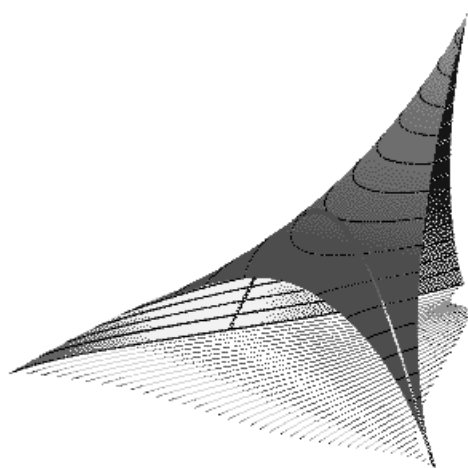


Ю.Ю. ГРОМОВ, Н.А. ЗЕМСКОЙ, А.В. ЛАГУТИН,  
О.Г. ИВАНОВА, В.М. ТЮТЮННИК

# СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ



◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ◆

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

Ю.Ю. ГРОМОВ, Н.А. ЗЕМСКОЙ, А.В. ЛАГУТИН,  
О.Г. ИВАНОВА, В.М. ТЮТЮННИК

# СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВ- ЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

*Допущено УМО вузов по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 230201 «Информационные системы и технологии»*



---

Тамбов  
Издательство ТГТУ  
2007

УДК 681.518(075)  
ББК ←965.01я73  
С409

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор  
*Б.С. Гришин*

Доктор физико-математических наук, профессор  
*В.Ф. Крапивин*

С409 Системы автоматического управления с запаздыванием : учеб.  
пособие / Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, А.В. Лагутин, О.Г. Иванова,  
В.М. Тютюнник. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. –  
76 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-0644-8.

Изложен аппарат исследования систем с запаздыванием и их проекти-  
рования. Рассмотрены примеры проектирования систем с запаздыванием.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся  
по специальности 230201 «Информационные системы и технологии».

УДК 681.518(075)

ББК ←965.01я73

**ISBN 978-5-8265-0644-8**

© ГОУ ВПО «Тамбовский государственный  
технический университет» (ТГТУ), 2007

Учебное издание

ГРОМОВ Юрий Юрьевич,  
ЗЕМСКОЙ Николай Александрович,  
ЛАГУТИН Андрей Владимирович,  
ИВАНОВА Ольга Геннадьевна,  
ТЮТЮННИК Вячеслав Михайлович

# СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Учебное пособие

Редактор О.М. Ярцева  
Инженер по компьютерному макетированию Т.Ю. Зотова

Подписано в печать 12.11.2007  
Формат 60 × 84 / 16. 4,42 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 726

Издательско-полиграфический центр ТГТУ  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое число объектов химической технологии, биологии, экономики, ряд областей науки и техники описываются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Такие уравнения характеризуют работу объектов, в которых один элемент или группа являются запаздывающими звеньями.

В общем случае время запаздывания может быть постоянной, переменной или случайной функцией. В настоящем пособии рассматриваются только те случаи, когда время запаздывания – детерминированная функция.

Вопросы разработки аналитических методов решения конкретных задач с запаздыванием долгое время не теряют актуальности и находятся в поле зрения ученых. Наиболее полно они отражены в обзорных работах Л.Е. Эльсгольца и В. Хана еще в начале 1920-х годов.

**Настоящим учебным пособием авторы делают попытку систематизировать методы анализа и синтеза различных по структуре динамических систем химической технологии, обладающих различной природой запаздывания. В последней главе приводятся примеры практического использования теоретических положений.**

Представляется, что пособие будет полезно для студентов всех форм обучения по специальности 230201, а также аспирантам, специализирующимся в области автоматического и автоматизированного управления.

### 1. Синтез оптимальных по быстродействию регуляторов для линейных объектов с запаздыванием

#### 1.1. Запаздывание в объектах управления и его влияние на динамику оптимальных по быстродействию систем

В технологических процессах часто встречается такой вид запаздывания, который называется транспортным. Такое запаздывание образуется, когда, например, вещество или энергия перемещаются с определенной скоростью из одной точки в другую без какого-либо изменения их свойств и характеристик.

Примером объекта с транспортным запаздыванием является стан холодной прокатки металла, где датчик толщины листа по конструктивным соображениям не может находиться непосредственно под валками, а только на некотором удалении от них. Вследствие этого выходная величина объекта – толщина листа – имеет транспортное или «чистое» запаздывание относительно регулирующего воздействия – степени обжима металла валками.

Другим примером объектов, содержащих транспортное запаздывание, могут служить производства стекла и бумаги. На многих этапах этих производств присутствуют запаздывания, их значения в несколько раз превышают постоянные времени объекта, что создает большие трудности при управлении процессами.

Большие транспортные запаздывания наблюдаются также при регулировании процессов горения, например, выходная величина, характеризующая процесс горения в топке мазутной печи, – содержание кислорода в дымовых газах – имеет транспортное запаздывание порядка минуты. При этом большая часть этого запаздывания сосредоточена в датчике и определяется временем прохождения газа через отборное устройство газоанализатора.

Транспортные запаздывания, которыми нельзя пренебречь, имеют место при регулировании уровня жидкости в баках, при управлении шаровыми мельницами и другими объектами с запаздываниями в трубопроводах и объемах.

Наличие транспортного или, как еще называют, «чистого» запаздывания в технологическом процессе приводит к тому, что сигнал на выходе объекта в течение некоторого времени после применения входного сигнала остается неизменным.

Однако помимо рассматриваемого в реальных объектах управления возможен и другой вид запаздывания. Так, если объект характеризуется несколькими близкими по значению источниками времени или является объектом с распределенными параметрами, математическая формализация представлена уравнением в частных производных, то в течение некоторого времени после подачи управляющего воздействия выходной сигнал также практически не изменяется. В данном случае говорят, что объект обладает емкостным или эффективным запаздыванием.

Явления запаздывания встречаются в объектах различной физической природы. Они наблюдаются не только в технике, но также в биологии, экономике и оказывают существенное влияние на устойчивость и качество процессов управления. Наиболее ярко эффект запаздывания сказывается на динамике оптимальных релейных систем, к которым в частности относятся оптимальные по быстродействию системы управления.

**Рассмотрим влияния запаздывания на качественные показатели работы оптимальной по быстродействию системы управления объектом второго порядка, формализуемой системой дифференциальных уравнений вида:**

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 + \frac{b}{T}u(t-\tau),\end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2$  – выходные координаты объекта и их производные, соответственно;  $T$  – постоянная времени;  $b$  – коэффициент передачи;  $u(t)$  – сигнал управления;  $\tau$  – постоянная запаздывания.

При этом считаем, что на управление наложено ограничение вида  $|u(t)| \leq 1$ . Оптимальный по быстродействию закон управления данным объектом при отсутствии запаздывания известен [1–3] и может быть представлен следующим выражением

$$u(t) = -\text{sign} \{ x_1 + T[x_2 - b \ln[1 + |x_2|/b]] \text{sign } x_2 \} .$$

Схема системы управления, реализующая данный закон управления, представлена на рис. 1.1, где через  $s$  обозначен дифференциатор. На рис. 1.2 изображена фазовая траектория движения системы при отработке полного рассогласования  $x_{10}$ . Как видно, из-за наличия запаздывания в объекте управления переключения в системе будут происходить спустя время  $\tau$  после пересечения изображающей точкой линии переключения.

Можно показать [1, 2], что в рассматриваемой системе, реализующей закон управления без учета запаздывания, по окончании переходного процесса устанавливаются незатухающие колебания – автоколебания, которым на фазовой плоскости соответствует предельный цикл, причем амплитуда возникающих в системе автоколебаний пропорциональна запаздыванию  $\tau$ .

Таким образом, наличие в объекте запаздывания существенным образом искажает характер протекания переходных процессов в оптимальных по быстродействию системах управления, поэтому во многих случаях данные системы оказываются непригодными для практического применения. Отсюда возникает задача компенсации запаздывания путем соответствующего выбора алгоритма управления.

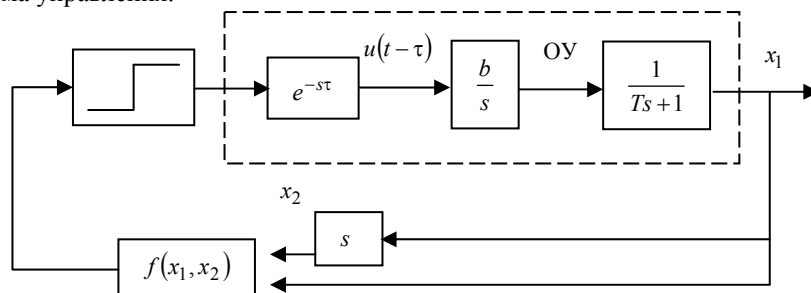


Рис. 1.1. Схема системы управления

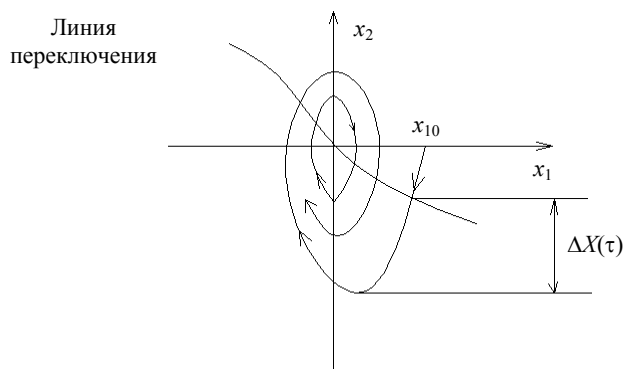


Рис. 1.2. Фазовый портрет

## 1.2. МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В последнее время известно несколько методов синтеза оптимальных по быстродействию систем управления объектами с запаздыванием. Наиболее широко применяют метод, основанный на компенсации временного запаздывания в оптимальных сигналах, используя подход, предложенный Р. Бэссом и подробно рассматриваемый в [3].

Сущность его состоит в том, что для компенсации запаздывания в оптимальных системах при построении функции аргумента управления вносится упреждение на  $\tau$  с тем, чтобы управляющее воздействие системы с запаздыванием и той же системы без запаздывания совпадали. В математической интерпретации это отражает то, что в фазовом пространстве поверхность управления, упреждающая по времени на  $\tau$  поверхность переключения, строится по заданной поверхности переключения той же системы без запаздывания.

В этой работе Р. Бэсс показал, что координаты состояния компенсированной системы  $\tilde{x}_i$  могут быть представлены в виде линейных комбинаций текущих координат  $x_i$ , весовые коэффициенты которых зависят от времени запаздывания. Отсюда следует, что нелинейное устройство, реализующее оптимальный алгоритм в системе с запаздыванием, может оставаться тем же, что и в системе без запаздывания, если на его входы вместо текущих координат  $x_i$  подавать их линейные комбинации.

Подобный подход при компенсации временного запаздывания в релейных оптимальных по быстродействию системах подробно рассмотрен в [4]. Здесь получены алгоритмы управления объектами 2-го и 3-го порядков с запаздыванием в управлении, обеспечивающие оптимальные переходные процессы в системе. Под оптимальным процессом при этом понимается установление в кратчайшее время автоколебаний с минимально возможной амплитудой.

Обоснование и распространение метода компенсации Бэсса на оптимальной по быстродействию системы  $n$ -го порядка с запаздыванием приведено в [5]. Используя эти работы, можно дать в общем виде следующую геометрическую интерпретацию метода Бэсса.

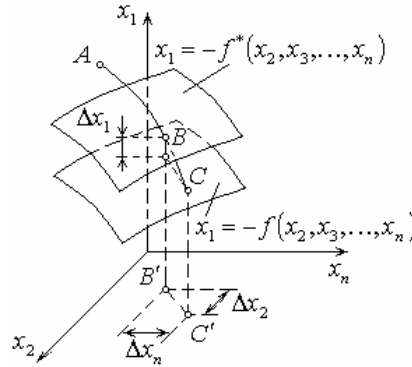
Пусть уравнение оптимальной поверхности переключения при отсутствии запаздывания в системе известно и имеет вид

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad x \in R^n. \quad (1.2.1)$$

Считая, что функция  $\Phi$  разрешена относительно одного из своих аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , например,  $x_1$  запишем в виде

$$x_1 + f(x_2, x_3, \dots, x_n) = 0; x \in R^n. \quad (1.2.2)$$

Поверхность переключения показана на рис. 1.3, где  $ABC$  – некоторая оптимальная траектория вынужденного движения системы.



**Рис. 1.3. Оптимальная траектория вынужденного движения системы**

Если же в системе имеется запаздывание  $\tau$ , то оптимальная поверхность в этом случае представляет собой геометрическое число точек, из которых через время  $\tau$  при вынужденном движении системы изображающая точка переходит на поверхность. При этом траектория  $ABC$  остается такой же, как и в системе запаздывания. Уравнение оптимальной поверхности переключения компенсированной системы в этом случае имеет вид

$$\Phi^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; x \in R^n$$

или

$$x_1 + f^*(x_2, x_3, \dots, x_n) = 0; x \in R^n.$$

Если обозначить расстояние между траекторией точек  $B$  и  $C$  на осях  $x_1, x_2, \dots, x_n$  через  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ , соответственно, то нетрудно заметить, что  $\Delta x_i, i = \overline{1, n}$  являются функциями времени запаздывания  $\tau$ , а величина  $\tilde{x}_i = x_i + \Delta x_i, i = \overline{1, n}$  – значениями координат, характеризующими состояние системы через время  $\tau$ .

Из геометрических соображений имеем

$$x_1 - f^*(x_2, x_3, \dots, x_\tau) = \Delta x_1 - f^*(x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \dots, x_n + \Delta x_n)$$

или

$$\Phi^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n). \quad (1.2.3)$$

Уравнение (1.2.3) является общим для определения  $\Phi^*$  по заданной функции  $\Phi$ . Для этого достаточно определить величины  $\Delta x_i(\tau), i = \overline{1, n}$ , а затем подставить будущие значения координат системы  $x_i + \Delta x_i$  в уравнение поверхности переключения системы без запаздывания.

Синтез по методу Р. Бэсса оптимальных по быстродействию систем управления линейными объектами с запаздыванием в координатах изложен в [6].

К основному недостатку метода компенсации запаздывания следует отнести то, что получаемая оптимальная поверхность переключения в компенсированных системах вблизи начала координат фазового пространства оказывается неоднозначной. При определенных начальных условиях движение в системе становится неоптимальным, увеличивается число интервалов переключения, возрастает время переходного процесса. При этом отклонения фазовой траектории от оптимальной могут быть существенны и различны, но оценить его заранее сложно. Избавиться от этого недостатка можно лишь путем использования при синтезе оптимальных систем специальных подходов.

Компенсация запаздывания по методу Бэсса без нарушения фазовой траектории возможна только в том случае, когда область, в которой система теряет признак оптимальной, равна нулю для каждого интервала управления. Это требование равнозначно условию

$$t_j \geq \tau; j = \overline{1, n}, \quad (1.2.4)$$

где  $t_j$  – длительность  $j$ -ого интервала управления.

Таким образом, при компенсации запаздывания в оптимальных системах, по Бэссу, к области ограничения по фазовым координатам управляющему воздействию необходимо еще добавить ограничения вида (1.2.4). Это обстоятельство приводит к введению в оптимальный регулятор дополнительных логических блоков и устройств, что значительно усложняет техническую реализацию схемы. Поэтому на практике ограничиваются применением приближенных (квазиоптимальных) алгоритмов управления, в основу которых положена линейная аппроксимация поверхности переключения вблизи начала координат фазового пространства.

При этом не удастся полностью скомпенсировать влияние запаздывания на динамику системы, хотя амплитуда возникающих автоколебаний значительно уменьшается по сравнению с некомпенсированной системой.

### 1.3. КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ПРОМЕЖУТОЧНЫХ КООРДИНАТАХ

В практике управления технологическими процессами, особенно в химической, нефтехимической и биотехнической промышленности, часто встречаются объекты, у которых запаздывающими являются как управляющая, так и промежуточная координаты. Типичным примером этих объектов является цепочка последовательно работающих химических реакторов, где запаздывание определяется как временем движения по трубопроводам исходного сырья, так и временем перемещения промежуточных продуктов. Аналогичный характер имеет запаздывание и для объекта, представляемого в виде последовательного соединения однотипных технологических агрегатов, связанных между собой транспортером.

Поведение таких объектов в общем виде может быть описано следующей системой дифференциальных уравнений, представленной в векторно-матричной форме,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_1 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t - \tau_0); \\ \dot{\mathbf{X}}_2 &= \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{X}_1(t - \tau_1); \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{X}}_n &= \mathbf{A}_n \mathbf{X}_n + \mathbf{B}_n \mathbf{X}_{n-1}(t - \tau_{n-1}); \\ \mathbf{u}(t) &= \Phi_0(t), \quad 0 \leq t < \tau_0; \\ \mathbf{X}_1(t) &= \Phi_1(t), \quad 0 \leq t < \tau_1, \quad \mathbf{X}_1(0) = \mathbf{X}_{10}; \\ \mathbf{X}_2(t) &= \Phi_2(t), \quad 0 \leq t < \tau_2, \quad \mathbf{X}_2(0) = \mathbf{X}_{20}; \\ &\vdots \\ \mathbf{X}_{n-1}(t) &= \Phi_{n-1}(t), \quad 0 \leq t < \tau_{n-1}, \quad \mathbf{X}_n(0) = \mathbf{X}_{n0}, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

где  $\mathbf{X}_i, i = \overline{1, n}$  – мерные векторы состояния;  $\tau_j, j = \overline{0, n-1}$  – постоянные величины запаздываний;  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n; \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n$  – постоянные матрицы размерности;  $n_1 \times n_1, n_2 \times n_2, \dots, n_n \times n_n$  и  $n_1 \times 1; n_2 \times m, \dots, n_n \times m$ , соответственно;  $\Phi_0(t) - m \times 1, \Phi_1(t) - n_1 \times 1, \dots, \Phi_{n-1}(t) - n_{n-1} \times 1$  – векторы начальных функций координат состояния и управления;  $\mathbf{u}(t)$  – скалярное управление, ограниченное условием  $|\mathbf{u}(t)| \leq 1$ .

Характерной особенностью рассматриваемого типа объектов является наличие не одной, а нескольких начальных функций звена запаздывания  $\Phi_i(t), i = \overline{0, n-1}$ . Это обстоятельство создает значительные трудности для синтеза оптимального закона управления. Широко известный подход к расчету оптимальных по быстродействию систем управления [2], основанный на замене нескольких звеньев запаздывания одним звеном, в данном случае не приемлем. При таком подходе теряется начальная функция  $\mathbf{u}$ , как следствие этого имеют место низкие динамические показатели работы оптимального регулятора.

Рассмотрим метод синтеза квазиоптимальных по быстродействию регуляторов для объектов с несколькими запаздываниями, позволяющий избежать указанного недостатка. В дальнейшем для решения поставленной задачи оптимизации системы уравнений представим в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_1 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{v}_0(t); \\ \dot{\mathbf{X}}_2 &= \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{v}_1(t); \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{X}}_n &= \mathbf{A}_n \mathbf{X}_n + \mathbf{B}_n \mathbf{v}_{n-1}(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0(t) &= \begin{cases} \Phi_0(t - \tau_0), & 0 \leq t < \tau_0; \\ \mathbf{u}(t - \tau_0), & \tau_0 \leq t < \infty; \end{cases} \\ \mathbf{v}_1(t) &= \begin{cases} \Phi_1(t - \tau_1), & 0 \leq t < \tau_1; \\ \mathbf{X}_1(t - \tau_1), & \tau_1 \leq t < \infty; \end{cases} \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_{n-1}(t) &= \begin{cases} \Phi_{n-1}(t - \tau_{n-1}), & 0 \leq t < \tau_{n-1}; \\ \mathbf{X}_{n-1}(t - \tau_{n-1}), & \tau_{n-1} \leq t < \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

В свою очередь система (1.3.2) может быть приведена к эквивалентной системе, свободной от звеньев чистого запаздывания. После интегрирования система (1.3.2) принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(t) &= \mathbf{X}_1(0) + \mathbf{A}_1 \int_0^{\tau_0} \mathbf{X}_1(\tau) d\tau + \mathbf{B}_1 \int_0^{\tau_0} \Phi_0(\tau - \tau_0) d\tau + \mathbf{A}_1 \int_{\tau_0}^t \mathbf{X}_1(\tau) d\tau + \\ &+ \mathbf{B}_1 \int_{\tau_0}^t \mathbf{u}(\tau - \tau_0) d\tau; \\ \mathbf{X}_2(t) &= \mathbf{X}_2(0) + \mathbf{A}_2 \int_0^{\tau_1} \mathbf{X}_2(\tau) d\tau + \mathbf{B}_2 \int_0^{\tau_1} \Phi_1(\tau - \tau_1) d\tau + \mathbf{A}_2 \int_{\tau_1}^t \mathbf{X}_2(\tau) d\tau + \\ &+ \mathbf{B}_2 \int_{\tau_1}^t \mathbf{X}_1(\tau - \tau_1) d\tau; \end{aligned}$$



⋮

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n(t) = & \mathbf{X}_n(0) + \mathbf{A}_n \int_0^{\tau_{n-1}} \mathbf{X}_2(\tau) d\tau + \mathbf{B}_n \int_0^{\tau_{n-1}} \Phi_{n-1}(\tau - \tau_{n-1}) d\tau + \mathbf{A}_n \int_{\tau_{n-1}}^t \mathbf{X}_n(\tau) d\tau + \\ & + \mathbf{B}_n \int_{\tau_{n-1}}^t \mathbf{X}_{n-1}(\tau - \tau_{n-1}) d\tau; \end{aligned}$$

Сделаем замену переменной  $t = t' + \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j$ ;  $0 \leq t' < \infty$ , введем в рассмотрение новый вектор состояния

$$\mathbf{h}_j(t') = \mathbf{X}_j \left( t + \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j \right) \text{ и заменим переменную интегрирования } \tau = \tau' + \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j, \text{ получим следующую систему уравнений:}$$

$$\mathbf{h}_1(t') = \mathbf{X}_1(0) + \mathbf{A}_1 \int_0^{\tau_0} \mathbf{X}_1(\tau) d\tau + \mathbf{B}_1 \int_0^{\tau_0} \Phi_0(\tau - \tau_0) d\tau + \mathbf{A}_1 \int_0^{t_1} \mathbf{h}_1(\tau') d\tau' + \mathbf{B}_1 \int_0^{t_1} \mathbf{u}(\tau') d\tau';$$

$$\mathbf{h}_2(t') = \mathbf{X}_2(0) + \mathbf{A}_2 \int_0^{\tau_1} \mathbf{X}_2(\tau) d\tau + \mathbf{B}_2 \int_0^{\tau_1} \Phi_1(\tau - \tau_1) d\tau + \mathbf{A}_2 \int_0^{t_1} \mathbf{h}_2(\tau') d\tau' + \mathbf{B}_2 \int_0^{t_1} \mathbf{h}_1(\tau') d\tau'; \dots$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_n(t') = & \mathbf{X}_n(0) + \mathbf{A}_n \int_0^{\tau_{n-1}} \mathbf{X}_n(\tau) d\tau + \mathbf{B}_n \int_0^{\tau_{n-1}} \Phi_{n-1}(\tau - \tau_{n-1}) d\tau + \mathbf{A}_n \int_0^{t_1} \mathbf{h}_n(\tau') d\tau' + \\ & + \mathbf{B}_n \int_0^{t_1} \mathbf{h}_{n-1}(\tau') d\tau'. \end{aligned}$$

Дифференцируя уравнение по времени, находим:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{h}}_1(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{h}_1(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t); \\ \dot{\mathbf{h}}_2(t) &= \mathbf{A}_2 \mathbf{h}_1(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{h}_1(t); \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{h}}_n(t) &= \mathbf{A}_n \mathbf{h}_{n-1}(t) + \dots \quad (1.3.3); \end{aligned}$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1(0) &= \mathbf{X}_1(0) + \mathbf{A}_1 \int_0^{\tau_0} \mathbf{X}_1(\tau) d\tau + \mathbf{B}_1 \int_0^{\tau_0} \Phi_0(\tau - \tau_0) d\tau; \\ &\vdots \\ \mathbf{h}_n(0) &= \mathbf{X}_n(0) + \mathbf{A}_n \int_0^{\tau_{n-1}} \mathbf{X}_n(\tau) d\tau + \mathbf{B}_n \int_0^{\tau_{n-1}} \Phi_{n-1}(\tau - \tau_{n-1}) d\tau, \end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1(t) &= \mathbf{X}_1(t + \tau_0); \\ \mathbf{h}_2(t) &= \mathbf{X}_2(t + \tau_0 + \tau_1); \\ &\vdots \\ \mathbf{h}_n(t) &= \mathbf{X}_n \left( t + \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j \right). \end{aligned}$$

Оптимизируем систему (1.3.3) при следующих условиях:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= 0; \quad T_y - \tau_0 \leq t < T_y; \\ \mathbf{h}_1(t) &= 0; \quad T_y - \tau_0 - \tau_1 \leq t < T_y - \tau_0; \\ \mathbf{h}_2(t) &= 0; \quad T_y - \tau_0 - \tau_1 - \tau_2 \leq t < T_y - \tau_0 - \tau_1; \\ &\vdots \\ \mathbf{h}_n(t) &= 0; \quad t = T_y - \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j. \end{aligned}$$

Система (1.3.3), записанная в векторно-матричной форме, имеет вид:

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{h}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (1.3.4)$$

Оптимальное управление системой (1.3.4) может быть найдено известным методом и представлено в общем случае в виде:

$$u(t) = -\text{sign } f\{\mathbf{h}(t)\}.$$

Для определения оптимального управления исходной системой необходимо выразить упрежденные координаты состояния через текущие координаты объекта. Для этого можно воспользоваться выражениями, приведенными в (1.3.3). Однако их применение не позволяет в этом случае использовать при реализации оптимального закона линейную аппроксимацию функций, описывающих динамическое состояние звеньев запаздывания. Это вызвано тем, что для определения упрежденной величины  $j$ -й координаты, согласно (1.3.3), необходимо знание упрежденных значений всех предыдущих координат.

Рассмотрим другой подход, сущность которого состоит в том, что упрежденные координаты находим путем последовательного применения некоторого интегрального преобразования. В соответствии с таким подходом в начале упреждают последнюю координату объекта на величину  $\tau_{n-1}$ , согласно выражению:

$$\mathbf{X}_n(t + \tau_{n-1}) = e^{\mathbf{A}_n \tau_{n-1}} \mathbf{X}_n(t) + \int_0^{\tau_{n-1}} e^{\mathbf{A}_n(\tau_{n-1} - S_{n-1})} \mathbf{W}_{n-1}(t - \tau_{n-1} + S_{n-1}) dS_{n-1}. \quad (1.3.5)$$

Затем упреждают координаты состояния  $\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_{n-1}$  на время  $\tau_{n-2}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1}(t + \tau_{n-2}) \\ \mathbf{X}_n(t + \tau_{n-1} + \tau_{n-2}) \end{bmatrix} &= e^{\hat{\mathbf{A}}_1 \tau_{n-2}} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1}(t) \\ \mathbf{X}_n(t + \tau_{n-1}) \end{bmatrix} + \\ &+ \int_0^{\tau_{n-2}} e^{\hat{\mathbf{A}}_1(\tau_{n-2} - S_{n-2})} \hat{\mathbf{B}}_1 \mathbf{W}_{n-2}(t - \tau_{n-2} + S_{n-2}) dS_{n-2}, \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

где матрицы  $\hat{\mathbf{A}}_1$  и  $\hat{\mathbf{B}}_1$  могут быть составлены из двух последних уравнений системы (1.3.2) путем замены числа  $\mathbf{v}_{n-1}(t)$  на  $\mathbf{X}_{n-1}(t)$  и предположения, что две последние подсистемы – единый каскад. Подставив в (1.3.6) значения  $\mathbf{X}_n(t + \tau_{n-1})$ , получим:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1}(t + \tau_{n-2}) \\ \mathbf{X}_n(t + \tau_{n-1} + \tau_{n-2}) \end{bmatrix} &= \\ &= e^{\hat{\mathbf{A}}_1 \tau_{n-2}} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1}(t + \tau_{n-2}) \\ e^{\mathbf{A}_n \tau_{n-1}} \mathbf{X}(t) + \int_0^{\tau_{n-1}} e^{\mathbf{A}_n(\tau_{n-1} + S_{n-1})} dS_{n-1} \mathbf{B}_n \mathbf{W}_{n-1}(t - \tau_{n-1} + S_{n-1}) dS_{n-1} \end{bmatrix} + \\ &+ \int_0^{\tau_{n-2}} e^{\hat{\mathbf{A}}_1(\tau_{n-2} - S_{n-2})} \hat{\mathbf{B}}_1 \mathbf{W}_{n-2}(t - \tau_{n-2} + S_{n-2}) dS_{n-2}. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Далее упреждают координаты  $\mathbf{X}_{n-2}, \mathbf{X}_{n-1}, \mathbf{X}_n$  на время  $\tau_{n-3}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-2}(t + \tau_{n-3}) \\ \mathbf{X}_{n-1}(t + \tau_{n-2} + \tau_{n-3}) \\ \mathbf{X}_n(t + \tau_{n-1} + \tau_{n-2} + \tau_{n-3}) \end{bmatrix} &= e^{\hat{\mathbf{A}}_2 \tau_{n-3}} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-2}(t) \\ \mathbf{X}_{n-1}(t + \tau_{n-2}) \\ \mathbf{X}_n(t + \tau_{n-1} + \tau_{n-2}) \end{bmatrix} + \\ &+ \int_0^{\tau_{n-3}} e^{\hat{\mathbf{A}}_2(\tau_{n-3} - S_{n-3})} \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{W}_{n-3}(t - \tau_{n-3} + S_{n-3}) dS_{n-3}, \end{aligned}$$

где матрицы  $\hat{\mathbf{A}}_2, \hat{\mathbf{B}}_2$  составлены из трех последних уравнений системы (1.3.2) путем замены членов  $\mathbf{v}_{n-1}(t), \mathbf{v}_{n-2}(t)$  на  $\mathbf{X}_{n-1}(t)$  и  $\mathbf{X}_{n-2}(t)$  при рассмотрении трех последних каскадов в виде единого каскада. Значения координат  $\mathbf{X}_{n-1}(t + \tau_{n-2})$  и  $\mathbf{X}_n(t + \tau_{n-1} + \tau_{n-2})$  находят из (1.3.7).

Процесс упреждения продолжают до тех пор, пока  $j$ -я координата состояния объекта не будет упреждена на время, равное  $\sum_{j=0}^{n-1} \tau_j$ . Упрежденные координаты могут быть в общем случае представлены в виде линейной комбинации текущих координат состояния объекта и функционалов от состояний запаздываний.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1(t + \tau_0) &= C_{11}X_1 + \int_0^{\tau_0} l_{11}W_0(t - \tau_0 + S_0) dS_0; \\
\mathbf{X}_2(t + \tau_0 + \tau_1) &= C_{21}X_1 + C_{22}X_2 \int_0^{\tau_0} l_{21}W_0(t - \tau_0 + S_0) dS_0 + \\
&+ \int_0^{\tau_1} l_{22}W_1(t - \tau_1 + S_1) dS_1; \\
&\vdots \\
\mathbf{X}_n\left(t + \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j\right) &= C_{n1}X_1 + \dots + C_{nn}X_n + \int_0^{\tau_0} l_{n1}W_0(t - \tau_0 + S_0) dS_0 + \\
&\dots + \int_0^{\tau_{n-1}} l_{nn}W_{n-1}(t - \tau_{n-1} + S_{n-1}) dS_{n-1}, \quad (1.3.8)
\end{aligned}$$

где  $C_{ij}$ ,  $l_{ij}$  – постоянные коэффициенты, определяемые видом матриц  $\mathbf{A}_j$ ,  $\mathbf{B}_j$ .

В соответствии с (1.3.8) оптимальное управление может быть представлено в виде:

$$u(t) = -\text{sign } f \left\{ \begin{aligned} &C_{11}X_1 + \int_0^{\tau_0} l_{11}W_0(t - \tau_0 + S_0) dS_0; \\ &C_{21}X_1 + C_{22}X_2 + \int_0^{\tau_0} l_{21}W_0(t - \tau_0 + S_0) dS_0 + \\ &\quad + \int_0^{\tau_1} l_{22}W_1(t - \tau_1 + S_1) dS_1; \\ &\quad \vdots \\ &C_{n1}X_1 + \dots + C_{nn}X_n + \int_0^{\tau_0} l_{n1}W_0(t - \tau_0 + S_0) dS_0 + \\ &\quad + \dots + \int_0^{\tau_{n-1}} l_{nn}W_{n-1}(t - \tau_{n-1} + S_{n-1}) dS_{n-1}. \end{aligned} \right. \quad (1.3.9)$$

Рассмотрим пример.

Пусть объект имеет математическую формализацию вида:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{1}{T}x_1 + \frac{K_1}{T}v_0(t); \\
\dot{x}_2 &= K_2v_1(t); x_1(0) = x_{10}; x_2(0) = x_{20},
\end{aligned}$$

где

$$v_0(t) = \begin{cases} \Phi_0(t - \tau_0); & 0 \leq t < \tau_0, \\ u(t - \tau_0); & \tau_0 \leq t < \infty, \end{cases}$$

$$v_1(t) = \begin{cases} \Phi_1(t - \tau_1); & 0 \leq t < \tau_1, \\ u_1(t - \tau_1); & \tau_1 \leq t < \infty. \end{cases}$$

В рассматриваемом случае  $\tau_0$  – запаздывание в канале управления, а  $\tau_1$  – запаздывание в промежуточной координате  $x_1$ .

После перехода к переменным  $h_1$ ,  $h_2$  получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{h}_1 &= -\frac{1}{T}h_1 + \frac{K_1}{T}u(t); \\
\dot{h}_2 &= K_2h_1(t),
\end{aligned}$$

с начальными условиями:

$$h_1(0) = x_1(0) + b \int_0^{\tau_0} \Phi_0(t - \tau_0) dt,$$

$$h_2(0) = x_2(0) + \int_0^{\tau_0} \Phi_1(t - \tau_1) dt,$$

где

$$\begin{aligned} h_1(t) &= x_1(t + \tau_0); \\ h_2(t) &= x_2(t + \tau_0 + \tau_1); \quad b = K_1 K_2, \end{aligned}$$

тогда на основе вышеизложенного справедливо следующее выражение:

$$x_2(t + \tau_1) = e^{A_2 T_1} x_2 + \int_0^{\tau_1} e^{A_2(\tau_1 - S_1)} \mathbf{B}_2 W(t - \tau_1 + S_1) dS_1 = x_2 + K_2 \int_0^{\tau_1} W_1(t - \tau_1 + S_1) dS_1;$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t + \tau_0) \\ x_2(t + \tau_0 + \tau_1) \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} \frac{1}{T} & \frac{K_1}{T} \\ \frac{1}{K_2} & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t + \tau_1) \end{bmatrix} + \int_0^{\tau_0} e^{\begin{bmatrix} \frac{1}{T} & \frac{K_1}{T} \\ \frac{1}{K_2} & 0 \end{bmatrix} (\tau_0 - S_0)} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{K_1}{T} \\ 0 \end{bmatrix} W(t - \tau_0 + S_0) dS_0,$$

откуда:

$$h_1(t) = e^{\frac{\tau_0}{T}} x_1(t) + b \int_0^{\tau_0} e^{\frac{-(\tau_0 - S_0)}{T}} W(t - \tau_0 + S_0) dS_0;$$

$$\begin{aligned} h_2(t) &= x_2 + T \left[ 1 - e^{-\frac{\tau_0}{T}} \right] x_1 + K_2 \int_0^{\tau_1} W(t - \tau_1 + S_1) dS_1 + \\ &+ b \int_0^{\tau_0} \left[ 1 - e^{-\frac{-(\tau_0 - S_0)}{T}} \right] W(t - \tau_0 + S_0) dS_0. \end{aligned}$$

Выражения для упреждающих координат, наиболее часто встречающихся на практике объектов 2-го порядка с запаздыванием в управлении и промежуточных координатах рис. 1.3.1, представлены в табл. 1.3.1.

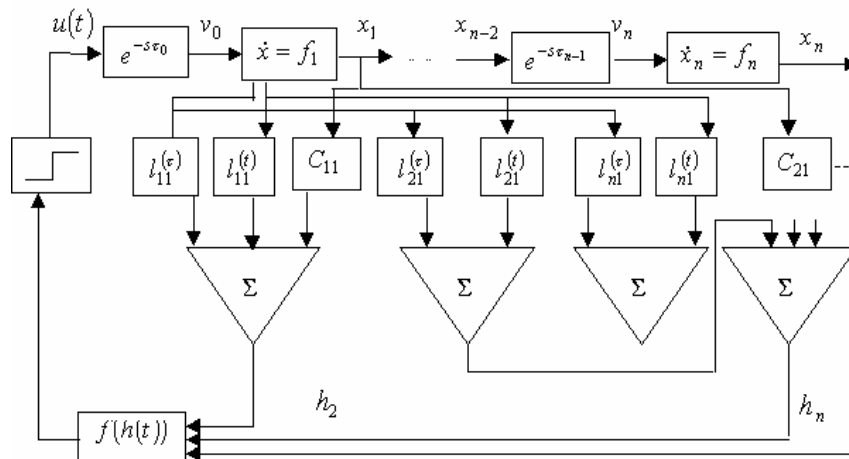


Рис. 1.3.1. Схема квазиоптимального регулятора для объекта с запаздыванием в промежуточных координатах

Таблица 1.3.1

Уравнение движения в исходной и преобразованной системах. Начальные условия в исходной и преобразованной системах	Выражения для упреждающих координат
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------

a)	$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= K_1 u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= v_1(t); \\ \dot{h}_1(t) &= K_1 u(t); \\ \dot{h}_2(t) &= \dot{h}_1(t); \\ x_1(0) &= x_{10}; \\ x_2(0) &= x_{20}; \\ h(0) &= x_1(0); \\ h(0) &= x_2(0) + K_2 \int_0^{\tau_0} \Phi_1(t - \tau_1) dt \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_1(t) &= x_1(t); \\ h_2(t) &= x_2(t + \tau_1) = x_2(t) + \\ &+ K_2 \int_0^{\tau_0} W_1(t - \tau_1 + S_1) dS_1 \end{aligned}$
б)	$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= K_1 u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{K_2}{T} v_1(t) - \frac{1}{T} x_2(t) \end{aligned}$	
в)	$\begin{aligned} \dot{h}_1(t) &= K_1 u(t); \\ \dot{h}_2(t) &= \frac{K_2}{T} h_1(t) - \frac{1}{T} h_2(t); \\ x_1(0) &= x_{10}; \\ x_2(0) &= x_{20}; \\ h_1(0) &= x_1(0); \\ h_2(0) &= x_2(0) - \frac{1}{T} \int_0^{\tau_1} x_2(t) dt + \frac{K_2}{T} \times \\ &\times \int_0^{\tau_1} \Phi_1(t - T_1) dt \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_1(t) &= x_1(t); \\ h_2(t) &= x_2(t + \tau_1) = e^{-\frac{\tau_1}{T}} x_2(t) + \frac{K_2}{T} \times \\ &\times \int_0^{\tau_1} e^{\frac{(S_1 - \tau_1)}{T}} W_1(t - \tau_1 + S_1) dS_1 \end{aligned}$
г)	$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= K_1 v_0(t); \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{K_2}{T} v_1(t) - \frac{1}{T} x_2(t); \\ \dot{h}_1(t) &= K_1 u(t); \\ \dot{h}_2(t) &= \frac{K_2}{T} h_1(t) - \frac{1}{T} h_2(t); \\ x_1(0) &= x_{10}; \\ x_2(0) &= x_{20}; \\ h_1(0) &= x_1(0) + K_1 \int_0^{\tau_0} \Phi_0(t - \tau_0) dt; \\ h_2(0) &= x_2(0) - \frac{1}{T} \int_0^{\tau_0} x_2(t) dt + \\ &+ \frac{K_2}{T} \int_0^{\tau_1} \Phi_1(t - \tau_1) dt \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_1(t) &= x_1(t + \tau_0) = x_1(t) + \\ &+ K_1 \int_0^{\tau_0} W_0(t - \tau_0 + S_0) dS_0; \\ h_2(t) &= K_2 \left[ 1 - e^{-\frac{\tau_0}{T}} \right] x_1(t) + \\ &+ e^{-\frac{(\tau_0 + \tau_1)}{T}} x_2(t) + \\ &+ K_1 K_2 \int_0^{\tau_0} \left[ 1 - e^{-\frac{S_0 - \tau_0}{T}} \right] \times \\ &\times W_0(t - \tau_0 + S_0) dS_0 + \frac{K_2}{T} \times \\ &\times \int_0^{\tau_1} e^{-\frac{(S_1 - \tau_1 - \tau_0)}{T}} W_1(t - \tau_1 + S_1) dS_1 \end{aligned}$

<p>д)</p>	$\dot{x}_1(t) = \frac{K_1}{T_1} u(t) - \frac{1}{T_1} x_1(t);$ $\dot{x}_2(t) = \frac{K_2}{T_2} v_1(t) - \frac{1}{T_2} x_2(t);$ $\dot{h}_1(t) = \frac{K_1}{T_1} u(t) - \frac{1}{T_1} h_1(t);$ $\dot{h}_2(t) = \frac{K_2}{T_2} h_1(t) - \frac{1}{T} h_2(t)$	$x_1(0) = x_{10};$ $x_2(0) = x_{20};$ $h_1(0) = x_1(t);$ $h_2(0) = x_2(0) - \frac{1}{T_2} \int_0^{\tau_0} x_2(t) dt +$ $+ \frac{K_2}{T_2} \int_0^{\tau_1} \Phi_1(t - \tau_1) dt;$ $h_1(t) = x_1(t);$ $h_2(t) = x_2(t - \tau_1) = e^{-\frac{\tau_1}{T_2}} x_2(t) +$ $+ \frac{K_2}{T_2} \int_0^{\tau_1} e^{-\frac{S_1 - \tau_1}{T}} \times$ $\times W_1(t - \tau_1 - S_1) dS_1$
<p>е)</p>	$\dot{x}_1(t) = \frac{K_1}{T_1} v_0(t) - \frac{1}{T_1} x_1(t);$ $\dot{x}_2(t) = \frac{K_2}{T_2} v_1(t) - \frac{1}{T_2} x_2(t);$ $\dot{h}_1(t) = \frac{K_1}{T_1} u(t) - \frac{1}{T_1} h_1(t);$ $\dot{h}_2(t) = \frac{K_2}{T_2} h_1(t) - \frac{1}{T_2} h_2(t)$ $x_1(0) = x_{10};$ $x_2(0) = x_{20};$	$h_1(t) = x_1(t + \tau_0) = e^{-\frac{\tau_0}{T}} x_1(t) +$ $+ \frac{K_1}{T_0} \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{(S_0 - \tau_0)}{T_1}} W_0(t - \tau_0 + S_0) dS_0;$ $h_2(t) = x_2(t + \tau_0 + \tau_1) =$ $= K_2 T_1 \left[ \frac{1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{\tau_0}{T_1}} + \frac{1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{\tau_0}{T_2}} \right] \times$ $\times x_1(t) + e^{-\frac{(\tau_0 - \tau_1)}{T_2}} x_2(t) + \int_0^{\tau_1} e^{-\frac{(S_1 - \tau_1 - \tau_0)}{T_2}} \times$
<p>е)</p>	$h_1(0) = x_1(0) - \frac{1}{T_1} \int_0^{\tau_0} x_1(t) dt +$ $+ \frac{K_1}{T_1} \int_0^{\tau_0} \Phi_0(t - \tau_0) dt;$ $h_2(0) = x_2(0) - \frac{1}{T_2} \int_0^{\tau_1} x_2(t) dt +$ $+ \frac{K_2}{T_2} \int_0^{\tau_1} \Phi_1(t - \tau_0) dt;$	$\times W_1(t - \tau_1 + S_1) dS_1 +$ $+ \int_0^{\tau_0} \left[ \frac{k_0 k_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{(S_0 - \tau_0)}{T_1}} +$ $+ \frac{1}{(T_2 - T_1)(T_1 - T_2)} e^{-\left(\frac{S_0}{T_1} - \frac{\tau_0}{T_2}\right)} +$ $+ \frac{K_1 K_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{(S_0 - \tau_0)}{T_2}} \right] W_0(t - \tau_0 + S_0) dS_0$

Представленный выражением (1.3.9) закон оптимального управления может быть реализован путем линейной аппроксимации функции  $W_j(t - \tau_j + S_j)$  согласно выражениям вида:

при 0-м порядке

$$W_j(t - \tau + S) \approx W(t - \tau), \quad 0 \leq S < \tau;$$

при 1-м порядке

$$W(t - \tau + S) \approx W(t - \tau) [W(t) - W(t - \tau)] \frac{S}{\tau}, \quad 0 \leq S < \tau;$$

при 2-м порядке

$$W(t - \tau + S) \approx W(t - \tau) + [W(t - \tau/2) - W(t - \tau)] \frac{S}{\tau/2}, \quad 0 \leq S < \frac{\tau}{2};$$

$$W(t - \tau + S) \approx W(t - \tau/2) + [W(t) - W(t - \tau/2)] \frac{(S - \tau/2)}{\tau/2}, \quad \frac{\tau}{2} \leq S < \tau;$$

при 3-м порядке

$$\begin{aligned}
 W(t - \tau + S) &\approx W(t - \tau) + \frac{W(t - 2\tau/3) - W(t - \tau) S}{\tau/3}, \quad 0 \leq S < \frac{\tau}{3}, \\
 W(t - \tau + S) &\approx W(t - 2\tau/3) + \frac{W(t - \tau/3) - W(t - 2\tau/3)}{\tau/3} (S - \tau/3), \quad \tau/3 \leq S < 2\tau/3; \\
 W(t - \tau + S) S &\approx W(t - \tau/3) + \frac{W(t) - W(t - \tau/3)}{\tau/3} (S - 2\tau/3), \quad 2\tau/3 \leq S < \tau.
 \end{aligned}$$

Практически это означает замену в (1.3.9) составляющих вида:

$$J^{(ij)} = \int_0^{\tau_{j-1}} l_{ij} W_i(t - \tau_j + S_j) dS_j.$$

В простейшем случае (при аппроксимации 0-го порядка) линейными суммами

$$J_n^{(ij)} = l_n^{(t)} W_j(t) + l_n^{(\tau)} W_j(t - \tau_i) + \sum l_{ij}^{(\mu)} W_j(t - \mu \tau_i / n).$$

Тогда вместо (1.3.9) имеем квазиоптимальный закон управления вида:

$$\left. \begin{aligned}
 & C_{11} X_1 + l_{11}^{(t)} W_0(t) + l_{11}^{(\tau)} W_0(t - \tau_0) + \sum_{\mu=1}^{n-1} l_{11}^{(\mu)} W_0\left(t - \frac{\mu}{n} \tau_0\right); \\
 & C_{21} X_1 + C_{22} X_2 + l_{21}^{(t)} W_0(t) + l_{21}^{(\tau)} W_0(t - \tau_0) + \\
 & \quad + \sum_{\mu=1}^{n-1} l_{21}^{(\mu)} W_0\left(t - \frac{\mu}{n} \tau_0\right) + \\
 & \quad + l_{22}^{(t)} W_1(t) + l_{22}^{(\tau)} W_1(t - \tau_1) + \sum_{\mu=1}^{n-1} l_{22}^{(\mu)} W_1\left(t - \frac{\mu}{n} \tau_1\right); \\
 & \quad \vdots \\
 & C_{n1} X_1 + \dots + C_{n1} X_n + l_{n1}^{(t)} W_0(t) + l_{n1}^{(\tau)} W(t - \tau_0) + \\
 & \quad + \sum_{\mu=1}^{n-1} l_{n1}^{(\mu)} W_0\left(t - \frac{\mu}{n} \tau_0\right) + \\
 & \quad + l_{nn}^{(t)} W_{n-1}(t) + l_{nn}^{(\tau)} W_{n-1}(t - \tau_{n-1}) + \sum_{\mu=1}^{n-1} l_{nn}^{(\mu)} W_{n-1}\left(t - \frac{\mu}{n} \tau_{n-1}\right).
 \end{aligned} \right\} u(t) = -\operatorname{sign} f$$

Таким образом, синтез квазиоптимального по быстродействию алгоритма управления объектом с несколькими запаздываниями при использовании полученных выражений для определения упреждающих координат выполняется по аналогии со случаем квазиоптимального закона управления для объекта с одним запаздыванием. Схема квазиоптимального алгоритма управления представлена на рис. 1.3.2. Наличие в системе нескольких запаздываний приводит к тому, что упрежденные координаты состояния объекта формируются путем использования запаздывающих сигналов с предыдущих звеньев запаздывания. При этом схема квазиоптимального алгоритма получается более сложной, чем при запаздывании только в управлении, однако и в этом случае ее реализация также принципиально возможна.

**Синтез квазиоптимальных регуляторов для типовых объектов второго порядка с запаздыванием. Рассмотрим класс объектов с запаздыванием следующего вида:**

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x &= b u(t - \tau_0); \\
 \ddot{x} + a_1 \dot{x} &= b u(t - \tau_0); \quad (*) \\
 \ddot{x} &= b u(t - \tau_0),
 \end{aligned}$$

где  $a_0, a_1, b$  – параметры объекта, будем считать, что корни характеристического уравнения (\*) – действительные числа.

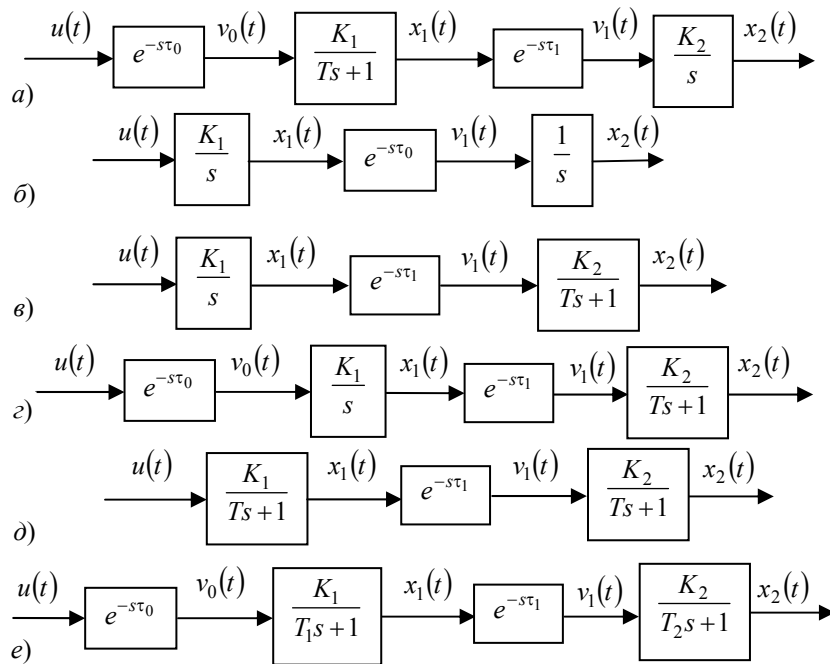


Рис. 1.3.2. Структуры типовых объектов 2-го порядка с запаздыванием в управлении

Каждому из рассматриваемых объектов соответствует передаточная функция:

$$W(s) = \frac{K_0 e^{-s\tau_0}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (1.3.10)$$

$$W(s) = \frac{K_0 e^{-s\tau_0}}{(T_1 s + 1)s}; \quad (1.3.11)$$

$$W(s) = \frac{K_0 e^{-s\tau_0}}{s^2}; \quad (1.3.12)$$

$$a_1 = \frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2}; \quad a_0 = \frac{1}{T_1 T_2}; \quad b = \frac{K_0}{T_1 T_2}.$$

На основе рассмотренного ранее подхода закон квазиоптимального управления объектами (1.3.10) – (1.3.12) имеет вид:

$$u(t) = \text{sign} \left[ K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 W_0(t) + K_4 W_0\left(t - \frac{\tau_0}{\tau}\right) + K_5 W_0(t - \tau_0) + K_6 x_1 + K_7 x_2 + K_8 W_0(t) + K_9 W_0\left(t - \frac{\tau_0}{\tau}\right) + K_{10} W_0(t - \tau_0) + K_6 x_1 + K_7 x_2 + K_8 W_0(t) + K_9 W_0\left(t - \frac{\tau_0}{\tau}\right) + K_{10} W_0(t - \tau_0) \right],$$

где неизвестные коэффициенты имеют следующий вид:

для (1.1.10)

$$K_1 = \beta_1;$$

$$K_2 = \beta_2 T_1 T_2;$$

$$K_3 = C_1 \left[ \frac{T_1 - T_2}{2} \frac{T_1^2 - T_2^2}{2\tau_0} + \rho_2 - \rho_3 \right];$$

$$K_4 = K_1 \left[ T_1 - T_2 + \frac{T_1^2}{2\tau_0} - \frac{T_2^2}{2\tau_0} + \rho_4 - \rho_5 \right];$$

$$K_5 = C_1 \left[ \sigma_1 e^{-\frac{\tau_0}{T_1}} - \sigma_2 e^{-\frac{\tau_0}{T_2}} \right];$$

$$K_6 = \sigma_1;$$

$$K_7 = \sigma_2;$$

$$K_8 = \frac{C_1 C_3}{3T_1 T_2} \left[ \left( \frac{T_1}{2} - \frac{T_1^2}{2\tau_0} + \rho_2 \right) - \left( \frac{T_2}{2} - \frac{T_2^2}{2\tau_0} + \rho_3 \right) \right];$$



$$K_9 = \frac{C_1}{3T_1T_2} \left[ C_3 \left( T_1 - \frac{T_1^2}{2\tau_0} + \rho_3 \right) - C_4 \left( T_2 - \frac{T_2^2}{2\tau_0} + \rho_5 \right) \right];$$

$$K_{10} = \frac{C_1}{3T_1T_2} C_3 \sigma_1 e^{-\frac{\tau_0}{\tau}};$$

$$K_y = \frac{T_2}{(2K_0T_1)},$$

для (1.3.11)

$$\begin{aligned} K_1 &= 1; \quad K_2 = T_1 \left( 1 - e^{-\frac{\tau_0}{T_1}} \right); \quad K_3 = \frac{K_0}{2} \left[ \tau_0 - T_1 + \frac{T_1^2}{\tau_0} - \rho_1 \right]; \\ K_4 &= K_0 \left[ \frac{\tau_0}{2} - T_1 + \frac{T_1^2}{2\tau_0} - \rho_4 \right]; \quad K_5 = K_0 \left[ \frac{\tau_0}{2} - T_1 + \frac{T_1^2}{2\tau_0} - \rho_4 \right]; \\ K_6 &= \frac{2}{T_1}; \quad K_7 = 2 + e^{-\frac{\tau_0}{T_1}}; \quad K_8 = \frac{K_0}{2T_1} \left[ \tau_0 + T_1 - \frac{T_1^2}{\tau_0} + \rho_1 \right]; \\ K_9 &= \frac{K_0}{T_1} \left[ \tau_0 + T_1 + \frac{T_1^2}{2\tau_0} + \rho_4 \right]; \quad K_{10} = \frac{K_0}{T_1} \left[ \frac{\tau_0}{2} + \delta_1 \right] e^{-\frac{\tau_0}{T_1}}; \quad K_y = \frac{1}{(18K_0)}, \end{aligned}$$

для (1.3.12)

$$\begin{aligned} K_1 &= 1; \quad K_2 = \tau_0; \quad K_3 = \frac{K_0\tau_0^2}{6}; \quad K_4 = \frac{3K_0\tau_0^2}{8}; \\ K_5 &= \frac{5K_0\tau_0^2}{24}; \quad K_6 = 0; \quad K_7 = 1; \quad K_8 = \frac{K_0\tau_0}{4}; \\ K_9 &= \frac{K_0\tau_0}{2}; \quad K_{10} = \frac{K_0\tau_0}{2}; \quad K_y = \frac{1}{(2K_0)}. \end{aligned}$$

Общие параметры имеют следующий вид:

$$\beta_1 = \frac{1}{T_1 - T_2} \left[ T_1 e^{-\frac{\tau_0}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{\tau_0}{T_2}} \right]; \quad \beta_2 = \frac{1}{T_1 - T_2} \left[ e^{-\frac{\tau_0}{T_1}} - e^{-\frac{\tau_0}{T_2}} \right];$$

$$C_1 = \frac{k_0}{T_1 - T_2}; \quad \delta_1 = \frac{2T_1^2}{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0}{T_1}} - \frac{2T_1^2}{\tau_0} - T_1;$$

$$\sigma_1 = \frac{C_3}{3T_2(T_1 - T_2)} e^{-\frac{\tau_0}{T_1}} - \frac{C_4}{3T_1(T_1 - T_2)} e^{-\frac{\tau_0}{T_2}};$$

$$\sigma_2 = \frac{C_3}{3 \cdot (T_1 - T_2)} e^{-\frac{\tau_0}{T_1}} - \frac{C_4}{3 \cdot (T_1 - T_2)} e^{-\frac{\tau_0}{T_2}};$$

$$C_3 = 2T_1 - T_2;$$

$$C_4 = 2T_2 - T_1;$$

$$\delta_2 = \frac{2T_2^2}{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0}{2T_2}} - \frac{2T_2^2}{\tau_0} - T_2;$$

$$\rho_1 = \left[ \frac{T_1}{2} + \frac{T_1^2}{\tau_0} \right] e^{-\frac{\tau_0}{2T_1}}; \quad \rho_2 = \left[ \frac{T_1}{4} + \frac{T_1^2}{2\tau_0} \right] e^{-\frac{\tau_0}{(2T_1)}};$$

$$\rho_3 = \left[ \frac{T_2}{4} - \frac{T_2^2}{2\tau_0} \right] e^{-\frac{\tau_0}{2T_2}}; \quad \rho_4 = \left[ \frac{T_1}{4} - \frac{5T_1^2}{2\tau_0} \right] e^{-\frac{\tau_0}{2T_1}};$$

$$\rho_5 = \left[ \frac{T_2}{4} - \frac{5T_2^2}{2\tau_0} \right] e^{-\frac{\tau_0}{2T_2}}.$$

Схема регулятора, реализующая квазиоптимальный закон управления рассматриваемым объектом, представлена на рис. 1.3.1.

## Вопросы для самопроверки

1. Дайте характеристику влиянию запаздывания на динамику систем управления.
2. Объясните причину возникновения запаздывания в системах управления.
3. Какие типы запаздываний характерны для систем управления?
4. Какие существуют методы управления объектами с запаздыванием, оптимальными по быстродействию?
5. Объясните, что является причиной возникновения запаздывания в прямоугольных координатах.
6. Расскажите о методах нахождения квазиоптимальных управлений.

## 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

### 2.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Многочисленные объекты химической технологии характеризуются тем, что поведение в будущем зависит от предыстории протекания строго на определенном промежутке времени.

Исследование процессов и явлений неразрывно связано с построением математических моделей, описывающих процессы и явления на языке математики. Каждая математическая модель характеризуется рядом параметров: входные переменные называются иначе управляющими воздействиями или управлениями, выходные переменные (входные координаты объекта), промежуточные переменные (переменные состояния).

Как правило, рассмотрение процесса ведется не обособленно, а в непосредственной связи с другими процессами или явлениями, что приводит к необходимости учитывать влияние последних на исследуемый процесс. Влияние внешних условий характеризуется возмущающими воздействиями (возмущениями).

Будем обозначать входные координаты объекта вектором  $y(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$ , управляющие воздействия – вектором  $u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\}$ , возмущающие воздействия – вектором  $f(t) = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$ , а промежуточные переменные –  $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}$ .

Существенной особенностью объектов с запаздыванием является наличие каналов задержки сигналов, характеризующихся временем запаздывания  $\tilde{\tau}_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n, \theta_0 < \theta_1, \dots < \theta_n$  соответственно для переменных  $x(t)$  и  $u(t)$ .

Математическая модель объектов с запаздыванием (математическое выражение взаимосвязи между указанными переменными) в общем виде можно записать следующим образом:

$$F_0(y(t), x(t), u(t), f(t), \tau_1, \theta_1, \dots, \tau_l, \theta_n) = 0. \quad (2.1.1)$$

Предметом дальнейшего рассмотрения являются динамические объекты, т.е. процессы и явления, изменяющиеся во времени. Поэтому выражение (2.1.1) может рассматриваться как дифференциальные, интегральные или дифференциально-интегральные уравнения объекта. Их формализация в виде (2.1.1) называется непрерывным объектом с запаздыванием. Объекты, параметры которых являются детерминированными величинами, называются детерминированными. При этом состояния будем трактовать как некоторую минимальную информацию о предыстории поведения объекта, необходимую для суждения о его поведении в будущем. Определим свойства, которыми должна обладать модель объекта с запаздыванием с введенным понятием состояния.

Конкретизируем вид операторного уравнения (2.1.1), пояснив предварительно смысл введения промежуточных переменных  $x(t)$ , называемых переменными состояния.

1. Выходной сигнал в данный момент времени однозначно определяется входным сигналом и состоянием в данный момент времени.

2. Состояние в последующий момент времени  $t$  однозначно определяется входным сигналом  $u(t_0, t)$  на интервале времени  $[t_0, t)$  и состоянием  $u(t_0, t_0 - \theta_r)$  на интервале  $[t_0 - \theta_r, t)$  и состоянием  $x(t_0, t_0 - \tau_l)$  на интервале  $[t_0 - \tau_l, t)$ .

Приведенные два условия могут быть формализованы в виде двух уравнений, называемых уравнениями состояния:

$$\begin{aligned} y(t) &= g_1(x(t), u(t)); \\ x(t) &= g_2(x(t_0, t_0 - \tau_l) \text{ и } (t, t_0 - \theta_r)), \end{aligned}$$

где  $g_1$  и  $g_2$  – однозначные функции.

Состояние непрерывного объекта с запаздыванием в произвольный момент времени характеризуется не только некоторым конечным числом параметров (как в случае объектов без запаздывания), но и некоторыми функциями, определенными соответственно на интервале  $[t_0 - \tau_e, t_0]$ ,  $[t_0 - \theta_r, t_0]$ . Это значительно усложняет решение задач управления такими объектами.

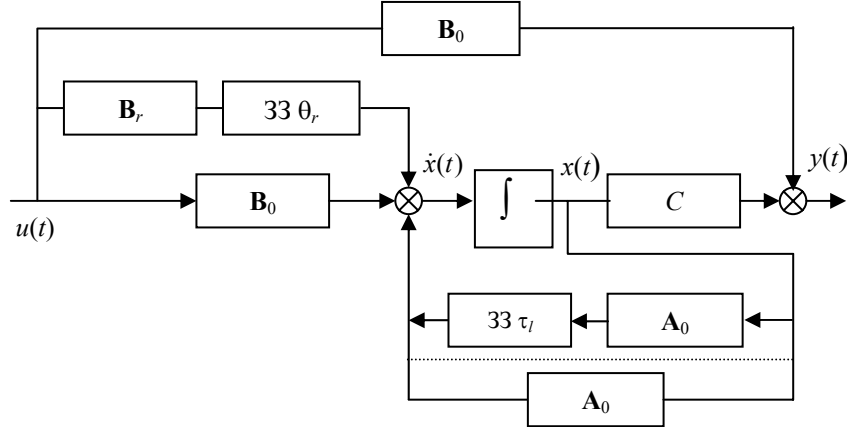
Для рассматриваемых в дальнейшем объектов уравнения состояния имеют вид:

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + Du(t); \\ \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^l A_i x(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^r B_i u(t - \theta_i); \\ x(t) &= \varphi_x(t), \quad t_0 - \tau_l \leq t \leq t_0; \\ u(t) &= \varphi_u(t), \quad t_0 - \theta_r \leq t \leq t_0. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

где  $\varphi_x(t)$ ,  $\varphi_u(t)$  – начальные функции.

Положим, что размерности векторов выходных координат  $y(t)$  и управляющих воздействий  $u(t)$  являются одинаковыми и равными  $n$ , т.е. рассматриваются объекты с  $n$ -входами и  $n$ -выходами. Размерность вектора состояния равна  $m \geq n$ ,  $A_j, B_i, C, D$  – постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Блок-схема, соответствующая уравнению (2.1.2), имеет следующий вид:



где  $33$  – звенья запаздывания на время  $\theta_r, \tau_l$ .

Уравнения состояния (2.1.2) соответствуют изолированному объекту, так как не учитывалось влияние внешней среды.

Важный класс объектов с запаздыванием образуют объекты, у которых запаздывание содержится лишь в управляющих сигналах (2.1.2) ( $A_i = 0; i = 0$ ). К данному классу принадлежит широко распространенный подкласс объектов с чистым запаздыванием в уравнении (2.1.2)  $A_i = 0; i \neq 0; B_0 = 0$ . Примерами объектов этого класса служат модели производственных систем, в частности, поточного производства, модели задач управления запасами, модели человеческого поведения и ряда объектов химической технологии.

Следующий класс образуют объекты, содержащие запаздывание лишь в координатах (в уравнениях (2.1.2)  $B_i = 0; i = 0$ ). Данный класс характеризуют, например, процессы с рециклом, к которым относятся процессы в измельчительных агрегатах, химических реакторах и т.д.

Примером объекта с запаздыванием общего вида может служить абсорбционная колонна.

## 2.2. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Математическая модель линейного непрерывного многосвязанного объекта с запаздыванием, называемая уравнением «вход–выход», может быть представлена в виде:

$$\sum_{i=0}^l L^i(p)y(t - \tau_i) = \sum_{i=0}^r G^i(p)u(t - \theta_i) + R(p)f(t), \quad (2.2.1)$$

где  $p = \frac{d}{dt}$  и начальные условия задаются функциями:

$$\begin{aligned} y(t) &= \varphi_y(t), & t_0 - \tau_l \leq t \leq t_0, \\ u(t) &= \varphi_u(t), & t_0 - \theta_r \leq t \leq t_0, \end{aligned}$$

примем  $\varphi_y(t), u(t), \varphi_u(t)$  и  $f(t)$  таковы, что существует непрерывное решение уравнения (2.2.1) [1,2].

$$L^i(p) = L_0^i p^q + \dots + L_q^i;$$

$$G^i(p) = G_0^i p^q + \dots + G_q^i;$$

$$R(p) = R_0 p^q + \dots + R_q;$$

$$q = \max_i m_i,$$

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l, \quad 0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_r.$$

Элементы матрицы  $L^i(p) = \|L_{jk}^i(p)\|$ ;  $G^i(p) = \|G_{jk}^i(p)\|$ ;  $R(p) = \|R_{jk}(p)\|$  являются многочленами с постоянными коэффициентами относительно оператора дифференцирования,  $m_i$  – порядок системы (2.2.1) относительно  $y_i$ ;  $L_j^i, G_j^i, R_j$  – постоянные матрицы, формируемые из коэффициентов многочленов исходных матриц  $L^i(p), G^i(p), R(p)$ . Введем в рассмотрение квазиполиномиальные матрицы  $L(p), G(p)$  следующего вида:

$$L(p) = \sum_{i=0}^l L^i(p) e^{-\tau_i p}; \quad G(p) = \sum_{i=0}^r G^i(p) e^{-\theta_i p}.$$

Рассматривая преобразования Лапласа уравнения (2.2.1), получим ( $s$ -символ преобразования Лапласа в момент времени  $t_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^l L^i(s) e^{-\tau_i s} Y(s) &= \sum_{i=0}^r G^i(s) e^{-\theta_i s} U(s) + R(s) F(s) - \\
&- \sum_{i=0}^l L^i(s) \int_0^{\tau_i} \phi_y(t - \tau_i) e^{-st} dt + \sum_{i=0}^r G^i(s) \int_0^{\theta_i} \phi_u(t - \theta_i) e^{-st} dt + \\
&+ \left[ \sum_{i=0}^l L_0^i y(-\tau_i) - \sum_{i=0}^r G_0^i u(-\theta_i) \right] s^{q-1} + \\
&+ \left[ \sum_{i=0}^l L_0^i \dot{y}(-\tau_i) - \sum_{i=0}^r G_0^i \dot{u}(-\theta_i) + \sum_{i=0}^l L_1^i y(-\tau_i) - \sum_{i=0}^r G_1^i u(-\theta_i) - R_1 f(0) \right] s^{q-2} + \dots \\
&\dots + \sum_{i=0}^l L_{q-1}^i y(-\tau_i) - \sum_{i=0}^r G_{q-1}^i u(-\theta_i) - R_{q-1} f(0). \tag{2.2.2}
\end{aligned}$$

Для нахождения искомого решения следует умножить обе части полученного выражения на  $L^{-1}(s)$  и применить формулу обратного преобразования Лапласа. Обоснование строгого использования преобразования Лапласа дано в [3]. При выводе уравнения (2.2.2) использован следующий факт:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \dot{y}(t - \tau_i) e^{-st} dt &= e^{-\tau_i s} \left( \int_0^{\infty} \dot{y}(t) e^{-st} dt + \int_{-\tau_i}^0 \dot{y}(t) e^{-st} dt \right) = \\ &= e^{-\tau_i s} \left[ sY(s) - y(0) + s \int_{-\tau_i}^0 y(t) e^{-st} dt + y(0) - y(-\tau_i) e^{\tau_i s} \right] = \\ &= sY(s) e^{-\tau_i s} - y(-\tau_i) + s e^{-\tau_i s} \int_{-\tau_i}^0 y(t) e^{-st} dt = \\ &= s e^{-\tau_i s} Y(s) + s \int_0^{\tau_i} y(t_i - \tau) e^{-st} dt - y(-\tau_i), \dots \\ \int_0^{\infty} y^{(k)}(t - \tau_i) e^{-st} dt &= s^k e^{-\tau_i s} Y(s) + s^k \int_0^{\tau_i} y(t - \tau_i) e^{-st} dt - \sum_{j=0}^{k-1} s^j y^{(k-1-j)}(-\tau_i). \end{aligned}$$

Рассмотрим методику приведения системы (2.2.1) к каноническому виду, с которым связан классический метод интегрирования системы дифференциально-разностных уравнений.

Рассмотрим случай, когда степень определителя  $L(s)$  относительно  $s$  равна  $m$ .

Система уравнений (2.2.1) называется тогда нормализуемой, что дает возможность разрешить ее относительно старших производных  $y_1^{m_1}, \dots, y_n^{m_n}$  и привести к нормальной форме.

Достаточным условием нормализуемости системы (2.2.1) является невырожденность матрицы  $\mathbf{L}_0^0$ .

Умножая обе части уравнения (2.2.1) на  $(L_0^0)^{-1}$ , получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} p^q y(t) &= -(L_0^0)^{-1} \sum_{j=1}^q L_j^0 p^{q-j} y(t) - (L_0^0)^{-1} \sum_{i=1}^l L^i(p) y(t - \tau_i) + \\ &+ (L_0^0)^{-1} \left( \sum_{i=0}^r G^i(p) u(t - \theta_i) + R(p) f(t) \right). \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение вектор  $x(t)$  размерности  $m$  с координатами  $x(t) = \{y_1, \dots, y_n, p y_1, \dots, p y_n, \dots, p^{q-1} y_1, \dots, p^{q-1} y_n\}$  – последнее дает возможность получить эквивалентное уравнение :

$$y(t) = Cx(t); \quad (2.2.3)$$

$$\sum_{i=0}^l A^i \dot{x}(t - \tau_i) = \sum_{i=0}^l A^i x(t - \tau_i) + F(t), \quad (2.2.4)$$

где  $A^0 = E$ ,  $E$  – единичная матрица.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^i &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (L_0^0)^{-1} L_0^i \end{vmatrix}, \quad i \neq 0; \\ \mathbf{A}_i &= \begin{vmatrix} 0 & E_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_n \\ -(L_0^0)^{-1} L_q^i & -(L_0^0)^{-1} L_{q-1}^i & \dots & -(L_0^0)^{-1} L_1^i \end{vmatrix}; \\ \mathbf{C} &= \|\mathbf{E}_n \quad 0 \quad \dots \quad 0\|, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{E}_n$  – единичная матрица размером  $n \times m$ ,  $\mathbf{F}(t)$  – матрица-столбец

$$\mathbf{F}^T(t) = \left\| 0 \quad \dots \quad 0 \quad (L_0^0)^{-1} \left( \sum_{i=0}^r G^i(p) u(t - \theta_i) + R(p) f(t) \right) \right\|.$$

В этом случае, если  $\mathbf{G}^i(p) = G^i$ ,  $\mathbf{R}(p) = R$  – постоянные матрицы, а  $\mathbf{A}^i = 0$ ;  $i \neq 0$ , то уравнения (2.2.3), (2.2.4) совпадают с уравнениями состояния (2.2.2), где  $x(t)$  – вектор состояния объекта.

Такое утверждение нельзя сделать, если матрицы  $\mathbf{G}^i(p)$ ,  $\mathbf{R}^i(p)$  являются полиномиальными. Это доказывается рассмотрением выражения (2.2.2), решение определяется и начальными условиями  $u(0), \dots, u^{(q-1)}(0), \dots, u(-\theta_r), \dots, f(0), \dots, f^{(q-2)}(0)$ , а поэтому вектор состояния объекта должен содержать информацию об этих составляющих.

Для получения уравнений состояния в общем случае введем составной вектор с координатами  $x(t) = \{x^1(t), \dots, x^q(t)\}$ . Этот вектор связан с векторами  $y(t), u(t), f(t)$  следующими соотношениями, получаемыми заменой составляющей при степени  $s^{i-1}$  в правой части уравнения (2.2.2) величинами  $x^i(0)$  и выбором в качестве начального момента времени  $t_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} x^q(t) &= \sum_{i=0}^l L_0^i y(t - \tau_i) - \sum_{i=0}^r G_0^i u(t - \theta_i); \\ x^{q-1}(t) &= \sum_{i=0}^l (L_1^i + L_0^i p) y(t - \tau_i) - \sum_{i=0}^r (G_1^i + G_0^i p) u(t - \theta_i) - R_1 f(t); \\ x^{q-2}(t) &= \sum_{i=0}^l (L_2^i + L_1^i p + L_0^i p^2) y(t - \tau_i) - \\ &\quad - \sum_{i=0}^r (G_2^i + G_1^i p + G_0^i p^2) u(t - \theta_i) - (R_2 + R_1 p) f(t); \\ &\quad \dots \\ x^1(t) &= \sum_{i=0}^l (L_{q-1}^i + L_{q-2}^i p + \dots + L_0^i p^{q-1}) y(t - \tau_i) - \\ &\quad - \sum_{i=0}^r (G_{q-1}^i + G_{q-2}^i p + \dots + G_0^i p^{q-1}) u(t - \theta_i) - \\ &\quad - (R_{q-1} + R_{q-2} p + \dots + R_1 p^{q-2}) f(t). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения и уравнения (2.2.1) можно получить:

$$\dot{x}^1(t) = - \sum_{i=0}^l L_q^i y(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^r G_q^i u(t - \theta_i) + R_q f(t),$$

последовательно дифференцируя выражения для  $x^i(t)$ , учитывая при этом вид  $x^{i-1}(t)$ , имеем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= - \sum_{i=0}^l L_q^i y(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^r G_q^i u(t - \theta_i) + R_q f(t); \\ \dot{x}^2(t) &= x^1(t) - \sum_{i=0}^l L_{q-1}^i y(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^r G_{q-1}^i u(t - \theta_i) + R_{q-1} f(t); \\ &\quad \dots \quad (2.2.5) \\ \dot{x}^q(t) &= x^{q-1}(t) - \sum_{i=0}^l L_1^i y(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^r G_1^i u(t - \theta_i) + R_1 f(t); \\ x^q(t) &= \sum_{i=0}^l L_0^i y(t - \tau_i) - \sum_{i=0}^r G_0^i u(t - \theta_i). \end{aligned} \right\}$$

Исключая из (2.2.5) переменные  $y(t - \tau_i)$ ,  $i = \overline{1, l}$ , получим каноническую форму записи уравнений динамики линейного многосвязного объекта. Заметим, что привести исходную систему дифференциальных уравнений к каноническому виду удается только в ряде частных случаев при довольно жестких ограничениях на вид матриц  $\mathbf{L}_j^i, \mathbf{G}_j^i$ .

Пусть матрицы  $\mathbf{G}_0^i$  ( $i = \overline{0, r}$ ),  $\mathbf{L}_0^i$  ( $i \neq 0$ ) нулевые, а  $\mathbf{L}_0^0$  – невырожденная матрица (определитель не равен нулю). Тогда из последнего уравнения системы (2.2.5) получим:

$$y(t) = (\mathbf{L}_0^0)^{-1} x^q(t).$$

Исключая  $y(t)$  из остальных уравнений системы (2.2.5), получим уравнения состояния объекта в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^l \mathbf{A}_i x(t - \tau_i) - \sum_{i=0}^r \mathbf{B}_i u(t - \theta_i) + \mathbf{B}_f f(t); \\ x(t) &= \varphi_x(t), \quad t_0 - \tau_l \leq t \leq t_0; \\ u(t) &= \varphi_u(t), \quad t_0 - \theta_l \leq t \leq t_0; \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t), \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

(2.2.6)

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -L_q^i (L_0^0)^{-1} \\ E\delta_{i0} & 0 & 0 & \dots & 0 & -L_{q-1}^i (L_0^0)^{-1} \\ 0 & E\delta_{i0} & 0 & \dots & 0 & -L_{q-2}^i (L_0^0)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E\delta_{i0} & -L_1^i (L_0^0)^{-1} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} G_q^i \\ G_{q-1}^i \\ \dots \\ G_1^i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_f = \begin{pmatrix} R_q \\ R_{q-1} \\ \dots \\ R_1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.7)$$

где  $\delta_{i0}$  – символ Кронекера.

Рассматривая задачи управления, мы исследуем решение уравнений с запаздывающим аргументом на интервале  $[t_0, t]$ .

При этом начальное условие для  $x(t)$ ,  $u(t)$  относим соответственно к интервалам  $[t_0 - \tau_l, t_0]$ ,  $[t_0 - \theta_r, t_0]$ , полагая  $u(t)$ ,  $f(t)$  и начальные функции такими, чтобы решение было непрерывным. При этом мы не конкретизируем вид функции  $\varphi_x(t)$ ,  $\varphi_y(t)$ ,  $\varphi_u(t)$ , а лишь требуем, чтобы они были достаточно хорошими.

Уравнения состояния (2.2.6) отвечают широкому классу реальных объектов с запаздыванием. В дальнейшем будем использовать выражения еще более общего вида, чем (2.2.6), т.е. предполагать наличие непосредственной связи входных и выходных сигналов:

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t),$$

что приведет к изменению формы записи уравнений (2.2.2):

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t);$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^l \mathbf{A}_i x(t - \tau_i) - \sum_{i=0}^r \mathbf{B}_i u(t - \theta_i) + \mathbf{B}_f f(t),$$

где  $\mathbf{B}_f$  – постоянная матрица соответствующей размерности.

**Решение дифференциально-разностного уравнения (2.2.6), как известно [3], имеет вид:**

$$x(t) = \Psi(t - t_0) x(t_0) + \sum_{i=1}^l \int_{t_0}^{t_0 + \tau_i} \Psi(t - \zeta) \mathbf{A}_i x(\zeta - \tau_i) d\zeta +$$

$$+ \sum_{i=1}^r \int_{t_0}^t \Psi(t - \zeta) \mathbf{B}_i u(\zeta - \theta_i) d\zeta + \int_{t_0}^t \Psi(t - \zeta) \mathbf{B}_f f(\zeta) d\zeta,$$

где  $\Psi(t)$  – матричная функция (фундаментальная матрица размерности  $(m \times m)$ ), удовлетворяющая уравнению вида:

$$\dot{\Psi}(t) = \sum_{i=1}^l \mathbf{A}_i \Psi(t - \tau_i);$$

$$\Psi(0) = E; \quad \Psi(t) = 0; \quad t < 0,$$

тогда из выходных координат объекта можно получить интегральную форму записи уравнений динамики:

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + \int_{t_0}^t W(t - \zeta) u(\zeta) d\zeta + y_u(t) + \int_{t_0}^t W_f(t - \zeta) f(\zeta) d\zeta,$$

где  $y_{\text{св}}(t) = \mathbf{C}\Psi(t - t_0) x(t_0) + \mathbf{C} \sum_{i=1}^l \int_{t_0}^{t_0 + \tau_i} \Psi(t - \zeta) \mathbf{A}_i x(\zeta - \tau_i) d\zeta$  – составляющая решения, соответствующая однородному уравнению;

$$y_u(t) = \mathbf{C} \sum_{i=1}^r \int_{t_0}^{t_0 + \theta_i} \Psi(t - \zeta) \mathbf{A}_i u(\zeta - \theta_i) d\zeta$$
 – составляющая решения, соответствующая начальной функции  $\varphi_u(t)$ ;

$$W(t) = \sum_{i=0}^r \mathbf{C}\Psi(t - \theta_i) \mathbf{B}_i + \mathbf{D}\delta(t), \quad t \geq 0$$
 – импульсная матричная функция непрерывного многосвязного объекта по отношению к управляющим воздействиям ( $\delta(t)$  – дельта-функция);

$$W_f(t) = \mathbf{C}\Psi(t) \mathbf{B}_f; \quad t \geq 0$$
 – импульсная матричная функция по отношению к возмущениям.

Аналогичные решения могут быть получены на основе использования обратного преобразования Лапласа.

Получить решение системы (2.2.6) в аналитической форме удастся не всегда, а только в ряде наиболее простых случаев, и поэтому актуальны проблемы частного решения данной системы уравнений.

Рассмотрим систему уравнений с запаздыванием в отличной от (2.2.7) форме, выделив отдельно составляющие, характеризующие действие запаздывания. Для этого проинтегрируем уравнение (2.2.1) в пределах от  $t_0$  до  $t$ .

$$x(t) = x^*(t) + \sum_{i=0}^l \int_{t_0}^t \mathbf{A}_i x(\zeta - \tau_i) d\zeta = x^*(t) + \sum_{i=0}^l \left( \int_{-\tau_i}^t \mathbf{A}_i x(t_0 + \zeta) d\zeta + \int_{t_0}^{t-\tau_i} \mathbf{A}_i x(\zeta) d\zeta \right),$$

$$\text{где } x^*(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{A}_i x(\zeta) d\zeta + \sum_{i=0}^r \int_{t_0}^t \mathbf{B}_i u(\zeta - \theta_i) d\zeta.$$

Вводя в рассмотрение функции, имеющие вид:

$$\Psi_i[t, \zeta] = \begin{cases} 1, & \zeta < t - \tau_i \\ 0, & t - \tau_i \leq \zeta \leq t \end{cases};$$

$$\Psi_i^*[t_0 - t, \zeta] = \begin{cases} 1, & -\tau_i \leq \zeta < \min(0, t - t_0 - \tau_i) \\ 0, & t - t_0 - \tau_i \leq \zeta \leq 0 \end{cases},$$

окончательно можно получить:

$$x(t) = x^*(t) + \sum_{i=1}^l \int_{t_0}^t \Psi_i[t, \zeta] \mathbf{A}_i x(\zeta) d\zeta + \sum_{i=1}^l \int_{-\tau_i}^0 \Psi_i^*[t_0 - t, \zeta] \mathbf{A}_i x(y_0 + \zeta) d\zeta. \quad (2.2.7)$$

Выражение (2.2.7) в дальнейшем будет использоваться для оценки свойств системы с запаздыванием посредством ее рандомизации системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

### 2.3. ОПИСАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ЧАСТНОЙ ОБЛАСТИ

Передаточная матричная функция линейного непрерывного многосвязного объекта по отношению к управляющим (возмущающим) воздействиям характеризует реакцию предварительно невозбужденного (т.е. при нулевых начальных условиях) объекта на управляющие (возмущающие) воздействия. Так, при нулевых начальных функциях выходных координат управляющих и возмущающих воздействий (так как в рассмотренных моделях предполагается отсутствие запаздывания в возмущающих воздействиях, то более правильно говорить о нулевых начальных значениях  $f(t)$ ) выражение для вектора выходных координат объекта, описываемого уравнением (2.2.1), имеет вид:

$$Y(s) = L^{-1}(s) G(s) U(s) + L^{-1}(s) R(s) F(s).$$

Передаточная матричная функция по управляющим воздействиям, или просто передаточная матричная функция объекта  $W(s)$ , равна:

$$W(s) = L^{-1}G(s) = \left( \sum_{i=0}^l L^i(s) e^{-\tau_i s} \right)^{-1} \sum_{i=0}^r G(s) e^{-\theta_i s},$$

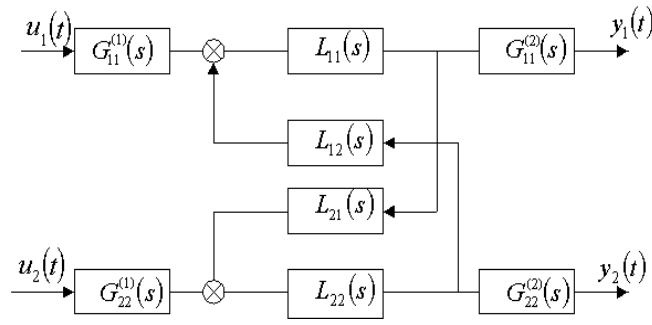
а передаточная матричная функция по возмущающим воздействиям  $W_f(s)$  имеет вид:

$$W_f(s) = L^{-1}(s) R(s) = \left( \sum_{i=0}^l L^i(s) e^{-\tau_i s} \right)^{-1} R(s).$$

Покажем, что ввиду передаточной матричной функции можно судить о структуре объекта.

Действительно, общие множители в знаменателях элементов  $W_{ij}(s)$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) указывают на связь между координатами объекта, характеризуют динамический процесс в замкнутом контуре, образуемом входными координатами объекта. В свою очередь наличие множителей, не являющихся общими делителями знаменателей всех элементов  $W_{ij}(s)$ , свидетельствует о существовании отдельных, не связанных между собой звеньев в каналах многосвязного объекта. Рассмотрим схему вида:





Матричная передаточная функция этой схемы имеет вид:

$$W(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} G_{11}^{(1)}(s)L_{22}(s)G_{11}^{(2)}(s) & -G_{22}^{(1)}(s)L_{12}(s)G_{11}^{(2)}(s) \\ -G_{11}^{(1)}(s)L_{21}(s)G_{22}^{(2)}(s) & G_{22}^{(1)}(s)L_{11}(s)G_{22}^{(2)}(s) \end{vmatrix}$$

$$\Delta(s) = L_{11}(s)L_{22}(s) - L_{12}(s)L_{21}(s). \quad (2.3.1)$$

Рассматривая уравнения динамики линейных многосвязных объектов, предполагают, что степени матричных квазиполиномов  $L(s)$ ,  $G(s)$  одинаковы. В этом случае можно легко убедиться, что степени числителей элементов передаточной матричной функции (2.3.1) не превышают (но могут и равняться) степеней их знаменателей. Физически это означает, что объект не ослабляет высокие частоты.

Если учесть у реальных объектов возможность ограничения полосы пропускания высоких частот, то ясно, что степени числителей элементов передаточной матричной функции должны быть хотя бы на единицу меньше степеней их знаменателей. Из этого можно сделать вывод, что степень матричного квазиполинома  $G(s)$  в уравнениях динамики должна быть хотя бы на единицу меньше (а в общем случае меньше) степени матричного квазиполинома  $L(s)$ , а поэтому в уравнениях состояния матрица  $D$  должна быть нулевой.

Далее будем рассматривать в основном объекты, в которых вектор выходных координат связан лишь с вектором состояния, т.е.  $D = 0$ .

#### 2.4. ПРИБЛИЖЕННАЯ ЗАМЕНА СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Рассмотрим звено чистого запаздывания, уравнение которого имеет вид:

$$y(t) = u(t - \tau), \quad t_0 \quad (2.4.1),$$

где  $u(t)$ ,  $y(t)$  – соответственно входная и выходная функции звена. Отметим, что  $u(t)$  должна быть непрерывной на отрезке  $(t_0 - \tau, T)$ . Установим некоторое соответствие между  $y(t)$  и выходом  $z(t)$  аperiodического звена с постоянной времени, равной времени запаздывания:

$$\tau \dot{z}(t) + z(t) = u(t) \quad (2.4.2)$$

далее оценим разность:

$$\varepsilon(t) = z(t) - y(t),$$

при этом полагая  $z(t_0) = y(t_0) = u(t_0 - \tau)$ ;  $\varepsilon(t_0) = 0$ .

В предположении существования производной  $u(t)$  удовлетворяющей условию Липшица с постоянной  $M_1$ , имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \tau^{-1}(u(t) - z(t)) - \dot{u}(t - \tau) = -\tau^{-1}\varepsilon(t) + \varphi_\varepsilon(t); \\ |\varphi_x(t)| &= |\tau^{-1}(u(t) - u(t - \tau)) - \dot{u}(t - \tau)| \leq M_1\tau; \\ |\varepsilon(t)| &\leq M_1\tau^2. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Если же существует  $|u^{(2)}(t)| \leq M_2$ , то в оценках (2.4.3) следует положить  $M_1 = 0,5M_2$ . Это непосредственно следует из представления  $u(t)$  в виде ряда Тейлора и выражений (2.4.3).

Для  $N$  последовательно соединенных элементарных звеньев с запаздыванием  $\frac{\tau}{N}$ , эквивалентных исходному звену с запаздыванием  $\tau$  и соответствующей цепочке аperiodических звеньев с постоянной времени  $\frac{\tau}{N}$ , по аналогии с выражением (2.4.1), (2.4.2) можно записать:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= u\left(t - \frac{\tau}{N}\right); \\
y_2(t) &= y_1\left(t - \frac{\tau}{N}\right) = u\left(t - \frac{2\tau}{N}\right); \\
&\dots \\
y_N(t) &= y_{N-1}\left(t - \frac{\tau}{N}\right) = u(t - \tau) = y(t); \\
\tau N^{-1} \dot{z}_1(t) + z_1(t) &= u; \quad z_1(t_0) = y_1(t_0) = u\left(t_0 - \frac{\tau}{N}\right); \\
\tau N^{-1} \dot{z}_2(t) + z_2(t) &= z_1(t); \quad z_2(t_0) = y_2(t_0) = u\left(t_0 - \frac{2\tau}{N}\right); \\
&\dots \\
\tau N^{-1} \dot{z}_N(t) + z_N(t) &= z_{N-1}(t); \quad z_N(t_0) = y_N(t_0) = u(t_0 - \tau),
\end{aligned}$$

где  $y_i(t)$ ,  $z_i(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$  – выходные величины соответствующих элементарных звеньев.

Введем обозначения:

$$\varepsilon_i(t) = z_i(t) - y_i(t); \quad \varepsilon_i(t_0) = 0; \quad i = \overline{1, N},$$

с учетом (2.4.3) получим:

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_1(t)| &\leq M_1 \left(\frac{\tau}{N}\right)^2; \\
|\varepsilon_2(t)| &\leq |z_2(\varepsilon_1(t)) - y_2(t_1)| + |z_2(y_1(t))| \leq M_1 \left(\frac{\tau}{N}\right)^2 + M_1 \left(\frac{\tau}{N}\right)^2 = 2M_1 \left(\frac{\tau}{N}\right)^2; \\
&\dots \\
|\varepsilon_j(t)| &\leq jM_1 \left(\frac{\tau}{N}\right)^2 \leq M_1 N^{-1} \tau^2; \\
|\varepsilon_N(t)| &\leq M_1 N^{-1} \tau^2, \tag{2.4.4}
\end{aligned}$$

где  $z_2(\varepsilon_1(t))$ ,  $z_2(y_1(t))$  обозначают соответственно составляющие решения  $z_2(t)$ , обусловленные отдельно входными функциями  $\varepsilon_1(t)$  и  $y_1(t) = u\left(t - \frac{\tau}{N}\right)$ .

Из последнего состояния (2.4.4) вытекает, что  $z_N(t) \rightarrow y(t)$  равномерно на отрезке  $(t_0, T)$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Ограничения на  $u(t)$  можно ослабить, потребовав, чтобы выполнялось условие Липшица с постоянной  $M_1$ . Для этого необходимо ввести сглаженную функцию:

$$u^{(1)}(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(\xi) d\xi, \quad (t_0 \leq t \leq T). \tag{2.4.5}$$

Функцию  $u(t)$  продолжим на отрезке  $(T, T+h)$ , по непрерывности как постоянную, производная которой имеет вид:

$$\dot{u}^1(t) = h^{-1} [u(t+h) - u(t)],$$

удовлетворяющая условию Липшица с постоянной  $2M_1 h^{-1}$ , оценить  $|u^{(1)}(t)|$ ,  $|u(t) - u^{(1)}(t)| = |u^{(2)}(t)|$ , а затем исследовать разность  $z_N(t) - y(t)$ , представленную в виде композиции составляющих, обусловленных  $u^1(t)$  и  $u^{(2)}(t)$ , окончательно согласно [2] имеем:

$$|z_N(t) - y(t)| \leq 2M_1 \tau^2 h^{-1} N^{-1} + 2M_1 h$$

или, если считать  $h = \tau N^{-\frac{1}{2}}$ , то

$$|z_N(t) - y(t)| \leq 4M_1 \tau N^{-\frac{1}{2}},$$

отсюда следует сходимость  $z_N(t)$  к  $y(t)$  при  $N \rightarrow \infty$  (если  $|u(t)| \leq M_2$ , то в указанных оценках следует считать  $M_1 = 0,5 M_2$ , аналогично доказывается сходимость для  $u(t)$ , удовлетворяющая только требованию непрерывности).

Исследуем близость решений  $x(t)$ ,  $x_0(t)$  системы дифференциальных уравнений системы с запаздыванием:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{i=1}^l A_i x(t - \tau_i) + B_0 u(t); \\ x(t) &= \psi_x(t), \quad t_0 - \tau_i \leq t \quad (2.4.6)\end{aligned}$$

и системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных из (2.4.6) путем замены  $x(t - \tau_i)$  выражения (2.4.3) т.е.:

$$\begin{aligned}\dot{x}_0(t) &= A_0 x_0(t) + \sum_{i=1}^l A_i z_{\tau_i}(t) + B_0 u(t); \\ \frac{\tau_i}{N} \dot{z}_i(t) + z_i(t) &= z_{i-1}(t), \quad (2.4.7)\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}z_0(t) &= x_0(t); \quad z_0(t_0) = x(t_0); \\ z_i(t_0) &= \frac{N}{\tau_i} \int_{-\frac{i}{N}\tau_i}^{-\frac{(i-1)}{N}\tau_i} x(t_0 + \zeta) d\zeta, \quad (2.4.8) = z_{N\frac{\tau_i}{\tau_j}}(t),\end{aligned}$$

где  $x(t)$ ,  $x_0(t)$ ,  $z_i(t)$  – векторы, а начальные условия  $z_i(t_0)$  записаны путем усреднения начальной функции  $\varphi_x(t)$  на интервале  $\left[ t_0 - \frac{i-1}{N}\tau_i, t_0 - \frac{i}{N}\tau_i \right]$ .

Будем предполагать в дальнейшем  $\tau_i (i = \overline{1, l})$  кратными некоторой величине  $\tau_\Delta$ , так что  $\tau_i \tau_l^{-1} N$  – целые числа. Это нисколько не ограничивает области рассмотрения, а отвечает реальным практическим задачам и значительно упрощает форму записи выражения (2.4.7).

Данная система уравнений является непрерывным аналогом системы разностных уравнений. Это следует из приведенного ниже соотношения, полученного на основе использования формулы Тейлора:

$$z_i\left(t + \frac{\tau_1}{N}\right) \approx z_i(t) + \frac{\tau_1}{N} \dot{z}_i(t) = z_{i-1}(t).$$

Решение  $x_0(t)$  системы (2.4.6) удовлетворяет уравнению:

$$x_0(t) = x_0(t_0) + \int_{t_0}^t A_0 x_0(\zeta) d\zeta + \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^l (2.4.9) d\zeta + \int_{t_0}^t B_0 u(\zeta) d\zeta, \quad (2.4.9)$$

интегрируя последовательно  $z_i(t)$ , получим:

$$z_{\tau_i}(t) = \frac{\left(\frac{N}{\tau_l}\right)^{N_i}}{(N_i - 1)!} \int_{t_0}^t x_0(\zeta) (t - \zeta)^{N_i - 1} e^{-\frac{N}{\tau_l}(t - \zeta)} d\zeta + \sum_{i=1}^{N_i} z_i(t_0) \frac{\left[\frac{N}{\tau_l}(t - t_0)\right]^{N_i - i}}{(N_i - i)!} e^{-\frac{N}{\tau_l}(t - t_0)},$$

где  $N_i = N \frac{\tau_i}{\tau_l}$ ,  $i = \overline{1, l}$ .

Используя вместо  $z_i(t_0)$  соответствующие выражения (2.4.8) и подставив  $z_{\tau_i}(t)$  в (2.4.7), в результате замены переменных получим:

$$x_0(t) = x_0(t_0) + \int_{t_0}^t A_0 x_0(\zeta) d\zeta + \int_{t_0}^t B_0 u(\zeta) d\zeta + \sum_{i=1}^l \int_{t_0}^t \Psi_{N_i}[t, \zeta] A_i x_0(\zeta) d\zeta + \sum_{i=1}^l \int_{-\tau_i}^0 \Psi_{N_i}^*[t_0, t, \zeta] A_i x(t_0 + \zeta) d\zeta,$$

где  $\Psi_{N_i}[t, \zeta]$ ,  $\Psi_{N_i}^*[t_0, t, \zeta]$  определяются равенствами:

$$\Psi_{N_i}[t, \zeta] = \int_{\zeta}^t \frac{\left(\frac{N}{\tau_l}\right)^{N_i}}{(N_i - 1)!} (\gamma - \zeta)^{N_i - 1} e^{-\frac{N}{\tau_l}(\gamma - \zeta)} d\gamma = \int_0^{t - \zeta} \frac{\left(\frac{N_i}{\tau_l}\right)^{N_i}}{(N_i - 1)!} \gamma^{N_i - 1} e^{-\frac{N_i}{\tau_l} \gamma} d\gamma;$$

$$\Psi_{N_i}^*[t_0, t, \zeta] = \frac{N}{\tau_l} \int_0^{t - t_0} \frac{\left(\frac{N}{\tau_l} \gamma\right)^{N_i - i}}{(N_i - i)!} e^{-\frac{N}{\tau_l} \gamma} d\gamma;$$

$$-\frac{i-1}{N} \tau_l \leq \zeta \leq -\frac{i}{N} \tau_l; \quad 1 \leq i \leq N_i;$$

Оценим разность  $\varepsilon(t) = x_0(t) - x(t)$

$$\varepsilon(t) - \int_{t_0}^t \left( A_0 + \sum_{i=1}^l \Psi_{N_i}[t, \zeta] A_i \right) \varepsilon(\zeta) d\zeta = \sum_{i=1}^l \int_{t_0}^t \{ \Psi_{N_i}[t, \zeta] - \Psi_i[t, \zeta] \} A_i x(\zeta) d\zeta + \sum_{i=1}^l \int_{-\tau_i}^0 \{ \Psi_{N_i}^*[t_0, t, \zeta] - \Psi_i^*[t_0, t, \zeta] \} A_i d\zeta \quad (2.4.10)$$

Аналогично проделанному выше получим приближенную систему уравнений в случае наличия запаздывания и в управляющих воздействиях, и в координатах:

$$\dot{x}_0(t) = A_0 x_0(t) + \sum_{i=1}^l A_i z_{\tau_i}(t) + B_0 u(t) + \sum_{i=1}^r B_i z_{\theta_i}^*(t);$$

$$\frac{\tau_l}{N} \dot{z}_i(t) + z_i(t) = z_{i-1}, \quad i = \overline{1, N};$$

$$\frac{\theta_r}{N^*} \dot{z}_i^*(t) + z_i^*(t) = z_{i-1}^*(t), \quad i = \overline{1, N^*}; \quad (2.4.11)$$

$$z_i(t_0) = \frac{N}{\tau_i} \int_{-\frac{i}{N}\tau_l}^{-\frac{i-1}{N}\tau_l} x(t_0 + \zeta) d\zeta, \quad z_{\tau_l}(t) = z_{N\frac{\tau_l}{\tau_l}}(t);$$

$$z_0(t) = x_0(t), \quad z_0(t_0) = x_0(t_0);$$

$$z_i^*(t_0) = \frac{N^*}{\theta_i} \int_{-\frac{i}{N^*}\tau_l}^{-\frac{i-1}{N^*}\tau_l} u(t_0 + \zeta) d\zeta, \quad z_{\theta_l}^*(t) = z_{N^*\frac{\theta_l}{\theta_l}}^*(t);$$

$$z_0^*(t) = u(t),$$

где величины, характеризующие запаздывание в управлении, обозначаются верхним индексом \*. Начальные условия можно записать также в другом виде:

$$z_i^*(t_0) = u\left(t_0 - \frac{\theta_r}{N^*}i\right).$$

Аналогично (2.4.10) может быть получено выражение для разности сигналов исходной и приближенной систем.

## 2.5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ОПИСАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ЧАСТНОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим звено чистого запаздывания с передаточной функцией вида:

$$W(s) = e^{-\tau s}.$$

Полагая нулевой начальной функцией  $\varphi_u(t)$ , представим передаточную функцию  $W_N(s)$  цепочкой из  $N$  аperiodических звеньев с постоянной времени  $\frac{\tau}{N}$  в виде:

$$W(s) = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{N}s + 1\right)^N}$$

Данное выражение стремится к передаточной функции  $W(s)$  исходного звена, а при больших  $N$  достаточно точно характеризует его.

Передаточная матричная функция  $W_{NN}^*$  приближенной системы (2.4.11) имеет вид:

$$W_{NN}^*(s) = \left[ sE - \sum_{i=0}^l A_i \left( \frac{\tau_i}{N}s + 1 \right)^{-N\frac{\tau_i}{\tau_l}} \right]^{-1} \sum_{i=0}^r B_i \left( \frac{\theta_r}{N}s + 1 \right)^{-N^*\frac{\theta_i}{\theta_l}} =$$

$$= \left[ sE - \sum_{i=0}^l A_i \left( \frac{\tau_i}{N}s + 1 \right)^{-N} \right]^{-1} \sum_{i=0}^r B_i \left( \frac{\theta_r}{N^*}s + 1 \right)^{-N^*}.$$

Очевидно, что  $e^{-\tau_i s} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\tau_i}{N}s \right)^{-N}$ . Отметим, что сопоставление исходной и приближенной систем в частной области возможно только в случае нулевых начальных функций  $\varphi_x(t)$ ,  $\varphi_u(t)$ , что непосредственно следует из определения передаточной функции.

Как известно, динамические свойства систем в частной области описываются амплитудно-фазовыми характеристиками  $W(i\omega)$ .

Если учесть, что реальные объекты, как правило, являются низкочастотными фильтрами, т.е.  $\|W(i\omega)\| \leq \delta_1$ , при  $\omega \geq \omega^*$ , то приближенную систему будем считать эквивалентной исходной при условии:

$$\|W(i\omega) - W_{NN}^*(i\omega)\| \leq \delta, \quad (2.5.1) \leq \omega^*,$$

где  $\|W(i\omega)\| = n \max_{ik} |w_{ik}(i\omega)|$  – норма матрицы  $\mathbf{W}(i\omega)$ ;  $n$  – размерность;  $\delta_1, \delta$  – малые величины.

Выражение (2.5.1) справедливо для всего диапазона частот  $(0, \infty)$ , если  $\delta_1 \leq \delta$ .

Сопоставим решения исходной и приближенной систем для случая устойчивой системы при нулевых начальных функциях  $\varphi_x(t)$ ,  $\varphi_u(t)$  и управляющих воздействиях, удовлетворяющих условию:

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} U^T(-s) U(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \|U(i\omega)\|_2^2 d\omega < M_1,$$

где  $\|U(i\omega)\|^2 = \sum_{k=1}^n |u_k(i\omega)|^2$  – эрмитова векторная норма  $U(i\omega)$ ;  $M_1$  – постоянная величина.

В качестве критерия близости решения выберем интегральную оценку  $\Delta I_{NN^*} = \int_0^\infty \|\varepsilon(t)\|^2 dt$ , которую по аналогии запишем, используя теорему Парсеваля [1]:

$$\begin{aligned} \Delta I_{NN^*} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^T(-i\omega) [W_{NN^*}^T(i\omega) - W^T(-i\omega)] [W_{NN^*}(i\omega) - W(i\omega)] U(i\omega) d\omega \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|W_{NN^*}(i\omega) - W(i\omega)\|^2 \|U(i\omega)\|^2 d\omega \leq \frac{\delta^2 M_1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Приведенная оценка следует из ряда простейших преобразований и соотношений:

$$|Z_k(i\omega)| = |Z_k(-i\omega)|;$$

$$|Z_k(i\omega)Z_g(i\omega)| = |Z_r(i\omega)Z_g(i\omega)|;$$

$$Z_i(i\omega)Z_k(-i\omega) + Z_i(-i\omega)Z_k(i\omega) \leq |Z_i(i\omega)|^2 + |Z_k(i\omega)|^2,$$

где  $Z_k(i\omega)$  и  $Z_k(-i\omega)$  – комплексно-сопряженные величины.

С ростом  $N$  и  $N^*$  интервал стремится к нулю. При практических расчетах целесообразно пользоваться не абсолютной оценкой близости  $\Delta I_{NN^*}$ , а относительной  $\delta I_{NN^*}$ , равной отношению  $\Delta I_{NN^*}$  к величине  $I_{NN^*} = \int_0^\infty \|x_0(t)\|^2 dt$  – интегральной оценке качества процесса  $x_0(t)$  в приближенной системе:

$$\delta I_{NN^*} = \frac{\Delta I_{NN^*}}{I_{NN^*}}.$$

Сопоставим теперь решение исходной и приближенной систем при ненулевых начальных условиях. Для выражения (2.5.1) получим:

$$\begin{aligned} \left( sE - \sum_{i=0}^l A_i e^{-\tau_i s} \right) X(s) &= \sum_{i=0}^r B_i e^{-\theta_i s} U(s) + x(0) + \sum_{i=1}^l A_i \int_0^{\tau_i} \varphi_x(t - \tau_i) e^{-st} dt + \\ &+ \sum_{i=1}^r B_i \int_0^{\theta_i} \varphi_u(t - \theta_i) e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Решение данной приближенной системы приводится к виду:

$$\begin{aligned} \left[ sE - \sum_{i=0}^l A_i \left( \frac{\tau_i}{N} s + 1 \right)^{-N \frac{\tau_i}{\tau_i}} \right] X_0(s) &= \sum_{i=0}^r B_i \left( \frac{\theta_r}{N^* s + 1} \right)^{-N^* \frac{\theta_i}{\theta_r}} U_0(s) + \\ &+ \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{N_i} \left( \frac{\tau_i}{N} s + 1 \right)^{-N_i + k - 1} \frac{\tau_i}{N} A_i z_k(0) + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{N_i^*} \left( \frac{\theta_r}{N^* s + 1} \right)^{-N_i^* + k - 1} \frac{\theta_r}{N^*} z_k^*(0) + x(0). \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

При выводе данного соотношения использовались выражения:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_i} \varphi_x(t - \tau_i) e^{-st} dt &\approx \frac{\tau_i}{N} \sum_{k=1}^{N_i} z_i(0) e^{-\frac{\tau_i}{N}(N_i + 1 - k)}; \\ \int_0^{\theta_i} \varphi_u(t - \theta_i) e^{-st} dt &\approx \frac{\theta_r}{N^*} \sum_{k=1}^{N_i^*} z_i^*(0) e^{-\frac{\theta_r}{N^*}(N_i^* - k + 1)}; \\ e^{-\tau s} &\approx (\tau s + 1)^{-1}, \end{aligned}$$

откуда следует  $e^{-\tau s} \approx (\tau s + 1)^{-1}$ . Отметим, что аппроксимацию  $e^{-is}$  можно выполнить, используя разложение  $e^{-\tau s}$  в непрерывную дробь и переходя от нее к дробно-рациональному выражению, что, с одной стороны, усложняет получение формулы. А с другой – позволяет повысить точность приближенного решения при меньших значениях величин  $N$  и  $N^*$ .

Важным является вопрос о корнях характеристических определителей исходной и приближенной систем, так как использование приближенной системы может привести к получению неустойчивого решения. Поэтому необходимо следить, чтобы среди корней характеристического определителя приближенной системы отсутствовали корни с положительной действительной частью. Иначе необходимо изменить  $N$  и  $N^*$ . В выражениях (2.5.2), модификация  $N$  и  $N^*$  может выполняться как путем

их увеличения, так и уменьшения, что неминуемо вызывает рост ошибки, т.е. разности решений приближенной и исходной систем.

## 2.6. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Понятие управляемости динамических объектов непосредственно связано с выявлением возможности воздействовать на состояние системы, выявлением возможности управляющих воздействий изменять вектор состояния системы.

Понятие управляемости впервые введено в теорию управления

Р. Калманом для систем без запаздывания и формулируется следующим образом.

**Определение 1.** Линейный динамический объект называется управляемым в том и только в том случае, если для любого начального состояния  $x_0$  и конечного времени  $T$  найдется такой вектор управляющих воздействий  $u(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ), при котором  $x(T) = 0$ .

В силу того, что объект рассматривается стационарным, приведенной формулировке эквивалентны следующие.

**Определение 2.** Линейный динамический объект управляем в том и только в том случае, если любое состояние  $x(t)$  достижимо за конечное время из нулевого начального состояния.

**Определение 3.** Линейный динамический объект управляем в том и только в том случае, если любое состояние  $x(t)$  достижимо из любого начального состояния  $x_0$ .

При исследовании возможности управляющих воздействий изменить лишь отдельные составляющие векторы состояния объекта либо их линейные комбинации  $x_*(t) = C_1 x(t)$ . Введем понятие неполной управляемости (управляемости относительно  $x_*(t)$ );  $C_1$  – постоянная матрица, т.е. матрица, коэффициенты которой являются числами.

Данные выше определения можно перенести на случай неполной управляемости, если в них заменить  $x(t)$ ,  $x_*(t)$ .

**Определение 4.** Линейный динамический объект управляем относительно  $x_*(t) = C_1 x(t)$ , если для любого начального состояния  $x_0$  и конечного времени  $T$  найдется такой вектор управляющих воздействий  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , при котором  $C_1 x(T) = 0$ .

Критерий управляемости линейных динамических систем без запаздывания формулируется следующим образом.

**Теорема.** Линейный многосвязанный объект, описываемый системой уравнений:

$$\begin{aligned} y &= Cx; \\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

управляем в том и только в том случае, если:

$$\text{rang} \| B \dots AB \dots A^{m-1} B \| = m,$$

где  $m$  – размерность вектора управляющих воздействий.

**Теорема.** Линейный многосвязанный объект, описываемый системой уравнений (\*), управляем относительно  $x_*(t) = C_1 x(t)$  в том и только в том случае, если:

$$\text{rang} \| C_1 B \quad C_1 AB \dots C_1 A^{m-1} B \| = m, \quad (2.6.2)$$

где  $m$  – как и ранее, размерность вектора управляющих воздействий.

Исследование управляемости объектов с запаздыванием значительно сложнее, чем объектов, формализуемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, так как состояние таких объектов характеризуется не набором конечного числа величин, а начальными функциями  $\varphi_x(t)$ ,  $\varphi_u(t)$ .

Кроме того, при решении ряда задач управления одной возможности перевода объекта из какого-либо состояния в другое может оказаться недостаточно. Из-за эффекта последствия часто возникает задача удержать координаты объекта в новом состоянии. Однако решение этой задачи зависит от свойств матриц  $A_i, B_j$  ( $i = \overline{0,1}$ ) ( $j = \overline{0,r}$ ) дифференциально-разностных уравнений, описывающих поведение объектов с запаздыванием.

В связи с отмеченной спецификой задач управления объектов с запаздыванием введем понятие относительно и полностью управляемых систем.

**Определение 5.** Линейный многосвязанный объект с запаздыванием, описываемый уравнением (2.6.1), относительно управляем, если для любых начальных функций  $\varphi_x(t)$ ,  $\varphi_u(t)$  и конечного времени  $T$  найдется такой вектор  $u(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ), при котором  $x(T) = 0$  (возможны эквивалентные формулировки на основе определений 2, 3).

**Определение 6.** Линейный многосвязанный объект с запаздыванием, формализуемый уравнением (1.1.1), вполне управляем, если для любых начальных функций  $\varphi_x(t)$ ,  $\varphi_u(t)$  и конечного времени  $T$  найдется такой вектор  $u(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ), при котором  $x(t) = 0$ ,  $T - \gamma_{lr} \leq t \leq T$ ,  $\gamma_{lr} = \max \{ \tau_l, \theta_r \}$ .

**Определение 7.** Линейный многосвязанный объект с запаздыванием, формализуемый уравнением (1.1.1), называется вполне управляемым с точностью до  $\varepsilon$  на интервале  $[0, T^*]$ , если для начальных функций, удовлетворяющих:

$$\|\Phi_x(t)\|_2 = \left[ \|x(t_0)\|^2 + \int_{-\tau_1}^0 \|x(t_0 + \zeta)\|^2 d\zeta \right]^{\frac{1}{2}} \leq M_1, \text{ где } M_1 = \text{const};$$

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|\Phi_u(t)\|_2 = \left[ \int_{-\theta_r}^0 \|u(t_0 + \zeta)\|^2 d\zeta \right]^{\frac{1}{2}} \leq M_2, \text{ где } M_2 = \text{const},$$

и конечного времени  $T \leq T^*$  найдется такой вектор  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , при котором  $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ ,  $T - \gamma_{lr} \leq t \leq T$ .

Можно показать, что критерий управляемости (2.6.2), относительно  $\{x_0(t), z_1(t), \dots, z_N(t)\}$  при  $\tau_l \geq \theta_r$  либо относительно  $\{x_0(t), z_1(t), \dots, z_n^*(t)\}$  при  $\tau_l < \theta_r$  для приближенной системы дает критерий полной управляемости исходной системы с запаздыванием с точностью до  $\varepsilon(N, N^*)$ . Для непосредственного использования критерия (2.6.2) применительно к приближенной системе необходимо представить используемые в ней матрицы **A**, **B**, **C** соответственно размерностей

$$(m(N+1) + nN^*) \times n; \quad m \times (m(N+1) + nN^*)$$

в виде:



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & \dots & A_l & 0 & \dots & B_1 & 0 & \dots & B_r \\ \frac{N}{\tau_l} E_m & -\frac{N}{\tau_l} E_m & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{N}{\tau_l} E_m & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{N}{\tau_l} E_m & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{N^*}{\theta_r} E_n & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{N^*}{\theta_r} E_n & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -\frac{N^*}{\theta_r} E_n \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{N^*}{\theta_r} E_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}_1 = \|E_m \quad 0 \quad \dots \quad 0\|$$

**Теорема.** Линейный многосвязанный объект с запаздыванием, описываемый системой уравнений (2.1.2), относительно управляем в том и только в том случае, если

$$\text{rang} \begin{pmatrix} B_0 & \dots & B_r & A_0 B_0 & \dots & A_l B_0 & \dots & A_l B_j & \dots & A_l B_r & \dots \\ A_i^{m-k} B_j & \dots & A_i^{m-k} B_r \end{pmatrix} = m.$$

Отметим, что в случае сложной структуры схемы исследуемой системы необходимым и достаточным условием ее управляемости является управляемость каждого отдельно взятого блока.

**Наблюдаемость объектов с запаздыванием.** Понятие наблюдаемости динамических объектов связано с возможностью однозначного определения начального состояния объекта на основе знания реакции объекта  $y(t)$  на конечном интервале времени  $0 \leq t \leq T$ .

Непрерывность подобной задачи объясняется прежде всего тем, что матрица  $\mathbf{C}$  прямоугольная и ее ранг в общем случае меньше размерности вектора состояния объекта. Свободная составляющая решения системы уравнений (2.1.2) имеет вид:

$$y_{CB}(t) = C\Psi(t) x(0) + C \sum_{i=1}^l \int_0^{\tau_i} \Psi(2.6.3)_i x(\zeta - \tau) d\zeta.$$

Если размерность вектора  $y(t)$  равна  $n$ , а размерность вектора  $x(t)$  равна  $m$ , то невозможно даже при условии  $\varphi_x(t) = 0; -\tau_l \leq t \leq 0$  мгновенно определить состояние  $x(t)$  по его выходу. Для этого необходимо произвести, по крайней мере,  $m - n$ -измерений соответственно в моменты времени  $t_i, i = \overline{0, m - n - 1}$ . Тогда  $x(0)$  определяется из решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений, которое, как видно из (2.6.3), зависит от матриц  $\mathbf{C}$  и  $\Psi(t)$ , т.е. от матриц объекта  $A_i$  и  $\mathbf{C}$ . Независимость какой-либо составляющей вектора  $x(0)$  от вектора  $y(t)$  говорит о невозможности получить информацию о векторе  $x(0)$  путем измерения выходного сигнала объекта.

Нахождение  $\varphi_x(t)$  сводится к решению, если это возможно, интегрального уравнения (2.6.3). Поэтому проблема наблюдаемости для объекта с запаздыванием гораздо сложнее, чем для объектов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

**Определение 8.** Линейный динамический объект с запаздыванием, формализуемый уравнением (2.1.2), называется вполне наблюдаемым в том и только в том случае, если при любых возмущающих начальных условиях  $\varphi_x(t)$  и конечном времени  $T$  матрицы  $\mathbf{A}_i$  и реакции  $y(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ) при  $u(t) \equiv 0$  достаточно для однозначного определения начальной функции  $\varphi_x(t)$ .

*Так как мы рассматриваем стационарные объекты, то приведенная формулировка эквивалентна следующей.*

**Определение 9.** Линейный динамический объект, формализуемый уравнением (2.1.2), называется вполне наблюдаемым, если при некотором конечном времени  $T$  входа (управляющего воздействия),  $u(t)$  и соответствующего ему выхода  $y(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  достаточно для определения начальной функции  $\varphi_x(t)$ .

Действительно, так как неизвестны матрицы  $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}$  объекта, то из выходного сигнала всегда можно выделить составляющую:

$$C \sum_{i=1}^r \int_0^t \Psi(t - \theta_i - \xi) B_i u(\xi) d\xi + Du(t),$$

обусловленную входом  $u(t)$ , т.е. получить выходной сигнал при  $u(T) \equiv 0$ .

Получение критериев полной наблюдаемости для непрерывных объектов с запаздыванием является важной и не решенной полностью в настоящее время проблемой.

**Теорема.** Линейный многосвязанный объект с запаздыванием в управлении, формализуемый системой уравнений (2.1.2)  $A_i = 0; i \neq 0$ , наблюдаем в том и только в том случае, если

$$\text{rang} \left\| C^T \quad A_0^T C^T \quad (A_0^T)^2 C^T \quad \dots \quad (A_0^T)^{m-1} C^T \right\| = m.$$

**Определение 10.** Линейный динамический объект с запаздыванием, формализуемый уравнением (2.1.2), называется относительно наблюдаемым в том и только в том случае, если

$$\text{rang} \left\| C^T \quad A_0^T C^T \quad A_i^T C^T \quad (A_i^T)^i C^T \quad \dots \quad (A_i^T)^{m-1} C^T \right\| = m.$$

Для наблюдаемости системы, имеющей сложную функциональную схему, необходимо и достаточно выполнения критерия наблюдаемости для каждого блока функциональной схемы исследуемой системы.

## Вопросы для самопроверки

1. Расскажите о классификации объектов с запаздыванием.
2. Расскажите о методах управления объектами с запаздыванием во временной области.
3. Расскажите о методах описания свойств динамических объектов в частотной области.
4. Расскажите о способах замены систем с запаздыванием обыкновенными системами.
5. Дайте характеристику каждому способу и оцените его достоинства и недостатки.
6. Расскажите о примерах управляемости и наблюдаемости, их физической интерпретации.

### 3. СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УПРАВЛЕНИИ ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Прежде чем перейти к случаю формулировки синтеза, рассмотрим существенную особенность, присущую задачам синтеза оптимальных систем, которая в значительной степени усложняет их решение по сравнению с задачами нахождения оптимальной программы управления. Оптимальная замкнутая система должна быть устойчивой, т.е. в оптимальных задачах синтеза вопросы управления и устойчивости соединяются воедино.

В данном разделе уделено внимание специфике задач управления на бесконечном временном интервале. Отметим, что под термином «устойчивая система», «устойчивый объект», имеется в виду и асимптотическая устойчивость решений соответствующих уравнений.

Пусть заданы уравнения динамики линейного многосвязного объекта с запаздыванием в управлении:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{i=0}^r B_i u(t - \theta_i) + f(t); \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Требуется синтезировать замкнутую систему управления, т.е. записать в аналитической форме зависимость между управляющими воздействиями, координатами объекта, а также возмущениями, чтобы достигал минимума функционал качества:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} V(y(t), u(t)) dt, \\ V(y(t), u(t)) &= y^T(t) \lambda_0 y(t) + Cu^T(t) u(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\lambda_0$  – диагональная матрица с неотрицательными элементами,  $C$  – положительный коэффициент.

Предполагая, что объект вполне управляем, и в дальнейшем будем рассматривать случай, когда все координаты доступны измерению, т.е.  $y(t) = x(t)$ .

Можно выделить класс объектов с запаздыванием в управлении, для которых процедура синтеза во многом сходна с известной для линейных объектов без запаздывания.

Ниже будут рассматриваться методы синтеза систем с запаздыванием в контуре управления.

#### 3.1. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УПРАВЛЕНИИ

Рассмотрим многосерийный объект с «чистым запаздыванием», описываемый уравнениями вида:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B \quad (3.1.1)$$

$$v(t) = u(t - \theta_i). \quad (3.1.2)$$

Функционал качества (3.2) преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T(t) \lambda_0 x(t) + Cu^T(t) u(t)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T(t) \lambda_0 x(t) + Cv^T(t + \theta_i) v(t + \theta_i)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\theta_i} x^T(t) \lambda_0 x(t) dt + \frac{1}{2} \int_{\theta_i}^{\infty} (x^T(t) \lambda_0 x(t) + Cv^T(t) v(t)) dt. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Величина первого слагаемого функционала (3.1.3) не зависит от управления, поэтому исходная задача минимизации сводится к отысканию экстремума интегральной квадратичной формы:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{\theta_i}^{\infty} (x^T(t) \lambda_0 x(t) + Cv^T(t) v(t)) dt, \quad (3.1.4)$$

при уравнении связи (3.1.2) и граничном условии  $x(\theta_i)$ , которое легко вычисляется по  $x(0)$  и  $\varphi_u(t)$ , т.е. к хорошо изученной задаче синтеза линейной стационарной системы без запаздывания [1 – 3]. Процедура решения этой вспомогательной задачи подробно изложена в [1 – 3]. Оптимальный закон управления имеет вид:

$$v(t) = -\tilde{N}x(t), \quad t \geq \theta_1$$

или

$$u(t) = -\tilde{N}x(t + \theta_1), \quad (3.1.5)$$

где  $\tilde{N}$  – передаточная матрица оптимального регулятора вспомогательной задачи.

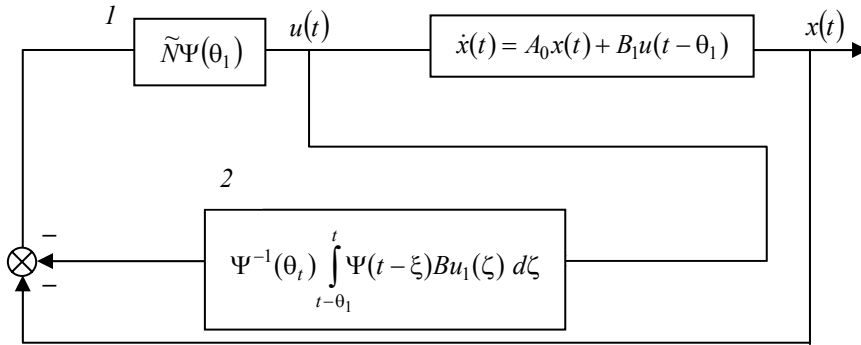


Рис. 3.1. Структурная схема оптимальной системы

Согласно уравнению (3.1.1):

$$\begin{aligned} x(t + \theta_1) &= \Psi(\theta_1)x(t) + \int_t^{t+\theta_1} \Psi(t + \theta_1 - \zeta) B_1 v(\zeta) d\zeta = \\ &= \Psi(\theta_1)x(t) + \int_{t-\theta_1}^t \Psi(t - (3.1.6)(\zeta)) d\zeta, \end{aligned}$$

где  $\Psi(t)$  – фундаментальная матрица системы (3.1.1), так что оптимальный закон управления объектом с «чистым запаздыванием» (3.1.1) можно представить в следующем виде:

$$u(t) = -\tilde{N}\Psi(\theta_1)x(t) - \tilde{N} \int_{t-\theta_1}^t \Psi(t - \zeta) B_1 u(\zeta) d\zeta,$$

Структурная схема оптимальной системы представлена на рис. 3.1.

Звено 1 характеризует контур жесткой обратной связи, звено 2 формирует сигнал прогноза на базе измерения управляющих воздействий на интервале  $[t - \theta_1, t]$ , который равен времени запаздывания объекта  $\theta_1$ .

### 3.2. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ С ОДНИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим простейший случай, соответствующий следующему виду математической формализации объекта:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0u(t) + (3.2.1)\theta_1.$$

Пусть матрицы  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{B}_1$  имеют специфическую структуру:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 &= \begin{bmatrix} B_{01} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & B_{11} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B}_\Sigma &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{01} & B_{11} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Представим вектор управления в виде  $u(t) = \{u^{(0)}(t), u^{(1)}(t)\}$ , где размерности векторов  $u^{(0)}(t), u^{(1)}(t)$  соответствуют размерности блоков  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{B}_1$ , на интервале  $[-\theta_1, 0]$ ,  $u^{(1)}(t) = \varphi_u(t)$ .

Положим:

$$u^{(1)}(t - \theta_1) = v^{(1)}(t). \quad (3.2.2)$$

Запишем уравнение (3.2.1) и функционал Конева (2.7.2) в виде:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + B_{01}u^{(0)}(t) + B_{11}v^{(1)}(t); \quad (3.2.3)$$

$$I = I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \int_t^\infty (x^T(t) \tilde{\lambda}_0 x(t) + Cu^{(0)T}(t) u^{(0)}(t) + Cv^{(1)T}(t) v^{(1)}(t)) dt, \quad (3.2.4)$$

где

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^\infty (x^T(t) \tilde{\lambda}_0 x(t) + Cu^{(0)T}(t) u^{(0)}(t) + Cv^{(1)T}(t) v^{(1)}(t)) dt; \quad (3.2.5)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_1} (x^T(t) \tilde{\lambda}_0 x(t) + C u^{(0)T}(t) u^{(0)}(t)) dt. \quad (3.2.6)$$

Предположим, что  $v^{(1)}(t)$  – оптимальный закон управления при оптимизации функционала  $I_0$  и уравнения связи (3.2.3),  $t \geq \theta_1$ . В силу того, что мы преобразовали функционал качества  $I = I_0 + I_1$  (управление  $v^{(1)}(t)$  не входит в функционал  $I_1$ , а в уравнениях (3.2.3) на отрезке  $[0, \theta_1]$  – это известная функция времени), решение исходной задачи оптимального управления эквивалентно нахождению оптимального закона управления  $u^{(0)}(t)$  из условий минимума функционала  $I$  при уравнениях связи (3.2.3), которое легко преобразовать к виду:

$$\min_{u^{(0)}(t), v^{(1)}(t)} I = \min_{u^{(0)}(t)} \{I_1 + x^T(\theta_1) W_0 x(\theta_1)\}. \quad (3.2.7)$$

Действительно, второе слагаемое выражения (3.2.7) представляет собой минимальное значение функционала  $I_0$ , причем  $W_0$  – симметрическая положительно определенная матрица, удовлетворяющая уравнению вида:

$$\tilde{\lambda}_0 + A_0^T W_0 + W_0 A_0 - \frac{1}{c} W_0 B_\Sigma B_\Sigma^T W_0 = 0. \quad (3.2.8)$$

Решение задач (3.2.3), (3.2.7) известно, поэтому можно сразу написать основные соотношения:

$$u^0(t) = -\frac{1}{c} B_{01}^T (q(t) + W_\theta(t)) x_1(t); \quad (3.2.9)$$

$$\dot{q}(t) + (A_0 - B_{01} B_{01}^T W_\theta(t))^T q(t) + W_\theta(t) B_{11} v^1(t) = 0; \quad (3.2.10)$$

$$\dot{W}_\theta(t) + \tilde{\lambda}_0 + A_0^T W_\theta(t) + W_\theta(t) A_0 - W_\theta(t) B_{01} B_{01}^T W_\theta(t) = 0; \quad (3.2.11)$$

$$W_\theta(\theta_1) = W_0; \quad q(\theta_1) = 0,$$

где  $W_\theta(t) = W_\theta^T(t)$  – матричная функция, удовлетворяющая уравнению Риккати (3.2.11), а функция  $q(t)$  определяется из решения уравнения (3.2.10).

Если  $\Psi(\zeta, t)$  – фундаментальная матрица системы (3.2.10), для чего необходимо, чтобы она была решением уравнения:

$$\frac{d\Psi(\zeta, t)}{dt} = -(A_0 + B_{01} B_{01}^T W_\theta(t))^T \Psi(\zeta, t);$$

$$\Psi(t, t) = E,$$

то решение (3.2.10) можно представить в виде:

$$q(t) = \int_0^{\theta_1} \Psi(\zeta, t) W_\theta(\zeta) B_{11} v^1(\zeta) d\zeta. \quad (3.2.12)$$

Покажем, что оптимальное управление  $u^0(t)$  является линейным функционалом, определенном на непрерывных кривых  $u^{(0)}(t + \sigma)$ ,  $-\theta_1 \leq \sigma \leq 0$ . Для этого заменим выражение для оптимального значения  $u^0(0)$  в начальный момент времени  $t_0 = 0$ .

Из выражения (3.2.12) следует:

$$q(0) = \int_0^{\theta_1} \Psi(\zeta, 0) W_\theta(\zeta) B_{11} v^1(\zeta) d\zeta$$

$$u^0(0) = -\frac{1}{c} B_{01}^T \left( \int_0^{\theta_1} \Psi(\zeta, 0) W_\theta(\zeta) B_{11} v^1(\zeta) d\zeta + W_\theta(0) x(0) \right), \quad (3.2.13)$$

с учетом соотношения (3.2.2):

$$u^{(0)}(0) = -\frac{1}{c} B_{01}^T \left( \int_0^{\theta_1} \Psi(\zeta, 0) W_\theta(\zeta) B_{11} u^{(1)}(\zeta - \theta_1) d\zeta + W_\theta(0) x(0) \right). \quad (3.2.14)$$

Для произвольного момента времени  $t$  соответственно получим:

$$u^{(0)}(0) = -\frac{1}{c} B_{01}^T \left( \int_0^{\theta_1} \Psi(\zeta, 0) W_\theta(\zeta) B_{11} u^{(1)}(t + \zeta - \theta_1) d\zeta + W_\theta(0) x(t) \right), \quad (3.2.15)$$

или

$$u^{(0)}(0) = -\frac{1}{c} B_{01}^T \left( W_\theta x(t) + \int_{-\theta_1}^0 \Psi(\sigma + \theta_1, 0) W_\theta(\sigma + \theta_1) B_{11} u^{(1)}(t + \sigma) d\sigma \right). \quad (3.2.16)$$

Используя выражение (3.2.9) для нахождения  $u^{(1)}(t)$ , подставив  $u^{(0)}(t)$  из (3.2.9) в исходное уравнение (3.2.3), получим:

$$\dot{x}(t) = \left( A_0 - \frac{1}{c} B_{01} B_{01}^T W_0(t) \right) x(t) + B_{11} u^{(1)}(t - \theta_1) - \frac{1}{c} B_{01} B_{01}^T q(t). \quad (3.2.17)$$

Решение уравнения (3.2.17) имеет вид:

$$x(t) = \Psi^T(t, 0)x(0) + \int_0^t \Psi^T(t, \zeta) B_{11} u^{(1)}(\zeta - \theta_1) d\zeta - \frac{1}{c} \int_0^t \Psi^T(t, \zeta) B_{01} B_{01}^T q(\zeta) d\zeta,$$

где  $\Psi^T(t, \zeta)$  – фундаментальная матрица, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{d\Psi^T(t, \zeta)}{dt} = \left( A_0 - \frac{1}{c} B_{01} B_{01}^T W_0(t) \right) \Psi^T(t, \zeta), \quad \Psi^T(t, t) = E. \quad (3.2.18)$$

Для произвольного момента времени управление  $u^{(1)}(t)$  имеет вид:

$$u^1(t) = -\frac{1}{c} B_{11}^T W_0 \left[ \Psi^T(\theta_1, 0)x(t) + \int_{-\theta_1}^0 (\Psi^T(\theta_1, \sigma + \theta_1) + G(\sigma + \theta_1) W_0(\sigma + \theta_1)) \times \right. \\ \left. \times B_{11} u^{(1)}(t + \sigma) d\tau \right],$$

где

$$G(\zeta_1) = -\frac{1}{c} \int_0^{\xi_1} \Psi^T(\theta_1, \zeta) B_{01} B_{01}^T \Psi(\zeta_1, \zeta) d\zeta.$$

Таким образом, исследования исходной оптимальной задачи синтеза свелись к исследованию двух вспомогательных задач минимизации функционала (3.2.7) и функционала (3.2.5) при предварительно определенном векторе  $u^{(0)}(t)$ ,  $0 \leq t \leq \theta_1$ . Так как исходную задачу оптимизации на бесконечном интервале времени мы заменили задачей оптимизации на конечном интервале времени  $[0, \theta_1]$ , то для получения оптимального решения задачи синтеза достаточно было найти начальное значение  $u^{(0)}(0)$ ,  $u^{(1)}(0)$  или  $(u^{(0)}(0), v^{(1)}(0))$ , а затем сделать интервал скользящим, т.е. равным  $[t, t + \theta_1]$ .

3.3. Исследование систем с несколькими временами запаздывания

*Исследуем теперь случай нескольких запаздывающих управляющих воздействий для многосвязанного объекта специфической структуры, уравнения состояния которого имеют вид:*

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=0}^r B_i u(t - \theta_i); \quad (3.3.1)$$

$$\mathbf{B}_i = \left\| 0 \dots 0 \quad B_{i1}^{(i)} \quad 0 \dots 0 \right\|;$$

$$\mathbf{B}_\Sigma = \sum_{i=0}^r \mathbf{B}_i = \left\| B_{01} \quad B_{11} \quad \dots \quad B_{r1} \quad \dots \quad B_{r1} \right\|, \quad (3.3.2)$$

а функционал качества характеризуется выражением (3.1.2).

Представим, как и ранее, вектор управления в виде:

$$u(t) = \{u^{(0)}(t), u^{(1)}(t), \dots, u^{(r)}(t)\},$$

где размерности векторов  $u^{(i)}(t)$  соответствуют размерностям блоков  $\mathbf{B}_{i1}$ ,  $(i = \overline{0, r})$ , и введем фиктивные управления  $v^{(i)}(t)$ :

$$v^{(i)}(t) = u(t - \theta_i), \quad i = \overline{0, r},$$

так что

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=0}^r B_{i1} v^{(i)}(t), \quad (3.3.3)$$

а критерий оптимальности (3.1.2) преобразуем к виду:

$$I = \sum_{i=0}^r I_i, \quad (3.3.4)$$

где

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_{\theta_2}^{\infty} \left( x^T(t) \tilde{\lambda}_0 x(t) + c \sum_{i=0}^r v^{(i)T}(t) v^{(i)}(t) \right) dt; \quad (3.3.5)$$

$$I_i = \frac{1}{2} \int_{\theta_{r-i}}^{\theta_{r-i+1}} \left( x^T \tilde{\lambda}_0 x(t) + c \sum_{i=0}^r v^{(i)T}(t) v^{(i)}(t) \right) dt.$$

Можно записать:

$$\begin{aligned} \min_{\substack{u^{(0)}(t) \\ \dots \\ u^{(r)}(t)}} I = \min_{\substack{v^{(0)}(t) \\ t \in [0, \theta_1]}} \{ I_r + \min_{\substack{v^{(0)}(t) \\ v^{(1)}(t) \\ t \in [\theta_1, \theta_2]}} \{ I_{r-1} + \min_{\substack{v^{(0)}(t) \\ v^{(1)}(t) \\ v^{(2)}(t) \\ t \in [\theta_2, \theta_3]}} \{ I_{r-2} + \dots \\ \dots + \min_{\substack{v^{(0)}(t) \\ \dots \\ v^{(r-1)}(t) \\ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r]}} \{ I_1 + \min_{\substack{v^{(0)}(t) \\ \dots \\ v^{(r)}(t) \\ t \in [\theta_r, \infty]}} I_0 \} \dots \}. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Таким образом, исходная задача оптимального управления распадается на ряд задач оптимального управления, решение которых хорошо известно.

$$\min_{\substack{v^{(0)}(t) \\ \dots \\ v^{(r)}(t) \\ t \in [\theta_r, \infty]}} I_0 = x^T(\theta_r) W_0 x(\theta_r);$$

$$\min_{\substack{v^{(0)}(t) \\ \dots \\ v^{(r-1)}(t) \\ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r]}} \{ I_1 + x^T(\theta_r) W_0(\theta_r) \} x(\theta_r) = x^T(\theta_{r-1}) W_1(\theta_{r-1}) x^T(\theta_{r-1}) + \\ + q_1^T(\theta_{r-1}) x(\theta_{r-1}) + M_1(\theta_{r-1})$$

$$\dots \\ \min_{\substack{v^{(0)}(t) \\ \dots \\ v^{(i)}(t) \\ t \in [\theta_i, \theta_{i+1}]}} \{ I_{r-1} + x^T(\theta_{i+1}) W_{r-i-1}(\theta_{i+1}) x(\theta_{i+1}) + q_{r-i-1}^T(\theta_{i+1}) x(\theta_{i+1}) + M_{r-i+1}(\theta_{i+1}) \} = \\ = x^T(\theta_i) W_{r-i}(\theta_i) x(\theta_i) + q_{r-i}^T(\theta_i) x(\theta_i) + M_{r-i}(\theta_i),$$

управляющие воздействия  $v^{(j)}(t)$  имеют вид:

$$v^{(j)}(t) = -\frac{1}{c} B_{j1}^T (q_j(t) + W_j(t)) x(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_{r-i+1}] \quad j = \overline{0, r-i},$$

где  $W_i(t) = W_i^T(t)$ ,  $q_i(t)$  удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\dot{W}_i(t) + \tilde{\lambda}_0 + A_0^T W_i(t) + W_i(t) A_0 - \frac{1}{c} W_i(t) \left( \sum_{j=0}^{r-i} B_{j1} B_{j1}^T \right) W_i(t) = 0;$$

$$\dot{q}_i(t) + \left( A_0 - \sum_{j=0}^{r-i} B_{j1} B_{j1}^T W_i(t) \right)^T q_i(t) + W_i(t) \sum_{j=r-i+1}^r B_{j1} v^{(j)}(t) = 0;$$

$$t \in [\theta_{r-i}, \theta_{r-i+1}], \quad 0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_r < \theta_{r+1} = \infty;$$

$$W_i(\theta_{r-i+1}) = W_{i-1}(\theta_{r-i+1}); \quad W_0(t) = W_0;$$

$$q_i(\theta_{r-i+1}) = q_{i-1}(\theta_{r-i+1}), \quad q_0(t) = 0. \quad (3.3.7)$$

В том случае, если  $\Psi_i(\zeta, t)$  – фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений относительно  $q_i(t)$ , выражения для которой записываются аналогично (3.3.7), то выражения для  $q_i(t)$ ,  $t \in [\theta_{r-i}, \theta_{r-i+1}]$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned} q_i(t) &= \int_t^{\theta_{r-i+1}} \Psi_i(\zeta, t) W_i(\zeta) \sum_{j=r-i+1}^r B_{j1} v^{(j)}(\zeta) d\zeta + \Psi_i(\theta_{r-i+1}, t) q_{i-1}(\theta_{r-i+1}) = \\ &= \sum_{j=r-i+1}^r \int_t^{\theta_{r-i+1}} \Phi_i(\zeta, t) B_{j1} v^{(j)}(\zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

где ядро преобразования определяется следующим образом:

$$\Phi_i(\zeta, t) = \begin{cases} \Psi_i(\zeta, t)W_i(\zeta), \zeta \in [\theta_{r-i}, \theta_{r-i+1}]; \\ \Psi_i(\theta_{r-i+1}, t)\Psi_{i-1}(\zeta, \theta_{r-i+1})W_{i-1}(\zeta), \zeta \in [\theta_{r-i+1}, \theta_{r-i+2}]; \\ \dots \\ \Psi_i(\theta_{r-i+1}, t) \left[ \prod_{k=1}^i \Psi_{i-k+1}(\theta_{r-i+k-1}, \theta_{r-i+k}) \right] \times \\ \times \Psi_{i-j}(\zeta, \theta_{r-i+j})W_{i-j}(\zeta), \zeta \in [\theta_{r-i+j}, \theta_{r-i+j+1}]; j > 1. \end{cases}$$

получено в результате последовательного нахождения  $q_i(t)$  на интервалах  $[\theta_{r-k}, \theta_{r-k+1}]$ ,  $k = \overline{1, i}$ . Как и в случае одного запаздывания, определим  $u^{(0)}(0)$ , согласно выражению:

$$u^{(0)}(0) = -\frac{1}{c} B_{01}^T (q_r(0) + W_r(0))x(0)$$

и, считая затем начальный момент  $t_0 = 0$  текущим, получим:

$$u^{(0)}(t) = -\frac{1}{c} B_{01}^T \left( \sum_{j=1}^r \int_{-\theta_j}^0 \Psi_0(\theta_j + \sigma, 0) B_{j1} u^{(j)}(t + \sigma) d\sigma + W_r(0)x(t) \right). \quad (3.3.9)$$



Дальнейшая процедура определения оптимальных управляющих воздействий, по существу, ничем не отличается от рассмотренного случая одного запаздывающего аргумента: последовательно определяется величина  $x(\theta_i)$  и управления  $v^i(\theta_i)$ , а следовательно  $u^{(i)}(0)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ .

Запишем окончательные выражения для оптимального закона управления:

$$u^{(i)}(t) = -\frac{1}{c} B_{i1}^T W_{r-1}(\theta_i) \left( \sum_{j=0}^{i-1} \Psi_j^T(\theta_{j+1}, \theta_j) \right) x(t) - \\ - \frac{1}{c} B_{i1}^T \left\{ \sum_{j=i+1}^r \int_0^{\theta_j - \theta_i} \Phi_i(\sigma + \theta_i, \theta_j) B_{i1} u^{(j)}(t + \sigma) d\sigma + \right. \\ + \sum_{k=0}^{i-2} \prod_{j=0}^k \Psi_j^T(\theta_{j+1}, \theta_j) \int_{\theta_{k-1} - \theta_s}^{\theta_k - \theta_s} \Psi_{k-1}^T(\theta_k, \sigma + \theta_s) \sum_{s=k}^r B_{s1} u^{(s)}(t + \sigma) d\sigma + \\ \left. + \sum_{s=k}^r \int_{\theta_{k-1} - \theta_s}^0 G_{k-1}(\theta_k, \sigma + \theta_s) B_{s1} u^{(s)}(t + \sigma) d\sigma \right\},$$

где  $G_{k-1}(\theta_k, \sigma)$  – ядра преобразований, которые имеют следующий вид:

$$\sum_{j=k}^r \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_j} G_{k-1}(\theta_k, \sigma) B_{j1} v^{(j)}(\sigma) d\sigma = \sum_{j=k}^r \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \left( \int_{\theta_{k-1}}^{\sigma} \Psi_{k-1}^T(\theta_k, \zeta) \times \right. \\ \times \left. \left( \sum_{i=1}^{k-1} B_{i1} B_{i1}^T \right) \Phi_{k-1}(\sigma, \zeta) d\zeta \right) B_{j1} v^{(j)}(\sigma) d\sigma + \sum_{j=k+1}^r \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_j} \left( \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \Psi_{k-1}^E(\theta_k, \zeta) \times \right. \\ \left. \times \left( \sum_{j=0}^{k-1} B_{j1} B_{j1}^T \right) \Phi(\sigma, \zeta) d\zeta \right) B_{j1} v^{(j)}(\sigma) d\sigma. \quad (3.3.10)$$

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. ДАЙТЕ ХАРАКТЕРИСТИКУ ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА.
2. РАССКАЖИТЕ ОБ ИЗУЧЕННОМ МЕТОДЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ.
3. ОБЪЯСНИТЕ ПРИРОДУ ВОЗНИКНОВЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ ЗАПАЗДЫВАНИЙ.
4. КАК ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ С ОДНИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ?
5. КАК ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ?

### 4. Примеры проектирования систем управления с запаздыванием

#### 4.1. Система управления подачей сырья в химический реактор

Рассмотрим пример задачи управления, характерной для химической промышленности. На рис. 4.1.1. представлена схема процесса очистки нефти. Целевой продукт  $P$  получается на выходе ректификационной колонны в результате соответствующей переработки компонентов сырья 1 и 2. Для максимального использования сырья вводится контур рециркуляции, а именно часть материала, оставшаяся не переработанной до нужной кондиции при прохождении, и через рабочую зону объекта поступает обратно на его вход.

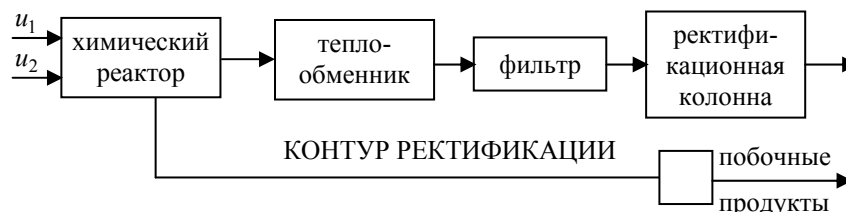


Рис. 4.1.1. Схема процесса очистки нефти

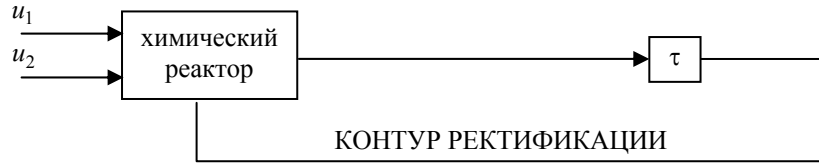


Рис. 4.1.2. Схема химического процесса

Для получения заданных свойств целевого продукта необходимо таким образом управлять скоростью подачи сырьевых компонентов 1, 2, т.е. величинами  $u_{10}(t)$  и  $u_{20}(t)$ , чтобы состав компонентов, участвующих в химической реакции, был равен заданному.

Наличие контура рециркуляции вносит существенную специфику в процесс управления. При этом, учитывая, что основной процесс формирования целевого продукта  $P$  происходит в химическом реакторе, блок-схему 1 можно заменить схемой, представленной на рис. 4.2, где  $\tau$  – время запаздывания, обусловленное контуром рециркуляции.

Система уравнений, описывающая динамику процессов в химическом реакторе, является нелинейной. Линеаризованная система соответствующих уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -4,93x_1(t) + 1,92x_1(t-1) - 1,01x_2(t) + \frac{\delta u_{10}(t)}{6V_R}; \\ \dot{x}_2(t) &= -3,2x_1(t) - 5,3x_2(t) + 1,92x_2(t-1) - 12,8x_C(t) + \frac{\delta u_{20}(t)}{6V_R}; \\ \dot{x}_C(t) &= 6,4x_1(t) + 0,347x_2(t) - 32,5x_C(t) + 1,87x_C(t-1) - 1,04x_P(t-1); \\ \dot{x}_P(t) &= 0,833x_2(t) + 11x_C(t) - 3/96x_P(t) + 0,724x_P(t-1), \end{aligned}$$

где  $\delta u_{10}(t)$ ,  $\delta u_{20}(t)$  – отклонения скоростей подачи сырьевых компонент от номинальных,  $V_R$  – объемный вес химического реактора,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_C(t)$ ,  $x_P(t)$  – соответственно отклонение весов сырьевых компонентов 1, 2 полуфабриката  $C$  и целевого продукта  $P$  от номинальных значений. Масштаб времени выбран таким образом, что одна единица времени соответствует десяти минутам.

Положим,  $x_3(t) = x_C(t)$ ;  $x_4(t) = x_P(t)$ ;  $u_1(t) = \frac{\delta u_{10}(t)}{6V_R}$ ;  $u_2(t) = \frac{\delta u_{20}(t)}{6V_R}$ . Запишем приведенную систему уравнений в матричной форме:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-1) + Bu(t),$$

где

$$x(t) = \{x(t), \dots, x_4(t)\}, u(t) = \{u_1(t), u_2(t)\},$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -4,93 & -1,01 & 0 & 0 \\ -3,20 & -5,30 & -12,8 & 0 \\ 6,40 & 0,347 & -32,5 & -1,04 \\ 0 & 0,833 & 11,0 & -3,96 \end{bmatrix};$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1,92 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,92 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,87 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,724 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

На рис. 4.1.3. представлены соответствующие изменения координат объекта для начальных условий  $\varphi_{x_1}(t) = 0,1$ ;  $\varphi_{x_i}(t) = 0$  ( $i = 2,3,4$ ). Процесс очень инерционный, медленно затухающий. Поэтому отклонения участвующих в химической реакции компонент от номинальных значений приведут к длительному нарушению желаемого характера протекания процесса, что сказывается на качестве и количестве целевого продукта, а следовательно, на стоимости готовой продукции.

Изменение фазовых координат объекта представлено в табл. 4.1.1.

Таблица 4.1.1

$x_1(t)$	0,1	0,06	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01
$x_2(t)$	0	-0,07	-0,06	-0,07	-0,06	-0,04	-0,03	-0,02	-0,01
$x_3(t)$	0	0,01	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0	0,01
$x_4(t)$	0	0,03	0,02	0,01	0,01	0,02	0,01	0,01	0,01

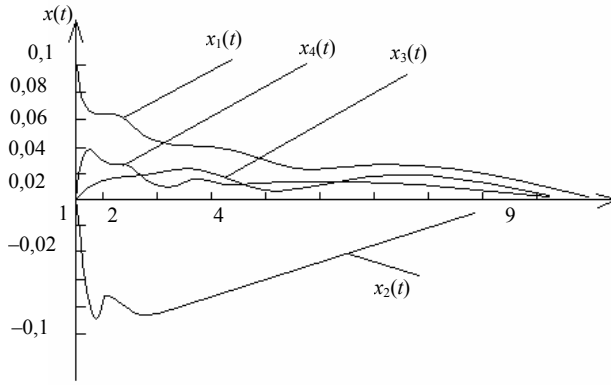


Рис. 4.1.3. Изменение фазовых координат объекта

Вполне естественно организовать такую систему управления подачей компонент сырья, чтобы отклонения составляющих  $x_i(t)$ ,  $i = \overline{1,4}$  от номинальных значений были минимальными, иначе говоря, чтобы система управления достаточно быстро и надлежащим образом реагировала на изменения состава компонент, участвующих в химической реакции.

Используя в качестве косвенной оценки качества системы управления квадратичный критерий, сформулируем задачу синтеза оптимальной системы. Требуется определить параметры оптимального (субоптимального) регулятора системы из условий минимума функционала:

$$I = \int_0^{\infty} (x_1^2(t) + 10x_2^2(t) + x_3^2(t) + 100x_4^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt$$

**в силу уравнения объекта.**

Коэффициенты подынтегрального выражения функционала качества определялись на основе экспертных оценок.

В основу расчета была положена процедура решения системы алгебраических уравнений для приближенной оптимальной задачи.

Просчитаем ряд вариантов  $N = 1, 2, 3, 4$ . На рис. 4.1.4 показан характер изменения величин  $B_{02}^{11}(t)$  при различных  $N$ ; значения  $B_{02}^{11}(t)$  между узлами интерполяции получались различные линейные комбинации значений в соответствующих узлах. Подобный характер сходимости наблюдается и для других элементов: матриц  $\mathbf{B}_{02}(t) = \|\mathbf{B}_{02}^{ij}(t)\|$ .

В табл. 4.1 приведены значения элементов матрицы  $\mathbf{W}_0 = \|\mathbf{W}_0^{ij}\|$  для различных  $N$ .

Так как приближенное решение для  $N = 3$  и  $N = 4$  близки между собой, то процесс вычисления можно закончить.

Экспериментальная проверка спроектированной системы управления показала, что ее свойства значительно лучше, чем у разомкнутой системы, в чем нетрудно убедиться из сопоставления траекторий координат разомкнутой и замкнутой систем для начальных условий  $\varphi_{x_1}(t) = 0,1$ ;  $\varphi_{x_i}(t) = 0$ ,  $i = 2,3,4$  (см. рис. 4.1.5 – 4.1.8).

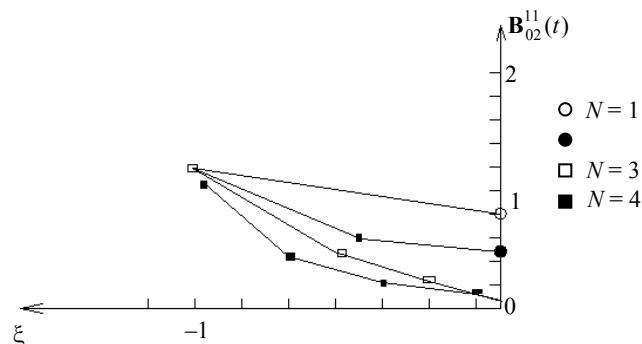


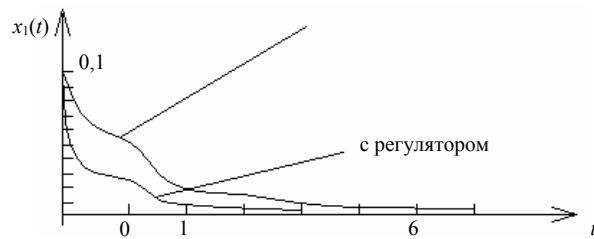
Рис. 4.1.4. Характер изменения величины  $\mathbf{B}_{02}^{11}(t)$

Таблица 4.1.2

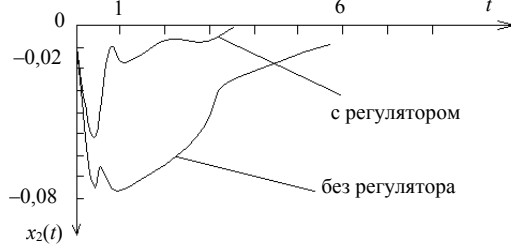
N	$\mathbf{W}_0^{11}$	$\mathbf{W}_0^{12}$	$\mathbf{W}_0^{13}$	$\mathbf{W}_0^{14}$	$\mathbf{W}_0^{21}$	$\mathbf{W}_0^{22}$	$\mathbf{W}_0^{23}$	$\mathbf{W}_0^{24}$
1	1,29	-0,29	0,76	1,71	-0,29	1,21	-0,19	1,01
2	1,22	-0,28	0,75	1,66	-0,28	1,09	-0,18	0,97

3	1,20	-0,27	0,75	1,64	-0,27	1,08	-0,19	0,96
4	1,19	-0,27	0,74	1,63	-0,27	1,08	-0,19	0,96

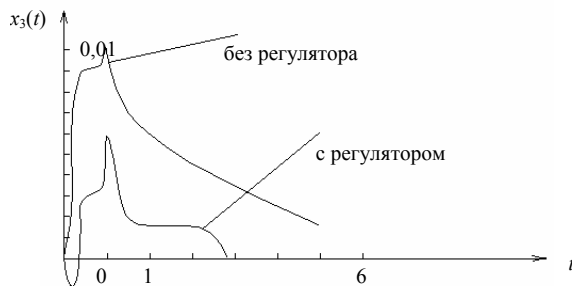
a)



б)



в)



г)

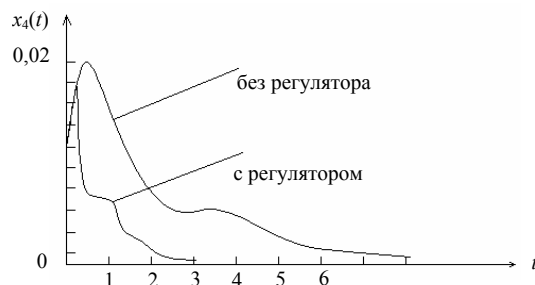


Рис.4.1.5. Изменение фазовой координаты:

$a - x_1(t)$ ;  $б - x_2(t)$ ;  $в - x_3(t)$ ;  $г - x_4(t)$ ;

#### 4.2. ОПТИМАЛЬНОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ ВЕЛИЧИНЫ pH В ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ

**В данном разделе мы рассмотрим один из объектов химической промышленности, который имеет запаздывание как в координатах, так и в управлении.**

Рассматриваемая задача состоит в поддержании значения концентрационной переменной pH, характеризующей направление и скорость химической реакции взаимодействия смеси продукционного и циркуляционного растворов с сернистым газом [5].

Всякое отклонение величины pH от оптимального для данной реакции значения приводит, как правило, к уменьшению концентрации целевого продукта и появлению побочных продуктов в выходном потоке. Это в конечном итоге снижает экономическую эффективность работы всего агрегата. Управление величиной pH чаще всего осуществляется с помощью изменения расхода или концентрации одного либо нескольких выходных компонент реакции. При этом резкие колебания расходов или концентрации управляющего реагента приводят к тому, что часть реагента не успевает полностью вступить в реакции. Все это предьявляет повышенные требования к системам регулирования величины pH в смысле минимизации отклонений выходных и входных параметров объекта от номинальных значений.

Наличие запаздывания в рассматриваемом объекте управления создает трудности при построении высококачественной системы управления. Вместе с тем появление запаздывания в координатах объекта обусловлено контуром рециркуляции. Известно, что только при помощи рециркуляции можно добиться максимального использования сырья. Поэтому тенденция

развития многих технологических схем заключается в переходе от агрегатов с открытым циклом к технологическим процессам с рециклом.

Приведенное ниже уравнение характеризует процесс получения гидроксиламибисульфата ГАДС насадочно – абсорбционной колонне с рециклом [5]:

$$\dot{x}_1(t) = -3,2x_1(t) + 3,2x_1(t-1) + 3,2u(t-0,625),$$

где  $x_1(t)$  – выходная переменная, рН – циркуляционная раствора,  $u(t)$  – управляющее воздействие, расход нитрата аммония.

Запаздывание в управлении вызвано тем, что исполнительный механизм устанавливается на определенном расстоянии от реактора, т.е. как и запаздывание в координате  $x_1(t)$  обусловлено особенностью технической схемы процесса. Масштаб времени выбран таким образом, что одна единица времени соответствует 96 сек.

Синтез системы управления произведен из условия минимума функционала:

$$I = \int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt,$$

где с целью построения высококачественной системы управления минимизируется не только величина отклонения рН от номинального значения, но и интеграл от нее  $\int_0^t x_1(t) dt$ , что достигается введением фиктивной переменной  $x_2(t)$ , связанной с  $x_1(t)$  соотношением  $\dot{x}_2(t) = x_1(t)$ .

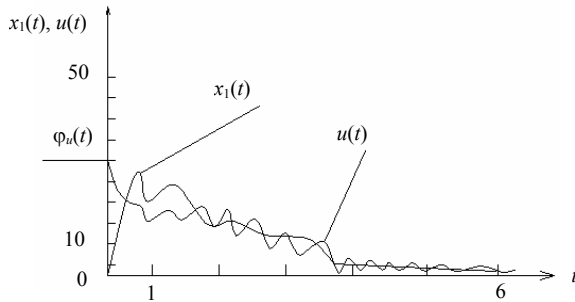
Параметры субоптимального регулятора определяются следующим образом, для  $N = N^* = 1$  имеет:

$$\begin{aligned} u_{NN^*}(t) &= -1,47x_1(t) - 0,97z_1(t) - \int_0^t x_1(t) dt - 0,626u_{NN^*} - 0,66z_1^*(t); \\ \dot{z}_1(t) + z_1(t) &= x_1(t); \\ 0,625\dot{z}_1^*(t) + z_1^*(t) &= u_{NN^*}(t). \end{aligned}$$

Для аппроксимации второго порядка  $N = N^* = 2$  имеет:

$$\begin{aligned} u_{NN^*}(t) &= -1,02x_1(t) - 0,9z_1(t) - 0,527z_2(t) - \\ & - \int_0^t x_1(t) dt - 0,302u_{NN^*}(t) - 0,644z_1^*(t) - 0,338z_2^*(t); \\ 0,5\dot{z}_1(t) + z_1(t) &= x_1(t) \quad 4 \\ 0,5\dot{z}_2(t) + z_2(t) &= z_1(t); \\ 0,3125\dot{z}_1^*(t) + z_1^*(t) &= u_{NN^*}(t); \\ 0,3125\dot{z}_2^*(t) + z_2^*(t) &= z_1^*(t). \end{aligned}$$

Результаты моделирования субоптимальной системы приведены на рис. 4.2.1.



**Рис. 4.2.1. Результаты моделирования субстанционной системы**

Качество переходного процесса в системе при обработке ступенчатого сигнала достаточно высокое. При аппроксимации третьего порядка, т.е.  $N = N^* = 3$ , имеем:

$$\begin{aligned} u_{NN^*}(t) &= -0,9x_1(t) - 0,53z_1(t) - 0,65z_2(t) - 0,35z_3(t) - \\ & - \int_0^t x_1(t) dt - 0,19u_{NN^*}(t) - 0,4z_1^*(t) - 0,45z_2^*(t) - 0,22z_3^*(t); \\ \frac{1}{3}\dot{z}_i(t) + z_i(t) &= z_{i-1}(t), \quad z_0(t) = x_1(t); \\ \frac{0,625}{3}\dot{z}_i^*(t) + z_i^*(t) &= z_{i-1}^*(t), \quad z_0^*(t) = u_{NN^*}(t); \\ & (i = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

а для аппроксимации четвертого порядка, т.е. при  $N = N^* = 4$ , уравнение регулятора субоптимальной системы имеет вид:

$$\begin{aligned}
u_{NN^*}(t) &= -0,84x_1(t) - 0,37z_1(t) - 0,44z_2(t) - 0,5z_3(t) - 0,27z_4(t) - \\
&- \int_0^t x_1(t)dt - 0,145u_{NN^*}(t) - 0,3z_1^*(t) - 0,33z_2^*(t) - 0,33z_3^*(t) - 0,17z_4^*(t); \\
&0,25\dot{z}_i(t) + z_i(t) = z_{i-1}(t), \quad z_0(t) = x_1(t); \\
&0,156\dot{z}_i^*(t) + z_i^*(t) = z_{i-1}^*(t), \quad z_0^*(t) = u_{NN^*}(t); \\
&(i = 1, \dots, 4).
\end{aligned}$$

Показано, что  $N = N^* = 4$  дает достаточно точную аппроксимацию. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, запишем оптимальный закон управления в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u(t) &= -[0,685x_1(t) + \int_0^t x_1(t) dt + \int_{-1}^0 (1,17 - 1,29\zeta + 0,234\zeta^2 + 0,531\zeta^3) x_1(t + \zeta) d\zeta + \\
&+ \int_{-0,625}^0 (1,8 - 1,39\sigma - 1,49\sigma^2 - 0,33\sigma^3) u(t + \sigma) d\sigma].
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Несмотря на то что данное выражение мы трактуем как оптимальный закон управления, не следует забывать, что это не приближает к точному оптимальному закону.

Вряд ли стоит специально останавливаться на том, что реализация закона управления (4.2.1) гораздо сложнее, чем субоптимальное. Кроме того, как следует из вышеизложенного, даже невысокая степень аппроксимации  $N = N^* = 2$  приводит к системе с удовлетворительными для практического использования свойствами.

В заключение отметим, что выбор чисел  $N, N^*$  можно было бы производить на основе сопоставления амплитудно-фазовых характеристик исходного выражения функционала качества на основе анализа псевдохарактеристического уравнения приближенной системы.

### 4.3. РАСЧЕТ НАСТРОЕК РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Для практического использования интересен случай определения оптимальных настроек промышленных регуляторов (П, ПИ, ПД, ПИД) для объектов с передаточными функциями различных типов. При этом в качестве критерия оптимальности использовался критерий оптимального модуля. Этот критерий очень удобен с практической точки зрения и приводит к получению переходных процессов с малым перерегулированием. Рассмотрим следующую схему, представленную на рис. 4.3.1.

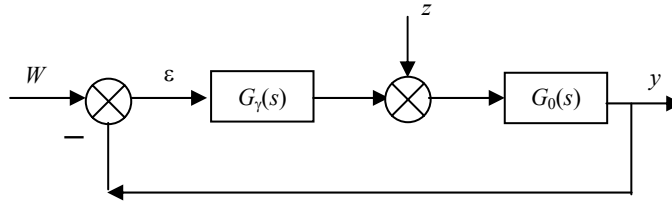


Рис. 4.3.1. Схема получения переходных процессов

Пусть  $G_z(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{M(j\omega)}$ , где  $L(j\omega), M(j\omega)$  – могут быть трансцендентными функциями переменной  $\omega$ .

Дифференцируя зависимость  $|L(j\omega)|^2 = L(j\omega) L(-j\omega)$  и используя формулу Лейбница, получим:

$$\frac{d^m}{d\omega^m} [|L(j\omega)|^2] = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} L^{(m-k)}(j\omega) L^{(k)}(-j\omega). \tag{4.3.1}$$

Аналогично поступаем для  $|M(j\omega)|^2$ .

Легко убедиться, разлагая  $L(j\omega)$  и  $L(-j\omega)$  в степенной ряд, что:

$$\frac{d^m}{d\omega^m} [L(j\omega)] = (-1)^m \frac{d^m}{d\omega^m} [L(-j\omega)]. \tag{4.3.2}$$

Из соотношений (4.3.1) и (4.3.2) получим:

$$\frac{d^m}{d\omega^m} [|L(j\omega)|^2] = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} L^{(m-k)}(j\omega) L^{(k)}(j\omega). \tag{4.3.3}$$

Аналогично можно представить для  $M(j\omega)$ . Тогда критерий оптимального модуля для системы с запаздыванием будет иметь следующий вид:

$$\left[ \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} L^{(m-k)}(j\omega) L^{(k)}(j\omega)}{\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} M^{(m-k)}(j\omega) M^{(k)}(j\omega)} \right]_{\omega=0} = \left[ \frac{|L(j\omega)|^2}{|M(j\omega)|^2} \right]_{\omega=0} = 0, \quad (4.3.4)$$

где  $m = 2, 4, \dots, 2l$ , причем  $l$  – число определяемых параметров регулятора.

Приведем теперь без дополнительных вычислений таблицы с оптимальными в случае критерия (4.3.4) настройками типовых регуляторов для объектов с различными передаточными функциями.

Передаточная функция объекта  $G_0(r) = \frac{K_0 e^{-r}}{g + TK}$ . В представленной передаточной функции используются следующие обозначения:

$$\theta = \frac{t}{\tau} \text{ – относительное время;}$$

$$r = s\tau \text{ – оператор Лапласа;}$$

$$T = \frac{T_0}{\tau} \text{ – относительная постоянная времени;}$$

$$D = \frac{T_d}{\tau} \text{ – относительное время упреждения регулятора;}$$

$$I = \frac{T_i}{\tau} \text{ – относительное время издромы;}$$

$$K = \frac{K_R}{K_0} \text{ – коэффициент усиления разомкнутой системы;}$$

$$q = \begin{cases} 1 \text{ – для статистического объекта,} \\ 2 \text{ – для астатистического объекта;} \end{cases}$$

$$K = \frac{(6T + q)(12T^2 - q)}{2(48T^2 + 30Tq + 5q)}; \quad D = \frac{4T + q}{4(3T + q)}.$$

$$\text{Для объектов с передаточной функцией вида: } G_0(r) = \frac{K_0 e^{-r}}{(I + rT)^n}.$$

$$\text{Для объекта с передаточной функцией вида: } K(s) = \frac{K_0 e^{-st}}{(1 + sT_{01})(1 + sT_{02})},$$

**которая в относительных единицах имеет вид:**

$$G_0(r) = \frac{K_0 e^{-r}}{(1 + rT_1)(1 + rT_2)},$$

$$\text{где } T_1 = \frac{T_{01}}{\tau}, \quad T_2 = \frac{T_{02}}{\tau}.$$

Оптимальные настройки регуляторов представлены в табл. 4.3.1 – 4.3.3.

**Таблица 4.3.1**

Тип регулятора	Оптимальные значения параметров	Объект
П	$K = \frac{T^2}{2T + 1}$	$q = 1$
	$K = \frac{T}{2}$	$q = 0$
ПД	$K = \frac{(6T + 1)(12T^2 - 1)}{2(48T^2 + 30T + 5)}; \quad D = \frac{4T + 1}{4(3T + 1)}$	$q = 1$
	$K = \frac{3}{4}T; \quad D = \frac{1}{3}$	$q = 0$
И	$\frac{K}{I} = \frac{1}{2(T + 1)}$	$q = 1$
	Система неустойчива $K = 0$	$q = 0$
ПИ	$K = \frac{6T^3 + 6T^2 + 3T + 1}{4 \cdot (6T^2 + 3T + 1)} \cdot \frac{1}{I} = \frac{6T^2 + 6T + 3}{4 \cdot (6T^3 + 6T^2 + 3T + 1)}$	$q = 1$

ПИД	$K\left(2 - \frac{1}{I}\right) = T$	$q = 0$
	$K = \frac{1}{\frac{2}{I}(T+1) - 2}$ ;	$q = 1$
	$\frac{1}{I} = \frac{15 \cdot (2T+1)(6T^2 + 3T + 1)}{180T^4 + 230T^3 + 135T^2 + 42T + 7}$ ;	
	$D = \frac{60T^4 + 60T^3 + 27T^2 + 7T + 1}{180T^4 + 230T^3 + 135T^2 + 42T + 7}$	
$K = \frac{T}{\frac{1}{I} + 2 \cdot (D-1)}$ ; $\frac{1}{I} + 12D = 4$	$q = 0$	

Таблица 4.3.2

Тип регулятора	ОПТИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ	
П	$K = \frac{nT^2}{n(n-1)T^2 + 2nT + 1}$	
И	$\frac{K}{I} = \frac{1}{2 \cdot (nT + 1)}$	
ПИ	$K = \frac{T^3(n^3 + 3n^2 + 2n) + 3T^2(n^2 + n) + 3Tn + 1}{4 \cdot [(n^3 - n)T^3 + 3T^2n^2 + 3Tn + 1]}$ ;	
	$\frac{1}{I} = \frac{3 \cdot [T^3(n^3 + n^2) + 3T^2(n^2 + n) + 3Tn + 1]}{(nT + 1)[T^3(n^3 + 3n^2 + 2n) + 3T^2(n^2 + n) + 3Tn + 1]}$ =	
	$= \frac{2K + 1}{2K(nT + 1)}$	
ПИД	$K = \frac{\beta_6 T^6 + \beta_5 T^5 + \beta_4 T^4 + \beta_3 T^3 + \beta_2 T^2 + \beta_1 T + \beta_0}{\alpha_6 T^6 + \alpha_5 T^5 + \alpha_4 T^4 + \alpha_3 T^3 + \alpha_2 T^2 + \alpha_1 T + \alpha_0}$ ;	
	$\beta_6 = 7n^6 + 30n^5 + 25n^4 - 30n^3 - 32n^2$ ;	
	$\beta_5 = 42n^5 + 120n^4 + 30n^3 - 120n^2 - 72n$ ;	
	$\beta_4 = 105n^4 + 180n^3 - 15n^2 - 90n$ ;	
	$\beta_3 = 140n^3 + 120n^2 - 20n$ ; $\beta_2 = 105n^2 + 30n$ ; $\beta_1 = 47n$ ;	
	$\beta_0 = 7$ ;	
	$\alpha_6 = 16n^6 - 80n^4 + 64n^2$ ; $\alpha_5 = 96n^5 - 240n^3 + 144n$ ;	
	$\alpha_4 = 240n^4 - 240n^2$ ; $\alpha_3 = 320n^3 - 80n$ ; $\alpha_2 = 240n^2$ ;	
	$\alpha_1 = 96n$ ; $\alpha_0 = 16$ ;	
	$\frac{1}{I} = \frac{2K + 1}{2K(nT + 1)}$ ;	
	$D = \frac{4K[(nT + 1)^3 - nT^3] - [(nT + 1)^3 + 3n(nT^3 + T^2) + 2nT^3]}{12K(nT + 1)^3}$	

Таблица 4.3.3

ТИП РЕГУЛЯТОРА	Оптимальные значения параметров	
П	$K = \frac{T_2^2 + T_1^2}{2T_1T_2 + 2 \cdot (T_1 + T_2) + 1}$	



И	$\frac{K}{I} = \frac{1}{2 \cdot (T_1 + T_1 + 1)}$
ПИ	$K = \frac{3 \cdot (2 \cdot (T_2^3 + T_2^2 T_1 + T_1^3) + 2 \cdot (T_2^2 + T_2 T_1 + T_1^2) + (T_2 + T_1)) + 1}{12 \cdot (T_2 + T_1) (T_2 T_1 + T_2 + T_1 + 1) + 1}$ $\frac{1}{I} = \frac{2K}{2K[T_2 + T_1 + 1]}$
ПИД	$K = \frac{360T_1^2 T_2^2 (T_2^3 + 3T_1 T_2^2 + 3T_2 T_1^2 + T_1^3) + 720 \cdot (T_1 + T_2)^2 T_1^2 T_2^2 + 720 \cdot (T_1 + T_2) T_1 T_2 (T_2^2 + 3T_1 T_2 + T_1^2) + 360T_1 T_2 (T_2^4 + 5T_1 T_2^3 + 8T_1^2 T_2^2 + 5T_1^3 T_2 + T_1^4) + 240 \cdot (T_1 + T_2)^2 (T_2^2 + 6T_1 T_2 + T_1^2) + 180 \cdot (T_2^5 + 7T_1 T_2^4 + 16T_1^2 T_2^3 + 16T_1^3 T_2^2 + 7T_1^4 T_2 + T_1^5) + 240 \cdot (T_1 + T_2) (2T_2^2 + 5T_1 T_2 + 2T_1^2) + 60 \cdot (7T_2^4 + 25T_1 T_2^3 + 36T_1^2 T_2^2 + 25T_1^3 T_2 + 7T_1^4) + 5 \cdot (75T_2^3 + 177T_1 T_2^2 + 177T_1^2 T_2 + 75T_1^3) + 336 \cdot (T_1 + T_2)^2 + 112 \cdot (T_1 + T_2) + 16}{3 \cdot (59T_2^2 + 98T_1 T_2 + 59T_1^2) + 49 \cdot (T_1 + T_2) + 7}$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клюев, А.С. Синтез быстродействующих регуляторов для объектов с запаздыванием / А.С. Клюев, В.С. Карпов. – М. : Энергоатомиздат, 1990. – 176 с.
2. Павлов, А.А. Синтез релейных систем оптимизации по быстродействию / А.А. Павлов. – М. : Наука, 1988. – 150 с.
3. Янушевский, Р.Т. Управление объектами с запаздыванием / Р.Т. Янушевский. – М. : Наука, 1978. – 416 с.
4. Королев, Н.А. О компенсации запаздывания в релейных системах / Н.А. Королев // Автоматика и телемеханика. – 1961. – № 5. – С. 605 – 612.
5. Новосельцев, В.Н. Об оптимальном управлении при помощи запаздывания / В.Н. Новосельцев // Автоматика и телемеханика. – 1964. – № 11. – С. 1545 – 1548.
6. Ашорин, В.В. Синтез оптимальных алгоритмов непосредственного цифрового управления для процессов с чистым запаздыванием / В.В. Ашорин, М.З. Зауровский // Адаптивные системы автоматического управления : республиканский межвузовский научно-технический сборник. – 1978. – № 6. – С. 39 – 44.
7. Гурецкий, Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием / Х. Гурецкий. – М. : Машиностроение, 1974. – 328 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	3
1. <b>СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ</b> .....	4
1.1. Запозывание в объектах управления и его влияние на динамику оптимальных по быстродействию систем .....	4
1.2. Методы оптимального по быстродействию управления объектами с запаздыванием .....	6
1.3. Квазиоптимальное по быстродействию управление объектами с запаздыванием в промежуточных координатах ...	9
2. <b>ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ</b> .....	26
2.1. Классификация объектов с запаздыванием .....	26
2.2. Уравнения динамики объектов с запаздыванием во временной области .....	28
2.3. Описание динамических свойств объектов с запаздыванием в частной области .....	36
2.4. Приближенная замена системы с запаздыванием обыкновенными динамическими системами .....	37
2.5. Приближенные описания динамических свойств систем с запаздыванием в частной области .....	43
2.6. Управляемость и наблюдаемость систем с запаздыванием .....	46
3. <b>СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УПРАВЛЕНИИ ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ</b> .....	52
3.1. Декомпозиция для одного класса объектов с запаздыванием в управлении .....	53
3.2. Исследование системы с одним запаздыванием .....	54
3.3. Исследование систем с несколькими временами запаздывания .....	58
4. <b>Примеры проектирования систем управления с запаздыванием</b> .....	62
4.1. Система управления подачей сырья в химический реактор ...	62
4.2. Оптимальное регулирование величины рН в химико-технологических объектах .....	67
4.3. Расчет настроек регуляторов для процессов с запаздыванием .....	70
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	75