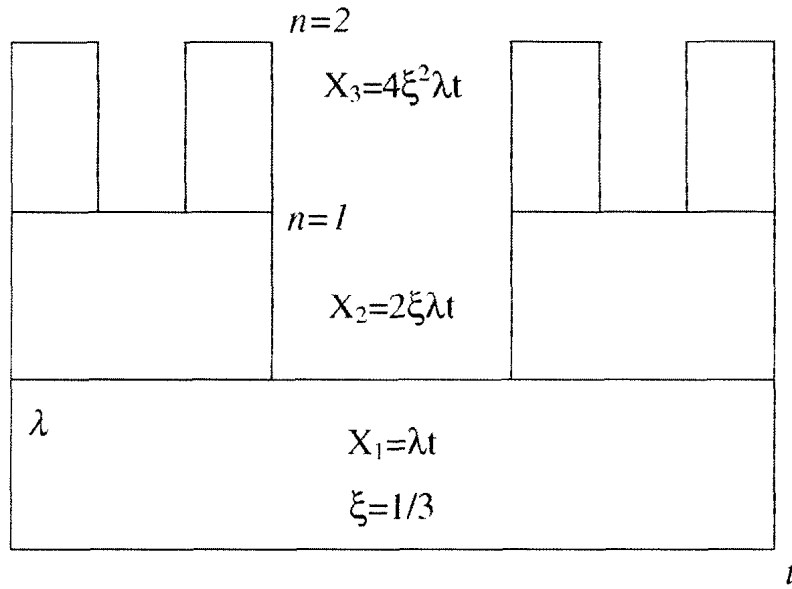
$$\phi'(t) \int_0^t K_1 (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.8)$$

где  $K_1 = B_\phi \Gamma^{-1}(\beta)$ .

При этом значение вновь полученного дробного интеграла (2.8) на интервале  $(0, t)$  оказывается меньше значения интеграла (2.7). Это является следствием потери части состояний и отсутствия для ее компенсации процедуры перенормировки. Очевидно, для достижения значения интеграла (2.7) дробный интеграл (2.8) должен интегрироваться в более широких временных пределах. Таким образом, процессы при дробном интегрировании становятся как бы протяженными. А скорости их нарастания описываются уравнениями с дробными производными. Имеются многочисленные примеры использования моделей фрактальных процессов для описания ряда физических явлений, например, сверхмедленных процессов переноса [9], вытеснения жидкостей в пористых средах [10], теплообмена [11] и т.д.

В качестве примера рассмотрим упрощенную модель передачи информации регулярными пакетными сериями (неслучайной последовательностью пакетов с постоянной интенсивностью  $\lambda$ ) через систему (канал связи), обладающую фрактальными свойствами. Исходным для построения канторовского множества является прямоугольник с площадью, равной размеру файла  $X = \lambda t$  – числу посланных за время  $t$  пакетов (рис. 2.2). Ему соответствует результат интегрирования (2.7) при  $f(\tau) = \lambda$ .





**Рис. 2.2. Упрощенная модель передачи информации**

На первом этапе разбиения при  $\xi = 1/3$  число переданных пакетов –  $2\xi\lambda t$ , потерянных –  $\xi\lambda t$ . На  $n$ -м этапе разбиения соответственно  $(2\xi)^n\lambda t$  и  $\lambda t [1 - (2\xi)^n]$ . После предельного перехода  $n \rightarrow \infty$  число переданных пакетов вычисляется из выражения (1.8), которое после замены переменных  $t - \tau = y$  и  $f(\tau) = \lambda$  принимает вид

$$\lambda t^\beta \int_0^t K_0 y^{\beta-1} dy. \quad (2.9)$$

Интеграл в выражении (2.9), как следует из (2.6), нормирован на единицу, поэтому число переданных пакетов  $\lambda t^\beta$  оказывается меньше числа посланных –  $\lambda t$ . На передачу недосланных пакетов при регулярной их посылке необходимо затратить дополнительное время  $t^{1/\beta} - t$ .

Действительно, после свертки интеграла (2.6) с верхним пределом  $t^{1/\beta}$  на канторовское множество число переданных пакетов становится  $\lambda t$ .

Остановимся на важных характеристиках фрактального процесса – масштабируемости его структуры и тесно связанном с ней свойством самоподобия. Начнем рассмотрение, как и в предыдущем случае, с изучения этих свойств на примерах отрезка прямой, площади поверхности и т.д. в евклидовом пространстве. Разделим отрезок (длина его принимается равной единице) на несколько частей  $N$  ( $r_L(N) = 1/N$  – масштабный множитель,  $r_L < 1$ ), так, чтобы путем параллельного переноса этой частью отрезка  $1/r_L$  раз, не пересекаясь, полностью покрыть исходный отрезок. В этом случае исходный отрезок самоподобен с коэффициентом подобия (масштабным множителем)  $r_L$ . Аналогично, прямоугольник (его площадь принимается равной единице) можно покрыть уменьшенными копиями общим числом  $N$ , если длины сторон копий уменьшены в  $N^{1/2}$  раз. Здесь исходный прямоугольник самоподобен с коэффициентом подобия  $r_S(N) = 1 / N^{1/2}$ . Для куба коэффициент подобия  $r_T(N) = 1 / N^{1/3}$ .

В общем случае коэффициент подобия

$$R(N) = 1/N^{1/\beta}, \quad (2.10)$$

где  $\beta$  – размерность подобия, всегда равная целому числу, совпадающему с топологической размерностью евклидова пространства.

Рассмотрим канторовское множество на  $n$ -м этапе разбиения единичного отрезка. Масштабный множитель при  $\xi = 1/3$  равен

$$r_L(N) = (1/3)^n. \quad (2.11)$$

Число «покрывающих» исходный отрезок частей  $N = 2^n$ . Подставляя полученное из этого соотношения выражение  $n = \ln N / \ln 2$  в (2.11) и далее приравняв его коэффициенту подобия общего вида (2.10), получаем уравнение

$$(3^{\ln N / \ln 2})^{-1} = N^{-1/\beta},$$

откуда размерность подобия канторовского множества

$$\beta = -\ln N / \ln r_L(N) = \ln 2 / \ln 3.$$

Можно говорить, что исходный отрезок при канторовском разбиении на  $n$ -м этапе в некотором смысле самоподобен его части при коэффициенте подобия

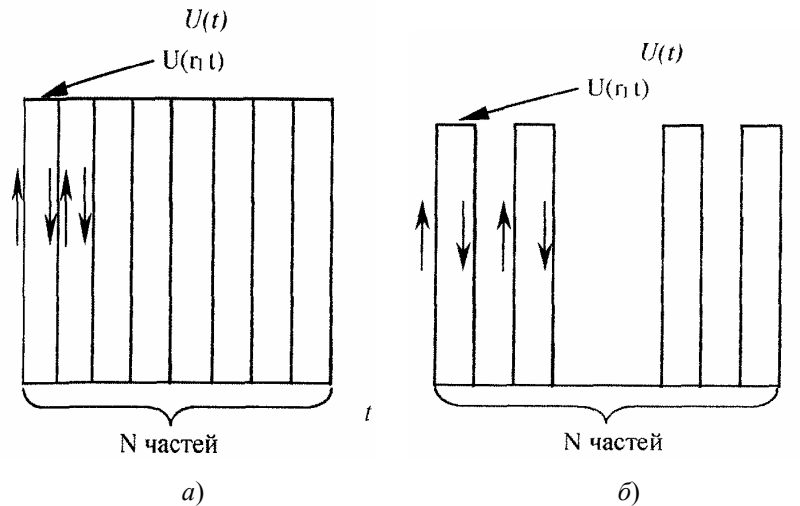
$$r_L(N) = 1 / N^{\ln 2 / \ln 3}.$$

Заметим также, что размерность подобия совпадает с фрактальной размерностью канторовского множества.

Для получения результатов более общего характера представим поведение частей исходного отрезка в виде огибающей некоторой функции  $U(t)$  от аргумента  $t$ . Так, при разбиении на части исходного отрезка в евклидовом пространстве график огибающей имеет вид, представленный на рис. 2.3, а. Откуда для  $r_L$ -й части огибающей выполняется условие

$$U(r_L t) = \frac{1}{N} U(t). \quad (2.12)$$

При разбиении исходного отрезка на канторовское множество график огибающей представлен на рис. 2.3, б,  $n = 2$ .



**Рис. 2.3. График огибающей функции  $U(t)$ :**

*a* – в евклидовом пространстве; *б* – на канторовском множестве

Соотношение (2.12) при  $U(t) = 1$  преобразуется в тождество на этапе разбиения  $n = 2$  ( $N = 2^2$ ,  $r_L = 1/3^2$ ), если выполняется на основании (2.10) условие  $(1/3^2) = (1/2)^{1/\beta}$ . Отсюда  $\beta = \ln 2 / \ln 3$ .

Для  $n$ -го этапа разбиения был бы получен аналогичный результат из выражения  $(1/3^n)^\beta = 1/2^n$  при  $\beta = \ln 2 / \ln 3$  – размерности подобия канторовского множества.

Приведенные данные относятся к структуре с заведомо известными фрактальными свойствами. Однако задачу можно сформулировать иначе. Какой вид должна иметь функция  $U(t)$ , описывающая фрактальные объекты, чтобы уравнение (2.12) при всех положительных  $r_L$  и  $N$  имело бы единственное решение? Очевидно, эта функция должна иметь вид  $U(t) = A_\beta t^{-\beta}$ . Действительно, после подстановки этого соотношения в (2.12) получим тождество при  $\beta = \ln N / \ln r_L$ . Описывающая масштабно-инвариантные свойства фракталов, убывающая с дробным показателем степенная функция  $U(t)$  в последнее время широко используется при анализе объектов природного и искусственного происхождения.

Один класс функций указанного вида – импульсная переходная функция (2.6), ранее рассматривался при определении дробного интеграла. В следующем разделе он будет дополнен для описания фрактальных свойств процессов в компьютерных сетях статистиками первого и второго порядков, а также функциями распределения временных интервалов.

## 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕВОГО ТРАФИКА СЛУЧАЙНЫМ ТОЧЕЧНЫМ ПРОЦЕССОМ

### 3.1. МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ

Исследование новых методов и средств повышения производительности компьютерных сетей приводит к необходимости научно обоснованной постановки задач анализа и синтеза этих сетей, а также разработке методов их конструктивного решения. На практике реализация этих методов наталкивается на серьезные трудности. Как показывают экспериментальные данные, протекающие в указанных сетях процессы достаточно сложны и не поддаются наглядной интерпретации в рамках известных моделей. Последнее затрудняет понимание механизма передачи и обмена информации и, в конечном счете, приводит к возобладанию феноменологических подходов. В связи с этим актуальными являются систематизация экспериментальных данных, определение необходимого и достаточного минимума наиболее характерных или, как их еще называют, фундаментальных параметров и разработка на их основе математических моделей процессов в сетях.

При разработке моделей необходимо руководствоваться следующими соображениями. Во-первых, учесть, с одной стороны, основные особенности поведения процессов, согласованного (не противоречащего на макрокопическом уровне) с экспериментальными данными, с другой – «физически» объяснить наблюдаемые закономерности, во-вторых, предложить относительно несложный инструментарий для эффективного исследования информационных ресурсов. И уже в рамках параметризованной модели попытаться сформулировать основные задачи по прогнозированию и управлению компьютерными сетями.

Перейдем к описанию основных этапов разработки моделей процессов в сети.

Полагаем, что обмен информации осуществляется между распределенными в пространстве случайно соединенными сетью источниками и приемниками. Такое обозначение пользователей является условным, поскольку в зависимости от конкретной ситуации последние могут выступать как в роли источника, так и приемника.

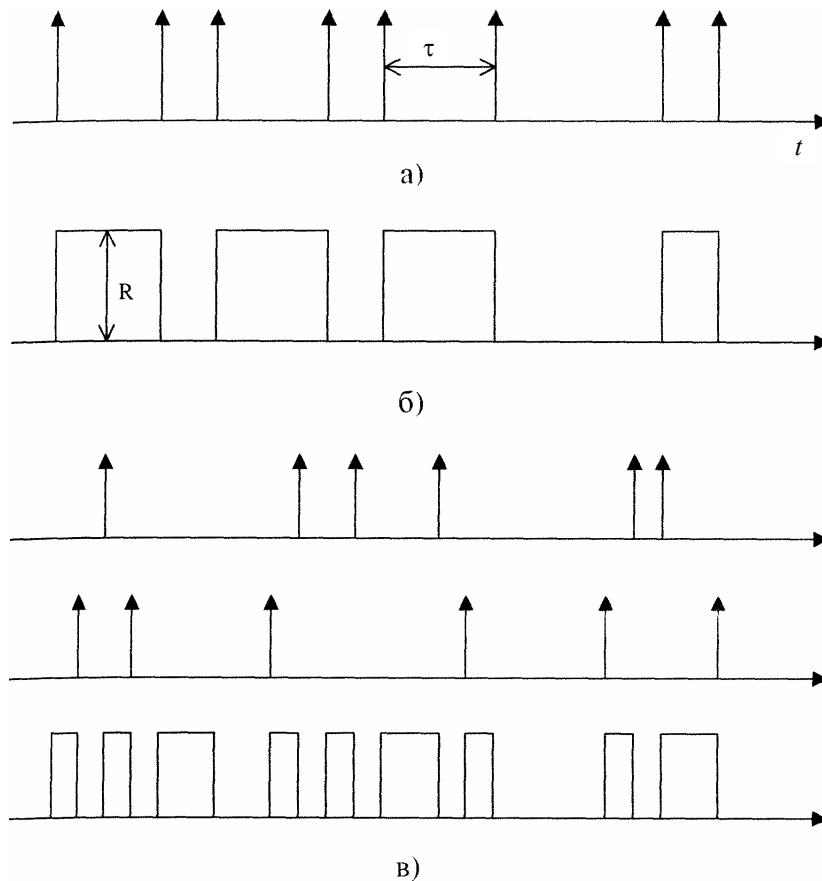
Технология передачи информации предусматривает, что поток байтов разбивается на отдельные пакеты (пакетизируется) фиксированной длины и информация далее передается на пакетном уровне по дуплексному (двунаправленному) каналу взаимодействия. На приемном конце данные снова собираются в поток байтов. Сетевая конфигурация включает в себя узлы, в которых расположены сетевые устройства (буфера, маршрутизаторы, коммутаторы и т.д.), обеспечивающие требуемые маршруты прохождения пакетов.

Транспортирование и распределение информации в сетях производится пакетными сериями (пачками пакетов). Технология генерации прерывистого потока пачек ( сетевого трафика) осуществляется через механизм управления, который реализуется с помощью протоколов как прикладного, так и транспортного/сетевого уровней (например, протоколами TCP/IP сети Интернет).

Укажем наиболее существенные причины, приводящие к формированию пачечности сетевого трафика. Допустим, что источник-пользователь обслуживает несколько приемников. В случае, если даже источник генерирует регулярный поток пакетов, информация до каждого приемника из-за ограничений на скорость работы сетевых устройств, например из-за ограниченного объема памяти буферов и возникающих в связи с этим очередей, доставляется пакетными сериями. С точки зрения приемника-пользователя получаемые данные задерживаются из-за невозможности их передачи на некоторых интервалах (состояниях) времени. В качестве еще одного примера формирования пачечности сетевого трафика можно указать определяемый вышеуказанными протоколами механизм определения оценки пропускной способности сети для какой-либо пары источник-приемник. Этот механизм реализуется путем пробных и локальных воздействий (фазы медленного старта TCP-соединения), определения текущего окна перегрузки (разрешенных к передаче числа пакетов до прихода пакетов подтверждения). Вследствие этого для надежной (безошибочной) доставки пакетов необходимо затратить дополнительное время на передачу пакетов подтверждения и повторения передачи потерянных пакетов. Очевидно, на указанном отрезке времени процесс передачи информации блокируется. Отметим также, что из-за нерегулярного влияния перечисленных факторов при передаче и распределении информации поведение сетевого графика приобретает случайный характер, т.е. трафик в сети формируется случайным образом.

Для наглядной интерпретации вышеуказанных особенностей поведения процессов в сети и поиска путей параметризации этих процессов наиболее предпочтительным является моделирование сетевого трафика режимом ON/OFF.

Рассмотрим протекающий во времени стационарный случайный точечный процесс восстановления, у которого интервалы между точками – независимые случайные величины, имеющие одинаковую плотность распределения (рис. 3.1, а). Этому процессу можно придать колебательную форму (рис. 3.1, б). Пусть началу интервала ON ( $R > 0$ ) соответствует какая-либо точка. Тогда следующей точке будет соответствовать окончание интервала и наступление интервала OFF ( $R = 0$ ). В результате получаем последовательность чередующихся ON/OFF интервалов, длительности которых случайны, независимы и для каждого из ON или OFF интервалов одинаковы распределены.



**Рис. 3.1. Моделирование сетевого трафика режимом ON/OFF:**

- a* – случайный точечный процесс восстановления;
- б* – колебательная форма процесса восстановления;
- в* – модель обобщенного сетевого трафика

Отождествим интервал ON с передаваемой серией пакетов, а интервал OFF – с отсутствием передачи пакетов. Высказанные соображения без конкретизации пока вида функции распределения ON/OFF интервалов взяты за основу построения модели сетевого трафика. Для упрощения решения задачи полагаем далее, что последовательность пакетов в ON интервале имеет регулярный стационарный характер, а сама случайность в сетевом трафике обусловлена только статистическим характером ON/OFF интервалов.

Одним из важных моментов в разработке моделей сетевого трафика является анализ соответствия поведения этих моделей опытным данным, указывающим на коррелированность значений трафика в широком временном диапазоне или, о чем уже упоминалось в предыдущем разделе, на протяженную зависимость (ПЗ) его корреляционной функции. Анализ различных подходов и решений по выявлению этого соответствия экспериментальным данным, снятым на пакетном уровне с различных внутренних коммутаторов в современных высокоскоростных сетях, посвящен ряд вышедших в последнее время работ [12 – 15]. Определяющим фактором наличия этого свойства для рассматриваемой ON/OFF модели является так называемое «тяжелое» распределение, характеризующее тот факт, что вероятности длинных ON и OFF интервалов порядка  $T$  (длинных серий пакетов и межсерийных интервалов) могут быть значительными

$$P(T > t) \sim t^{-\beta}, \quad t \rightarrow \infty, \quad 0 < \beta < 1.$$

Дисперсии этих интервалов оказываются большими или даже стремятся к бесконечности. В расчетной практике эта трудность преодолевается введением ограничений, например, указанием конечных значений пределов интегрирования. Таким образом, опытные данные ясно указывают на своеобразное поведение сетевого трафика, не укладывающееся в рамки поведения известных моделей очередей (пуассоновских, марковских, модулированных и т.д.). Для последних моделей коррелированность событий обнаруживается на ограниченных отрезках времени. Для таких случайных процессов в отличие от протяженных зависимостей вводится понятие короткопротяженных (КЗ) корреляционных зависимостей. Поведение функций со степенным законом убывания и дробным показателем степени обсуждалось в первом разделе. Было отмечено, что вместе с протяженной зависимостью тесно связанное с ней свойство самоподобия определяет фрактальный характер этой функции. В отличие от ранее рассмотренных детерминированных функций обсуждаемые процессы являются случайными и понятия протяженной зависимости и самоподобия теперь относятся к статистикам второго порядка (корреляционной функции, спектральной плотности, дисперсии). Именно поведение выборочных значений этих статистик является определяющим при решении вопроса, обладает ли сетевой трафик фрактальными свойствами. Хотя протяженная зависимость и самоподобие по-разному характеризуют сетевой трафик (в первом случае – «хвост» корреляционной функции, во второй – масштабное поведение этой функции), будем исходить из сложившейся в теории фрактальных процессов эквивалентности этих понятий: протяженная зависимость предполагает наличие самоподобия и наоборот. Обратим внимание на специфическую особенность понятия самоподобия. Применительно к статистикам второго порядка точечного процесса оно понимается в асимптотиче-

ском смысле (асимптотическое подобие второго порядка), т.е. при интервалах наблюдения больше определенного порогового значения (фрактального времени установки) и при агрегировании (суперпозиции) потока данных, что предполагает введение масштабирующих параметров. Высказанные выше соображения относились к простой ON/OFF модели обмена информацией между парой источник – приемник. Очевидно, для более полного описания работы компьютерной сети, лучшего приближения к реальным процессам в отдельных узлах этой сети более подходит модель, предполагающая одновременное функционирование многих пар источник – приемник, чему соответствует генерация обобщенного трафика. Модель обобщенного трафика можно получить в результате агрегирования (суперпозиции) большего числа независимых одинаково распределенных стационарных точечных процессов восстановления (рис. 3.1, в). Предполагая строгое чередование интервалов, получим последовательность этих интервалов по всей совокупности потока точек. Описывая поведение этих случайных интервалов «тяжелым» распределением, приходим к обобщенному сетевому трафику, обладающему фрактальными свойствами.

В заключение этого раздела отметим, что учет фрактальных свойств сетевого трафика позволяет расширить арсенал методов проектирования на базе компьютерных сетей информационно-управляющих систем, а применительно к самим сетям эффективней распорядиться сетевыми ресурсами при решении задачи прогнозирования и управления производительностью (пропускной способностью) сети.

С позиций теории массового обслуживания управление сетевым трафиком можно интерпретировать как задачу повышения производительностей очередей серий пакетов с «тяжелым» распределением при обеспечении полной надежности передаваемой информации.

### 3.2. СЛУЧАЙНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИК

Как следует из разд. 3.1, процедура формирования моделей сетевого трафика базируется на идеях и представлениях теории случайных точечных процессов (потоков). Этот процесс образуют неразличимые события (точки), выпавшие по случайным законам на временной оси. Реализацию случайного точечного процесса на временной оси  $t$  можно представить в виде неубывающей ступенчатой функции  $N_0^t = \{N_\tau, 0 \leq \tau < t\}$ , принимающей неотрицательные целочисленные значения, моменты роста (смены состояния) которой являются случайными, а величина ступенек из-за условия ординарности равна единице (рис. 3.2).

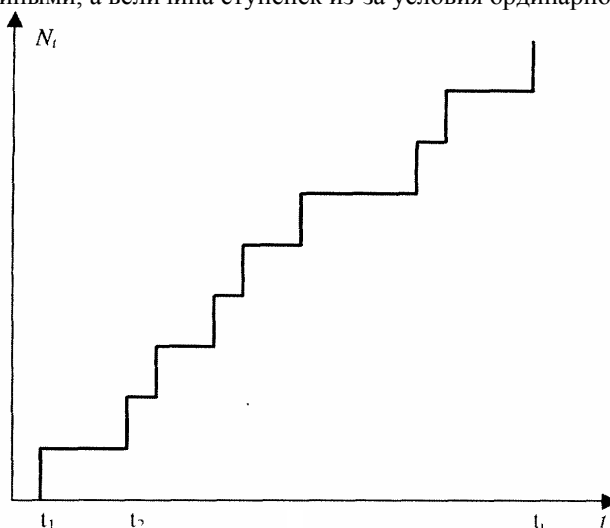


Рис. 3.2. Реализация случайного точечного процесса

Этот точечный процесс аналитически можно представить в виде

$$N_\tau = \sum_i 1(\tau - \tau_i), \quad (3.1)$$

где единичная функция

$$1(\tau - \tau_i) = \begin{cases} 1, & \tau \geq \tau_i; \\ 0, & \tau < \tau_i. \end{cases}$$

Далее для описания поведения сетевого трафика рассматривается специальный класс случайных точечных процессов – потоки восстановления, для которых случайные временные интервалы независимы и имеют одинаковое распределение вероятностей. Параметры потоков восстановления можно получить, привлекая известные в теории случайных процессов функциональные преобразования: характеристический  $\theta(v, T)$  и производящий  $L(u, T)$  функционалы. Характеристический функционал (ХФ) является обобщением Фурье-преобразования плотности вероятности конечномерного случайного процесса  $\{\xi(t_i), i = 1, 2, \dots, n\}$  при неограниченном увеличении числа отсчетов процесса, соответствующих моментам времени  $t_i \in (0, T)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , и определяется отношением [16]

$$\theta(v; T) = M \left\{ \exp \left[ j \int_0^T v(t) \xi(t) dt \right] \right\}, \quad (3.2)$$

где  $M\{\cdot\}$  обозначает операцию определения математического ожидания;  $v(t)$  – вспомогательная действительная функция.

ХФ может быть представлен на интервале  $(0, T)$  в виде разложения в функциональные ряда относительно моментных  $m_n(t)$  и корреляционных  $k_n(t)$  функций  $n$ -го порядка:

$$\theta[v; T] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j^n}{n!} \int_0^T \dots \int_0^T m_n(t_1, \dots, t_n) \prod_{r=1}^n v(t_r) dt_1 \dots dt_n; \quad (3.3)$$

$$\theta[v; T] = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j^n}{n!} \int_0^T \dots \int_0^T m_n(t_1, \dots, t_n) \prod_{r=1}^n v(t_r) dt_1 \dots dt_n \right\}. \quad (3.4)$$

Сравнивая выражения (3.3) и (3.4), можно получить соотношения, связывающие моментные и корреляционные функции:

$$\begin{aligned} m_1(t) &= k_1(t); \\ m_2(t_1, t_2) &= k_2(t_1, t_2) + k_1(t_1) k_1(t_2); \\ m_3(t_1, t_2, t_3) &= k_3(t_1, t_2, t_3) + k_1(t_1) k_2(t_2, t_3) + k_1(t_2) k_2(t_1, t_3) + \\ &\quad + k_1(t_3) k_2(t_1, t_2) + k_1(t_1) k_2(t_2) k_3(t_3); \end{aligned} \quad (3.5)$$

...

$$\begin{aligned} k_1(t) &= m_1(t); \\ k_2(t_1, t_2) &= m_2(t_1, t_2) - m_1(t_1) m_1(t_2); \\ k_3(t_1, t_2, t_3) &= m_3(t_1, t_2, t_3) - m_1(t_1) m_2(t_2, t_3) - m_1(t_2) m_2(t_1, t_3) - \\ &\quad - m_1(t_3) m_2(t_1, t_2) - 2m_1(t_1) m_1(t_2) m_1(t_3); \end{aligned} \quad (3.6)$$

...

Для описания точечных процессов используются локальные характеристики: моментные  $f_n(\cdot)$  и корреляционные  $g_n(\cdot)$  функции, которые назовем соответственно функциями плотности и корреляции плотности  $n$ -го порядка. Функция плотности  $n$ -го порядка  $f_n(t_1, \dots, t_n)$  характеризует совместную вероятность появления  $n$  точек в каждом из неперекрывающихся подынтервалов  $\Delta t_i$  безотносительно к появлению дополнительного числа точек на остальных  $\Delta t$  – подынтервалах интервала  $(0, T)$ :

$$p_n = f_n(t_1, \dots, t_n) \Delta t_1 \dots \Delta t_n \dots \Delta t_n 0(\Delta t),$$

где  $\Delta t = \max \Delta t_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ .

Функция  $f_1(t)$  имеет особое значение и называется интенсивностью точечного процесса (средней скоростью счета). Функции корреляции плотности вводятся, если существуют статистические связи между моментами появления точек. Например, для функций второго порядка можно записать

$$g_2(t_1, t_2) = f_2(t_1, t_2) - f_1(t_1) f_1(t_2).$$

Функция  $f_2(t_1, t_2)$  характеризует совместную вероятность появления точек вблизи моментов  $t_1$  и  $t_2$  и при разнесении аргументов стремится к произведению сомножителей  $f_1(t_1) f_1(t_2)$ , каждый из которых характеризует вероятность независимых событий. Следовательно, функция  $g_2(t_1, t_2)$  при разнесении аргументов стремится к нулю, что означает ослабление корреляционных связей.

Указанные системы функций можно получить из производящего функционала (ПФ), который по определению имеет вид [17]

$$L(u, T) = M \left\{ \prod_{i=1}^n (1 + u(t_i)) \right\}, \quad (3.7)$$

где  $M\{\cdot\}$  обозначает операцию определения математического ожидания по числу  $n$  и моментам  $t$  появления точек на интервале  $(0, T)$ ;  $u(t)$  – вспомогательная действительная функция.

ПФ выражается через функции  $f_n(\cdot)$  и  $g_n(\cdot)$  в форме функциональных рядов

$$L(u, T) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^T \dots \int_0^T f_n(t_1, \dots, t_n) \prod_{r=1}^n u(t_r) dt_1 \dots dt_n; \quad (3.8)$$

$$L(u, T) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^T \dots \int_0^T g_n(t_1, \dots, t_n) \prod_{r=1}^n u(t_r) dt_1 \dots dt_n \right\}. \quad (3.9)$$

Сравнивая выражения (3.8) и (3.9), можно прийти к аналогичным по форме, что и для моментных и корреляционных функций, соотношениям, связывающим  $f_n(\cdot)$  и  $g_n(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} f_1(t) &= g_1(t); \\ f_2(t_1, t_2) &= g_2(t_1, t_2) + g_1(t_1) g_1(t_2); \\ f_3(t_1, t_2, t_3) &= g_3(t_1, t_2, t_3) + g_1(t_1) g_2(t_2, t_3) + g_1(t_2) g_2(t_1, t_3) + \\ &\quad + g_1(t_3) g_2(t_1, t_2) + g_1(t_1) g_2(t_2) g_3(t_3); \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \dots \\ g_1(t) &= f_1(t); \\ g_2(t_1, t_2) &= f_2(t_1, t_2) - f_1(t_1) f_1(t_2); \\ g_3(t_1, t_2, t_3) &= f_3(t_1, t_2, t_3) - f_1(t_1) f_2(t_2, t_3) - f_1(t_2) f_2(t_1, t_3) - \\ &\quad - f_1(t_3) f_2(t_1, t_2) - 2f_1(t_1) f_1(t_2) f_1(t_3); \end{aligned} \quad (3.11)$$

Следующим этапом на пути определения характеристик потоков восстановления является обращение к так называемой случайной интенсивности, которую можно трактовать как случайный процесс скорости счета точечного процесса.

Реализация случайной интенсивности представляет собой поток дельта-импульсов, полученных в результате дифференцирования случайного точечного процесса (3.1):

$$\xi(t) = \frac{dN_t}{dt} = \sum_i \delta(t - t_i), \quad (3.12)$$

где  $\{t_i\}$  – координаты появления точек на временной оси; дельта-функция

$$\delta(t - t_i) = \begin{cases} \infty; & t = t_i; \\ 0; & t \neq t_i, \end{cases} \quad \int_{t_i - \varepsilon}^{t_i + \varepsilon} \delta(t - t_i) dt = 1.$$

Подставляя (3.12) в выражение (3.2), используя фильтрующие свойства дельта-функции, получаем

$$\theta[v; T] = M \left\{ \exp j \sum_i^n v(t_i) \right\} = M \left\{ \prod_i^n \exp jv(t_i) \right\}.$$

Произведя замену  $\exp jv(t_i) = u(t_i) + 1$ , имеем

$$\theta[v; T] = M \left\{ \prod_i^n [1 + u(t_i)] \right\}. \quad (3.13)$$

Но выражение справа от знака равенства формулы (3.13) является ПФ (3.7).

На основании изложенного можно получить соотношение, связывающее ХФ и ПФ:

$$\theta(v, T) = L \{ \exp [jv(t) - 1] \}.$$

Используя эту формулу, а также выражения ХФ (3.4) и ПФ (3.9), после логарифмирования приходим к следующему соотношению

$$\begin{aligned} j \int_0^T k_1(t) v(t) dt + \frac{j^2}{2} \int_0^T \int_0^T k_2(t_1, t_2) v(t_1) v(t_2) dt_1 dt_2 + \dots = \\ = \int_0^T g_1(t) \{ \exp [jv(t)] - 1 \} dt + \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T g_2(t_1, t_2) \{ \exp [jv(t_1)] - 1 \} \{ \exp [jv(t_2)] - 1 \} dt_1 dt_2 + \dots \end{aligned}$$

Разложим экспоненциальные члены в ряд по степеням  $v(t)$  и, приравнявая члены с одинаковыми степенями, получим

$$\begin{aligned} k_1(t) &= g_1(t); \\ k_2(t_1, t_2) &= g_1(t_1) \delta(t_1 - t_2) - g_2(t_1, t_2); \\ k_3(t_1, t_2, t_3) &= g_1(t_1) \delta(t_1 - t_2) \delta(t_1 - t_3) + g_2(t_1, t_3) \delta(t_1 - t_2) + \\ &\quad + g_2(t_2, t_3) \delta(t_2 - t_1) + g_2(t_1, t_2) \delta(t_1 - t_3) + g_3(t_1, t_2, t_3); \end{aligned} \quad (3.14)$$

...

где  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция.

При выводе этих соотношений члены вида  $\int_0^T g_1(t)v^2(t)dt$ ,  $\int_0^T g_1(t)v^3(t)dt$ ,  $\int_0^T \int_0^T g_2(t_1, t_2)v^2(t_1)v(t_2)dt_1dt_2$  и т.д. на основании фильтрующих свойств дельта-функции были заменены на тождественно равные им соотношения:

$$\int_0^T g_1(t)v^2(t)dt = \int_0^T \int_0^T g_1(t_1)\delta(t_1 - t_2)v(t_1)v(t_2)dt_1dt_2;$$

$$\int_0^T g_1(t)v^3(t)dt = \int_0^T \int_0^T \int_0^T g_1(t_1)\delta(t_1 - t_2)\delta(t_1 - t_3)v(t_1)v(t_2)v(t_3)dt_1dt_2dt_3;$$

$$\int_0^T \int_0^T g_2(t_1, t_2)v^2(t_1)v(t_2)dt_1dt_2 = \int_0^T \int_0^T \int_0^T d_2(t_1, t_2)\delta(t_1 - t_3)v(t_1)v(t_2)v(t_3)dt_1dt_2dt_3.$$

Дальнейшее изложение будет проводиться в рамках корреляционной теории и для стационарных процессов. Это означает, что, во-первых, рассматриваются статистики не выше второго порядка (математическое ожидание, корреляционная функция, дисперсия, спектральная плотность). Во-вторых, из-за условия стационарности указанные характеристики не зависят от текущего времени: математическое ожидание имеет постоянное значение, а корреляционная функция зависит от разности аргументов  $\tau = t_2 - t_1$ .

Для этого случая корреляционные функции первого (математическое ожидание) и второго порядков случайной интенсивности на основании (3.14) записываются в виде

$$k_i = g_i = f_i = \lambda = \text{const}; \quad (3.15)$$

$$k_2(\tau) = \lambda\delta(\tau) + g_2(\tau), \quad (3.16)$$

где  $\lambda$  – принятое в теории фрактальных процессов обозначение интенсивности точечного процесса.

Как уже ранее отмечалось, функция корреляции плотности отражает наличие статистических связей между моментами появления точек. Учет этой функции приводит к разным моделям точечных процессов, в том числе и к тем, которые описывают поведение сетевого трафика. Отметим, что для пуассоновского точечного процесса из-за статистической независимости моментов появления точек  $g_2(\tau) = 0$  и статистики случайной интенсивности принимают вид

$$k_1 = \lambda, \quad k_2(\tau) = \lambda\delta(\tau).$$

Используя (3.11), с учетом  $f_2(t_1, t_2) = f(t_2|t_1)f_1(t_1)$  представим функцию  $g_2(\tau)$  в форме

$$g_2(\tau) = f_2(t_1, t_2) - f_1^2 = \lambda [f(t_2|t_1) - \lambda] = \lambda[f(\tau) - \lambda],$$

так как для стационарных процессов  $f(t_2|t_1) = f(t_2 - t_1) = f(\tau)$ .

Условная функция плотности  $f(\tau)$  характеризует вероятность появления точки в окрестности момента времени  $t_2$  при условии существования точки в момент  $t_1$ ,  $t_2 > t_1$ . Ее можно определить из интегрального уравнения восстановления, которое для стационарных точечных процессов имеет вид [18]

$$f(\tau) = \psi(\tau) + \int_0^\tau \psi(\tau - t)f(t)dt. \quad (3.17)$$

Здесь  $\psi(\tau)$  – плотность распределения вероятностей временных интервалов между точками. Таким образом, задаваясь этой функцией, можно из уравнения (3.17) определить условную функцию плотности  $f(\tau)$ , а на основании ее – функцию  $g_2(\tau)$  и соответственно корреляционную функцию случайной интенсивности  $k_2(\tau)$  (3.16).

По этой функции находят остальные статистики сетевого трафика: спектральную плотность случайной интенсивности, а также корреляционную функцию и дисперсию числа отсчетов. Если для функции  $\psi(\tau)$  существует преобразование Лапласа –  $\psi(s)$ , то, применяя к обеим частям уравнения (3.17) это преобразование, после упрощений получаем

$$F(s) = \frac{\psi(s)}{1 - \psi(s)}. \quad (3.18)$$

Осуществляя обратное преобразование, определяют по  $F(s)$  условную плотность  $f(\tau)$ . Можно предложить более общий путь определения этой функции. Учитывая  $|\psi(s)| < 1$ , соотношение (3.18) представим как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом и знаменателем, равными  $\psi(s)$ :  $F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi^k(s)$ .

Осуществляя обратное преобразование Лапласа, получаем  $F(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\tau)$ , где  $\psi_k(\tau)$  определяется через интеграл свертки

где  $\psi_k(\tau)$  определяется через интеграл свертки



$$\Psi_k(\tau) = \int_0^\tau \Psi_{k-1}(\tau') \Psi(\tau - \tau') d\tau', \quad k \geq 2 \quad \text{и} \quad \Psi_1(\tau) = \Psi(\tau).$$

Применяя к корреляционной функции (3.16) Фурье-преобразование (формула Хинчина – Винера), получаем спектральную плотность центрированной составляющей случайной интенсивности

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau) \exp\{-j\omega\tau\} d\tau = \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\tau) \exp\{-j\omega\tau\} d\tau. \quad (3.19)$$

Приведем еще одно определяемое с помощью уравнения восстановления и формулы Хинчина – Винера выражение спектральной плотности этой составляющей случайной интенсивности [19]

$$S(\omega) = \lambda \operatorname{Re} \left[ \frac{1 + \Phi(\omega)}{1 - \Phi(\omega)} \right], \quad (3.20)$$

где характеристическая функция случайных интервалов времени между точками определяется как Фурье-преобразование плотности распределения

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) \exp\{j\omega\tau\} d\tau. \quad (3.21)$$

При анализе рассматриваемых в этом и следующем разделах моделей используются статистики числа отсчетов (приращений) точечного процесса на интервалах заданной длительности  $T$  (счетные статистики). Обозначим число выпавших на интервале  $(t_n, t_n - T)$  точек через  $X_n$ . Сместим этот интервал на  $kT$  ( $k \geq 1$ ) и обозначим число выпавших на интервале  $(t_{n+k}, t_{n+k} - T)$  точек через  $X_{n+k}$ . Корреляционная функция числа отсчетов в разнесенных на время, равное  $kT$ , указанных интервалах определяется соотношением

$$C(k, T) = M\{X_n X_{n+k}\} - (\lambda T)^2. \quad (3.22)$$

Дисперсия числа отсчетов равна при  $k = 0$

$$D(T) = C(0, T). \quad (3.23)$$

Процедуры определения статистик (3.22) и (3.23) опираются на интегральные соотношения, связывающие искомые функции и процессы с известными статистическими характеристиками. Предварительно получим выражение статистик для непрерывного времени. Пусть  $\xi(t)$  – стационарный случайный процесс с известными математическим ожиданием  $m_1$  и корреляционной функцией  $k_2(u)$ .

Математическое ожидание и корреляционная функция от этого процесса на заданном интервале  $(t, t - T)$   $x_T(t) = \int_{t-T}^t \xi(t) dt$  соответственно равны [16]:

$$m_{1x} = M\{x_T(t)\} = \int_{t-T}^t M\{\xi(t)\} dt = m_1 T;$$

$$k_{2x}(\vartheta) = M\{[x_T(t) - m_{1x}][x_T(t + \vartheta) - m_{1x}]\} = \int_{t-T}^t \int_{t-T+\vartheta}^{t+\vartheta} k_2(u_1 - u_2) du_1 du_2.$$

Соотношение, связывающее на основании формулы Хинчина – Винера корреляционную функцию и спектральную плотность, имеет вид

$$k_2(u_1 - u_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp\{j\omega(u_1 - u_2)\} d\omega.$$

После подстановки полученного выражения в  $k_{2x}(\vartheta)$  и интегрирования имеем

$$\begin{aligned} k_{2x}(\vartheta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \int_{t-T}^t \exp\{-j\omega u_2\} du_2 \int_{t-T+\vartheta}^{t+\vartheta} \exp\{j\omega u_1\} du_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \frac{2[1 - \cos\omega T]}{\omega^2} \exp\{j\omega\vartheta\} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \left( \frac{\sin\omega T/2}{\omega/2} \right) \exp\{j\omega\vartheta\} d\omega. \end{aligned}$$

Как следует из полученного выражения, интегралы от процесса  $\xi(t)$  с известной корреляционной функцией  $k_2(\tau)$  соответствует процесс с корреляционной функцией  $k_{2x}(\vartheta)$  и спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = S(\omega) \left( \frac{\sin \omega T / 2}{\omega / 2} \right)^2. \quad (3.24)$$

Подставив в соотношение для  $k_{2x}(\vartheta)$  выражение (3.19)  $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k_2(u) \exp\{-j\omega\tau\} du$ , получим

$$k_{2x}(\vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} k_2(u) du \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{j\omega(\vartheta - u)\} \left( \frac{\sin \omega T / 2}{\omega / 2} \right) d\omega \right].$$

После замены  $\vartheta - u = \tau$  ( $\vartheta > u$ ) интеграл в квадратных скобках оказывается табличным и равным  $T - \tau$  при  $\tau < T$  и нулю при  $\tau > T$ . Присоединяя к полученному результату значение этого интеграла для области  $u > \vartheta$ , получаем окончательное выражение для корреляционной функции и дисперсии:

$$k_{2x}(\vartheta) = \int_{-T}^T (T - |\tau|) k_2(\vartheta - \tau) d\tau;$$

$$D_x = k_{2x}(0) = \int_{-T}^T (T - |\tau|) k_2(\tau) d\tau = 2 \int_0^T (T - \tau) k_2(\tau) d\tau.$$

При определении статистических характеристик числа отсчетов на интервалах заданной длительности  $T$  исходное интегральное соотношение для дискретного времени  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  имеет вид  $X_n = \int_{t_n - T}^{t_n} \xi(t) dt$ , где  $\xi(t)$  – случайная интенсивность или случайный импульсный поток (3.12) с известными математическим ожиданием, корреляционной функцией  $k_2(\tau)$  и спектральной плотностью  $S(\omega)$ . Интервал между отдельными отсчетами  $\vartheta$  оказывается кратным длительности  $T$  и равным  $kT$ , где  $k$  – параметр смещения.

На основании изложенного, учитывая обозначения для счетных статистик, имеем:

$$C(k, T) = \int_{-T}^T (T - |\tau|) k_2(kT - \tau) d\tau; \quad (3.25)$$

$$D(T) = 2 \int_0^T (T - \tau) k_2(\tau) d\tau. \quad (3.26)$$

### 3.3. СТАТИСТИКИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ СЕТЕВОГО ТРАФИКА

В соответствии со сложившейся в теории фрактальных процессов для компьютерных сетей терминологией при анализе сетевого трафика используются следующие статистики стационарного точечного процесса.

Статистика первого порядка:

- интенсивность точечного процесса (средняя скорость счета точечного процесса)  $\lambda$ .

Статистики второго порядка:

- моментная функция второго порядка случайной интенсивности  $G_M(\tau)$ ;
- спектральная плотность, соответствующая этой функции  $S_M(\omega)$ ;
- корреляционная функция числа отсчетов  $C(k, T)$ ;
- нормированная корреляционная функция числа отсчетов (коэффициент корреляции)  $r(k, T)$ ;
- нормированная дисперсия числа отсчетов (фактор Фано)  $F(T)$ .

Моментная функция второго порядка случайной интенсивности точечного процесса по определению равна

$$G_N(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M \{ \Delta N_t \Delta N_{t+\tau} \}}{\Delta t^2},$$

где  $\Delta N_t$  характеризует появление по крайней мере одной точки в бесконечно малом интервале  $(t - \Delta t, t)$ ;  $\tau$  – интервал времени между событиями появления точек.

На основании соотношений (3.5) и (3.16) эта функция через рассмотренную в разделе 3.2 корреляционную функцию случайной интенсивности  $k_2(\tau)$  выражается следующим образом

$$G_M(\tau) = m_2(\tau) = k_2(\tau) + \lambda^2 = \lambda \delta(\tau) + g_2(\tau) + \lambda^2 = \lambda \delta(\tau) + R_f(\tau), \quad (3.27)$$

где составляющую  $R_f(\tau) = g_2(\tau) + \lambda^2$  можно интерпретировать как моментную функцию модулирующего точечный процесс сигнала  $I(t)$ .

Особенностью этого сигнала является то, что он порождает корреляционные функции с протяженной зависимостью, приводящие к большому числу комбинаций фрактальных процессов со свойствами самоподобия. В силу указанной интер-

претации такие процессы также называют двойным стохастическим пуассоновским процессом или точечным процессом с двойной случайностью (одна случайность порождена пуассоновским процессом, другая – сигналом  $I(t)$ ). Отметим, что модуляция точечного процесса другими сигналами, например, марковскими с экспоненциальной корреляционной функцией, имеющей короткопротяженную зависимость, порождает модели процессов, не обладающие фрактальными свойствами и поэтому не адекватные поведению сетевого трафика.

Форму записи функции корреляции плотности  $g_2(\tau)$  или, что тоже самое, корреляционной функции, модулируемой сигналом  $I(t)$  составляющей случайной интенсивности, можно получить разными методами. Согласно одному из них эту функцию определяют через интеграл свертки

$$I(t) = \int_0^{\infty} h(t-\tau)\xi(\tau)d\tau, \quad (3.28)$$

где  $h(t) = Kt^{\alpha/2-1}$  – импульсная переходная функция степенного вида;  $\xi(t)$  – воздействующий стационарный импульсный пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ ;  $\alpha$  – фрактальный параметр ( $0 < \alpha < 1$ ).

На основании теоремы Кембелла о суперпозиции независимых случайных воздействий [16, 22] для области  $t > 0$  ( $t - \tau > 0$ ) эта функция с учетом (3.28) определяется из выражения

$$g_2'(\tau) = M\{I(t)I(t+\tau)\} - \lambda^2 = \lambda \int_0^{\infty} h(t)h(t+\tau)dt = \lambda K^2 \int_0^{\infty} (t^2 + \tau t)^{\alpha/2-1} dt.$$

После замены  $z = t/\tau$  приходим к табличному интегралу. В результате получаем

$$g_2'(\tau) = \lambda K^2 \tau^{\alpha-1} \int_0^{\infty} z^{\alpha/2-1} (1+z)^{\alpha/2-1} dz = \lambda K^2 \tau^{\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha/2)}, \quad (3.29)$$

где  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция.

Принимая во внимание, что корреляционная функция является четной функцией своего аргумента, и присоединяя к (3.28) результат интегрирования по области  $t < 0$  ( $t - \tau < 0$ ), получаем окончательно

$$g_2(\tau) = \lambda^2 \left( \frac{|\tau|}{\tau_0} \right)^{\alpha-1}, \quad (3.30)$$

$$\text{где } \tau_0^{\alpha-1} = \frac{\lambda \Gamma(1-\alpha/2)}{K^2 \Gamma(\alpha/2) \Gamma(1-\alpha)}.$$

Статистики второго порядка числа отсчетов определяются следующим образом. Фактор Фано вычисляется на основании формул (3.26), (3.27) и (3.30):

$$\begin{aligned} F(T) &= D(T)(\lambda T)^{-1} = 2(\lambda T)^{-1} \int_0^T (T-\tau)k_2(\tau)d\tau = \\ &= 2(\lambda T)^{-1} \int_0^T (T-\tau)(G_N(\tau) - \lambda^2 \tau) d\tau = \\ &= 2(\lambda T)^{-1} \left[ \int_0^T (T-\tau)\lambda \delta(\tau) d\tau + \frac{\lambda^2}{\tau_0^{\alpha-1}} \int_0^T (T-\tau)\tau^{\alpha-1} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Первый интеграл в (3.31) на основании фильтрующих свойств дельта-функции равен  $\lambda T/2$ . После вычисления второго интеграла получаем  $\frac{T^{\alpha+1}}{\alpha(1+\alpha)}$ . Выражение для фактора Фано принимает окончательный вид

$$F(T) = 1 + \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\alpha}, \quad (3.32)$$

где

$$T_0 = \frac{\alpha(1+\alpha)}{2\lambda\tau_0^{1-\alpha}}. \quad (3.33)$$

Приведем также выражение для дисперсии числа отсчетов

$$D(T) = \lambda T F(T) = \lambda T \left[ 1 + \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\alpha} \right]. \quad (3.34)$$

Выражение для корреляционной функции числа отсчетов вычисляется при  $k \geq 1$  с учетом (3.27) и (3.30) из соотношения (3.25):

$$\begin{aligned} C(k, T) &= \int_{-T}^T (t - |\tau|) k_2(kT - \tau) d\tau = \int_{-T}^T (T - |\tau|) [G_N(kT - \tau) - \lambda^2] d\tau = \\ &= \lambda \left[ \int_0^T (T - \tau) \delta(kT - \tau) d\tau + \int_0^T (T - \tau_1) \delta(kT + \tau_1) d\tau_1 \right] + \\ &+ \frac{\lambda^2}{\tau_0^{\alpha-1}} \left[ \int_0^T (T - \tau) (kT - \tau)^{\alpha-1} d\tau + \int_0^T (T - \tau_1) (kT + \tau_1)^{\alpha-1} d\tau_1 \right], \end{aligned}$$

где  $\tau_1 = -\tau$ .

Первые два интеграла  $J_1$  и  $J_2$  на основании фильтрующих свойств дельта-функции равны нулю. Третий  $J_3$  и четвертый  $J_4$  интегралы соответственно равны

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{\lambda^2}{\tau_0^{\alpha-1}} \int_0^T (T - \tau) (kT - \tau)^{\alpha-1} d\tau = \\ &= \frac{\lambda^2 T^{\alpha+1}}{\tau_0^{\alpha-1}} \left\{ \frac{1}{\alpha} [k^\alpha - (k-1)^\alpha] + \frac{1}{\alpha} (k-1)^\alpha + \frac{[(k-1)^{\alpha+1} - k^{\alpha+1}]}{\alpha(1+\alpha)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{\lambda^2}{\tau_0^{\alpha-1}} \int_0^T (T - \tau_1) (kT - \tau_1)^{\alpha-1} d\tau_1 = \\ &= \frac{\lambda^2 T^{\alpha+1}}{\tau_0^{\alpha-1}} \left\{ \frac{1}{\alpha} [(k+1)^\alpha - k^\alpha] + \frac{1}{\alpha} (k+1)^\alpha + \frac{[(k+1)^{\alpha+1} - k^{\alpha+1}]}{\alpha(1+\alpha)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Корреляционная функция числа отсчетов на основании (3.35), (3.36) и (3.33) принимает окончательный вид

$$\begin{aligned} C(k, T) &= J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \\ &= \frac{1}{2} \lambda T \left( \frac{T}{T_0} \right)^\alpha [(k+1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1}]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Отметим, фактор Фано является удобной для подтверждения фрактальных свойств сетевого трафика при обработке экспериментальных данных характеристикой. Действительно, при  $T \gg T_0$  зависимость  $F(T)$  в двойном логарифмическом масштабе представляет собой приблизительно прямую с положительным наклоном, равным фрактальному параметру  $\alpha$  (для пуассоновского процесса наклон равен нулю). Таким образом, определяя выборочные значения  $D(T)$  и  $\lambda T$  как функции текущего интервала  $T$ , можно оценить фрактальный параметр  $\alpha$ .

Спектральная плотность случайной интенсивности, соответствующая моментной функции  $G_N(\tau)$  (3.27), с учетом (3.30) определяется через Фурье-преобразование (формула Хинчина – Винера) и после вычислений равна

$$S_N(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_N(\tau) \exp\{-j\omega\tau\} d\tau = 2\pi\lambda^2 \delta(\omega) + \lambda \left( \frac{|\omega|}{\omega_0} \right)^{-\alpha} + \lambda, \quad (3.38)$$

где

$$\omega_0^\alpha = 2\lambda \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma(\alpha) \tau_0^{1-\alpha}; \quad (3.39)$$

$\delta(\omega)$  – дельта-функция;  $\Gamma(\alpha)$  – гамма-функция.

Рассматриваемую спектральную плотность можно представить также в виде

$$S_N(\omega) = S_I(\omega) + \lambda. \quad (3.40)$$

Здесь  $S_I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_I(\tau) \exp\{-j\omega\tau\} d\tau = 2\pi\lambda^2 \delta(\omega) + \lambda \left( \frac{|\omega|}{\omega_0} \right)^{-\alpha}$  – спектральная плотность модулирующего сигнала  $I(t)$ .

Приведем еще одно выражение спектральной плотности

$$S_N(\omega) = 2\pi\lambda^2 \delta(\omega) + S(\omega), \quad (3.41)$$

где  $S(\omega) = \lambda \left( \frac{|\omega|}{\omega_0} \right)^{-\alpha} + \lambda$  – спектральная плотность центрированной составляющей случайной интенсивности.

Обратим внимание на своеобразный характер поведения спектральной плотности  $S(\omega)$  для фрактальных процессов: ее ограниченное увеличение при  $\omega \rightarrow 0$ :  $S(\omega) \sim |\omega|^{-\alpha}$ .

Используя формулы (3.33) и (3.39), получаем соотношение, связывающее параметры  $T_0$  и  $\omega_0$ :

$$\omega_0^\alpha T_0^\alpha = \cos(\pi\lambda/2) \Gamma(\alpha + 2). \quad (3.42)$$

Параметры  $T_0$ ,  $\tau_0$  и  $\omega_0$  определяют границы изменения статистик, в пределах которых эти статистики приобретают характер протяженной зависимости. Ввиду их взаимного однозначного соответствия далее используется один из них – параметр  $T_0$  (фрактальное время установки).

Используя формулы (3.34) и (3.37), введем нормированную корреляционную функцию (коэффициент корреляции) числа отсчетов.

$$r(k; T) = \frac{C(k; T)}{D(T)} = \frac{T^\alpha}{2(T^\alpha + T_0^\alpha)} \left[ (k+1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1} \right], \quad (3.43)$$

$|r(k, T)| \leq 1$ .

Представим выражения  $(k+l)^{\alpha+1}$  и  $(k-l)^{\alpha+1}$  при  $k \gg l$  в виде трех членов разложения:

$$(k+1)^{\alpha+1} \approx k^{\alpha+1} + (\alpha+1)k^\alpha + \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)k^{\alpha-1};$$

$$(k-1)^{\alpha+1} \approx k^{\alpha+1} - (\alpha+1)k^\alpha + \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)k^{\alpha-1}.$$

После подстановки полученных выражений в соотношение (3.43) и упрощения приходим к коэффициенту корреляции, поведение которого (точнее поведение его «хвоста») аппроксимируется выражением

$$r(k; T) \sim \frac{\alpha(\alpha+1)}{2 \left( 1 + \left( \frac{T_0}{T} \right)^\alpha \right)} k^{\alpha-1}. \quad (3.44)$$

Полученное соотношение ясно указывает на атрибуты фрактального процесса – протяженную зависимость и самоподобие (масштабируемость). Причем эти свойства проявляются тем интенсивнее, чем больше интервал отсчета  $T$  по отношению к фрактальному времени установки  $T_0$ . В этом случае принято говорить об асимптотическом самоподобии в том смысле, что коэффициент корреляции сохраняет свою структуру при  $T \gg T_0$  и зависит от убывающего с дробным показателем степени масштабируемого параметра  $k$ :

$$r(k, T) \sim \frac{1}{2} \alpha(\alpha+1) k^{\alpha-1}. \quad (3.45)$$

Нетрудно заметить, что если в уравнении (2.12) для этого случая время заменить на параметр смещения  $k$ , то коэффициент подобия и размерность подобия соответственно равны  $r_L = N^{1/\beta}$ ,  $\beta = l - \alpha = \ln N / \ln r_L$ .

Ввиду того, что спектральная плотность случайной интенсивности является степенной функцией  $|\omega|$  с показателем, равным фрактальному параметру  $\alpha$ , взятым с обратным знаком, спектральная плотность числа отсчетов (приращения точечного процесса) на основании (3.24) также оказывается степенной функцией  $|\omega|$  и при  $\omega \rightarrow 0$  неограниченно увеличивается как

$$S_T(\omega) \sim |\omega|^{-\alpha}. \quad (3.46)$$

Свойство самоподобия обнаруживается у агрегированного счетного процесса. Указанный процесс формируется как последовательность средневзвешенных величин из отсчетов  $X_n$  на  $m$  одинаковых неперекрывающихся интервалах длительностью  $T$ :

$$X^{(m)} = \left\{ X_k^{(m)}; k = 0, 1, \dots \right\} = \left\{ \frac{X_1 + \dots + X_m}{m}, \dots, \frac{X_{km+1} + \dots + X_{(k+1)m}}{m} \right\}, \quad (3.47)$$

где  $m$  и  $k$  – соответственно параметры агрегирования и смещения,

$$X_k^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{n=km+1}^{(k+1)m} X_n, \quad m = 1, 2, \dots$$

Для агрегированного процесса статистики второго порядка имеют вид:

$$C^{(m)}(k, T) = m^{-2} \int_{-mT}^{mT} (mT - |\tau|) \left( G_N(kTm - \tau) - \lambda^2 \right) d\tau = m^{-2} C(k, mT);$$

$$D^m(T) = m^{-2} C(0, mT); \quad (3.48)$$

$$r^{(m)}(k, T) = \frac{1}{2 \left( 1 + \left( \frac{T_0}{mT} \right)^\alpha \right)} \left[ (k+1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1} \right]. \quad (3.49)$$

При  $m \rightarrow \infty$  коэффициент корреляции практически инвариантен к параметру агрегирования и сохраняет в асимптотическом смысле свою структуру. Последнее означает, что исходный и агрегированный процессы имеют одинаковую форму коэффициента корреляции

$$r^{(m)}(k, T) \sim \frac{1}{2} \left[ (k+1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1} \right],$$

который при большом  $k$  принимает вид (3.44).

Дисперсия агрегированного счетного процесса при больших  $m$  изменяется по медленно затухающему закону  $m^{\alpha-1}$ , что эквивалентно свойству асимптотического самоподобия. Действительно, с учетом (3.32) и (3.48) имеем

$$D^{(m)}(T) = \frac{\lambda m T}{m^2} \left[ 1 + \left( \frac{mT}{T_0} \right)^\alpha \right] = \lambda T \left[ m^{-1} + \left( \frac{T}{T_0} \right)^\alpha m^{\alpha-1} \right] \sim \lambda T \left( \frac{T}{T_0} \right)^\alpha m^{\alpha-1}.$$

Для сравнения обратим внимание на то, что для обычных короткопротяженных зависимостей дисперсия агрегированного процесса  $D^{(m)}(T) \sim m^{-1}$ .

Как следует из материала этого раздела, три фундаментальных параметра характеризуют статистики второго порядка:

$\alpha$  – фрактальный параметр;

$\lambda$  – интенсивность точечного процесса;

$T_0$  – фрактальное время установки.

Определение этих параметров для различных моделей процессов в компьютерных сетях является, вообще говоря, достаточным для параметризации сетевого трафика.

### 3.4. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ СЕТЕВОГО ТРАФИКА

Методология рассмотренного в предыдущем разделе подхода весьма привлекательна, поскольку для анализа моделей используется единообразная процедура, основанная на параметризации небольшим числом параметров характеристик реального трафика. Эта методология способствует более эффективному развитию методов исследований очередей серии пакетов, в том числе, решению задач определения оценок характеристик очередей, увеличения их производительности, созданию генераторов для имитации очередей и т.д. Из всего многообразия порождаемых точечными последовательностями моделей фрактальных процессов в этом разделе будут рассмотрены модели режима ON/OFF, фрактальных дробового и биномиального процессов.

#### Режим ON/OFF

Как отмечалось ранее, наиболее наглядным для моделирования сетевого трафика является режим ON/OFF, базирующийся на фрактальных точечных процессах восстановления. По определению точечные процессы восстановления имеют одинаково распределенные независимые временные интервалы между точками. Особенность исследований как рассматриваемого, так и других фрактальных моделей заключается в том, что свойство самоподобия трудно продемонстрировать во всем временном или частотном диапазоне, так как обладающие этим свойством модели процессов имеют бесконечную мощность. Эта трудность в математическом плане преодолевается ограничением области изменения параметров. Кроме того, процессы, соответствующие этим моделям, должны по возможности близко соответствовать реальным сигналам, например, не иметь резких изменений, повышенной колебательности. При формировании с учетом высказанных замечаний статистик в качестве исходной характеристики точечного процесса восстановления используется плотность распределения времени между точками следующего вида [20]:

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \gamma A^{-1} \exp\{-\gamma\tau/A\}, & \tau \leq A; \\ \gamma A^\gamma \tau^{-(\gamma+1)} \exp\{-\gamma\}, & \tau > A, \end{cases} \quad (3.50)$$

где параметр  $\gamma$  связан с фрактальным параметром  $\alpha$  соотношением

$$\gamma = 2 - \alpha \quad (1 < \gamma < 2).$$

Нетрудно убедиться, что плотность  $\psi(\tau)$  неотрицательна и нормирована на единицу

$$\int_0^\infty \psi(\tau) d\tau = \int_0^A \gamma A^{-1} e^{-\gamma\tau/A} d\tau + \int_A^\infty \gamma A^\gamma e^{-\gamma} \tau^{-(\gamma+1)} d\tau = 1.$$

Параметр  $\lambda$  определяется из формулы

$$\begin{aligned}\lambda^{-1} &= \int_0^{\infty} \tau \psi(\tau) d\tau = \gamma A^{-1} \int_0^A \tau e^{-\gamma \tau / A} d\tau + \gamma A^{\gamma} e^{-\gamma} \int_A^{\infty} \tau^{-\gamma} d\tau = \\ &= \frac{A}{\gamma} \left[ 1 - (1 + \gamma) e^{-\gamma} \right] - \frac{A \gamma}{1 - \gamma} e^{-\gamma} - \frac{A}{\gamma} \left[ 1 - \frac{e^{-\gamma}}{1 - \gamma} \right]\end{aligned}$$

или

$$\lambda = \gamma A^{-1} [1 + (\gamma - 1)^{-1} e^{-\gamma}]^{-1}. \quad (3.51)$$

Для определения следующего параметра – фрактального времени установки обратимся к характеристической функции случайных интервалов времени (3.21), которая ввиду  $\psi(\tau) = 0$  при  $\tau < 0$  принимает вид

$$\phi(\omega) = \int_0^{\infty} \psi(\tau) \exp\{j\omega\tau\} d\tau.$$

С учетом формулы (3.50), а также ограничений на область изменения параметров, после замены  $x = -j\omega\tau$  представим эту функцию в следующем виде

$$\phi(\omega) = \gamma A^{\gamma} e^{-\gamma} \int_A^B \tau^{-(\gamma+1)} e^{j\omega\tau} d\tau = \gamma A^{\gamma} e^{-\gamma} (-j\omega)^{\gamma} \int_{-j\omega A}^{-j\omega B} x^{-(\gamma+1)} e^{-x} dx. \quad (3.52)$$

Для среднечастотного диапазона  $B^{-1} \ll \omega \ll A^{-1}$ , используя методику работы [21], после вычисления интеграла в (3.52) получаем

$$\phi(\omega) \approx 1 - e^{-\gamma} (-j\omega A)^{\gamma} \Gamma(1 - \gamma),$$

где  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция.

В результате подстановки этого соотношения в формулу (3.20) с учетом (3.40) и последующих упрощений приходим к следующему результату

$$S_N(\omega) \approx 4\lambda^2 S_I(\omega) + \lambda, \quad (3.53)$$

где спектральная плотность  $S_I(\omega)$  на основании данных работы [20] равна

$$S_I(\omega) \approx 2^{-1} \gamma \Gamma(2 - \gamma) \left[ -\frac{\cos \pi \gamma}{2} \right] \left[ (\gamma - 1) e^{\gamma} + 1 \right]^{-1} A (\omega A)^{\gamma - 2}. \quad (3.54)$$

Приравняв в выражении (3.41)  $\omega = \omega_0$ , получаем  $S_N(\omega_0) = 2\lambda$ . Отсюда на основании (3.53) и (3.54) при  $\omega = \omega_0$  сначала определяют  $\omega_0^{2-\gamma}$ , а затем по формуле (3.42) – фрактальное время установки

$$T_0^{2-\gamma} = 2^{-1} \gamma^{-2} (\gamma - 1)^{-1} (2 - \gamma) (3 - \gamma) e^{-\gamma} [1 + (\gamma - 1) e^{\gamma}]^2 A^{2-\gamma}.$$

Фундаментальные параметры для режима ON/OFF (в терминах фрактального параметра  $\alpha$ ) принимают окончательный вид:

$$H = (1 + \alpha) / 2;$$

$$\lambda = (2 - \alpha) A^{-1} [1 + (1 - \alpha)^{-1} e^{2-\alpha}]^{-1};$$

$$T_0^{\alpha} = 2^{-1} (2 - \alpha)^{-2} (1 - \alpha)^{-1} e^{\alpha-2} [1 + (1 - \alpha) e^{2-\alpha}]^2 A^{\alpha}.$$

Модель обобщенного сетевого трафика может быть получена в результате суперпозиции отдельных фрактальных точечных процессов восстановления (рис. 3.1, в). Результирующий процесс уже не является процессом восстановления, но плотность распределения сохраняет свойства «тяжелого» распределения. Если  $m$  – число таких процессов, то фундаментальные параметры  $H$  и  $T_0$  сохраняют свой вид, а другой параметр – интенсивность точечного процесса становится равным

$$\lambda = m(2 - \alpha) A^{-1} [1 + (1 - \alpha)^{-1} e^{\alpha-2}]^{-1}.$$

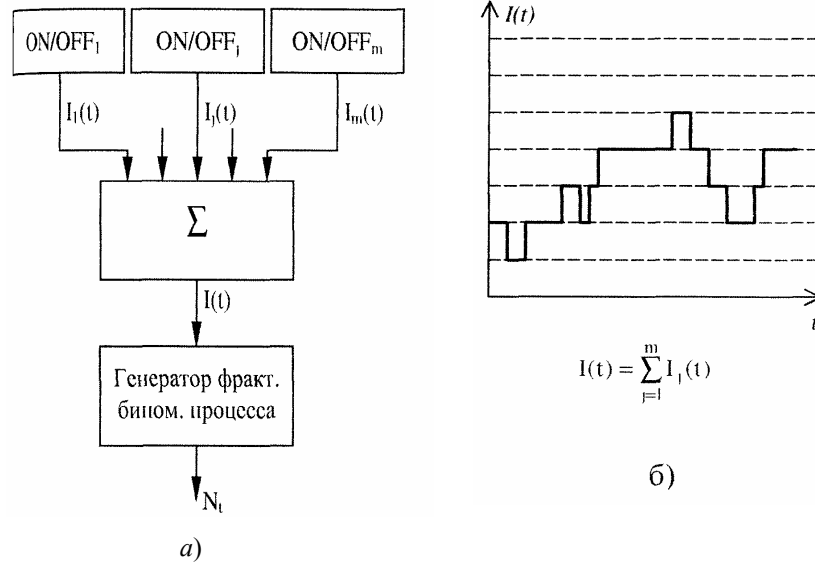
В связи с появлением множителя  $m$  возникает неопределенность в определении фундаментальных параметров. Обычно число  $m$ , которое выбирается достаточно большим, имеет порядок произведения  $\lambda T_0$ .

### Фрактальный биномиальный процесс

Этот процесс может быть получен в результате суперпозиции  $m$  индивидуальных режимов ON/OFF, обладающих «тяжелым» распределением и имеющих колебательный характер с амплитудой  $R > 0$  (в ON-интервале) и  $R = 0$  (в OFF-интервале) (рис. 3.1, б). Этапы его формирования представлены на рис. 3.3, а. Если каждый из режимов обозначить через  $I_j(t)$ ,  $j = \overline{1, m}$ , то результирующая картина поведения модулирующего интенсивность точечного процесса сигнала  $I(t)$  следует из графика (рис. 3.3, б).

Интенсивность точечного процесса определяется из соотношения

$$\lambda = M\{I(t)\} = mR / 2. \quad (3.55)$$



**Рис. 3.3. Фрактальный биномиальный процесс:**

*a* – этапы формирования точечного процесса;  
*б* – реализация сигнала  $I(t)$

При определении фрактального времени установки воспользуемся выражением спектральной плотности случайной интенсивности (3.39). В диапазоне  $0 \ll \omega \ll A^{-1}$  спектральная плотность случайной интенсивности биномиального процесса, для которого  $R \neq 1$ ,  $m \neq 1$ , с учетом (3.55) принимает вид

$$S_N(\omega) = nR^2 S_1(\omega) + mR/2. \quad (3.56)$$

При  $\omega = \omega_0$  эта спектральная плотность на основании (3.41) оказывается равной  $S(\omega_0) = 2\lambda = mR$ . В результате, используя соотношение (3.56), приходим к независящему от величины  $m$  отношению

$$RS_1(\omega_0) = 1/2.$$

После подстановки в него спектральной плотности (3.54) при  $\omega = \omega_0$  с учетом  $\gamma = 2 - \alpha$  получаем

$$\omega_0^\alpha = \frac{(2 - \alpha)\Gamma(\alpha)\cos(\pi\alpha/2)}{(1 - \alpha)e^{2-\alpha} + 1} RA^{1-\alpha}.$$

На основании соотношения связи (3.42) соответствующие фундаментальные параметры принимают следующий вид:

$$H = (1 + \alpha) / 2;$$

$$\lambda = Rm / 2;$$

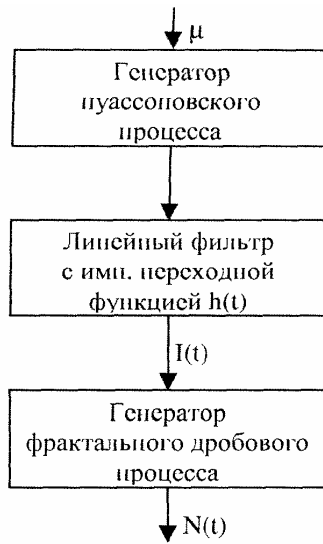
$$T_0^\alpha = \alpha(\alpha + 1)(2 - \alpha)^{-1}[(1 - \alpha)e^{2-\alpha} + 1] R^{-1}A^{\alpha-1}.$$

### Фрактальный дробовой точечный процесс

Модель точечного процесса, называемая фрактальным дробовым процессом, может быть получена на основании следующих соображений. Интенсивность этого неоднородного процесса модулируется фрактальным дробовым шумом, который является результатом прохождения пуассоновского однородного процесса через фильтр с импульсной переходной функцией степенного вида. Этапы формирования этого точечного процесса показаны на рис. 3.4. На первом этапе получают однородный пуассоновский точечный процесс с постоянной интенсивностью  $\mu$ . Далее этот процесс поступает на линейный фильтр с импульсной переходной функцией, имеющей вид убывающей степенной зависимости

$$h(t) = \begin{cases} Kt^{\alpha/2-1}, & A < t < B; \\ 0, & t \leq A, t \geq B. \end{cases} \quad (3.57)$$





**Рис. 3.4. Этапы формирования фрактального дробового точечного процесса**

Этот фильтр порождает модулирующий сигнал  $I(t)$ , с помощью которого формируется на заключительном этапе фрактальный дробовый точечный процесс. Импульсная переходная функция вида (3.57) ранее в разд. 2 рассматривалась при исследовании дробного интеграла. Последний является модификацией известного из теории линейных систем интеграла свертки, описывающего выходной сигнал системы, но функционирующей, как уже было ранее отмечено, только на части своих состояний. В качестве воздействующего процесса используется стационарный импульсный пуассоновский процесс  $\xi(t)$  (3.12) с интенсивностью  $\mu$ . Упомянутый интеграл свертки записывается в форме

$$I(t) = \int_0^B h(t-\tau)\xi(\tau)d\tau,$$

где область изменения аргумента рассматриваемых процессов  $0 \leq \tau < B$ .

На основании уже используемой в разд. 3.3 теоремы Кембелла математическое ожидание и корреляционная функция случайного сигнала с учетом области изменения аргумента соответственно равны:

$$k_{1I}(\tau) = M\{I(t)\} = \lambda = \mu \int_0^B h(t)dt = \mu a; \quad (3.58)$$

$$k_{2I}(\tau) = M\{I(t)I(t+\tau)\} - \lambda^2 = \mu \int_0^B h(t)h(t+\tau)dt. \quad (3.59)$$

Математическое ожидание и корреляционная функция случайной интенсивности точечного процесса на основании (3.58) и (3.59) с учетом (3.16) и (3.27) соответственно принимают вид:

$$k_1 = k_{1I} = \lambda = \mu a; \quad (3.60)$$

$$k_2(\tau) = \lambda\delta(\tau) + k_{2I}(\tau) = \lambda\delta(\tau) + \mu \int_0^B h(t)h(t+\tau)dt, \quad (3.61)$$

где параметр  $a = K \int_0^B t^{\alpha/2-1} dt = K(\alpha/2)^{-1} B^{\alpha/2}$ .

Таким образом, выражение для интенсивности дробового точечного процесса – одного из фундаментальных параметров, равно

$$\lambda = K\mu(\alpha/2)^{-1} B^{\alpha/2}. \quad (3.62)$$

Для определения другого фундаментального параметра  $T_0$  – начального времени установки, воспользуемся выражением для фактора Фано

$$F(T) = 2(\lambda T)^{-1} \int_0^T (T-\tau)k_2(\tau)d\tau. \quad (3.63)$$

Подставим в выражение (3.63) корреляционную функцию (3.61), с учетом (3.57) получаем

$$\begin{aligned}
F(T) &= 1 + 2\mu(\lambda T)^{-1} K^2 \int_0^T (T - \tau) d\tau \int_0^{B-\tau} h(t)h(t - \tau) dt = \\
&= 1 + 2\mu(\lambda T)^{-1} K^2 \int_0^T (T - \tau) d\tau \int_0^{B-\tau} (t^2 + \tau t)^{\alpha/2-1} dt.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Определим сначала внутренний интеграл, введя новую временную  $z = t/\tau$ :

$$\int_0^{B-\tau} (t^2 + \tau t)^{\alpha/2-1} dt = \tau^{\alpha-1} \int_0^{\frac{B-\tau}{\tau}} z^{\alpha/2-1} (z+1)^{\alpha/2-1} dz. \tag{3.65}$$

При  $B \rightarrow \infty$  интеграл (3.65) оказывается табличным. В результате при достаточно большом  $B$  получаем

$$\int_0^{B-\tau} (t^2 + \tau t)^{\alpha/2-1} dt = \tau^{\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha/2)}. \tag{3.66}$$

После подстановки (3.66) в выражение (3.64) внешний интеграл с учетом новой переменной  $z = \tau/T$  равен

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha/2)} \int_0^T (T - \tau) \tau^{\alpha-1} d\tau &= \frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha/2)} \int_0^1 (1-z) z^{\alpha-1} dz = \\
&= \frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(1-\alpha) T^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(1-\alpha/2)}.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

В результате подстановки соотношения (3.67) в (3.64) с учетом (3.60) получаем

$$F(T) = 1 + KB^{-\alpha/2} T^\alpha \frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(1-\alpha)}{(\alpha+1)\Gamma(1-\alpha/2)}. \tag{3.68}$$

Сравнивая (3.68) с фактором Фано (3.32), приходим к выражению детального времени установки

$$T_0^\alpha = K^{-1} B^{\alpha/2} \frac{(\alpha+1)\Gamma(1-\alpha/2)}{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(1-\alpha)}. \tag{3.69}$$

Параметры  $T_0$  (3.69) вместе с  $\lambda$  (3.62) и  $H = (1 + \alpha) / 2$  образуют группу фундаментальных параметров сетевого трафика.

В полученных параметрах часть характеристик определяется однозначно, другие, как например,  $\mu$  и  $B$  выбираются для задания характеристик поведения трафика. Так, при малых значениях произведения  $\mu B \ll 1$  импульсная переходная функция перекрывается редко, и временные интервалы между пачками пакетов становятся существенно большими. При  $\mu B \gg 1$  импульсная переходная функция перекрывается часто, и вероятность больших интервалов уменьшается.

## 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕВОГО ТРАФИКА ФРАКТАЛЬНЫМ БРОУНОВСКИМ ДВИЖЕНИЕМ

В приведенных ниже материалах рассматриваются статистики сетевых процессов, базирующиеся на свойствах непрерывного с вероятностью 1 фрактального броуновского движения. К числу исследуемых процессов отнесены модели ON/OFF режима сетевого трафика и RTT-задержки. Прежде чем перейти к фрактальному броуновскому движению, обсудим свойства классического броуновского движения.

### 4.1. КЛАССИЧЕСКОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

К модели классического броуновского движения – винеровскому процессу (процессу Винера или Винера – Леви) приходят на основании следующих соображений. Частицы жидкости или газа в отсутствие внешних воздействий из-за столкновений с молекулами находятся в постоянном хаотическом движении (броуновском движении), интенсивность которого зависит от температуры и плотности среды. При этих столкновениях частицы изменяют свою скорость и направление движения. Если масса частицы равна  $m$ , то, пренебрегая силами трения, скорость движения частицы  $B(t)$  по какой-либо координате на основании закона Ньютона определяется из соотношения

$$m \frac{dB(t)}{dt} = n(t),$$

где функция  $n(t)$  является составляющей по этой координате случайной последовательности силовых толчков. Из условия симметрии направления этих толчков равновероятны и поэтому математическое ожидание этой функции равно нулю:  $M\{n(t)\} = 0$ .

При определении статистик броуновского движения необходимо исходить из того, что в реальном физическом эксперименте время корреляции процесса  $n(t)$  конечно и, грубо говоря, не превосходит среднего времени между столкновениями  $\tau_0$ . Далее необходимо иметь ввиду, что реальные физические приборы, осуществляющие наблюдения и измерения, имеют конечное время разрешения  $\Delta t$ . В течение этого времени при большой концентрации молекул частица испытывает большое число столкновений, вследствие чего интервал измерения оказывается много больше интервала корреляции:  $\Delta t \gg \tau_0$ . В связи с изложенным на основании центральной предельной теоремы процесс  $n(t)$  приближенно можно представить гауссовским процессом с математическим ожиданием равным нулю и дельтаобразной корреляционной функцией (гауссовским белым шумом). Винеровский процесс  $B(t)$  по определению находится через белый шум  $n(t)$  из стохастического дифференциального уравнения  $\frac{dB(t)}{dt} = n(t)$ ,  $B(t_0) = B_0 = 0$  или

$$B(t) = \int_{t_0}^t dB(\tau) = \int_{t_0}^t n(\tau) d\tau. \quad (4.1)$$

Математическое ожидание и корреляционная функция стационарного гауссовского белого шума соответственно равны:

$$M\{n(t)\} = 0; \quad (4.2)$$

$$K_{2n}(t_1, t_2) = M\{n(t_1) n(t_2)\} = N_0 \delta(t_2 - t_1), \quad (4.3)$$

где  $N_0$  – спектральная плотность белого шума;  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция.

Винеровский процесс после линейного преобразования (4.1) остается гауссовским процессом и с учетом (4.2) и (4.3) имеет при  $B_0 = 0$  соответственно математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию:

$$M\{B(t)\} = \int_{t_0}^t M\{n(\tau)\} d\tau = 0; \quad (4.4)$$

$$M\{B^2(t)\} = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t M\{n(\tau_1) n(\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 = N_0 t, \quad t > 0; \quad (4.5)$$

$$k_{2B}(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_2} \int_{t_0}^{t_1} M\{n(\tau_1) n(\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 = \begin{cases} N_0 t_1, & t_1 \leq t_2 \\ N_0 t_2, & t_2 < t_1 \end{cases} = \\ = N_0 \min(t_1, t_2), \quad t_1 > 0, \quad t_2 > 0. \quad (4.6)$$

Очевидно, корреляционную функцию винеровского процесса можно также представить для положительных  $t_1$  и  $t_2$  в виде

$$k_{2B}(t_1, t_2) = \frac{N_0}{2} (t_1 + t_2 - |t_2 - t_1|). \quad (4.7)$$

Плотность распределения винеровского процесса имеет вид

$$p(B(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 t}} \exp\left\{-\frac{B^2(t)}{2D}\right\}, \quad t > 0. \quad (4.8)$$

Рассмотрим некоторые свойства приращений винеровского процесса: их некоррелированность на неперекрывающихся интервалах времени и самоподобие.

Для моментов времени  $t_2 > t_1 > t_0 > 0$  имеем

$$B(t_1) - B(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} n(\tau) d\tau. \quad (4.9)$$

Отсюда на основании (4.4) и (4.5) математическое ожидание и дисперсия приращения винеровского процесса соответственно равны:

$$\begin{aligned} M\{B(t_1) - B(t_0)\} &= 0; \\ M\{(B(t_1) - B(t_0))^2\} &= N_0(t_1 - t_0) \sim t_1 - t_0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Взаимная корреляционная функция приращений при выполнении условия (4.9) на основании (4.6) равна

$$\begin{aligned} M\{(B(t_2) - B(t_1))[B(t_1) - B(t_0)]\} &= k(t_1, t_2) - k_2(t_1, t_1) - k_2(t_2, t_0) + k_2(t_1, t_0) = \\ &= N_0 t_1 - N_0 t_1 - N_0 t_0 + N_0 t_0 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, приращения процесса  $B(t)$  некоррелированы и, поскольку имеют гауссовское распределение, независимы.

Перейдем к рассмотрению свойств самоподобия. Плотность распределения приращений винеровского процесса при  $B(t_0) \neq 0$  имеет вид

$$p[B(t) - B(t_0)] = [2\pi N_0(t - t_0)]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{[B(t) - B(t_0)]^2}{2N_0(t - t_0)}\right\}. \quad (4.11)$$

Изменим масштаб времени в  $b$  раз. Ввиду того, что дисперсия процесса также увеличивается в  $b$  раз –  $N_0 b(t - t_0)$ , для обеспечения нормировки плотности распределения на единицу необходимо увеличить приращение винеровского процесса в  $b^{1/2}$  раз, т.е. изменить масштаб координаты в такое же число раз  $b^{1/2}$ .

$$\begin{aligned} p[b^{1/2}\{B(bt) - B(bt_0)\}] &= \\ &= [2\pi N_0 b(t - t_0)]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{\{b^{1/2}[B(bt) - B(bt_0)]\}^2}{2N_0 b(t - t_0)}\right\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Очевидно, что плотности (4.11) и (4.12) связаны соотношением  $b^{1/2}p[b^{1/2}\{B(bt) - B(bt_0)\}] = p[B(t) - B(t_0)]$ , выражающим условие самоподобия: плотность вероятности отмасштабированного винеровского процесса, умноженная на коэффициент  $b^{1/2}$ , не зависит от выбранного масштаба времени. Как следует из полученного результата, изменение масштаба времени в  $b$  раз сопровождается изменением масштаба приращения координаты винеровского процесса в  $b^{1/2}$  раз и свойство самоподобия можно записать также в форме:

$$b^{-1/2}[B(bt) - B(bt_0)] = B(t) - B(t_0).$$

## 4.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕВЫХ ПРОЦЕССОВ ФРАКТАЛЬНЫМ БРОУНОВСКИМ ДВИЖЕНИЕМ

Приведенные выше модели процессов описывали классическое броуновское движение. Как уже отмечалось ранее, многие природные явления не укладываются в рамки традиционных моделей, в том числе в модели винеровского процесса. Для описания этих явлений, обладающих фрактальными свойствами, в работе [23] было введено обобщенное броуновское движение, которое по определению записывается в форме дробного интеграла

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^t h(t - \tau) dB(\tau), \quad (4.13)$$

где  $dB(\tau)$  – приращение винеровского процесса;  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция;  $H$  – введенный в разд. 2 параметр Херста.

Импульсная переходная функция равна

$$h(t - \tau) = \begin{cases} (t - \tau)^{H-1/2}, & 0 \leq \tau \leq t; \\ (t - \tau)^{H-1/2} - (-\tau)^{H-1/2}, & \tau < 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Использование в формуле (4.13) импульсной переходной функции степенного вида (4.14) приводит к сильной коррелированной зависимости процесса  $B_H(t)$  от предшествующих его значений, а также указывает на самоподобный характер фрак-

тального броуновского движения. На основании соотношения  $h(bt - b\tau) = b^{H-1/2}h(t - \tau)$ , а также зависимости для винеровского процесса  $dB(b\tau) = b^{1/2}dB(\tau)$  из формулы (4.13) получаем  $B_H(bt) = b^H B_H(t)$  или

$$b^{-H}B_H(bt) = B_H(t), \quad (4.15)$$

что подтверждает самоподобный характер фрактального броуновского движения. Для приращений этого процесса математическое ожидание и дисперсия на основании (4.13) с учетом свойств винеровского процесса  $M\{dB(T)\} = 0$ ,  $M\{dB(\tau_1)dB(\tau_2)\} = M\{n(\tau_1)n(\tau_2)\}d\tau_1d\tau_2 = N_0\delta(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1d\tau_2$  соответственно равны

$$M\{B_H(t) - B_H(t_0)\} = 0; \quad (4.16)$$

$$M\{[B_H(t) - B_H(t_0)]^2\} \sim (t - t_0)^{2H}. \quad (4.17)$$

Отметим также, что как для классического, так и для фрактального броуновского движения дисперсии приращений растут с увеличением разности  $t - t_0$ .

Определим нормированную корреляционную функцию (коэффициент корреляции) стационарных приращений фрактального броуновского движения для двух соседних неперекрывающихся знаковой длительности интервалов времени  $(t_0, t_1)$  и  $(t_1, t_2)$ :

$$r_H(t) = \frac{M\{[B_H(t_1) - B_H(t_0)][B_H(t_2) - B_H(t_1)]\}}{M\{[B_H(t_1) - B_H(t_0)]^2\}}$$

или при  $B_H(t_0) = 0$

$$r_H(t) = \frac{M\{B_H(t)B_H(2t)\} - M\{B_H^2(t)\}}{M\{B_H^2(t)\}}. \quad (4.18)$$

Прибавляя и вычитая в каждом из сомножителей первого слагаемого (4.18) соответственно  $B(2t)$  и  $B(t)$ , после перемножения и приведения подобных членов получаем

$$\begin{aligned} r_H &= \frac{M\{[B_H(t) - B_H(2t) + B_H(2t)][B_H(2t) - B_H(t) + B_H(t)]\} - 1}{M\{B_H^2(t)\}} - 1 = \\ &= \frac{M\{B_H^2(2t)\}}{M\{B_H^2(t)\}} - \left[ \frac{M\{B_H(t)B_H(2t)\}}{M\{B_H^2(t)\}} - 1 \right] - 2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Принимая во внимание, что соотношение в квадратных скобках в выражении (4.19) на основании (4.18) равно  $r_H(t)$ , а также учитывая (4.17), имеем окончательно

$$r_H(t) = 2^{2H-1} - 1. \quad (4.20)$$

Если (4.20) домножить на  $M\{B_H^2(t)\} \sim t^{2H}$ , то приходим к корреляционной функции приращений на интервалах  $(0, t)$  и  $(t, 2t)$  фрактального броуновского движения

$$K_{2H}(t) \approx (2^{2H-1} - 1)t^{2H}.$$

Это выражение указывает на сильную корреляционную зависимость приращений, увеличивающуюся с ростом  $t$ .

Заметим, что при  $H = 1/2$  процесс (4.13) становится винеровским (4.1) с дисперсией и корреляционной функцией приращений, равными соответственно (4.10) и нулю. Используя аналогичный подход, можно от характеристик винеровского процесса перейти к характеристикам фрактального броуновского движения. Например, зная корреляционную функцию (4.7) позволяет записать корреляционную функцию фрактального броуновского движения в форме

$$K_{2H}(t_1, t_2) \sim 1/2[t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}]. \quad (4.21)$$

Коэффициент корреляции для стационарных приращений фрактального броуновского движения на интервалах  $(t_n, t_n - T)$  и  $(t_{n+k}, t_{n+k} - T)$  заданной длительности  $T$  разнесения на время  $kT$ , где  $k$  – параметр смещения, можно представить, как и для счетных характеристик, выражением

$$r_H(k, T) \sim \frac{1}{2} \left[ (k+1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1} \right].$$

При  $k = 1$ , что соответствует корреляционной зависимости для приращений процесса на соседних интервалах времени, а также учитывая соотношение  $\alpha = 2H - 1$ , получаем (4.20). При больших значениях  $k$  коэффициент корреляции аппроксимируется выражением (3.45)

$$r_H(k, T) \sim \frac{1}{2} \alpha(\alpha+1)k^{\alpha-1} = H(2H-1)k^{2H-2}. \quad (4.22)$$

Из этого выражения следует, что чем больше параметр  $H$ , тем более протяженной зависимостью обладает  $r_H(k, T)$ .

Как и для счетных статистик, можно показать, что поведение спектральной плотности приращений фрактального броуновского движения при  $\omega \rightarrow 0$  описывается зависимостью (3.46).

Если обозначить приращения фрактального броуновского движения на интервалах  $(t_n, t_n - T)$  через  $X_n$ , то агрегированный процесс, сформированный как последовательность средневзвешенных величин из приращений на  $m$  одинаковых неперекрывающихся интервалах длительностью  $T$ , описывается соотношением (2.47). У агрегированного процесса приращений,

как и для счетных характеристик, при  $m \rightarrow \infty$  коэффициент корреляции  $r_H(k, T)$  сохраняет свою структуру и практически не зависит от параметра  $m$ , а дисперсия изменяется согласно соотношению

$$D^{(m)}(T) \sim m^{\alpha-1}. \quad (4.23)$$

Напомним, что для короткопротяженных зависимостей дисперсия приращений агрегированного процесса изменяется как  $D^{(m)}(T) \sim m^{-1}$ .

Указанная статистика – дисперсия приращений является удобной для фрактальных свойств характеристикой при обработке экспериментальных данных по дисперсионно-временному графическому методу.

При исследовании на базе фрактального броуновского движения свойств сетевого графика обращаются к рассмотренной в разд. 3.4 модели ON/OFF режима. В качестве исходных данных используются следующие статистики интервалов. Для

ON интервала  $\psi_1(\tau)$  и  $F_1(\tau) = \int_0^\tau \psi_1(u) du$  – соответственно плотность распределения и функция распределения временных ин-

тервалов;  $1 - F_{1c}(\tau)$  – функция, описывающая «хвостовое» распределение интервалов;  $\mu_1 = \int_0^\infty u \psi_1(u) du$  – математическое

ожидание интервала. Соответствующие характеристики OFF интервала обозначаются следующим образом:  $\psi_2(\tau)$ ,  $F_2(\tau)$ ,  $1 - F_{2c}(\tau)$  и  $\mu_2$ . Одним из определяющих поведение сетевого трафика факторов, как уже ранее отмечалось, является «тяжелое» распределение, а именно, существование значительной по величине вероятности длинных и очень длинных ON/OFF интервалов. Последнее ведет к необходимости аппроксимации хвостовой части функции распределения степенной зависимостью

$$F_{1c}(\tau) \sim L_1(\tau) \tau^{-\alpha_1}, \quad F_{2c}(\tau) \sim L_2(\tau) \tau^{-\alpha_2},$$

где  $L_1(\tau) > 0$  и  $L_2(\tau) > 0$  – постоянные величины или медленно изменяющиеся во времени ограниченные функции;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – дробные фрактальные параметры.

Будем считать, что источник генерирует бинарную последовательность пакетов:  $R(t) = 1$  означает, что в момент времени  $t$  есть серия пакетов, а  $R(t) = 0$  – пакеты отсутствуют. Длины интервалов независимы и в общем случае неодинаково распределены. При реализации режима ON/OFF рассматриваются  $m$  независимых источников, каждый из которых посылает свою последовательность пакетов  $R^{(i)}(t)$ . В результате суперпозиции всех источников получаем последовательность

$\sum_{i=1}^m R^{(i)}(t)$ . С учетом изменения масштаба времени в  $b$  раз агрегированное число пакетов на интервале  $(0, bt)$  равно

$$W^{(m)}(bt) = \int_0^{bt} \left[ \sum_{i=1}^m R^{(i)}(\tau) \right] d\tau. \quad (4.24)$$

В [24] доказывается теорема, что при  $b \rightarrow \infty$  и  $m \rightarrow \infty$  центрированная составляющая агрегированного случайного процесса ON интервалов сходится по вероятности к фрактальному броуновскому движению

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ b \rightarrow \infty}} b^{-H} \left[ W^{(m)}(bt) - mbt \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \right] = a_1 B_H(t), \quad (4.25)$$

где нормирующий параметр  $a_1 = \sqrt{L_1 m} \sigma_{\text{lim}}$ ,  $\sigma_{\text{lim}} = f(\alpha_1, \alpha_2, \mu_1, \mu_2, L_1, L_2)$ .

Сравнивая (4.25) с выражением для фрактального броуновского движения (3.15), можно убедиться в общности подходов при анализе рассматриваемых процессов, что позволяет охарактеризовать поведение сетевого трафика через обладающие свойствами самоподобия статистики фрактального броуновского движения.

Например, можно показать, что процесс  $W(t) = \int_0^t R^{(1)}(\tau) d\tau$  ( $m = b = 1$ ) имеет дисперсию при достаточно больших  $t$ .

$$D_W(t) = M\{W^2(t) - [M\{W(t)\}]^2\} \sim L(t) \sigma_{\text{lim}}^2 t^{2H}.$$

К числу процессов, аппроксимируемых фрактальным броуновским движением, следует отнести RTT (round trip time) – задержку [25]. Указанная задержка является важной характеристикой, обеспечивающей нормальное функционирование ТСП-соединения в фазе медленного старта и поэтому требующей тщательную настройку и контроль. RTT-задержка измеряется на стороне источника временным интервалом между моментами отправки пакета в направлении приемника и получения пакета подтверждения. Эта задержка складывается из времени обработки и распространения, а также затрат времени на очереди вдоль маршрута прохождения пакета. Появление очередей является следствием конечного значения скорости обработки информации в сетевых устройствах, например, из-за ограниченного объема памяти находящихся в промежуточных узлах сети буферов маршрутизаторов, задержек в обработке пакетов на стороне приемника и источника. Ранее это обстоятельство служило основанием для объяснения протяженной зависимости и самоподобия сетевого трафика. Очевидно, одновременное сосуществование в режиме реального времени этих процессов предполагает взаимосвязь между ними и неизбежно приводит к выводу об общей природе источника фрактальных свойств сетевого трафика и RTT-задержки.

Для стационарного процесса RTT-задержку, которую обозначим через  $T_i$ , можно записать в виде (рис. 4.1)

$$T_i = T_{1i} + T_{2i} + T_{\text{пр}},$$

где  $i = 1, 2, \dots$  – номера задержек (циклов); интервалы  $T_{1i}$  и  $T_{2i}$  соответствуют временам пересылки пакета от источника к приемнику и обратно;  $T_{пр}$  – время обработки информации в приемнике.

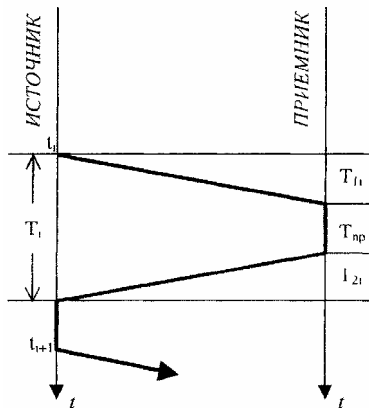


Рис. 4.1. Процесс RTT-задержки

Совокупность интервалов  $T_i$  образует дискретную последовательность RTT-задержек. Интервалы  $T_{1i}$  и  $T_{2i}$  своим существованием обязаны задержкам в обработке и передаче информации, а также наличию очередей в промежуточных узлах сети. Для известного маршрута движения пакета можно выделить постоянную минимальную обусловленную отсутствием очередей составляющую  $T_0$  и случайную составляющую из-за задержек в очередях и связанную со случайным поведением сетевого трафика  $\Delta T_i$ :  $T_i = T_0 + \Delta T_i$ . Рассматривая выражение  $T_i - M\{T_i\}$ , где  $M\{T_i\} = T_0 + \Delta T_{cp}$ ;  $\Delta T_{cp}$  – среднее значение приращения RTT-задержки, в качестве случайного приращения броуновского движения, сформируем для момента времени  $t_n$  фрактальный броуновский процесс

$$B_H(t_n) = \sum_{i=1}^n [T_i - (T_0 + \Delta T_{cp})]. \quad (4.26)$$

Полагаем, что моменты времени  $t_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) образуют регулярную последовательность дискретных временных отсчетов. Для определенности интервалы между отсчетами принимаем равными средней величине RTT-задержки  $\Delta = T_0 + \Delta T_{cp}$ . В соотношении (4.21) отождествим текущие времена  $t_2$  и  $t_1$  с моментами времени  $t_{n+k}$  и  $t_n$  ( $t_{n+k} - t_n = k\Delta$ ), где  $k$  – параметр смещения. Используя выражение (4.26), запишем соотношение для корреляционной функции процесса  $B_H(t)$

$$\begin{aligned} k_{2H}(t_1, t_2) &= k_{2H}(t_n, t_{n+k}) = \\ &= M\{B(t_n)B(t_{n+k})\} \sim 1/2 [t_n^{2H} + t_{n+k}^{2H} - |t_{n+k} - t_n|^{2H}]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Коэффициент корреляции для стационарных приращений процесса (4.26) на заданном интервале длительностью  $T$  при достаточно больших значениях  $k$  и  $T$  аппроксимируется известным выражением (4.22).

## 5. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТЬЮ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ

### 5.1. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ В СЕТЯХ

Актуальность постановки задачи прогнозирования и ее решения заключается в том, что данные прогноза о пропускной способности позволяют получить дополнительные сведения для решения задачи управления, а именно формирования алгоритма предотвращения перегрузки. Решение указанной задачи, как правило, сводится к определению алгоритма с адаптивным механизмом перенастройки отдельных сетевых компонент. В качестве одного из вариантов использования этого механизма можно указать на алгоритм изменения текущего окна ТСП-соединения для предотвращения перегрузки и уменьшения тем самым потерь в пропускной способности сети. Если процесс передачи информации не столь критичен к потере пакетов, в качестве еще одного примера применения этого алгоритма можно привести управление потоками данных протоколом UDP через механизм изменения интенсивности числа посланных пакетов на отдельных участках сети.

При прогнозе оценка процесса формируется не на конечном отрезке наблюдения, а вне его на некотором временном интервале упреждения. Предварительно получим результаты для непрерывного времени, а затем обобщим их на процессы в дискретном времени. Выразим коэффициент корреляции через корреляционную функцию  $k_2(t_1, t_2)$  и дисперсию  $D_{t_1}$  случайного процесса следующим образом:

$$r(t_1, t_2) = \frac{k_2(t_1, t_2)}{D_{t_1}}, \quad (5.1)$$

где

$$k_2(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^0 x_2^0 p(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2, \quad D_{t_1} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{0^2} p(x_1, t_1) dx, \quad x_{1(2)}^0 = x_{1(2)} - \mu_{1(2)}$$

и  $\mu_{1(2)}$  – соответственно центрированная составляющая и математическое ожидание случайного процесса для  $t_{1(2)}$  моментов времени;  $p(x_1, t_1; x_2, t_2)$  и  $p(x_1, t_1)$  – двумерная и одномерная плотности вероятностей.

Используя формулу для условных плотностей вероятности, представим корреляционную функцию в виде

$$k_2(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^0 p(x_1, t_1) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x_2^0 p(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2 \right\} dx_1,$$

где  $p(x_2, t_2 | x_1, t_1)$  – условная плотность вероятности.

Полагаем сигнал  $x_1$  известным, и поэтому соответствующая ему плотность вероятности принимает дельтаобразный вид

$$p(x_1, t_1) = \delta(x - x_1).$$

Используя фильтрующие свойства дельта-функции, приходим к следующим выражениям статистик:

$$k_2(t_1, t_2) = x_1^0 \int_{-\infty}^{\infty} x_2^0 p(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2; \quad (5.2)$$

$$D_{t_1} = x_1^{0^2}. \quad (5.3)$$

Обозначим оценку прогноза процесса в момент времени  $t_2$  через  $\hat{x}_2^0$ .

Дисперсия ошибки прогноза при квадратической функции потерь имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{x}_2^0 - x_2^0)^2 p(x_2 | x_1) dx_2. \quad (5.4)$$

После дифференцирования соотношения (5.4) по  $\hat{x}_2^0$ , приравнивания результата дифференцирования нулю получаем оценку, соответствующую минимуму среднеквадратической погрешности (оптимальную в среднеквадратическом смысле)

$$\hat{x}_2^0 = M \{ x_2^0 | x_1 \} = \int_{-\infty}^{\infty} x_2^0 p(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2. \quad (5.5)$$

После подстановки соотношения (5.5) в (5.2), а затем в формулу (5.1), с учетом (5.3) получим выражение оценки прогноза на интервале упреждения  $t_2 - t_1$ , по известному значению  $x_1^0$  в момент времени  $t_1$

$$\hat{x}_2^0 = r(t_2, t_1) x_1^0. \quad (5.6)$$



На основании полученных результатов решим задачи прогноза для счетных характеристик сетевого трафика и фрактального броуновского движения. Для первого случая оптимальный прогноз означает нахождение оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки числа отсчетов  $X_{n+k}$  в интервале  $(t_{n+k}, t_{n+k} - T)$ , отстоящем от последнего результата наблюдения – числа отсчетов  $X_n$  в интервале  $(t_n, t_n - T)$  на время  $kT$ , где  $k$  – параметр смещения. Полагая процесс стационарным, принимаем интенсивность точечного процесса работы равной известной постоянной величине  $\lambda$ . Для счетных характеристик интервал упреждения и коэффициент корреляции становятся равными соответственно  $kT$  и  $r(k, T)$ . Отождествляя  $t_2$  и  $t_1$  с моментами времени  $(k+n)$  и  $nT$ , а также полагая  $\mu_1 = \mu_2 = \lambda T$ , получаем из выражения (5.6) оптимальную оценку прогноза отсчета  $\hat{X}_{n+k}$  по известному отсчету  $X_n$ :

$$\hat{X}_{n+k} = r(k, T)(X_n - \lambda T) + \lambda T. \quad (5.7)$$

Значение  $r(k, T)$  в зависимости от исходных данных и особенностей решения задачи принимает одну из форм (3.43), (3.44) и (3.45). Качество прогноза для рассматриваемой задачи оценим по величине дисперсии ошибки при заданном параметре смещения  $k$ :

$$\varepsilon_k^2 = M\{(\hat{X}_{n+k} - X_{n+k})^2\}.$$

После возведения выражения в круглых скобках в квадрат, определения математического ожидания, а также принимая во внимание (5.7), имеем

$$\varepsilon_k^2 = M\{(r(k, T)(X_n - \lambda T) + \lambda T - X_{n+k})^2\} = r^2(k, T)D - 2r(k, T)C(k, T) + D. \quad (5.8)$$

При выводе этого соотношения было учтено, что

$$\begin{aligned} M\{X_n^2\} &= M\{X_{n+k}^2\} = D + \lambda^2 T^2; \\ M\{X_n X_{n+k}\} &= C(k, T) + \lambda^2 T^2, \end{aligned}$$

где  $C(k, T)$  – введенная ранее корреляционная функция числа счетов в разнесенных на время  $kT$  интервалах длительностью  $T$  (3.22);

$C(0, T) = D$ . Умножив и поделив второе слагаемое (5.8) на  $D$  и учитывая, что  $r(k, T) = C(k, T) / D$ , получаем окончательно  $\varepsilon_k^2 = D[1 - r^2(k, T)]$ . Как следует из этого выражения, с возрастанием параметра  $k$ , что соответствует увеличению глубины прогноза, качество прогноза ухудшается (увеличивается ошибка), так как коэффициент корреляции уменьшается. Обратим внимание на то, что в связи с протяженной зависимостью статистики  $r(k, T)$  обеспечивается для выбранного параметра  $k$  лучшее качество прогноза по сравнению с короткопротяженными статистиками обычных моделей случайных процессов. В пределе при  $k \rightarrow \infty$  дисперсия ошибки прогноза стремится к априорной дисперсии  $C(0, T) = D$ . Прогноз можно улучшить, если использовать, помимо последнего, ряд предшествующих возможно с разными весовыми коэффициентами измерений общим числом  $m$ . В прогнозе для этого случая, кроме того, можно учесть тенденцию изменений числа отсчетов (приращений) точечного процесса. В простом варианте агрегирования получаем для оптимальной оценки прогноза выражение следующего вида

$$\hat{X}_{n+k} = \frac{1}{m} \sum_{j=n-m+1}^n [r(k+n-j, T)(X_j - \lambda T)] + \lambda T, \quad 1 \leq m \leq n. \quad (5.9)$$

На основании свойств фрактального броуновского движения получим прогнозируемую оценку ОН интервалов (длительностей пачек пакетов) к моменту времени  $t_2$  по известным значениям характеристик в момент времени  $t_1$ ,  $t_2 > t_1 > 0$ . В качестве исходной для получения прогноза рассматривается формула (5.6). Для фрактального броуновского движения коэффициент корреляции (5.1) с учетом формулы (4.21) имеет вид

$$\begin{aligned} r_H(t_1, t_2) &= \frac{k_{2H}(t_1, t_2)}{D_H(t_1)} = \frac{1}{2} \frac{[t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_2 - t_1|^{2H}]}{t_1^{2H}} = \\ &= \frac{1}{2} [1 + S_{1,2}^{2H} - |S_{1,2} - 1|^{2H}], \end{aligned} \quad (5.10)$$

где  $S_{1,2} = t_2 / t_1$ .

Оптимальный в среднеквадратическом смысле прогноз фрактального броуновского движения  $\hat{B}_H(t_2)$  по известному значению  $B_H(t_1)$  (последнему, измеренному в момент  $t_1$ ) описывается следующим соотношением

$$\hat{B}_H(t_2) = M\{B_H(t_2) | B_H(t_1)\} = \frac{1}{2} [1 + S_{1,2}^{2H} - |S_{1,2} - 1|^{2H}] B_H(t_1). \quad (5.11)$$

Перейдем к прогнозу агрегированного процесса (4.24). Используя формулу (5.11), а также выражение (4.25), можно показать, что при  $b = 1$  и достаточно большом  $m$  оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка прогноза в момент времени  $t_2 - \hat{W}^{(m)}(t_2)$  близка по вероятности процессу

$$\frac{1}{2} \left[ 1 + S_{1,2}^{2H} - |S_{1,2} - 1|^{2H} \right] \left[ W^{(m)}(t_1) - \frac{m\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} t_1 \right] + \frac{m\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} t_2,$$

где  $W^{(m)}(t_1)$  – известное к моменту времени  $t_1$  значение агрегированного потока пакетов.

При определении прогнозируемой оценки РТТ-задержки воспользуемся соотношением (5.6) фрактального броуновского движения. Для этого процесса на основании соотношений (4.27) и (5.11) коэффициент корреляции и оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка прогноза в момент времени  $t_{n+k}$  и известном значении процесса в момент  $t_n$  соответственно равны:

$$r_H(n, n+k) = \frac{t_n^{2H} + t_{n+k}^{2H} - |t_{n+k} - t_n|^{2H}}{2t_n^{2H}} = \frac{1}{2} \left[ 1 + S_{n,n+k}^{2H} - |S_{n,n+k} - 1|^{2H} \right];$$

$$\widehat{B}_H(t_{n+k}) = M\{B_H(t_{n+k}) | B_H(t_n)\} = r_H(n, n+k) B_H(t_n), \quad (5.12)$$

где  $S_{n,n+k} = t_{n+k}/t_n$ .

Как уже ранее отмечалось, качество прогноза можно улучшить, и для оценки прогноза использовать не только последнее, но и ряд предшествующих измерений. Обозначим общее число таких измерений через  $m$ . В этом случае после агрегирования оптимальная оценка прогноза фрактального броуновского движения становится равной

$$\widehat{B}_H(t_{n+k}) = \frac{1}{2m} \sum_{j=n-m+1}^n \left[ 1 + S_{j,n+k}^{2H} - |S_{j,n+k} - 1|^{2H} \right] B_H(t_j), \quad (5.13)$$

где  $S_{j,n+k} = t_{n+k}/t_j$ .

Оптимальная оценка прогноза РТТ-задержки для момента времени  $t_{n+k}$  принимает вид

$$\widehat{T}_{n+k} = \widehat{B}_H(t_{n+k}) - \widehat{B}_H(t_{n+k-1}) + T_0 + \Delta T_{\text{cp}}. \quad (5.14)$$

Остановимся подробнее на оценке прогноза следующего за последним измеренным для момента времени  $t_n$  значением остального броуновского движения. На основании формулы (5.14) она равна

$$\widehat{T}_{n+1} = \widehat{B}_H(t_{n+1}) - B_H(t_n) + T_0 + \Delta T_{\text{cp}}. \quad (5.15)$$

В случае использования ряда предшествующих измерений общим числом  $m$  для оценки прогноза сохраняется соотношение (5.15), где

$$\widehat{B}_H(t_{n+1}) = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^n \left[ 1 + S_{j,n+1}^{2H} - |S_{j,n+1} - 1|^{2H} \right] B_H(t_j).$$

Такую же по величине оценку прогноза можно получить через коэффициент корреляции соседних приращений фрактального броуновского движения. Рассматривая случайное изменение РТТ-задержки как приращение фрактального броуновского движения  $B_H(t_{n+1}) - B_H(t_n)$ , коэффициент корреляции приращений можно представить в виде:

$$\begin{aligned} r_H(1, \Delta) &= \frac{M\{T_n T_{n+1}\} - (T_0 + \Delta T_{\text{cp}})^2}{M\{T_n^2\} - (T_0 + \Delta T_{\text{cp}})^2} = \\ &= \frac{M\{[B_H(t_n) - B_H(t_{n-1})][B_H(t_{n+1}) - B_H(t_n)]\}}{M\{[B_H(t_n) - B_H(t_{n-1})]^2\}}, \end{aligned}$$

где  $\Delta = T_0 + \Delta T_{\text{cp}}$ .

Для стационарного процесса приращений статистики инвариантны к начальному временному отсчету. Поэтому на основании формулы (4.18) при  $B_H(t_{n-1})$  и  $n = 1$  можно записать

$$r_H(1, \Delta) = \frac{M\{[B_H(t_1)B_H(t_2)]\} - M\{B_H^2(t_1)\}}{M\{B^2(t_1)\}},$$

где  $t_2 - t_1 = t_1 = \Delta$ .

После вычислений по уже известной методике разд. 4 получаем

$$r_H(1, \Delta) = 2^{2H-1} - 1.$$

Оценка прогноза РТТ-задержки принимает вид

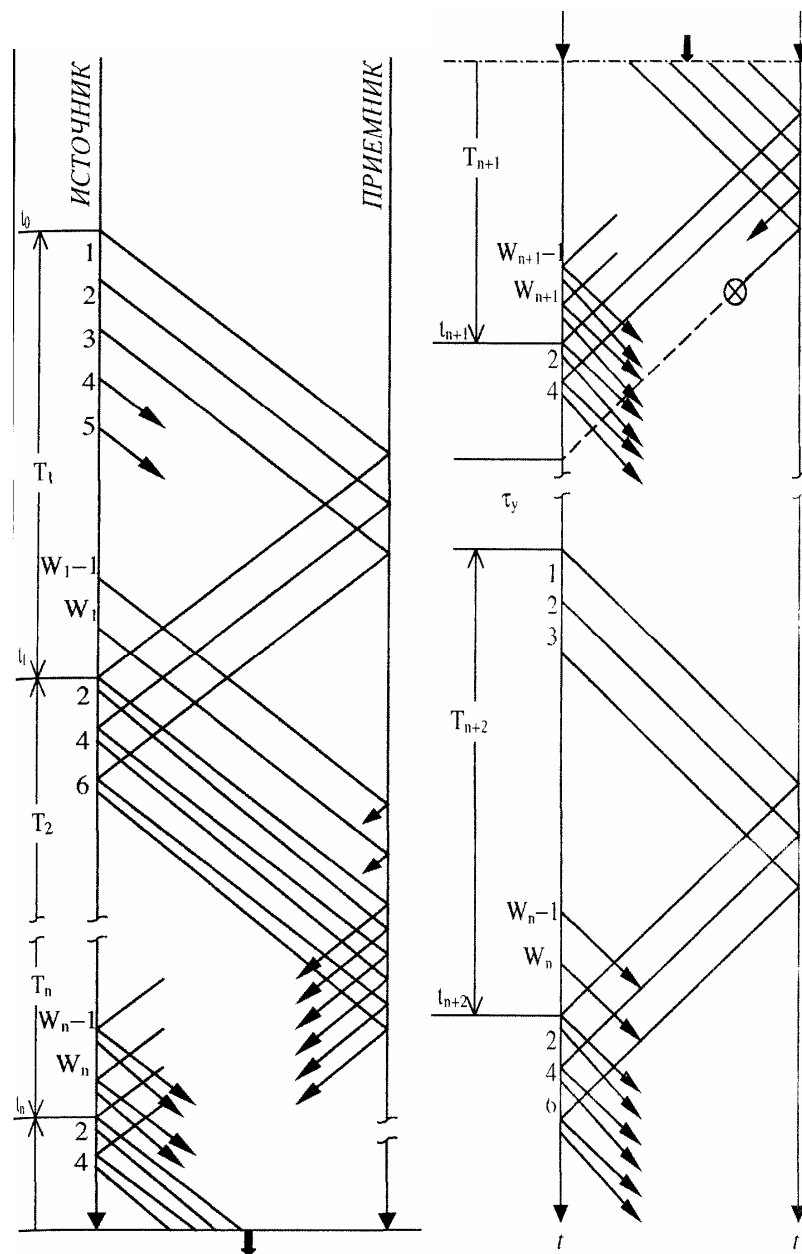
$$\widehat{T}_{n+1} = r_H(1, \Delta)[T_n - (T_0 + \Delta T_{\text{cp}})] + T_0 + \Delta T_{\text{cp}}.$$

Можно показать, что как и для счетных характеристик, в рассматриваемом случае величина ошибки прогноза зависит от характера поведения коэффициента корреляции. Чем сильнее статистическая зависимость между соседними отсчетами процесса, чему не в малой степени способствует протяженная зависимость, тем медленнее спадает коэффициент корреляции и тем самым оказывается меньше величина ошибки прогноза.

## 5.2. УПРАВЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫМИ ПОТОКАМИ

На основании полученных результатов сформулируем ряд предложений по управлению информационными потоками в компьютерных сетях. Одним из наиболее важных параметров, характеризующих качество работы сети, является пропускная способность (скорость передачи данных) канала связи между пользователями. Важным фактором, влияющим на пропускную способность, являются упомянутые ранее временные задержки вдоль маршрута прохождения пакетов. Чем больше эти задержки, тем меньше пропускная способность. В высокоскоростных сетях соединения между пользователями осуществляются TCP/IP протоколом. В соответствии с алгоритмом работы этого протокола пропускная способность со стороны источника в фазе медленного старта определяется текущим окном перегрузки, равным числу разрешенных к передаче пакетов до прихода пакетов подтверждения. На рис. 5.1 представлен процесс формирования и эволюции окна перегрузки размера  $W_i$ , для выбранного виртуального соединения источник – приемник по одному из вариантов реализации TCP/IP протокола, где  $i$  – номер цикла фазы медленного старта.

На первом цикле после отправки пакета с номером 1 разрешается передать еще  $W_1 - 1$  пакетов до получения пакета подтверждения на посланный пакет с номером 1. На втором и всех последующих циклах, если пакеты подтверждения поступают более или менее регулярно, величина окна каждый раз увеличивается в два раза. В результате достигается максимально возможная (но не более заявленного со стороны приемника окна перегрузки) для данного соединения и принятого протокола пропускная способность соединения. Алгоритм, формирующий окно перегрузки по сигналу обратной связи в виде пакетов подтверждения, называется алгоритмом скользящего окна, так как при очередном получении пакета подтверждения окно перемещается (и увеличивается на один пакет на каждый шаг алгоритма), захватывая очередные данные, которые разрешается передавать без подтверждения. Допустим, что из-за очередей в промежуточных узлах – маршрутизаторах, в компьютерах источника и приемника, а также из-за переполнения буферов в этих узлах соединение сети не справляется с нагрузкой. Вследствие этого часть пакетов чрезмерно задерживается в пути и даже, может быть, теряется (на рис. 5.1 задерживается один пакет из  $n + 1$ -го цикла). В этом случае пакеты подтверждения не отсылаются, и протоколом TCP на стороне источника на цикле  $n + 2$  формируется окно уменьшенного размера, равного своему значению  $W_n$  на  $n$ -м цикле, и достоверность передачи обеспечивается через механизм повторения пакетов. На этом заканчивается фаза медленного старта и начнется фаза управления перегрузкой, сопровождающаяся для налаживания и поддержания соединения локальными воздействиями и определением каждый раз текущего окна соединения. Интервал времени между моментами отправки пакета в направлении приемника и получения пакета подтверждения определяется ранее введенным параметром RTT-задержки. Чтобы избежать длительных простоев из-за ожидания потерянных или задержавшихся пакетов вводится пороговое значение RTT-задержки (тайм-аут –  $\tau_y$ ). При превышении RTT-задержкой порога пакеты считаются потерянными. Величина тайм-аута определяется с помощью адаптивного алгоритма TCP/IP протокола, порядок работы которого включает следующие операции. Измеряется ряд значений RTT-задержки, полученные значения усредняются с весовыми коэффициентами, возрастающими от предыдущего измерения к последующему, а затем полученный результат умножается на некоторый коэффициент.



**Рис. 5.1. Процессы формирования и эволюции окна перегрузки**

Очевидно, в связи с уменьшением окна перегрузки пропускная способность соединения снижается. Анализ работы существующего алгоритма работы протокола показывает, что имеются значительные резервы уменьшения потерь в пропускной способности в режимах медленного старта и управления перегрузкой. Во-первых, перегрузка не прогнозируется, а обнаруживается по самому факту отсутствия пакетов подтверждения после очередного перемещения окна, во-вторых по этому факту нельзя судить о величине перегрузки, и следующее состояние окна устанавливается методом «проб и ошибок». Задача заключается в формировании заблаговременно, не заходя в критическую область обнаружения потерянных пакетов, оценок как месторасположения временного интервала возможного проявления перегрузки, так и величины самой перегрузки. Решение такой задачи можно получить в рамках методов идентификации процессов, использования при моделировании RTT-задержек остального броуновского движения и формирования оценок прогноза. Такие оптимальные в среднеквадратическом смысле оценки ранее были получены (5.14), (5.15) и (5.16). Например, для случая на рис. 5.1 наличие возможной перегрузки на  $n + 1$ -м цикле могло быть обнаружено и тем самым с большой вероятностью предотвращено по результатам измерений RTT-задержек или фрактального броуновского движения на  $m$  предшествующих циклах, формирования согласно формуле (5.15) соответствующей оценки прогноза и сравнения ее с тайм-аутом. Кроме того, по величине спрогнозированной RTT-задержки на  $n + 1$ -м цикле можно судить об уровне перегрузки и по сигналу обратной связи соответственно уменьшить (перенастроить) величину окна, т.е. определить закон изменения окна перегрузки.

Остановимся на предложениях по управлению информационными потоками на основании прогноза счетных характеристик. Такое управление может быть осуществлено с помощью модифицированного варианта протокола UDP.

Ввиду того, что счетные статистики первого и второго порядков (интенсивность и корреляционная функция точечного процесса) экспериментально могут быть определены только на отдельных участках сети, предмет оптимизации и управления становятся потоки информации между отдельными узлами виртуального соединения сети. Выберем два узла, из которых  $i$ -й узел является источником, а  $j$ -й узел – приемником. Допустим, интенсивность потока (пропускная способность участка сети между  $i$ - и  $j$ -ми узлами) определяется очередью в узле  $j$ , возникшей, например, из-за ограниченного объема памяти

буфера в этом узле, низкой интенсивности разгрузки этого буфера, из-за прибывших в этот узел пакетов с других соединений сети и т.д.

В связи с этим интенсивность потока информации от узла  $i$  к узлу  $j$  понижается, а в случае переполнения буфера в узле  $j$  передача информации прекращается, что сопровождается потерей части пакетов. Для предотвращения полной потери пропускной способности необходимо регулировать уровень загрузки буфера в узле  $j$ . Для этого воспользуемся прогнозируемыми оценками счетных характеристик. Измеряют на рассматриваемом участке сети число отсчетов  $X_n$  на интервале  $(t_n, t_n - T)$ . Одновременно осуществляется прогноз на некотором интервале упреждения  $kT$ , где  $k$  – параметр смещения. Ограничимся для примера прогнозом на один шаг вперед. Прогнозируемая оценка  $X_{n+1}$  определяется или по последнему результату измерений (5.7) или на основании некоторого числа предшествующих измерений согласно процедуре агрегирования (5.9) при  $k = 1$ .

Если величина прогноза оказывается больше порога, зависящего от уровня загрузки буфера и определяемого некоторым адаптивным алгоритмом, то по сигналу обратной связи интенсивность генерации информации с узла  $i$  уменьшается на величину, зависящую от уровня загрузки буфера и значений оценок прогноза. Хотя пропускная способность из-за этого на участке сети и понижается, но в связи с сохранением процесса передачи информации и уменьшением числа потерянных пакетов удается в среднем уменьшить потери в пропускной способности этого соединения. Если необходимо сохранить пропускную способность, то по сигналу обратной связи доступные сетевые ресурсы перераспределяются в пользу этого участка виртуального соединения сети.

## 6. МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ СЕТЕВЫМИ РЕСУРСАМИ

Рассмотренные подходы по управлению информационными потоками данных с целью предотвращения перегрузки и уменьшения потерь в пропускной способности далеко не исчерпывают весь арсенал методов и средств по оптимизации работы компьютерных сетей. Дальнейший прогресс по расширению сферы применения современных информационно-сетевых средств телекоммуникации лежит на путях повышения эффективности и обеспечения более высокого качества использования сетевых ресурсов. Последнее предполагает системный подход при исследовании компьютерных сетей как объектов управления, обладающих признаками распределенной стохастической динамической системы со специфическим поведением случайных процессов – их фрактальным характером. Особенность управления этими динамическими системами ввиду их распределенной структуры состоит в сочетании, с одной стороны, управлений с обратной связью на транспортном уровне в локальных с наиболее эффективным доступом к оперативным данным точках сети, с другой стороны, иерархического принципа программного управления через протоколы разного уровня межсетевого взаимодействия для координации локальных управлений и эффективного перераспределения пропускной способности между различными пользователями и информационными приложениями.

Использование компьютерных сетей ознаменовало новый подход в теории и практике работы телекоммуникационных систем и позволило в рамках информационного обеспечения пользователей решить большое число важных задач управления и связи. К числу этих задач следует отнести проведение расчетных и исследовательских задач, в том числе реализацию различного вида прикладных программ; сбор и хранение данных; обмен информации между пользователями во всех возможных формах ее проявления (текст, речь, графика, видео и т.д.); предоставления разного рода сервисных услуг и выполнение многих других информационных функций, включая формирование данных для управления системами (АСУ, САПР). Вышеприведенный далеко не полный перечень информационных функций и услуг объединен общим названием – прикладные процессы.

Компьютерная сеть имеет достаточно сложную структуру и для управления этими процессами (а они являются главными при информационном обеспечении) разработан специальный структурно-логический механизм взаимодействий [26]. Суть этого механизма заключается в логико-иерархической декомпозиции сложной информационной сети на отдельные части, называемые уровнями и выполняющие определенные функции. Передача данных на каждом уровне осуществляется независимо согласно определенному набору семантических и синтаксических правил. Причем каждый вышестоящий уровень получает логико-информационную поддержку от нижестоящего уровня. Это позволяет стандартизировать процедуры взаимодействий пользователей, унифицировать аппаратно-логические функции управления по организации хранения, передачи, обработки данных и упорядочить работу отдельных компонент и объектов сети. Например, в так называемой базовой эталонной модели взаимодействий открытых систем имеется семь уровней, которые в порядке убывания называются прикладным (соответствует прикладным процессам), уровнем представления, сеансовым, транспортным, сетевым, канальным и физическим (соответствует побайтовой передаче информации по проводам, радио, оптоволоконным и другим каналам связи). Для сети Интернет используются следующие уровни: прикладной, транспортный, обеспечивающий надежную передачу информации и формирующий виртуальные соединения, и наконец, нижний, поддерживаемый наиболее известными стандартами канальных и физических уровней. Обслуживающий эти уровни комплекс программных средств или, как его называют, блок протоколов (для сети Интернет – TCP/IP протоколы) для поддержания и координации взаимодействий всех информационных ресурсов сети образует распределенную сетевую операционную систему, являющуюся ядром программного обеспечения, под управлением которой и выполняются прикладные процессы. Наряду с многочисленными функциями по сбору информации, анализу и контролю за состоянием сетевых объектов, формированию соответствующих команд управления сетевым взаимодействием, на протоколы возложены функции управления трафиком для экономной и эффективной передачи пакетов данных, управления их очередями и предотвращения тупиковых ситуаций (например, переполнения буферов в промежуточных узлах сети) и вообще для сбережения сетевых ресурсов.

Если рассматривать компьютерную сеть с позиций теории управления взаимодействиями сетевых объектов как распределенную динамическую систему, находящуюся под воздействием различных управляющих и возмущающих (в том числе и случайных) факторов, то операционная система выступает в роли регулятора. Последний на основании полученной с опрашиваемых и размещения на сетевых объектах программных агентов информации формирует согласно выбранным критериям качества необходимые сигналы и команды управлений. При выборе критериев качества необходимо руководствоваться требованиями эффективного использования сетевых ресурсов, что предполагает обеспечение достаточно большой пропускной способности соединений при сохранении высокого качества (надежности) передачи информации. При традиционном подходе, связанном с четкой и жесткой регламентацией на всех уровнях сетевого взаимодействия, для поддержания высокого качества передачи информации необходимо закладывать в компьютерную сеть избыточные информационные ресурсы. Это

вызвано описываемым «тяжелым» распределением, случайным поведением сетевого трафика, сопровождающимся, как было отмечено в разд. 3.1, существенными локальными флуктуациями пропускной способности (пачечностью трафика и наличием больших межпачечных интервалов). Поэтому при организации межсетевого взаимодействия, помимо среднего значения пропускной способности, необходимо учитывать пиковое ее значение. В результате в сети необходимо иметь значительные запасы по пропускной способности, что и приводит к нерациональному использованию сетевых ресурсов.

Преодолеть указанный недостаток можно с помощью так называемого интеллектуального управления компьютерными сетями, которое включает в себя как обычный механизм управления, так и механизмы изменения структуры регулятора (параметров протоколов взаимодействия сети), конфигурации сети. Под этими механизмами подразумеваются набор специальных программ управления режимами и интеллектуальный выбор соответствующей программы в конкретном случае с учетом внутреннего состояния сети, воздействия возмущающих факторов и необходимости перераспределения сетевых ресурсов между различными пользователями и информационными приложениями.

Остановимся подробнее на алгоритмах организации коллективного доступа и перераспределения сетевых ресурсов. Перераспределение сетевых ресурсов, в частности пропускной способности виртуальных каналов, достигается за счет статистического мультиплексирования с временным разделением пропускной способности между различными информационными приложениями (сетевыми сервисами). Методы управления перераспределением пропускной способности обеспечивают сбалансирование информационных потоков по этим каналам с учетом текущей загрузки и доступной пропускной способности физической линии связи при достижении заданных значений характеристик, обычно формулируемых в виде вероятностных показателей качества [27]. Указанные методы представляют собой комбинацию алгоритмов управления доступом резервирования пропускной способности виртуальных каналов и статистического мультиплексирования сетевых ресурсов, высвобождающихся вследствие случайного характера распределения нагрузки по видам сервиса. На рис. 6.1 представлен фрагмент многоуровневой модели управления по обеспечению заданного качества информационного сервиса путем организации коллективного доступа к вычислительным и информационным ресурсам, а также перераспределения этих ресурсов с учетом приоритетного характера обслуживаемых запросов. Как следует из рисунка, уровни взаимодействия становятся средствами реализации формируемых по иерархическому принципу управляющих воздействий: от нижнего уровня управления статистическим мультиплексированием через управление пропускной способностью по сигналам обратной связи к верхнему уровню управления доступом и прогнозированием нагрузки. Изображенные на рисунке блоки регуляторов доступа приоритетов и резервирования пропускной способности условно отображают распределенные функции управления, выполнение которых обеспечивается операционной системой сети.

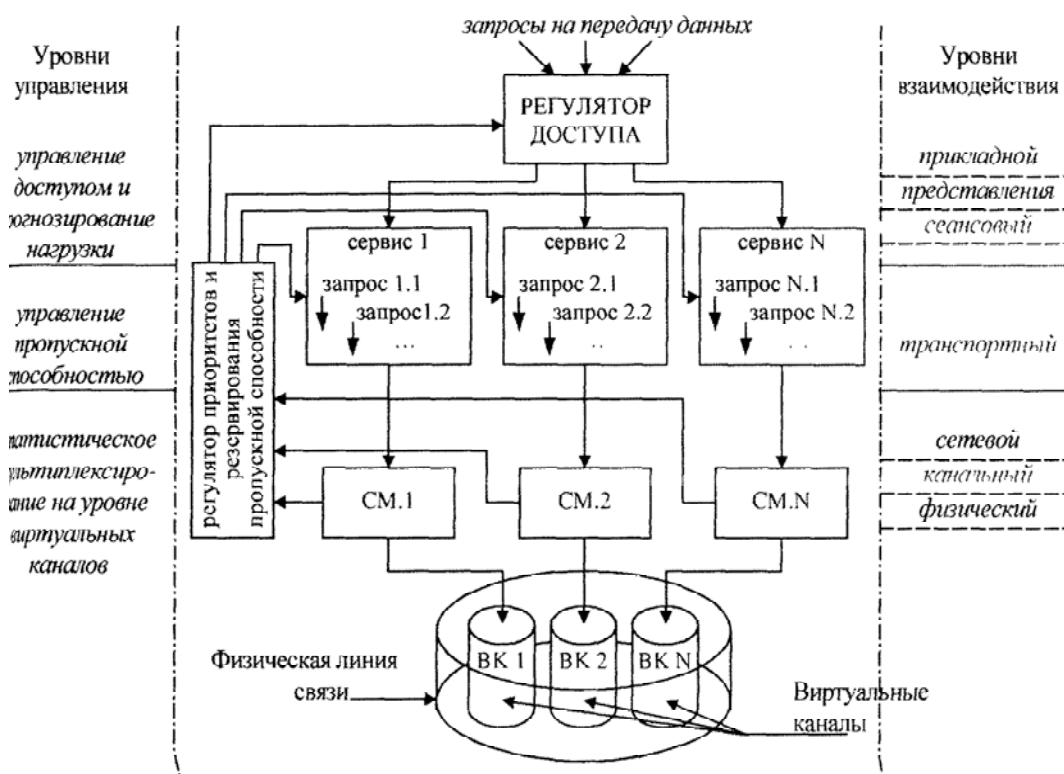


Рис. 6.1. Многоуровневая модель управления доступом к вычислительным и информационным ресурсам

Из-за статистической природы сетевого трафика необходимые характеристики производительности в каждом из виртуальных соединений или каналов не могут быть обеспечены за счет гарантированного выделения минимальной пропускной способности и требуемой корректировки этого значения на основе оперативной информации о состоянии сети. Одним из возможных подходов к решению этой проблемы является управление статистическим мультиплексированием в следующей последовательности: выбор целевых функций, характеризующих вероятность потерь данных из-за несоответствия выделенной пропускной способности текущему значению трафика; контроль за числом разрешенных виртуальных соединений для каждого класса сервиса; оптимизация (оптимальное перераспределение пропускной способности между соединениями) на основе выбранного вероятностного показателя качества. Реализация указанного вероятностного подхода наталкивается на серьезные трудности методологического и вычислительного характера. Поэтому необходимы дальнейшие исследования по совершенствованию методов оптимизации решения рассматриваемой задачи на основе оперативной оценки состояния отдельных соединений и сети в целом, а также с учетом специфических свойств случайных информационных потоков.

К числу перспективных информационных технологий следует отнести новый подход по управлению информационными ресурсами с помощью так называемых программных модулей (интеллектуальных агентов), представляющих из себя перемещающиеся по сети фрагменты исполняемого программируемого кода [28]. В основе механизма управления указанными агентами лежит не формирование и передача на объект управления регулирующих сигналов, а воздействие на эти агенты, реализующее требуемые алгоритмы управления. Каждый такой агент обеспечивает управление доступными для него информационными ресурсами с учетом набора собственных целевых функций внешних воздействий и состояния объекта управления.

## 7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЕТЕВЫХ ПРОЦЕССОВ

В основе экспериментальной проверки фрактальных свойств трафика сети лежат методы, позволяющие по выборочным значениям числа событий на интервалах заданной длительности или отсчетов временных интервалов между событиями сформировать статистики, а затем оценить ряд параметров этих статистик. Далее проверка сводится к решению задачи: подтверждается или опровергается по этим оценкам гипотеза о протяженной зависимости трафика. О характере стационарного поведения сетевого трафика судят по величине фрактального параметра  $\alpha$  или параметра Херста ( $H$ -параметра). Для фрактальных процессов, обладающих протяженной зависимостью статистик, значения указанных параметров лежат в диапазонах:  $0 < \alpha < 1$ ,  $1/2 < H < 1$ . В качестве узла, на котором были получены экспериментальные данные для расчета статистик проходящего через него сетевого трафика, использовался маршрутизатор fem.ru Центрального научно-исследовательского и опытно-конструкторского института робототехники и технической кибернетики г. Санкт-Петербурга.

Экспериментальную проверку фрактальных свойств начнем с определения статистик второго порядка – фактора Фано и коэффициента корреляции, по выборочным значениям числа событий (отсчетов) на интервалах заданной длительности.

Зависимость нормированной дисперсии числа отсчетов (фактор Фано  $\tilde{F}(T)$ ) от величины временного интервала была построена при помощи программ tsumd и fano.c. Стандартная программа tsumpr позволяет регистрировать время прохождения пакета через узел fem.ru с погрешностью не более 1 мс. Длительность времени проведения эксперимента равнялась  $T_3 = 1860$  с. За время эксперимента через узел прошло 290 000 IP пакетов. Диапазон изменения интервалов отсчетов  $T$  от 0,01 до 163 с. Длительность каждого последующего интервала отличалась от длительности предыдущего в  $m^2$  раз, где  $m = 1, 2, \dots$  – номер интервала. Выборочные характеристики – среднее значение  $\tilde{M}\{X_m\}$  и дисперсия  $\tilde{D}(T_m)$ , где  $X_m$  – величина отсчета числа пакетов на интервале  $T_m$ , определялись формулами:

$$\tilde{M}\{X_m\} = \frac{1}{N_m} \sum_{j=1}^{N_m} X_{mj}; \quad \tilde{D}(T_m) = \frac{1}{N_m} \sum_{j=1}^{N_m} [X_{mj} - \tilde{M}\{X_m\}]^2,$$

где объем выборки каждого интервала  $N_m = [T_3/T_m]$ . Построение зависимости  $\tilde{F}(T_m) = \tilde{D}(T_m)/\tilde{M}\{X_m\}$  в логарифмическом масштабе по неуказанным выборочным статистикам осуществлялось с помощью программы fano.c.

На рис. 7.1 представлен ряд полученных значений фактора Фано. Прямая, соответствующая аппроксимирующему выражению (3.32), построена с помощью программы mpk.c. Значение наклона прямой, равное фрактальному параметру  $\tilde{\alpha}$ , приведено на этом же рисунке. Для пуассоновского (не фрактального) потока событий наклон равен нулю и характеристика фактора Фано совпадает с осью абсцисс.

Определение выборочного коэффициента корреляции числа отсчетов на интервалах заданной длительности осуществляется с помощью программы corfun.c по формуле

$$\tilde{r}(k) = \frac{N}{N-k} \frac{\sum_{j=1}^{N-k} [X_j - \tilde{M}\{X_j\}][X_{j+k} - \tilde{M}\{X_j\}]}{\sum_{j=1}^N [X_j - \tilde{M}\{X_j\}]^2},$$

где  $X_j$  – величина отсчета (число пакетов) в интервалах длительностью 0,1 с;  $M = 10T_3$  – объем выборки;  $k = 0, 1, \dots$  – параметр смещения, кратный числу интервалов;  $\tilde{M}\{X_j\} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_j$ .

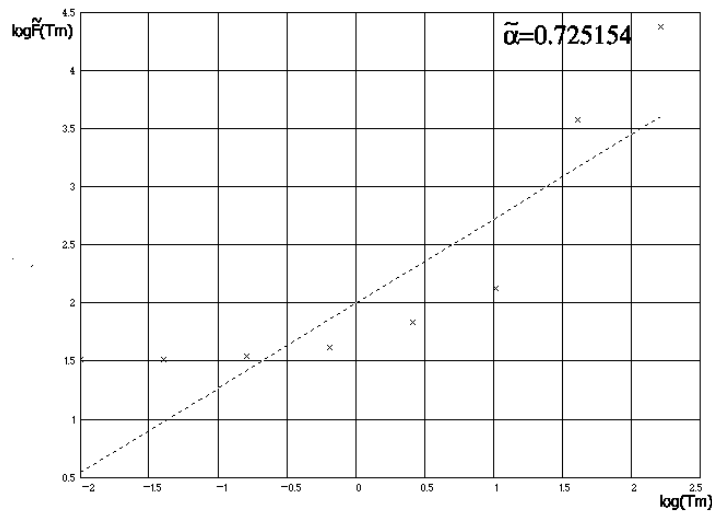


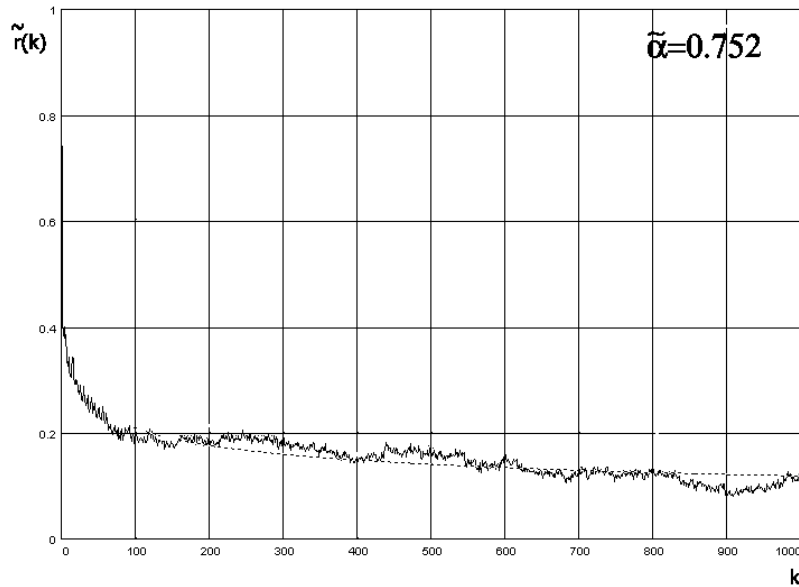
Рис. 7.1. График поведения фактора Фано



На рис. 7.2 представлена графическая зависимость коэффициента корреляции от параметра смещения. В результате аппроксимации с помощью программы `alph.c` указанной зависимости выражением (3.45) получены значения фрактального параметра  $\tilde{\alpha}$ .

Перейдем к определению интервальных статистик второго порядка RTT-задержки – коэффициента корреляции и дисперсии агрегированного процесса. Значения RTT-задержки были получены с помощью стандартной программы `ring`. Согласно алгоритму этой программы с периодичностью, равной 1 с (если RTT-задержка менее 1 с), отправляются тестовые пакеты до удаленного компьютера-приемника, получают ответ на него в виде пакета подтверждения и вычисляют значение RTT-задержки с погрешностью не более 1 мс как разность временных отметок: моментов времени получения пакета подтверждения и отправки тестового пакета. Тестовые пакеты посылаются с узла `fem.gib`. Удаленные приемники для тестирования выбирались по следующим критериям:

- приемник должен быть достаточно удален, чтобы заметнее проявлялись случайные флуктуации трафика;
- каналы связи до приемника должны быть достаточно загружены, но не перегружены для соответствия процессов передачи информации характеру работы сети Интернет;



**Рис. 7.2. Коэффициенты корреляции числа отсчетов**

- маршрут соединения до приемника не должен изменяться в течение всего эксперимента;
- потери тестовых пакетов не должны быть большими, так как при большом проценте потерянных пакетов могут быть значительные искажения в наблюдаемой картине передачи информации.

Были назначены следующие адреса приемников, каждому из которых определены соответствующие объемы выборки:

`www.canada.com` (204.187.152.26),  $N = 10\,420$  отсчетов – в Канаде;

`www.usa.net` (204.68.24.106),  $N = 8550$  отсчетов – в США;

`www.bnf.fr` (193.50.133.220),  $N = 6980$  отсчетов – во Франции;

`www.mpx.com.au`(203.17.138.13),  $N = 6910$  отсчетов – в Австралии.

На рис. 7.3 представлена развернутая во времени картина изменений RTT-задержек для указанных маршрутов. По оси абсцисс отложены последовательно односекундные интервалы времени, в каждом из которых ордината в миллисекундах равна  $T$  – присутствующей в этом интервале величине задержки. Вид этих изменений указывает на случайный характер этих задержек. Выборочные дисперсии по каждому из маршрутов соответственно равны 0,107; 0,103; 0,035 и 0,160 с<sup>2</sup>.

Оценим фрактальные параметры рассматриваемых случайных процессов. Графики выборочных коэффициентов корреляции строились по выборочным значениям отсчетов RTT-задержки с помощью программы `corfun.c` по формуле

$$\tilde{r}(k) = \frac{N}{N-K} \frac{\sum_{j=1}^{N-k} [T_j - \tilde{M}\{T_j\}][T_{j+k} - \tilde{M}\{T_j\}]}{\sum_{j=1}^N [T_j - \tilde{M}\{T_j\}]^2},$$

где  $T_j$  – величина отсчета RTT-задержки;  $N$  – объем выборки по каждому из маршрутов;  $K = 0, 1, \dots$  – параметр смещения, крат-

ный числу интервалов длительностью 1 с;  $\tilde{M}\{T_j\} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N T_j$ ,  $\tilde{D}(T_j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [T_j - \tilde{M}\{T_j\}]^2$  – соответственно выборочное сред-

нее и дисперсия.

На рис. 7.4 – 7.7 приведены графические зависимости коэффициентов корреляции от параметра смещения. Там же приведены оценки значений фрактальных параметров  $\tilde{\alpha}$ , полученные в результате аппроксимации с помощью программы `alpha.c` этих зависимостей выражением (4.22).

Выборочная дисперсия агрегированного процесса приращений RTT-задержек, полученная дисперсионно-временным графическим методом, может служить еще одной статистикой второго порядка, подтверждающей фрактальный характер сетевого трафика.

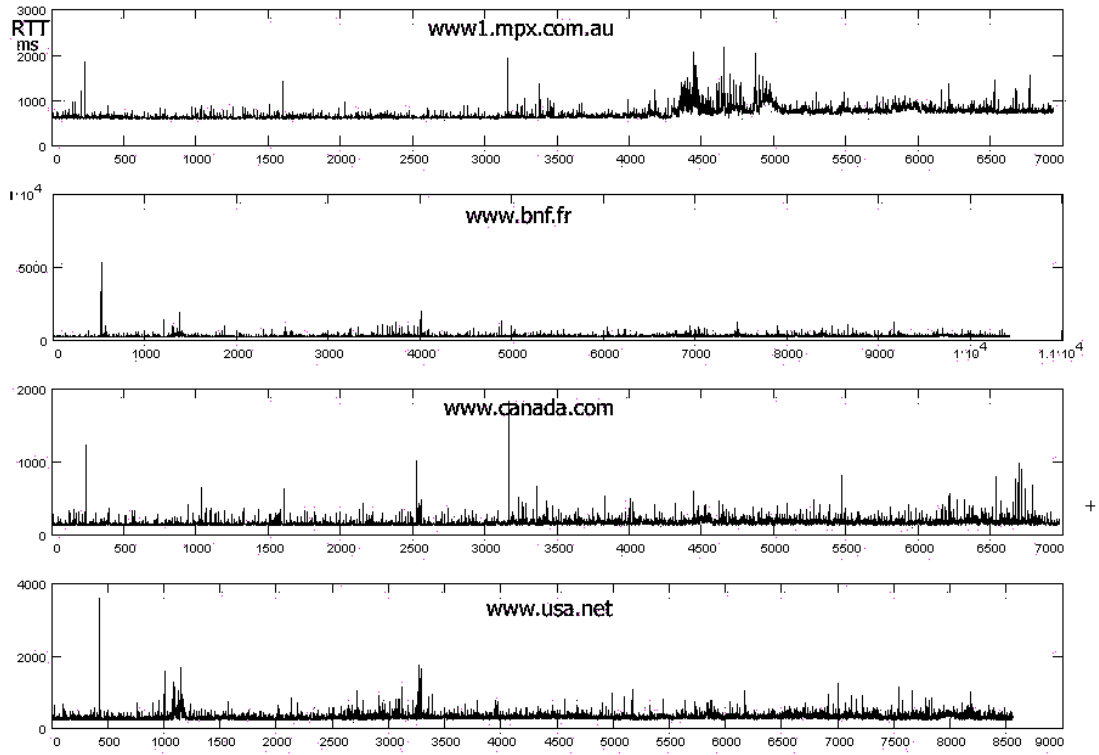


Рис. 7.3. Реализации RTT-задержек для разных маршрутов

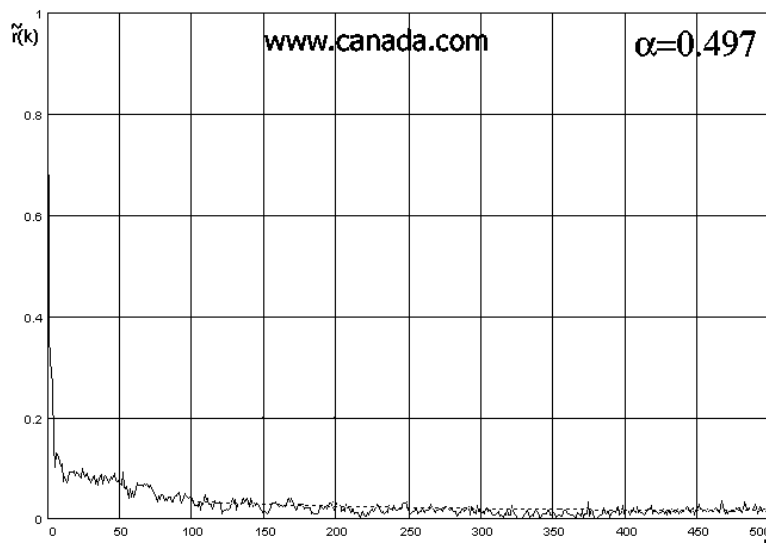


Рис. 7.4. Коэффициент корреляции для RTT-задержек для маршрута до Канады

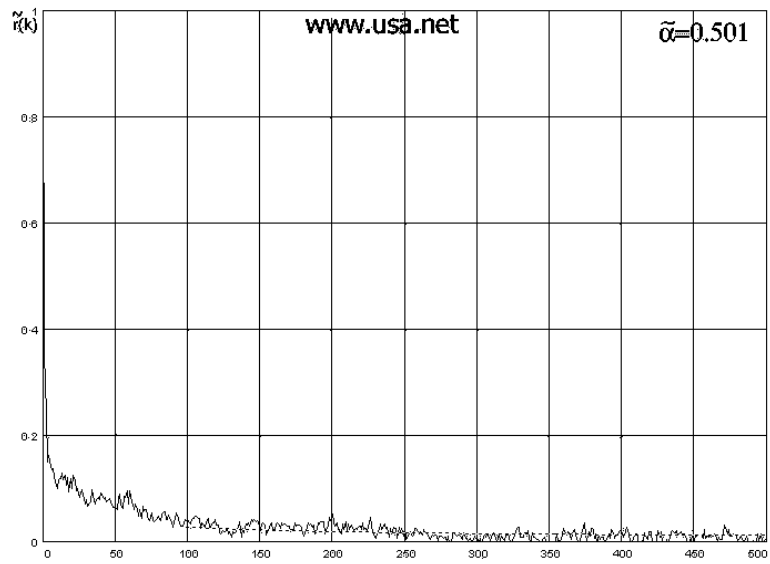


Рис. 7.5. Коэффициент корреляции для RTT-задержек для маршрута до США

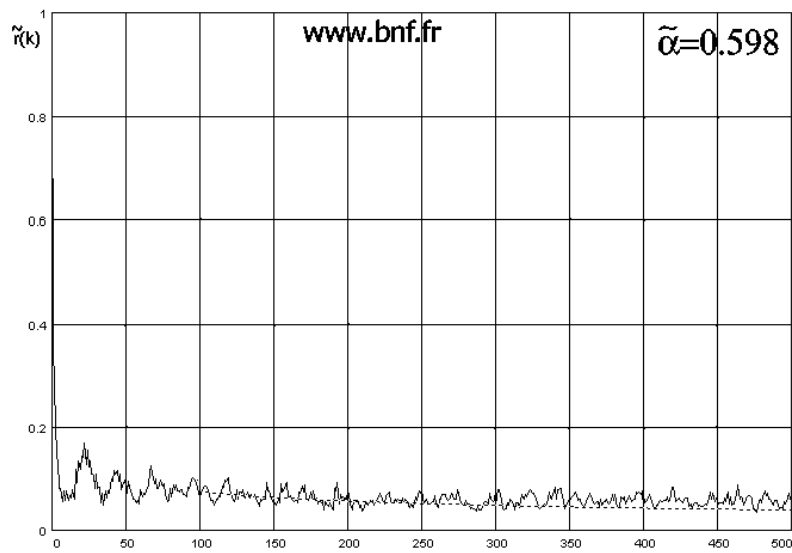


Рис. 7.6. Коэффициент корреляции для RTT-задержек для маршрута до Франции

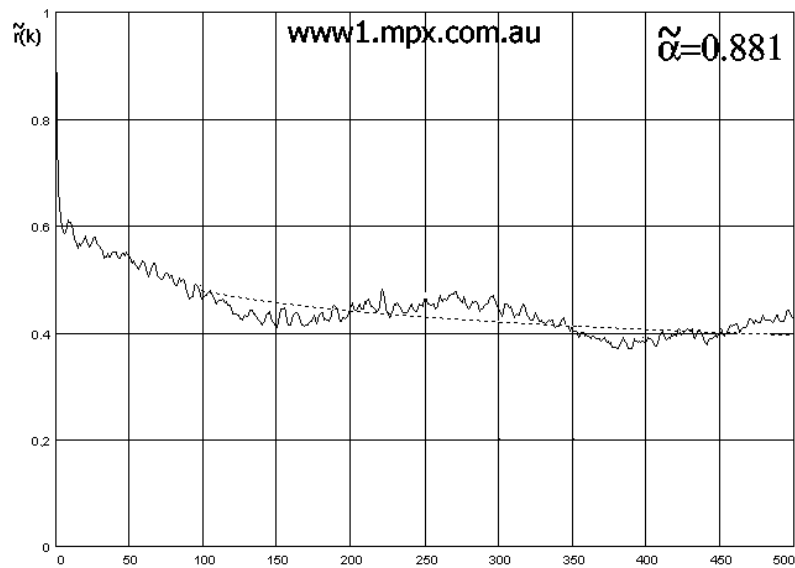


Рис. 7.7. Коэффициент корреляции для RTT-задержек для маршрута до Австралии

Обозначим через  $\{T_k^{(m)}\}$  последовательность средневзвешенных  $m$  значений (блоков размера  $m$ ) RTT-задержек, где  $T_k^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{j=km+1}^{(k+1)m} T_j$ ;  $\{T_j\}$  – последовательность RTT-задержек, полученных в предыдущих экспериментах;  $k = 0, 1, \dots$  – параметр смещения.

Выборочная дисперсия приращений в функции от параметра агрегирования  $m$  определялась с помощью программы `divg.c` по формуле

$$\tilde{D}^{(m)} = \frac{m}{N} \sum_{j=1}^{N/m} [T_{kj}^{(m)} - \tilde{M}\{T_k^{(m)}\}]^2,$$

где  $\tilde{M}\{T_k^{(m)}\} = \frac{m}{N} \sum_{j=1}^{N/m} T_{kj}^{(m)}$  – объемы выборок из предыдущих экспериментов.

На рис. 7.8 – 7.11 представлены в логарифмическом масштабе графические зависимости выборочной дисперсии от параметра агрегирования для каждого из ранее указанных маршрутов. Там же приведены оценки значений фрактальных параметров  $\tilde{\alpha}$ , полученные в результате аппроксимации с помощью программы `mk.c` этих зависимостей выражением (4.23). На рисунках также представлены графики, соответствующие короткопротяженным зависимостям с наклоном равным  $-1$ .

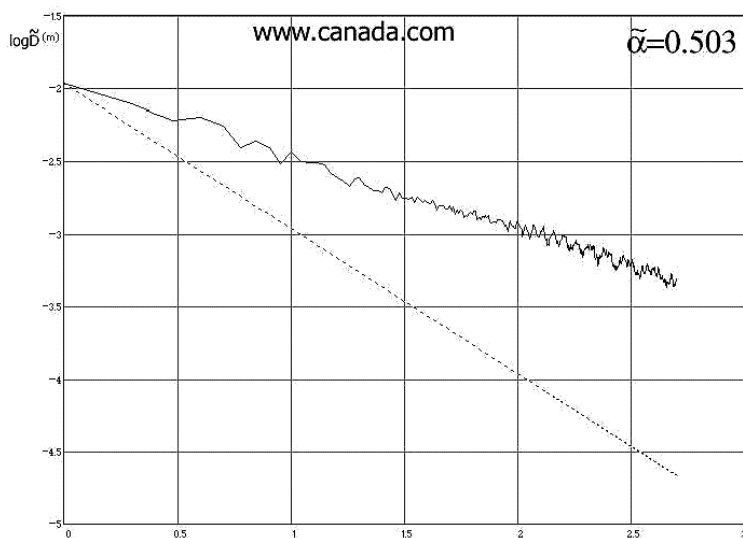


Рис. 7.8. Дисперсия агрегированного процесса RTT-задержки для маршрута до Канады

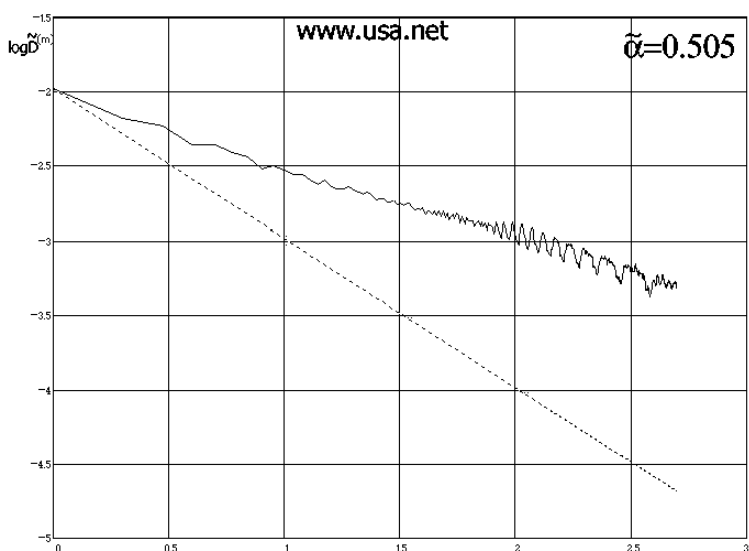


Рис. 7.9. Дисперсия агрегированного процесса RTT-задержки для маршрута до США

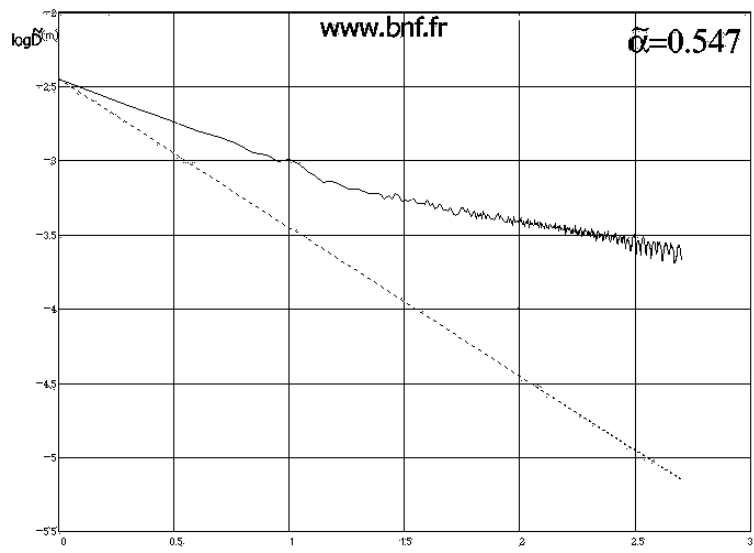


Рис. 7.10. Дисперсия агрегированного процесса RTT-задержки для маршрута до Франции

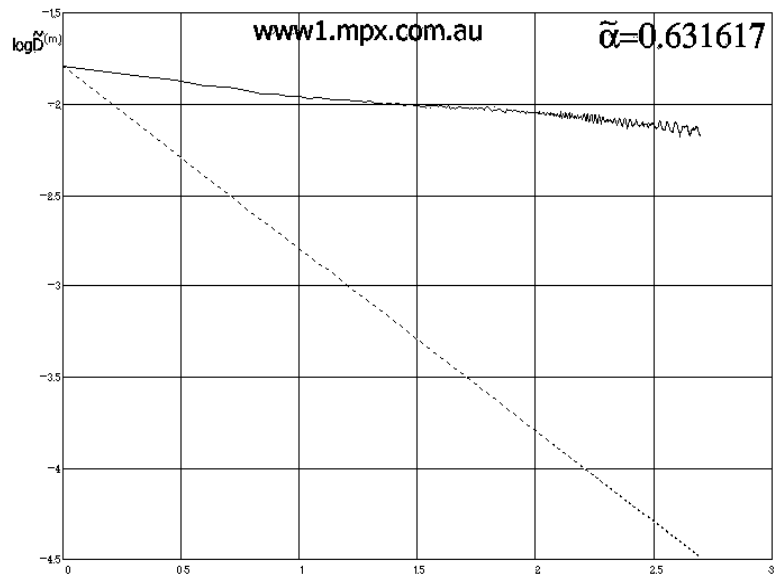


Рис. 7.11. Дисперсия агрегированного процесса RTT-задержки для маршрута до Австралии

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На современном этапе развития информационных технологий, который невозможен без эффективного использования компьютерных сетей, особое значение приобретают исследование и моделирование сетевого трафика.

Несмотря на то, что вопросам анализа сетей посвящено значительное количество исследований, основанных на использовании

теории очередей, трафик в компьютерных сетях имеет свои характерные особенности, затрудняющие построение его математического описания.

Интенсивное развитие фрактального анализа привело к созданию мощного инструмента, дающего возможность построить формальное описание сетевых процессов с целью повышения эффективности их функционирования.

Предлагаемое учебное пособие – это попытка, с одной стороны, познакомить студентов с основами фрактального анализа, а с другой, показать целесообразность его использования для разработки математического описания сетевых процессов, что в свою очередь позволяет ставить и решать задачи управления с целью повышения эффективности.

Авторы настоящего учебного пособия продолжают работу, связанную с разработкой и использованием математических моделей сетевых процессов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mandelbrot, B.B. *The fractal Geometry of Nature* / B.B. Mandelbrot. – New York, 1983.
2. Фракталы в физике / пер. с англ. под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти. – М. : Мир, 1988.
3. Федер, Энс. Фракталы : пер. с англ. / Энс Федер. – М. : Мир, 1991.
4. Peitgen, H.O. *The Beauty of Fractals*. Springer – Verlag / H.O. Peitgen, P.H. Richter. – Berlin, 1986.
5. Нигматуллин, Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация / Р.Р. Нигматуллин // Теоретическая и математическая физика. – 1992. – Т. 90, № 3. – С. 354 – 367.
6. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987.
7. Gefen, Y. Anomalous diffusion on percolating clusters / Y. Gefen, A. Ahrony, S. Alexander // *Phys. Rev. Lett.* – 1983.
8. Homsy, G.M. Viscous fingering in porous media / G.M. Homsy // *Ann. Rev. Fluid Mech.* – 1987.
9. Бибермак, Л.М. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы / Л.М. Бибермак, В.С. Воробьев, И.Т. Якубов. – М. : Наука, 1982.
10. Paxson, V. Wide Area traffic: The Failure of Poisson Modeling / V. Paxson, S. Floyd // *IEEE/ACM Transactions on Networking*. – 1995. – V. 3. – N 3.
11. Lucantoni, O.D. Methods for Performance Evaluation of VBR Video Traffic Models / O.D. Lucantoni, M.F. Neuts, A.R. Reibman // *IEEE/ACM Transactions on Networking*. – 1994. – V. 2. – N 2.
12. Norros, I. A storage model with self-similar input / I. Norros // *Queueing System*. – 1994. – V. 8.
13. On the self-similar nature of Internet traffic (Extended Version) / W.E. Leiland, M.S. Taqqu, W. Willinger, D.V. Wilson // *IEEE/ACM Transactions on Networking*. – 1994. – V. 2. – N 2.
14. Городецкий, А.Я. Статистический анализ и синтез фотонных систем / А.Я. Городецкий. – СПб. : Изд-во СПбГТУ, 1996. – 272 с.
15. Большаков, И.А. Прикладная теория случайных потоков / И.А. Большаков, В.С. Ракошиц. – М. : Сов. радио, 1978.
16. Большаков, И.А. Статистические проблемы выделения потока сигналов из шума / И.А. Большаков. – М. : Сов. радио, 1969.
17. Lowen, S.B. Fractal Renewal Processes Generate  $1/f$  Noise / S.B. Lowen, M.C. Teich // *Phys. Rev. E47*. – 1993.
18. Ryn, B. Point process models for self-similar Network Traffic, with applications / B. Ryn, S. Lowen // *Stochastic Models*. – 1998. – N 14.
19. Lowen, S.B. Ph.D. dissertation / S.B. Lowen. – Columbia University, 1992.
20. Mandelbrot, B.B. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications / B.B. Mandelbrot, J.W. Van Ness // *SIAM Review*. – 1968. – 10. – P. 422 – 437.
21. Self-similarity through High-Variability: Statistical Analysis of Ethernet Lan Traffic at the Source Level / W. Willinger, M.S. Taqqu, R. Sherman, D.V. Wilson // *IEEE/ACM Transactions on Networking*. – 1996. – V. 12.

22. Qiong, Li. On the long-range dependence of packet round-trip delays in Internet / Li Qiong, L. Mills David // Processings of IEEE ICC'98. – 1998. – V. 2.

23. Пятибратов, А.П. Вычислительные системы, сети и телекоммуникации / А.П. Пятибратов, Л.П. Гудыно, Н.А. Кириченко. – М. : Финансы и статистика, 1998.

24. Заборовский, В.С. Интеллектуальные системы управления информационными ресурсами в высокоскоростных телекоммуникационных сетях / В.С. Заборовский // Высокие интеллектуальные технологии образования и науки : тез. докл. конф. – СПб. : Изд-во СПбГТУ, 1996. – С. 19.

25. Заборовский, В.С. Удаленное управление техническими комплексами с использованием сетевых технологий / В.С. Заборовский, В.Б. Семеновский // Робототехника и техническая кибернетика : тр. СПбГТУ. – СПб. : Изд-во СПбГТУ, 1999.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ .....	6
1.1. Береговая линия Норвегии .....	6
1.2. Парадокс Шварца с площадью боковой поверхности цилиндра .....	9
1.3. Фрактальная размерность .....	11
1.4. Триадная кривая Коха .....	16
1.5. Подобие и скейлинг .....	18
1.6. Кривые Мандельброта – Гивена и Серпинского .....	23
1.7. Еще о скейлинге .....	26
1.8. Функция Вейерштрасса – Мандельброта .....	28
2. ФРАКТАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ .....	32
3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕВОГО ТРАФИКА СЛУЧАЙНЫМ ТОЧЕЧНЫМ ПРОЦЕССОМ .....	42
3.1. Методы формирования моделей .....	42
3.2. Случайные точечные процессы. Методы определения статистик .....	46
3.3. Статистики и фундаментальные параметры сетевого трафика .....	56
3.4. Параметризация сетевого трафика .....	63
4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕВОГО ТРАФИКА ФРАКТАЛЬНЫМ БРОУНОВСКИМ ДВИЖЕНИЕМ .....	71
4.1. Классическое броуновское движение .....	71
4.2. Моделирование сетевых процессов фрактальным броуновским движением .....	74
5. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТЬЮ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ .....	80
5.1. Прогнозирование пропускной способности в сетях .....	80
5.2. Управление информационными потоками .....	85
6. МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ СЕТЕВЫМИ РЕСУРСАМИ .....	90
7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЕТЕВЫХ ПРОЦЕССОВ .....	95
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	105
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	106