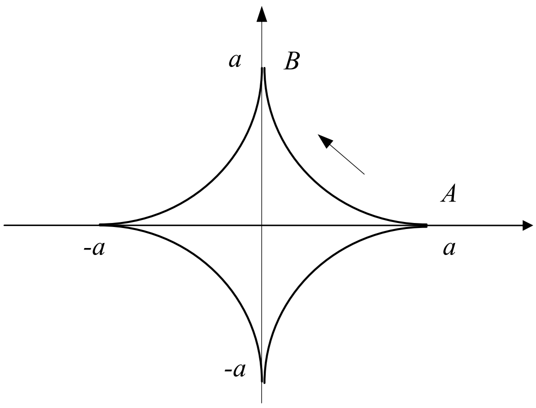
ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



♦ **Издательство ТГТУ** ♦

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"

ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методические разработки

Тамбов
Издательство ТГТУ
2006

УДК 517.3:317.2
ББК В161я73
Н34

Р е ц е н з е н т

Кандидат физико-математических наук, доцент
А.В. Медведев

С о с т а в и т е л ь
А.Д. Нахман

Н34 Интегралы функций одной и нескольких переменных. Дифференциальные уравнения : учебно-методические разработки / Сост. А.Д. Нахман. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. – 32 с. 200 экз. ISBN 5-8265-0472-2.

Изложены основные теоретические сведения курса "Интегралы функций одной и нескольких переменных. Дифференциальные уравнения" и алгоритмы решения стандартных задач. Контрольные задания в значительной степени носят прикладной характер.

Предназначены для студентов инженерных специальностей заочной формы обучения.

УДК 517.3:317.2
ББК В161я73

ISBN 5-8265-0472-2

Учебное издание

ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методические разработки

Составитель НАХМАН Александр Давидович

Редактор Е.С. Мордасова

Инженер по компьютерному макетированию Е.В. Кораблева

Подписано в печать 13.06.2006
Формат 60 × 84/16. Бумага газетная. Гарнитура Times New Roman.
1,78 уч.-изд. л. Тираж 200 экз. Заказ № 306

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392032, Тамбов, Советская 106, к. 14

1 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1.1 *Интегрирование* есть действие, обратное дифференцированию. Если $f(x) = F'(x)$ на некотором интервале (a, b), то функция $F(x)$ (по отношению к $f(x)$) называется первообразной.

Так, например, для $f(x) = 2x$ первообразными являются: $F(x) = x^2$, $F(x) = x^2 - 1$, ..., и, вообще, любая функция вида $F(x) = x^2 + C$, где C – произвольная постоянная.

В общем случае совокупность всех первообразных для $f(x)$, $x \in (a, b)$, имеет вид: $\{F(x) + C\}$, где $F(x)$ – некоторая (фиксированная) первообразная, C – произвольная постоянная. Такая совокупность называется неопределенным интегралом для $f(x)$. Обозначение:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C .$$

1.1.2 *Таблица интегралов*

1) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$;

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3) $\int e^x dx = e^x + C$;

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

6) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$;

8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$;

9) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

10) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C$.

1.1.3 *Линейность интеграла*

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx; \ \lambda, \mu = \mathrm{const}.$$

1.1.4 *Приемы интегрирования*

а) Использование таблицы, линейности и почленного деления. Например

$$\int \frac{3\sqrt{x} - 2x + 1}{x} dx = \int \left(\frac{3\sqrt{x}}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = 3\int x^{-\frac{1}{2}} dx - 2\int dx + \int \frac{dx}{x} =$$

$$= 3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2x + \ln|x| + C = 6\sqrt{x} - 2x + \ln|x| + C .$$

б) Замена переменных $t = \varphi(x)$ по формуле

$$\int f(\varphi(x))\, \varphi'(x) dx = \int f(t)\, dt .$$

Указанная замена эффективна, если в произведении с dx имеется множитель, являющийся (с точностью до постоянного коэффициента) производной выражения ("блока"), от которого зависит оставшийся множитель. Этот блок и обозначаем новой буквой. Вычислив интеграл, возвращаемся к старой переменной.

П р и м е р. $J = \int \dfrac{x dx}{1+x^2}$.

Заметим, что множитель x есть "почти производная" от блока $1 + x^2$, т.е. $(1 + x^2)' = 2x$.Следовательно, полагаем $t = 1 + x^2$ и устанавливаем связь дифференциалов: $dt = 2x dx$.

Числитель подынтегрального выражения будет равен dt, если его домножить на 2 (одновременно умножим интеграл на 1/2):

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C .$$

в) Выделение полного квадрата в случае квадратного трехчлена в знаменателе дроби. Здесь следует пользоваться формулой

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

и заменой переменных $t=x+\frac{b}{2a}$, откуда $x=t-\frac{b}{2a}$, $dx=dt$.

П р и м е р 1. $J=\int\frac{dx}{x^2+8x+17}$.

Используем формулу в), в которой $a=1,\ b=8,\ c=17$. Имеем

$$J=\int\frac{dx}{(x+4)^2+1}=\operatorname{arctg}(x+4)+C.$$

1.1.5 *Интегрирование "по частям"*

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Прием эффективен при интегрировании функций логарифмической, обратных тригонометрических, а также произведений функций степенной на показательную, тригонометрическую, обратную тригонометрическую. Выбор множителя *u* (оставшийся множитель в интеграле есть dv) обусловлен такими соображениями:

- du должен иметь простой вид;
- первообразная $v=\int dv$ должна легко отыскиваться;
- $\int vdu$ должен оказаться проще $\int udv$ (т.е. исходного).

П р и м е р. $J=\int xe^{1+2x}dx$.

Имеем произведение степенной и показательной функций. Выберем $u=x$. Тогда $dv=e^{1+2x}dx$. Следовательно $du=dx$, $v=\int e^{1+2x}dx=\frac{1}{2}e^{1+2x}$.

По формуле 1.1.5 имеем

$$J=x\frac{1}{2}e^{1+2x}-\int\frac{1}{2}e^{1+2x}dx=\frac{1}{2}xe^{1+2x}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}e^{1+2x}+C=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{1+2x}+C.$$

Заметим, что возможен был выбор $u=e^{1+2x}$, $dv=xdx$, но в результате бы интеграл $\int vdu$ оказался сложнее исходного.

1.1.6 *Интегрирование рациональных дробей.* Речь идет о дробях – отношениях многочленов. Дробь правильная, если степень числителя меньше степени знаменателя и неправильная – в противном случае.

а) Если предстоит интегрировать правильную дробь, то ее знаменатель записываем в виде произведения множителей типа $(x-a)^n$ и $\left(x^2+px+q\right)^m$. После этого она представляется суммой слагаемых типа

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}(k=1,...,n)\quad \text{и}\quad \frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}(k=1,...,m)$$

интегрирование которых – стандартная задача.

П р и м е р. $J=\int\frac{x^2-x+3}{8x^3+8x^2}dx$.

Имеем: $$\frac{x^2-x+3}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}.$$

Если определить коэффициенты *A*, *B*, *C*, то интегрирование сведется к табличному. Приводя дроби к общему знаменателю, коэффициенты многочленов в левой и правой части (коэффициенты при одинаковых степенях) будем иметь равными:

$$x^2-x+3=A(x+1)+Bx(x+1)+Cx^2 \text{ или } x^2-x+3=(B+C)x^2+(A+B)x+A,$$

откуда $B+C=1$, $A+B=-1$; $A=3$. Значит, $B=-4$, $C=5$ и

$$J=\frac{1}{8}\int\left(\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x}+\frac{5}{x+1}\right)dx=\frac{1}{8}\left(3\frac{x^{-1}}{-1}-4\ln|x|+5\ln|x+1|+C\right).$$

б) Неправильную дробь можно представить как результат деления с остатком (деления "углом")

$$\text{дробь} = \text{частное} + \frac{\text{остаток}}{\text{знаменатель}},$$

после чего задача интегрирования сводится к цепочке известных задач.

1.1.7 *Интегрирование некоторых типов иррациональностей*:

а) Если в подынтегральном выражении с блоком $\sqrt[n]{ax+b}$ и аргументом x выполняются лишь арифметические действия, то вводится новая переменная $t=\sqrt[n]{ax+b}$, откуда затем выражается x и вычисляется dx.

б) Если арифметические действия выполняются над блоками $\sqrt[m]{ax+b}$, $\sqrt[n]{ax+b}$, ... и аргументом x, то переменная t вводится по формуле $t^N = ax+b$, где N – наименьшее общее кратное чисел m, n, ...; далее поступаем как в п. а).

Полученные в п. а), б) интегралы – интегралы рациональных функций переменной t.

П р и м е р. $J=\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

Имеем интеграл типа 1.1.7, б). Общее наименьшее кратное показателей корней $N=4$. Следовательно $t^4 = x$, а тогда $dx = 4t^3dt$. Значит

$$J=\int \frac{\sqrt[4]{t^4}\,4t^3dt}{1+\sqrt{t^4}} = 4\int \frac{t^4dt}{1+t^2} = 4\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt =$$

$$=4\left(\frac{1}{3}t^3 - t + \operatorname{arctg} t + C\right) = 4\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x} + \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C\right).$$

1.1.8 *Интегрирование некоторых типов тригонометрических выражений*

Универсальная тригонометрическая подстановка

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2};\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

применяется, если подинтегральное выражение содержит только арифметические действия над $\sin x$ и $\cos x$; при этом получаем интегралы типа 1.1.4, 1.1.6.

П р и м е р. $J=\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

Положим $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; согласно формулам 1.1.8 имеем

$$J=\int \frac{2dt}{1+t^2} : \left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right) = \int \frac{2dt}{1+2t+t^2} = -2(t+1)^{-1} + C = C - \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

1.1.9 *Тригонометрические подстановки* при интегрировании некоторых иррациональностей.

а) Если подинтегральное выражение содержит только арифметические действия над x и $\sqrt{a^2-x^2}$, то применяется замена $x=a\cos t$ (или $x=a\sin t$), после чего $\sqrt{a^2-x^2}=\pm a\sin t$, $dx=-a\sin t dt$.

б) Если та же ситуация с x и $\sqrt{x^2-a^2}$, то полагаем $x=\frac{a}{\cos t}$ (или $x=\frac{a}{\sin t}$), тогда $\sqrt{x^2-a^2}=\pm a\operatorname{tg} t$, $dx = a\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$.

в) В случае же x и $\sqrt{x^2+a^2}$ полагаем $x=a\operatorname{tg} t$ (или $x=a\operatorname{ctg} t$), тогда $\sqrt{x^2+a^2}=\pm\frac{a}{\cos t}$, $dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt$.

1.1.10 В заключение отметим, что любая непрерывная функция $f(x)$ обладает первообразной, но не для всякой элементарной функции первообразная также будет элементарной. Так, например, через элементарные функции не выражаются интегралы вида $\int e^{x^2}dx$, $\int\frac{dx}{\ln x}$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ и др.

1.2 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.2.1 К понятию *определенного интеграла* приводит задача о нахождении площади криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a,b]$ оси абсцисс, прямыми $x = a$, $y = b$ и графиком непрерывной на $[a,b]$ функции $y = f(x)$.

Такую площадь, как оказывается, естественно вычислить в виде приращения первообразной $F(x)$, (любой из первообразных) на отрезке $[a,b]$.

Число вида

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

называется определенным интегралом.

1.2.2 *Формула интегрирования по частям имеет вид*

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu .$$

1.2.3 Если $x = \varphi(t)$ монотонна на $[\alpha,\ \beta]$, например, возрастает от $x = a$ к $x = b$ при $\alpha \le t \le \beta$, то *формула замены* переменных имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

(знак "минус" в правой части – в случае убывания $\varphi(t)$).

Заменяя переменную под знаком определенного интеграла, следует переходить к новым пределам интегрирования, и, найдя первообразную, к старой переменной не возвращаться.

П р и м е р . Вычислить $J = \int_0^1 \frac{\cos(\operatorname{arctg} x)\, dx}{x^2 + 1}$.

Решения. Положим $t = \operatorname{arctg} x$; тогда $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ и $dt = \frac{dx}{1 + x^2}$

Имеем $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = \sin t\Big|_0^{\pi/4} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.3 НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.3.1 *Интегралы с бесконечными пределами* интегрирования определяются следующим образом ($f(x)$ полагаем непрерывной на соответствующих интервалах):

а) $\int_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{B\to\infty}\int_a^B f(x)dx$; б) $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)dx$;

в) $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx$

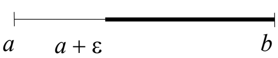
(относительно последних двух интегралов см. п. а), б)).

Если в случаях а), б) указанный предел не существует или бесконечен, то интеграл называется расходящимся. В случае же в) исходный интеграл считается расходящимся, если таковым является хотя бы один из интегралов в правой части равенства.

1.3.2 *Интегралы от функций с разрывами* второго рода определяются следующим образом (в п. а) и б) параметр $\varepsilon > 0$):

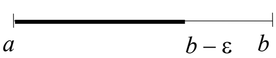
а) $f(x)$ имеет разрыв на левом конце отрезка $[a,b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx ;$$



б) $f(x)$ разрывна в точке b:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx ;$$



в) $f(x)$ имеет разрыв в точке $c \in (a,\ b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(относительно последних двух интегралов см. п. а), б)).

В случаях, если соответствующий предел не существует или бесконечен (см. п. а), б)) интеграл называется расходящимся; расходимость в случае п. в) определяется аналогично 1.3.1, в).

П р и м е р. $J = \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}dx$.

Функция $f(x) = \frac{e^{\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}$ имеет разрыв на правом конце промежутка интегрирования. Согласно п. б), 1.3.2 имеем:

$$J = \lim_{\varepsilon\to 0}(-2)\int_0^{1-\varepsilon} e^{\sqrt{1-x}}\, d\sqrt{1-x} = -2\lim_{\varepsilon\to 0} e^{\sqrt{1-x}}\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(e^{\sqrt{\varepsilon}} - e^1\right) = -2\left(e^0 - e\right) = 2(e-1) .$$

1.4 ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Перечислим основные геометрические приложения определенных интегралов.

1.4.1 *Площадь фигуры*

а) Если плоская фигура D ограничена линиями $x = a,\ x = b,\ \ y = g(x),\ y = f(x)$, где g и f – непрерывны на $[a,\ b]$ и $g(x) \le f(x)$ при $x \in [a,\ b]$, то ее площадь $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

В частности, при $g(x) \equiv 0$ имеем площадь криволинейной трапеции (см. п. 1.2.1).

б) Если $y = f(x) \ge 0$ задана параметрически в виде:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta ,$$

причем x пробегает отрезок $\{a,\ b]$ при $\alpha \le t \le \beta$ (т.е. $x'(t) > 0$, $a = x(\alpha)$, $b = f(\beta)$), то площадь криволинейной трапеции находится по формуле

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)\ x'(t)\ dt .$$

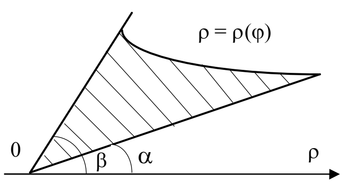


Рис. 1.4.1

в) Площадь сектора, определяемого в полярных координатах соотношениями $\alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 \le \rho \le \rho(\varphi)$, где $\rho(\varphi)$ – непрерывна на $[\alpha,\ \beta]$, (рис. 1.4.1) вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi .$$

1.4.2 *Длина дуги линии*

а) Если линия L задана в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, то длина ее дуги, соответствующей значениям $x \in [a,\ b]$, вычисляется по формуле $l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$.

б) Дуга заданной параметрически линии $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$

в случае $t \in [\alpha,\ \beta]$ имеет длину $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(x)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$ (предполагается монотонность $x(t)$ на отрезке $[\alpha,\ \beta]$).

в) Частным случаем п. б) является задание линии в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$. В этом случае $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi$.

П р и м е р. Найти длину дуги линии $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$, $0 \le x \le 2$.

Заметим, что $y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)$; $(y')^2 = \frac{1}{4}\left(e^x - 2 + e^{-x}\right)$.

Следовательно, согласно 1.4.2 а), имеем

$$l = \int\limits_0^2 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int\limits_0^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^x - 2 + e^{-x}\right)} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \sqrt{e^x + 2 + e^{-x}}\, dx = = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \sqrt{\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}\, dx = e - \frac{1}{e}.$$

1.4.3 *Объем тела вращения*. Тело, образованное вращением вокруг $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной осью $0x$, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком $y = f(x)$ ($f(x) \ge 0$ при $x \in [a, b]$), имеет объем $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x) dx$.

П р и м е р. Найти объем тела, образованного вращением криволинейного треугольника вокруг оси $0x$, если треугольник ограничен осью $0x$, прямой $x = \frac{\pi}{4}$ и графиком $y = \mathrm{tg}x$.

Решение. Имеем

$$V = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x dx = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \pi \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \right) = \pi - \frac{\pi^2}{4}.$$

2 КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1 ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

2.1.1 Пусть *функция двух переменных* $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой плоской области D. Если граница D задана уравнением $x = a$, $x = b$, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ причем φ и ψ непрерывны на $[a, b]$ и $\varphi(x) \le \psi(x)$, $x \in [a, b]$, то *двойной интеграл* в декартовых координатах (рис. 2.1.1) вычисляется в виде *двукратного определенного интеграла*

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy.$$

Сначала вычисляется внутренний интеграл (при фиксированном x), а затем полученное (зависящее от x) выражение интегрируется по промежутку $[a, b]$.

В случае же, если граница D задана уравнениями $y = p$, $y = q$, $x = \mu(y)$, $x = \nu(y)$, причем μ и ν непрерывны на $[p, q]$ и $\mu(y) \le \nu(y)$ $(y \in [p, q])$, имеем (рис. 2.1.2)

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \int\limits_p^q dy \int\limits_{\mu(y)}^{\nu(y)} f(x, y)\, dx$$

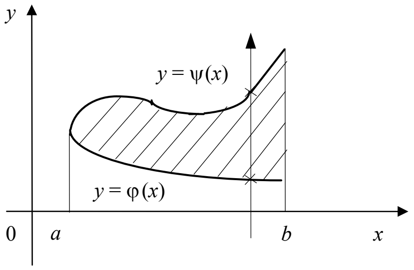


Рис. 2.1.1

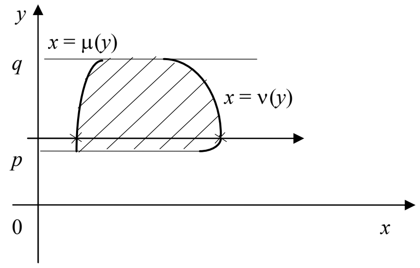


Рис. 2.1.2

В случае $f(x, y) > 0$, $(x, y) \in D$ *двойной интеграл* есть *масса* плоской пластины D с плотностью (в каждой точке (x, y)) $\rho = f(x, y)$.

П р и м е р ы. 1 Изменить порядок интегрирования

$$J=\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{2}x^3}^{2\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy .$$

Решение. Изобразим границу области (уравнения соответствующих линий определяются нижними и верхними пределами интегрирования):

$x=0,\ x=2,\ y=\frac{1}{2}x^3,\ y=2\sqrt{2x}$ (рис. 2.1.3).

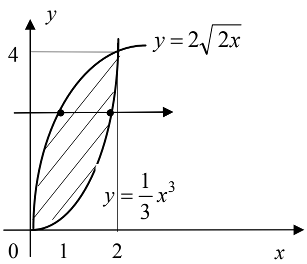


Рис. 2.1.3

Если спроектировать область на ось 0*y*, то $y_1 \le y \le y_2$, где y_1 и y_2 определяются решениями системы уравнений: $y=\frac{1}{2}x^3$, $y=2\sqrt{2x}$. Имеем $y_1=0,\ y_2=4$, следовательно внешнее интегрирование теперь – по отрезку $[0,\ 4]$. Чтобы определить пределы "внутреннего" интегрирования (по переменной *x*), следует выразить *x* (через *y*) из уравнений левой границы (точка входа горизонтальной прямой в область) $y=2\sqrt{2x}$ и правой границы (точка выхода) $y=\frac{1}{2}x^3$. Имеем соответственно $x=\frac{y^2}{8}$ и $x=\sqrt[3]{2y}$.

Поэтому $J=\int_0^4 dy\int_{\frac{y^2}{8}}^{\sqrt[3]{2y}} f(x,y)dx$.

2 Найти массу плоской пластины *D*, заданной плотности $\rho=24yx^2$, расположенной в плоскости *x*0*y*, если *D* ограничена линиями $y=-2x,\ \ y=\frac{x}{2},\ y=2$.

Решение. Согласно 2.1.1 достаточно вычислить

$$\iint_D \rho dxdy\ ,\ \text{т.е.}\ \iint_D 24yx^2dxdy .$$

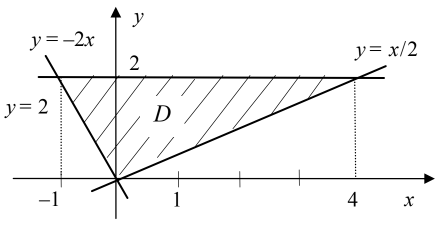


Рис. 2.1.4

Внешнее интегрирование произведем по *y*, $0\le y\le 2$. Во внутреннем интеграле *x* изменяется от $\left(-\frac{y}{2}\right)$ до $2y$ (*x* выражен соответственно из уравнений левой и правой границы; рис. 2.1.4). Итак,

$$J=\int_0^2 dy\int_{-\frac{y}{2}}^{2y}24yx^2dx=\int_0^2 dy\left(24y\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\frac{y}{2}}^{2y}\right)=65\int_0^2 y^4dy=416 .$$

2.1.2 Если теперь область *D* расположена в полярной системе координат и ограничена лучами $\varphi=\alpha,\ \varphi=\beta$ и линиями $\rho=\rho_1(\varphi)$ и $\rho=\rho_2(\varphi)$ ($\alpha<\beta,\ \rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi)$ при $\varphi\in[\alpha,\ \beta]$), то площадь области *D* вычисляется по формуле

$$S=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho d\rho .$$

П р и м е р. Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной линией (заданной в декартовых координатах)

$$\left(x^2+y^2\right)^2-5x^2-4y^2=0 .$$

Решение. Отметим, что линия симметрична относительно обеих координатных осей (так как *x* и *y* в уравнении содержатся в четных степенях). Запишем уравнение границы в полярных координатах:

$$\left(\rho^2\right)^2-5\rho^2\cos^2\varphi-4\rho^2\sin^2\varphi=0\ \text{откуда}\ \rho^2=4+\cos^2\varphi,\rho=\sqrt{4+\cos^2\varphi} .$$

Имеем (рис. 2.1.5)

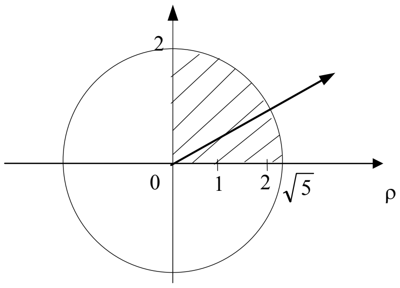


Рис. 2.1.5

$$\frac{1}{4}S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{4+\cos^2\varphi}} \rho d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4+\cos^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{9\pi}{8}.$$

Отсюда $S = \dfrac{9\pi}{2}$.

2.2 ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

2.2.1 Определение тройного интеграла вводится в связи с физической задачей о массе тела. Пусть *функция трех переменных* $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой пространственной области *V*, причем *V* проектируется в плоскую область *D* на *x*0*y*. Если *V* ограничена снизу поверхностью $z = \varphi(x, y)$, сверху – поверхностью $z = \psi(x, y)$ (функции φ и ψ непрерывны в *D*), а боковая поверхность – цилиндрическая с образующей, параллельной оси 0*z* (направляющей служит граница *D*), то *тройной интеграл* функции *f* по области *V* вычисляется в виде

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz .$$

Сначала вычисляем внутренний интеграл (по переменной *z*) при фиксированных *x* и *y*. Затем результат – функцию от *x* и *y* – интегрируем по области *D*.

2.2.2 *Физический смысл* тройного интеграла при $f > 0$ – *масса* тела, расположенного в области *V* и имеющего плотность $\rho = f(x,y,z)$. В частности, при $f = 1$, имеем объем *v* области *V*:

$$v = \iiint_V dxdydz .$$

П р и м е р. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 0,\ z = x^2 + y^2 + 1,\ y = \frac{x}{2}, y = x,\ y = 2 .$$

Имеем (рис 2.2.1 и 2.2.2):

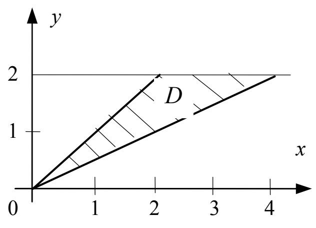


Рис. 2.2.1

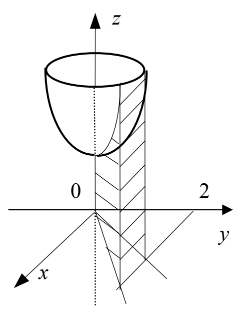


Рис. 2.2.2

$$v = \iint_D dxdy \int_0^{x^2+y^2+1} dz = \iint_D dxdy \left(z\Big|_0^{x^2+y^2+1} \right) = \iint_D \left(x^2 + y^2 + 1\right) dxdy =$$

$$= \int_0^2 dy \int_y^{2y} \left(x^2 + y^2 + 1)\right) dx = \frac{46}{3} .$$

2.3 КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО КООРДИНАТАМ

2.3.1 Пусть сила $\overline{F} = P(x,y)\,\overline{i} + Q(x,y)\,\overline{j}$ перемещает материальную точку M из начала дуги – точки A, в конец – точку B (рис. 2.3.1).

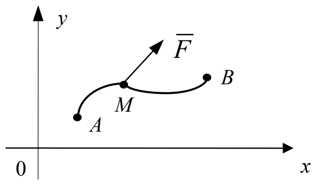


Рис. 2.3.1

Задача о вычислении *работы силы* F (совершаемой вдоль $\cup AB$ линии L) приводит к рассмотрению, так называемого, криволинейного интеграла по координатам

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,.$$

2.3.2 Пусть дуга AB расположена в области D, где P и Q – непрерывные функции. Если линия L имеет параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$$

причем положение точки A соответствует значению $t = \alpha$, положение B – значению $t = \beta$, то

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\right]dt\,.$$

Если же линия L имеет уравнение $y = \varphi(x)$, причем $x = a$ и $x = b$ – абсциссы соответственно точек A и B, то

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} \left[P\big(x,\varphi(x)\big) + Q\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x)\right]dx\,.$$

Смысл формул состоит в том, что *выражения для* x и y из уравнений линии *подставляем в подынтегральное выражение* $Pdx + Qdy$ (при этом вычисляем дифференциалы dx и dy), после чего производим интегрирование в границах изменения параметра.

П р и м е р. Вычислить работу силы $\overline{F} = \left(3y + x^3\right)\overline{i} + 4x\overline{j}$ по перемещению материальной точки вдоль контура $y = x^3$ из начального положения 0 с абсциссой $x_1 = 0$ в положение B с абсциссой $x_2 = 1$.

Решение. Имеем вектор $\overline{F} = P\overline{i} + Q\overline{j}$ с координатами

$$P= 3y + x^2,\ Q = 4x.$$

Тогда работа (при $y = x^3$, $0 \le x \le 1$) есть $J = \int\limits_0^1 \left(3x^3 + x^3 + 4x\,3x^2\right)dx = 4$.

3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1 УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

3.1.1 *Уравнение* вида $y' = f(x,y)$ будем рассматривать как задачу о нахождении функции $y = y(x)$, которая при подстановке вместо y обращает это соотношение в тождество.

На самом деле в процессе интегрирования определится класс решений $y = y(x, C)$, где C – произвольная постоянная, который называется общим решением дифференциального уравнения. При каждом конкретном значении $C = C_0$ получаем "частное решение" $y = y(x,\ C_0)$.

Задача вида

$$\begin{cases} y' = f(x,\ y); \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

называется задачей Коши.

3.1.2 Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x)\,g(y)$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

П р и м е р. $xy' = \left(4 + y^2\right)\ln x$. Найти общее решение.

Имеем уравнение в разделяющимися переменными

$$x\frac{dy}{dx}=\left(4+y^2\right)\ln x .$$

Умножим обе части на dx, поделим на $x\left(4+y^2\right)$ и произведем интегрирование:

$$\int\frac{dy}{2^2+y^2}=\int\ln x d\,(\ln x);\;\; \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}=\frac{\ln^2 x}{2}+\frac{1}{2}C .$$

Итак, получено общее решение $\operatorname{arctg}\frac{y}{2}=\ln^2 x+C$.

3.1.3 Уравнение вида

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

или приводящееся элементарными преобразованиями к указанному виду, называется *однородным*. Заменой переменных $t=\frac{y}{x}$ (откуда $y'=t+t'x$), уравнение преобразуется к рассмотренному типу 3.1.2.

3.1.4 Уравнение вида

$$y'+p(x)\,y=q(x)$$

называется *линейным*, а уравнение $y'+p(x)\,y=q(x)\,y^{\gamma}\,(\gamma\neq 0{,}1)$ носит имя Бернули.

Общее решение имеет вид $y=v(x)\,u\,(x,C)$, где выбор функций u и v поясним на следующем примере.

Пример. $y'-\frac{y}{2\sqrt{x}}=2e^{\sqrt{x}}$. Найти общее решение.

Имеет линейное уравнение; положим $y=uv$, тогда $y'=u'v+uv'$. Подставляя в уравнение, получим

$$u'v+uv'-\frac{uv}{2\sqrt{x}}=2e^{\sqrt{x}} \quad \text{или} \quad u'v+u\left(v'-\frac{v}{2\sqrt{x}}\right)=2e^{\sqrt{x}} .$$

Пусть $v'-\frac{v}{2\sqrt{x}}=0$, тогда $u'v=2e^{\sqrt{x}}$.

Решаем последовательно, разделяя переменные, полученные уравнения

а) $\frac{dv}{dx}-\frac{v}{2\sqrt{x}}=0;\;\; \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{2\sqrt{x}};$

откуда $v=e^{\sqrt{x}}$ (выбрана одна из первообразных $v\,(x)$).

б) $u'v=2e^{\sqrt{x}}$ или $\frac{du}{dx}e^{\sqrt{x}}=2e^{\sqrt{x}}$; значит $du=2dx$, откуда $u=2x+C$ (в отличие от случая а) здесь ищется общее решение).

Поскольку $y=uv$, то ответ имеем в виде $y=\left(2x+C\right)e^{\sqrt{x}}$.

3.2 УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.2.1 Функция $y=y(x)$ есть решение уравнения

$$y''=f(x,y,y')$$

(уравнение *второго порядка* соответственно порядку *старшей производной*), если при ее подстановке в уравнение оно обращается в тождество. Общее решение

$$y=y(x,\ C_1,\ C_2)\;\; (\text{или } \Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2)=0)$$

зависит от двух произвольных постоянных. Задача Коши имеет вид

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y'); \\ y\,(x_0)=y_0; \\ y'\,(x_0)=y_0', \end{cases}$$

где $\left(x_0,\ y_0,\ y_0'\right)$ – заданная точка пространства; чтобы удовлетворить начальным условиям, следует соответствующим образом подобрать C_1 и C_2.

3.2.2 В следующих случаях путем надлежащей замены переменных уравнение второго порядка решается *последовательным рассмотрением* двух *уравнений первого порядка* (*понижение порядка*):

а) $y''=f\,(x)$; б) $y''=f(x,\ y')$; в) $y''=f(y,\ y')$.

В случаях а), б) вводится новая переменная $z(x) = y'$, тогда $y'' = \frac{dz}{dx}$, в случае в) полагаем $y' = p(y)$, тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$.

П р и м е р. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} yy'' + \left(9/y^2\right) = 0; \\ y(0) = 1/3; \\ y'(0) = 9. \end{cases}$$

Имеем случай 3.2.2, в). Полагая $y' = p(y)$, получим $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Следовательно $yp\frac{dp}{dy} + \frac{9}{y^2} = 0$ или (разделяя переменные) $pdp = -\frac{9}{y^3}dy$,

откуда

$$\int pdp = -9\int y^{-3}dy, \ \frac{p^2}{2} = \frac{9}{2y^2} + \frac{C_1}{2}, \text{ т.е. } (y')^2 = \frac{9}{y^2} + C_1.$$

Постоянную C_1 можно найти уже на этом этапе, если, положив $x = 0$, использовать начальные условия: $y(0) = \frac{1}{3}, \ y'(0) = 9$:

$$9^2 = \frac{9}{1/9} + C_1; \quad C_1 = 81 - 81 = 0.$$

Значит, решаем уравнение $(y')^2 = \frac{9}{y^2}, \ y' = \frac{3}{y}$ (при извлечении корня для определенности выбран знак плюс; это оправдано тем, что в точке $x = 0$, y и y' имеют одинаковый знак). Разделяя переменные, имеем $y^2 = 6x + C$, и так как $y(0) = \frac{1}{3}$, то $y^2 = 6x + \frac{1}{9}$, т.е. $y = \frac{\sqrt{1+54x}}{3}$.

3.2.3 *Линейное однородное уравнение* (ЛОУ) второго порядка с постоянными коэффициентами – это уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, \ q = \text{const}.$$

Его общее решение имеет вид $y = C_1y_1 + C_2y_2$, где $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – так называемая фундаментальная система решений (ФСР), которая определяется следующим образом:

а) строится характеристическое уравнение (квадратное уравнение с теми же коэффициентами): $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$;

б) если оно имеет действительные различные корни λ_1 и λ_2 (дискриминант $D = p^2 - 4q > 0$), то $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$;

в) если корни уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (дискриминант $D = 0$), то

$$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = xe^{\lambda x};$$

г) если характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни

$$\lambda_1 = a + ib, \ \lambda_2 = a - ib \ \left(i^2 = -1; \ D < 0\right),$$

то $y_1 = e^{ax}\cos bx$, $y_2 = e^{ax}\sin bx$.

В частности, если $\lambda = \pm ib$, то $y_1 = \cos bx$, $y_2 = \sin bx$.

П р и м е р ы. 1) Найти общее решение

$$2y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Корни характеристического уравнения $2\lambda_2 + 2\lambda + 5 = 0$ имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$$

(см. случай г)). Следовательно,

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{3}{2}x, \qquad y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{3}{2}x$$

и $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{3}{2}x + C_2 \sin\frac{3}{2}x\right)$ – общее решение.

3.2.4 *Линейное неоднородное уравнение* (ЛНУ) второго порядка имеет вид

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

Ограничимся случаем постоянных коэффициентов p, q. Уравнение 3.2.3 будем называть соответствующим ему ЛОУ. Пусть $y_ч$ – некоторое частное решение ЛНУ, а $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ общее решение соответствующего ЛОУ.

Тогда общее решение ЛНУ есть $y = y_0 + y_ч$.

Если $f(x)$ имеет следующий специальный вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right),$$

где P и Q – многочлены соответствующих степеней, то

$$y_ч = x^r e^{\alpha x}\left(\widetilde{P}_N(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_N \sin\beta x\right).$$

Здесь N – наибольшая из степеней n и m многочленов; r – количество совпадений "контрольного числа" $S = \alpha + i\beta$ с корнями λ_1, λ_2 характеристического уравнения. Так, в случае $f(x) = A e^{\alpha x}\left(A = \text{const}\right)$,имеем $y_ч = x^r M e^{\alpha x}$, где параметр M определяется по методу неопределенных коэффициентов (см. пример).

П р и м е р. $y'' - 2y' - 3y = 3e^x$. Найти общее решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, следовательно, $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$.

Перейдем к нахождению $y_ч$; так как $f(x) = 3e^{1x}$, то $\alpha = 1$ и контрольное число $S = \alpha = 1$. Поскольку $S \neq \lambda_1$, $S \neq \lambda_2$, то $r = 0$, и $y_ч = Me^x$. Осталось определить коэффициент M. Как указано выше, находим $y'_ч = Me^x$, $y''_ч = Me^x$ и подставляем в неоднородное уравнение:

$$Me^x - 2Me^x - 3Me^x = 3e^x, \text{ откуда } M = -\frac{3}{4}.$$

Итак, $y_ч = -\frac{3}{4}e^x$ и общее решение имеет вид $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{3}{4}e^x$.

3.3 КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

3.3.1 Как отмечалось выше, общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольных постоянных (две "степени свободы"). Частное решение может быть выделено из общего путем задания двух начальных условий. Например, в механике это может быть задание положения движущегося объекта в начальный момент и начальной скорости. Однако, может быть задано также положение объекта в два различных момента времени. Например, процесс механических колебаний объекта массы m относительно положения равновесия описывается уравнением

$$my'' + hy' + ky = f(t),$$

где $y = y(t)$ – отклонение в момент t точки от положения равновесия; h – коэффициент трения; k – коэффициент упругости восстанавливающей силы; $f(t)$ – внешняя сила. Если задать положения α и β объекта в моменты соответственно τ и τ_*

$$\begin{cases} y(\tau) = \alpha \\ y(\tau_*) = \beta \end{cases},$$

то приходим к так называемой *краевой задаче*. Подобная математическая модель возникает и в задаче об электрических колебаниях и др.

П р и м е р. Механические колебания материальной точки описываются уравнением $y'' + 8y' + 17y = e^{-4t}$,

причем положение точки в начальный момент и в момент $t = 1$ заданы:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Определить отклонение $y(t)$ точки от положения равновесия в любой момент времени t.

Решение. Найдем общее решение ЛНУ. Характеристическое уравнение для соответствующего ЛОУ имеет корни $\lambda_{1,2} = -4 \pm i$, поэтому общее решение ЛОУ получаем в виде $y_0 = e^{-4t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$.

Поскольку контрольное число $S = -4$ не совпадает ни с одним из корней, то $y_ч = Me^{-4t}$. Находя $y'_ч = -4Me^{-4t}$ и $y''_ч = 16Me^{-4t}$ и подставляя результаты в ЛНУ, получаем $16Me^{-4t} - 32Me^{-4t} + 17Me^{-4t} = e^{-4t}$, откуда $M = 1$, так что $y_ч = e^{-4t}$.

Следовательно, $y = y_0 + y_ч = e^{-4t}(1 + C_1 \cos t + C_2 \sin t)$ – общее решение ЛНУ.

Теперь подставим краевые условия: $t = 0$ и $y = 0$, $t = 1$ и $y = 0$:

$$\begin{cases} 1 + C_1 + 0 = 0; \\ e^{-4}(1 + C_1 \cos 1 + C_2 \sin 1) = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} C_1 = -1; \\ C_2 = \dfrac{-1 + \cos 1}{\sin 1}. \end{cases}$$

Окончательно,

$$y(t) = e^{-4t}\left(1 - \cos t + \frac{\cos 1 - 1}{\sin 1} \sin t\right)$$

– искомое отклонение в любой момент времени *t*.

3.4 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.4.1 Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by; \\ \dfrac{dy}{dt} = px + qy, \end{cases} \qquad a,\ b,\ p,\ q = \text{const}.$$

Общее решение ищем следующим образом:

а) составим характеристическое уравнение вида $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ p & q - \lambda \end{vmatrix} = 0$;

б) в соответствии с его корнями $\lambda_1,\ \lambda_2$ построим ФСР $\{y_1(t),\ y_2(t)\}$ и общее решение

$$\begin{cases} y = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t); \\ x = \dfrac{1}{p}(\dot{y} - qy). \end{cases}$$

П р и м е р. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -6x + 4y; \\ \dot{y} = 9x - 6y. \end{cases}$$

Имеем характеристическое уравнение $(a = -6,\ b = 4,\ p = 9,\ q = -6)$

$$\begin{vmatrix} -6 - \lambda & 4 \\ 9 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{т.е.} \quad (-6 - \lambda)^2 - 36 = 0,$$

откуда $\lambda + 6 = \pm 6,\ \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -12$. Следовательно,

$$y_1 = e^0 = 1; \ \ y_2 = e^{-12t}; \ \ y = C_1 + C_2 e^{-12t}.$$

Далее, из второго уравнения системы $x = \dfrac{1}{9}(\dot{y} + 6y)$.

Поскольку

$$\dot{y} = \left(C_1 + C_2 e^{-12t}\right)' = -12 C_2 e^{-12t}, \text{ то } x = \frac{2}{3}\left(C_1 - C_2 e^{-12t}\right).$$

Итак,

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}\left(C_1 - C_2 e^{-12t}\right); \\ y = C_1 + C_2 e^{-12t}. \end{cases}$$

Замечание. Решение системы можно понимать как совокупность возможных траекторий (законов движения) материальной точки в плоскости, найденную по известной зависимости координат $\dot{x},\ \dot{y}$ вектора скорости $\bar{v} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}$ от плоских координат этой точки.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

1-10 Найти неопределенные интегралы.

1 а) $\int \frac{e^{3x}\sqrt{x}-3x^3+4}{2\sqrt{x}}dx$; б) $\int e^{3\cos x-1}\sin x\,dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$; г) $\int x\sin\frac{x}{3}dx$.

2 а) $\int \frac{3\sqrt{x}\sin x+2\sin^2 x-1}{\sin x}dx$; б) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2+x^4}}dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+26}}$; г) $\int (1-x)e^{-x}dx$.

3 а) $\int \frac{2x\sqrt{1-x^2}+5-4\sqrt{1-x^2}\cos 4x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int \frac{1}{\cos^2 x}e^{1+\mathrm{tg}x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$; г) $\int \ln x\,dx$.

4 а) $\int \frac{4x^3e^{2-x}+5-x^2}{x^3}dx$; б) $\int \frac{2+3\ln x}{x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2-4x}$; г) $\int (x+1)\cos 2x\,dx$.

5 а) $\int \frac{x^2-4+5x^3 2^x}{x^3}dx$; б) $\int \frac{1}{x}\cos(2\ln x)dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; г) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$.

6 а) $\int \frac{2-e^x\cos^2 3x+3\cos 3x}{\cos^2 3x}dx$; б) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\int \frac{dx}{9+4x+x^2}$; г) $\int x^3\ln x dx$.

7 а) $\int \frac{9-4^{x+1}\sin^2\frac{x}{2}+5\sin\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}dx$; б) $\int \frac{e^{2\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$; г) $\int x\cos\frac{2x}{5}dx$.

8 а) $\int \frac{2e^x\sin 3x-7e^{8x}+1}{e^x}dx$; б) $\int x\sqrt{3x^2+1}dx$;

в) $\int \frac{dx}{10x-x^2}$; г) $\int (3x-1)2^x dx$.

9 а) $\int \frac{3+5\sqrt{x}+x\mathrm{ctg}2x}{x}dx$; б) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$; г) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

10 а) $\int \frac{2\left(x^2+1\right)e^{1-x}-4}{x^2+1}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^5 x}$;

в) $\int \frac{dx}{3-2x-x^2}$; г) $\int \sqrt{x}\ln x dx$.

11 – 20 Найти неопределенные интегралы.

11 $\int \frac{x^3+1}{x^3+4x^2}dx$; 12 $\int \frac{(1-x)dx}{x\left(x^2+8x+16\right)}$; 13 $\int \left(1+\cos^2\frac{x}{6}\right)\cos^2\frac{x}{6}dx$;

14 $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$; 15 $\int \frac{1-x^3}{x^3+8}dx$; 16 $\int \sin^4\frac{x}{12}dx$;

17 $\int \sin^3 x\cos^4 x dx$; 18 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}dx$; 19 $\int \frac{x+5}{\left(x^2+1\right)(x-5)}dx$;

20 $\int \frac{x^2+2}{(x+4)(x-1)^2}dx.$

Если $f(x)$ имеет следующий специальный вид

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right),$$

где P и Q – многочлены соответствующих степеней, то

$$y_{ч}=x^r e^{\alpha x}\left(\widetilde{P}_N(x)\cos\beta x+\widetilde{Q}_N\sin\beta x\right).$$

Здесь N – наибольшая из степеней n и m многочленов; r – количество совпадений "контрольного числа" $S=\alpha+i\beta$ с корнями λ_1, λ_2 характеристического уравнения. Так, в случае $f(x)=Ae^{\alpha x}(A=\text{const})$,имеем $y_{ч}=x^r M e^{\alpha x}$, где параметр M определяется по методу неопределенных коэффициентов (см. пример).

П р и м е р. $y''-2y'-3y=3e^x$. Найти общее решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda-3=0$ имеет корни $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$, следовательно, $y_0=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$.

Перейдем к нахождению $y_{ч}$; так как $f(x)=3e^{1x}$, то $\alpha=1$ и контрольное число $S=\alpha=1$. Поскольку $S\neq\lambda_1$, $S\neq\lambda_2$, то $r=0$, и $y_{ч}=Me^x$. Осталось определить коэффициент M. Как указано выше, находим $y'_{ч}=Me^x$, $y''_{ч}=Me^x$ и подставляем в неоднородное уравнение:

$$Me^x-2Me^x-3Me^x=3e^x, \text{ откуда } M=-\frac{3}{4}.$$

Итак, $y_{ч}=-\frac{3}{4}e^x$ и общее решение имеет вид $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-\frac{3}{4}e^x$.

3.3 КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

3.3.1 Как отмечалось выше, общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольных постоянных (две "степени свободы"). Частное решение может быть выделено из общего путем задания двух начальных условий. Например, в механике это может быть задание положения движущегося объекта в начальный момент и начальной скорости. Однако, может быть задано также положение объекта в два различных момента времени. Например, процесс механических колебаний объекта массы m относительно положения равновесия описывается уравнением

$$my''+hy'+ky=f(t),$$

где $y=y(t)$ – отклонение в момент t точки от положения равновесия; h – коэффициент трения; k – коэффициент упругости восстанавливающей силы; $f(t)$ – внешняя сила. Если задать положения α и β объекта в моменты соответственно τ и τ_*

$$\begin{cases} y(\tau)=\alpha \\ y(\tau_*)=\beta \end{cases},$$

то приходим к так называемой *краевой задаче*. Подобная математическая модель возникает и в задаче об электрических колебаниях и др.

П р и м е р. Механические колебания материальной точки описываются уравнением $y''+8y'+17y=e^{-4t}$,

причем положение точки в начальный момент и в момент $t=1$ заданы:

$$y(0)=0, \quad y(1)=0.$$

Определить отклонение $y(t)$ точки от положения равновесия в любой момент времени *t*.

Решение. Найдем общее решение ЛНУ. Характеристическое уравнение для соответствующего ЛОУ имеет корни $\lambda_{1,2}=-4\pm i$, поэтому общее решение ЛОУ получаем в виде $y_0=e^{-4t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$.

Поскольку контрольное число $S=-4$ не совпадает ни с одним из корней, то $y_ч=Me^{-4t}$. Находя $y'_ч=-4Me^{-4t}$ и $y''_ч=16Me^{-4t}$ и подставляя результаты в ЛНУ, получаем $16Me^{-4t}-32Me^{-4t}+17Me^{-4t}=e^{-4t}$, откуда $M=1$, так что $y_ч=e^{-4t}$.

Следовательно, $y=y_0+y_ч=e^{-4t}(1+C_1\cos t+C_2\sin t)$ – общее решение ЛНУ.

Теперь подставим краевые условия: $t=0$ и $y=0$, $t=1$ и $y=0$:

$$\begin{cases} 1+C_1+0=0; \\ e^{-4}(1+C_1\cos 1+C_2\sin 1)=0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} C_1=-1; \\ C_2=\dfrac{-1+\cos 1}{\sin 1}. \end{cases}$$

Окончательно,

$$y(t)=e^{-4t}\left(1-\cos t+\frac{\cos 1-1}{\sin 1}\sin t\right)$$

– искомое отклонение в любой момент времени *t*.

3.4 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.4.1 Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=ax+by; \\ \dfrac{dy}{dt}=px+qy, \end{cases} \qquad a,\ b,\ p,\ q=\text{const}.$$

Общее решение ищем следующим образом:

а) составим характеристическое уравнение вида $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ p & q-\lambda \end{vmatrix}=0$;

б) в соответствии с его корнями $\lambda_1,\ \lambda_2$ построим ФСР $\{y_1(t),\ y_2(t)\}$ и общее решение

$$\begin{cases} y=C_1y_1(t)+C_2y_2(t); \\ x=\dfrac{1}{p}(\dot y-qy). \end{cases}$$

П р и м е р. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot x=-6x+4y; \\ \dot y=9x-6y. \end{cases}$$

Имеем характеристическое уравнение $(a=-6,\ b=4,\ p=9,\ q=-6)$

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 4 \\ 9 & -6-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \text{т.е.} \quad (-6-\lambda)^2-36=0,$$

откуда $\lambda+6=\pm 6,\ \lambda_1=0, \lambda_2=-12$. Следовательно,

$$y_1=e^0=1; \quad y_2=e^{-12t}; \quad y=C_1+C_2e^{-12t}.$$

Далее, из второго уравнения системы $x=\dfrac{1}{9}(\dot y+6y)$.

Поскольку

$$\dot{y}=\left(C_1+C_2e^{-12t}\right)'=-12C_2e^{-12t}\text{, то } x=\frac{2}{3}\left(C_1-C_2e^{-12t}\right).$$

Итак,

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}\left(C_1-C_2e^{-12t}\right); \\ y=C_1+C_2e^{-12t}. \end{cases}$$

Замечание. Решение системы можно понимать как совокупность возможных траекторий (законов движения) материальной точки в плоскости, найденную по известной зависимости координат $\dot{x}$, $\dot{y}$ вектора скорости $\overline{v}=\dot{x}\overline{i}+\dot{y}\overline{j}$ от плоских координат этой точки.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

1-10 Найти неопределенные интегралы.

1 а) $\int\frac{e^{3x}\sqrt{x}-3x^3+4}{2\sqrt{x}}dx$; б) $\int e^{3\cos x-1}\sin x\,dx$;

в) $\int\frac{dx}{x^2+6x+13}$; г) $\int x\sin\frac{x}{3}dx$.

2 а) $\int\frac{3\sqrt{x}\sin x+2\sin^2x-1}{\sin x}dx$; б) $\int\frac{x^3}{\sqrt{2+x^4}}dx$;

в) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+26}}$; г) $\int(1-x)e^{-x}dx$.

3 а) $\int\frac{2x\sqrt{1-x^2}+5-4\sqrt{1-x^2}\cos 4x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int\frac{1}{\cos^2x}e^{1+\operatorname{tg}x}dx$;

в) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$; г) $\int\ln x\,dx$.

4 а) $\int\frac{4x^3e^{2-x}+5-x^2}{x^3}dx$; б) $\int\frac{2+3\ln x}{x}dx$;

в) $\int\frac{dx}{x^2-4x}$; г) $\int(x+1)\cos 2x\,dx$.

5 а) $\int\frac{x^2-4+5x^3\,2^x}{x^3}dx$; б) $\int\frac{1}{x}\cos(2\ln x)dx$;

в) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; г) $\int\frac{x}{\sin^2x}dx$.

6 а) $\int\frac{2-e^x\cos^2 3x+3\cos 3x}{\cos^2 3x}dx$; б) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\int\frac{dx}{9+4x+x^2}$; г) $\int x^3\ln x dx$.

7 а) $\int\frac{9-4^{x+1}\sin^2\frac{x}{2}+5\sin\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}dx$; б) $\int\frac{e^{2\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$;

в) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$; г) $\int x\cos\frac{2x}{5}dx$.

8 а) $\int\frac{2e^x\sin 3x-7e^{8x}+1}{e^x}dx$; б) $\int x\sqrt{3x^2+1}dx$;

в) $\int \frac{dx}{10x - x^2}$; г) $\int (3x-1)2^x dx$.

9 а) $\int \frac{3+5\sqrt{x}+x\text{ctg}2x}{x}dx$; б) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$; г) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

10 а) $\int \frac{2(x^2+1)e^{1-x}-4}{x^2+1}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^5 x}$;

в) $\int \frac{dx}{3-2x-x^2}$; г) $\int \sqrt{x}\ln x dx$.

11 – 20 Найти неопределенные интегралы.

11 $\int \frac{x^3+1}{x^3+4x^2}dx$; 12 $\int \frac{(1-x)dx}{x(x^2+8x+16)}$; 13 $\int \left(1+\cos^2\frac{x}{6}\right)\cos^2\frac{x}{6}dx$;

14 $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$; 15 $\int \frac{1-x^3}{x^3+8}dx$; 16 $\int \sin^4\frac{x}{12}dx$;

17 $\int \sin^3 x\cos^4 x dx$; 18 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}dx$; 19 $\int \frac{x+5}{(x^2+1)(x-5)}dx$;

20 $\int \frac{x^2+2}{(x+4)(x-1)^2}dx.$

121 – 130 Найти общее решение уравнений.

121 $y''+16y'=4$; 122 $y''+2y'+y=-\sin x$; 123 $y''-12y'=12x$;

124 $y''+2y'=-e^{-2x}$; 125 $y''+5y'=x-2$; 126 $y''+13y'=x^2+12$;

127 $y''-5y'=\cos x-5\sin x$; 128 $y''-16y=3\sin 4x$; 129 $y''-49y=7\cos 7x$.

130 $y''+10y'+25y=4x$.

131 – 140 Механические колебания материальной точки описываются уравнением $y''+py'+qy=f(t)$, где $y=y(t)$ – отклонение в момент времени t колеблющейся точки от положения равновесия, p, q – постоянные коэффициенты, $f(t)$ – внешняя сила. Положение точки в начальный момент и момент $t=1$ заданы: $y(0)=0$, $y(1)=2$. Определить $y(t)$ (значения постоянных вычислять приближенно с точностью до 0,1).

131 $p=4,\ q=5;\ f(t)=e^{-2t}$; 132 $p=2,\ q=10;\ f(t)=3e^{-t}$;

133 $p=0,\ q=9;\ f(t)=3\cos t$; 134 $p=0,\ q=16;\ f(t)=4\sin 2t$;

135 $p=6,\ q=10;\ f(t)=\sin 6t$; 136 p=10, q=26; $f(t)$= 2cos$t$;

137 $p=6,\ q=25;\ f(t)=4e^{-t}$; 138 $p=4,\ q=20;\ f(t)=4e^{-t}$;

139 $p=6,\ q=18;\ f(t)=3e^{-5t}$; 140 $p=6,\ q=90;\ f(t)=\sin t$.

141 – 150 Дана зависимость координат $\dot{x},\dot{y}$ вектора скорости $\bar{v}=\dot{x}\bar{i}+\dot{y}\bar{j}$ материальной точки от плоских координат (x,y).

Восстановить закон движения $\begin{cases} x=x(t,\ C_1,\ C_2); \\ y=y(t,\ C_1,\ C_2). \end{cases}$

141 $\begin{cases} \dot{x}=8x+9y; \\ \dot{y}=4x+8y; \end{cases}$ 142 $\begin{cases} \dot{x}=x+25y; \\ \dot{y}=x+y; \end{cases}$ 143 $\begin{cases} \dot{x}=2x-y; \\ \dot{y}=4x-3y; \end{cases}$ 144 $\begin{cases} \dot{x}=3x+2y; \\ \dot{y}=4x+5y; \end{cases}$

145 $\begin{cases} \dot{x} = 7x + y; \\ \dot{y} = 4x + 7y; \end{cases}$ 146 $\begin{cases} \dot{x} = 9x - y; \\ \dot{y} = -x + 9y; \end{cases}$ 147 $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y; \\ \dot{y} = 9x + 2y; \end{cases}$

148 $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 16y; \\ \dot{y} = 4x + 5y; \end{cases}$ 149 $\begin{cases} \dot{x} = x + 8y; \\ \dot{y} = 2x + y; \end{cases}$ 150 $\begin{cases} \dot{x} = x + y; \\ \dot{y} = 8x + 3y. \end{cases}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа / А.Ф. Бермант, И.Г. Арамонович. – М. : Наука, 1967. – 736 с.

2 Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М. : Наука, 1969. – 640 с.

3 Нахман, А.Д. Дифференциальные уравнения / А.Д. Нахман. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 1999. – 96 с.

4 Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1978. Т. 1. – 456 с. Т. 2. – 576 с.