А.А. МИЛОСЕРДОВ, Е.Б. ГЕРАСИМОВА

АНАЛИЗ РИСКОВ ИНВЕСТИЦИОННО-ФИНАНСОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ: ПРИНЦИПЫ КЛАССИФИКАЦИИ И ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ

УДК 336.763
ББК У9(2)
М60

Рецензенты:

Доктор экономических наук, профессор
Б.И. Герасимов

Доктор физико-математических наук, профессор
С.М. Дзюба

Милосердов А.А., Герасимова Е.Б.
М60 Анализ рисков инвестиционно-финансовой деятельности: принципы классификации и построения моделей. Тамбов: Изд-

во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. 80 с.

Рассматривается проблема анализа рисков и синтеза моделей неопределенности (риска) на основе социально-экономической теории и диалектического метода познания.

Предназначена для студентов экономических специальностей высших учебных заведений, научных работников и специалистов в области математических и инструментальных методов экономики, управления качеством продукции, работ и услуг, интересующихся проблемой риска и неопределенности.

УДК 336.763

ББК У9(2)

ISBN 5-8265-0481-1

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

Институт «Экономика и управление производствами»

А.А. МИЛОСЕРДОВ, Е.Б. ГЕРАСИМОВА

АНАЛИЗ РИСКОВ ИНВЕСТИЦИОННО-ФИНАНСОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ: ПРИНЦИПЫ КЛАССИФИКАЦИИ И ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ

Тамбов
Издательство ТГТУ
2006

Научное издание

МИЛОСЕРДОВ Александр Анатольевич
ГЕРАСИМОВА Елена Борисовна

АНАЛИЗ РИСКОВ ИНВЕСТИЦИОННО-ФИНАНСОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ: ПРИНЦИПЫ КЛАССИФИКАЦИИ И ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ

Монография

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию И.В. Евсеева

Подписано к печати 30.01.2006
Формат 60 × 84 / 16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Объем: 4,65 усл. печ. л.; 4,5 уч.-изд. л.
Тираж 400 экз. С. 34[М]

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В условиях рыночной экономики осуществление деятельности в инвестиционно-финансовой сфере требует от хозяйствующей организации, в целом, и от ее менеджмента, в частности, применения адекватных методов и моделей оценки и прогнозирования соответствующих рисков, возникающих, в общем смысле, вследствие нестабильности условий хозяйствования. Использование данных методов и моделей позволяет хозяйствующей организации минимизировать/оптимизировать возможные потери капитала, а также повысить эффективность его использования.

Примечательно, финансово-банковские структуры как основные субъекты финансовых рынков решают в своей работе двоякую задачу: повысить рентабельность и обеспечить безопасность путем централизации рисков, чтобы лучше их оценить и контролировать. Не секрет, что чем выше уровень рисков, связанных со всевозможными операциями, тем выше возможные потери, но и больше потенциальный доход в случае успешного их завершения. Таким образом, искусство управления банковской деятельностью заключается в нахождении оптимального уровня риска, принимаемого на себя банком в целях увеличения доходов.

Понятие риска не всегда однозначно трактуется в экономической теории и смежных науках. Это и вероятность события, которое может вызвать отклонение от ожидаемых тенденций, и возможность ущерба от события, которое изменяет исходную ситуацию, и любой непредвиденный результат, положительный или отрицательный, который относится к нежелательному результату и вероятности его появления, и т.д. Сегодня можно однозначно заявить, что единого, универсального определения риска, которое бы объединяло как вероятность, так и величину появления события, связанного с риском, не существует. Однозначно, о чем можно говорить с уверенностью, – это о понятии «неопределенности», связанного с осуществимостью того или иного действия (события) в будущем. Риск и неопределенность тесно переплетены.

В настоящей монографии анализируются экономические категории неопределенности и риска как неотъемлемые элементы инвестиционного процесса.

Особое внимание автором уделяется проблеме и принципам построения классификации рисков инвестиционно-финансовой деятельности как объективно необходимому условию правильного понимания данной экономической категории.

Помимо этого автором предлагается обобщенная конструкция модели неопределенности, частными моделями которой является модель риска и модель квазириска. Конструкция модели неопределенности вводится поэтапно с необходимыми определениями и комментариями из соответствующих дисциплин, инструментарий которых используется для построения модели.

Первая глава затрагивает проблему неопределенности инвестиционного процесса, понимаемую, прежде всего, как проблему его информационной непрозрачности в отношении субъекта, принимающего те или иные инвестиционно-финансовые решения. При этом автор строит алгоритм действий лица принимающего решения как необходимый инструмент при анализе неопределенности.

Во второй главе анализируются основные подходы к классификации инвестиционно-финансовых рисков. При этом автором предлагается достаточно простой способ построения системы рисков посредством использования рисковых факторов.

В третьей главе рассматриваются вопросы построения модели риска. Большое внимание уделяется вопросам информационной независимости модели, а также общей проблеме моделирования неопределенности как обобщенной категории риска.

1 КАТЕГОРИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСК ИНВЕСТИЦИОННО-ФИНАНСОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

1.1 ИНФОРМАЦИОННАЯ НЕПРОЗРАЧНОСТЬ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЦЕССА

1.1.1 Элементы неопределенности инвестиционного процесса

Традиционная модель инвестиционного процесса по Фишеру предполагает выполнение следующих базовых условий:

1) определенность (однозначное знание инвестором (ЛПР)) будущих инвестиционных результатов (будущих перспектив);

2) определенность в отношении множества инвестиционных возможностей (однозначное знание инвестором (ЛПР) рыночных условий инвестирования на весь инвестиционный период; однозначное знание инвестором (ЛПР) доступных ему альтернативных инвестиционных проектов и пр.);

3) определенность критерия выбора тех или иных альтернативных инвестиционных проектов.

Однако выполнение данных базовых условий, т.е по сути полная определенность инвестиционного процесса, делают его слишком абстрактным, далеким от реальных условий инвестирования.

В действительности при принятии того или иного инвестиционного решения ЛПР основывается лишь на доступном ему ограниченном массиве информации, что приводит к некоторому ослаблению либо частичному/полному несоблюдению базовых условий протекания инвестиционного процесса по Фишеру. Как результат получаем инвестиционный процесс при условии существования (прежде всего у ЛПР) некоторой неопределенности.

Далее будем рассматривать лишь неопределенность, связанную с базовым условием (1).

Субъективно, с точки зрения ЛПР, неопределенность порождается наличием у него лишь ограниченного массива информации, на основе которого он вынужден принимать решение. Объективно, неопределенность обусловлена действием некоторого числа факторов, природа которых, в общем случае, неизвестна.

Исходя из этого, неопределенность может быть представлена случаем, когда ЛПР обладает:

1) полной информацией (стохастический случай);

2) неполной информацией.

Основным отличием случая «полной информации» от случая «неполной информации» является то, что в случае (1) ЛПР на основе ограниченного массива информации может либо 1а) идентифицировать некую зависимость между действием некоторых факторов и появлением определенных событий (результатов) либо 1б) идентифицировать некий вероятностный закон распределения предполагаемых результатов, приняв предположение об отсутствии всякой связи и обусловленности появления событий действием только большого числа независимых факторов.

Однако, как показывает, практика более реальным и часто встречающимся является случай «неполной информации», предполагающий наличие у ЛПР лишь незначительного объема информации (как статистического, так и лингвистического плана), не позволяющей ему не только идентифицировать вероятностный закон распределения, но и сделать какое-либо предположение в отношении него, не говоря уже возможности идентификации некоторой зависимости.

В соответствии с терминологией Ф. Найта [20], случай (1б) есть ситуация вероятностной/измеримой неопределенности; случай (2) – ситуация неизмеримой/истинной неопределенности. Термин «риск» (ситуация риска) был введен Ф. Найтом, чтобы сохранить различие между случаем (1б) (ситуация вероятностной/измеримой неопределенности) и случаем (2) (ситуация неизмеримой/истинной неопределенности).

1.1.2 Факторы неопределенности. Рисковые факторы

Таким образом, будем рассматривать неопределенность как ситуацию, обусловленную действием некоторого числа факторов, природа которых нам неизвестна.

В качестве причин неопределенности выделим:

1) субъективную неполноту информации в отношении объекта инвестирования;

2) объективный стохастический случай.

Противоположностью ситуации неполной информации будем считать такую ситуацию, при которой может быть выявлена некоторая зависимость между действием определенных факторов и появлением определенных событий. В противном случае может быть принято допущение об отсутствии всякой связи и обусловленности появления событий действием только случайных факторов (действует большое число независимых факторов, причем сила воздействия каждого из отдельного фактора мала и не может превалировать среди остальных).

Исходя из этого, процесс принятия инвестиционного решения в общем виде будет заключаться в выявлении инвестором/индивидом факторов неопределенности и поиске определенных зависимостей между их действием и появлением событий (инвестиционных результатов). Результатом может быть либо переход к ситуации полной определенности (неопределенность устранена посредством выявления некоторой зависимости), либо к ситуации «измеримой неопределенности» (действуют только большое число мелких случайных факторов; существует некоторый способ оценки вероятностной закономерности появления ожидаемых событий), либо к их комбинации.

В зависимости от объема доступной индивиду информации о прошлом можно выделить две ситуации.

1 Индивид не обладает достаточной информацией о прошлом (у индивида отсутствует как прошлый опыт (возможно существование единичных примеров в прошлом), так и достаточный объем исторических данных) [17]. При этом предполагается, что индивид способен выявить некоторое число возможных будущих альтернатив. В данной ситуации индивид на основе умозаключений пытается обнаружить некую зависимость и таким образом устранить существующую неопределенность. При ее отсутствии индивид может предположить, что появление ожидаемых событий носит случайный характер.

2 Индивид обладает достаточной информацией о прошлом (достаточный объем исторических данных позволяет определить возможные альтернативы и идентифицировать закон распределения вероятностей их наступления). В данной ситуации индивид может в полной мере использовать статистический аппарат для выявления некоторой зависимости либо идентификации вероятностной закономерности.

Таким образом, случайные факторы, обуславливающие существование ситуации «измеримой» неопределенности могут быть названы как рисковые. При этом следует различать рисковые факторы более высокого порядка и более низкого порядка. Так, в ситуации «измеримой»/вероятностной неопределенности рисковыми факторами более высокого порядка можно считать большое число мелких случайных факторов. Рисковыми же факторами более низкого порядка – «базовыми» рисковыми факторами – можно считать случайные величины. В дальнейшем будем говорить лишь о базовых рисковых факторах.

1.2 ИДЕНТИФИКАЦИЯ РИСКА

1.2.1 Основные принципы классификации рисковых факторов

В самом общем случае все рисковые факторы, рассматриваемые в отношении некоторой организации, можно разделить на две группы:

1) внутренние факторы, присущие и обусловленные процессами, протекающими внутри данной организации;

2) внешние факторы, существующие вне организации.

К внутренним факторам следует отнести все те действия, процессы и предметы, причиной которых является деятельность организации как в сфере управления, так и в сфере обращения и производства (для предприятия – основная, вспомогательная и обеспечивающая деятельность). В группу внутренних факторов обычно включают планомерность, целенаправленность и научный подход в деятельности руководства и соответствующих служб организации по разработке эффективной стратегии развития последней, оценочные характеристики надежности функционирования технической системы, уровень образования персонала и пр.

К категории внешних факторов риска относят политические, научно-технические, социально-экономические и экологические факторы (следует отметить, что указанная трактовка факторов носит макроэкономический характер). Характерными внешними рисковыми факторами, в частности, являются торги на валютных биржах, поведение конкурентов, развитие НТП и пр.

Бланк И.А. приводит систему факторов, влияющих на уровень рисков, связанных с формированием денежных потоков предприятия (см. рис. 1) [4].

По мнению Романова В.С. представляется также возможным классифицировать факторы риска по степени возможности самой организации оказывать воздействие на них [26]. С этой точки зрения рисковые факторы можно условно подразделить на:

- объективные – факторы, на которые организация не может оказывать воздействие;
- субъективные – факторы, регулируемые организацией*.

---

* Бланк И.А. не делает различия между внешними и объективными, внутренними и субъективными факторами [4].

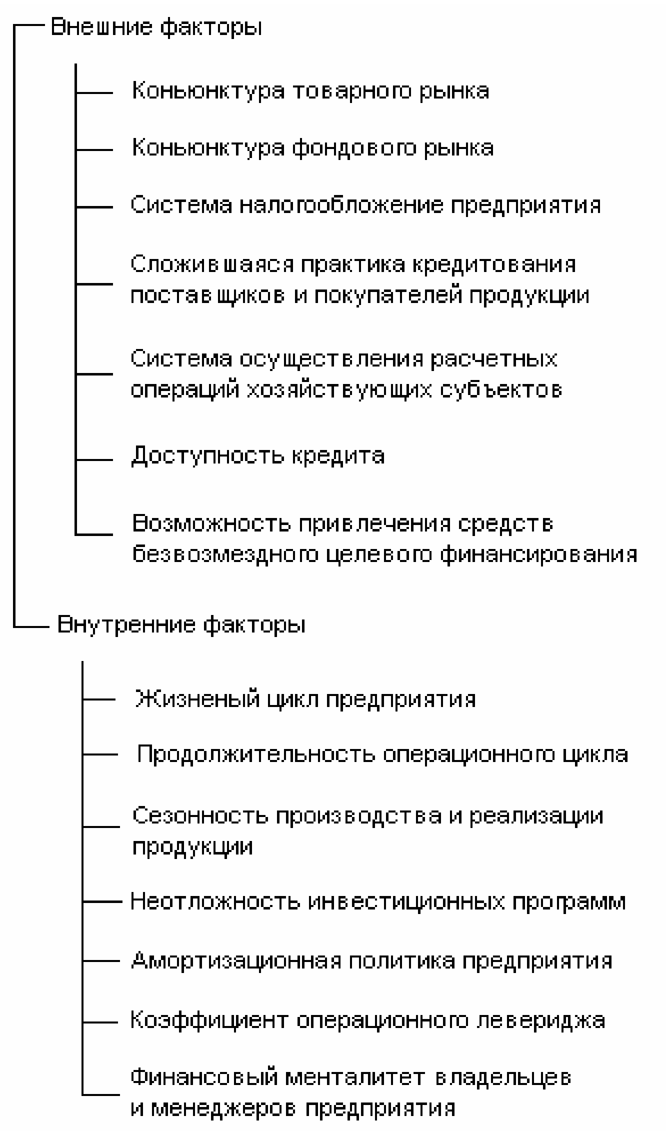

Рис. 1 Система факторов неопределенности, связанных с формированием денежных потоков предприятия

Кроме того, Романов В.С предлагает классифицировать факторы риска по их возможности оказывать взаимоисключающее воздействие. Так, он выделяет нейтивные (от англ. native – «присущий») рисковые факторы, определяющие конкретные виды рисковых ситуаций, и интегральные (обобщенные) рисковые факторы, определяющие рисковые ситуации сразу нескольких видов.

1.2.2 Алгоритм идентификации рисковой ситуации

Пусть рассматривается некий инвестиционный процесс при условиях наличия некоторой неопределенности. В общем случае для идентификации рисковой ситуации инвестору/индивиду необходимо иметь некий формальный алгоритм, позволяющий ему за определенное число шагов перейти от неопределенности либо к ситуации полной определенности либо к ситуации риска (см. рис. 2).

Как уже отмечалось выше, неопределенность можно рассматривать с двух сторон:

1) субъективная неопределенность – выражается в недостатке у конкретного инвестора/индивида информации;

2) объективная неопределенность (стохастическая) – обусловлена действием некоторого числа причин (факторов неопределенности).

Исходя из этого, возможны следующие действия инвестора/индивида в ситуации неопределенности:

1) получение дополнительной информации о причинах (действующих факторах неопределенности) – выявление конечного числа значимых причин (факторов);

2) определение возможных будущих результатов – конечное число значимых ожидаемых результатов/исходов;

3) поиск зависимости между действием причин (факторов неопределенности) и появлением ожидаемых результатов.

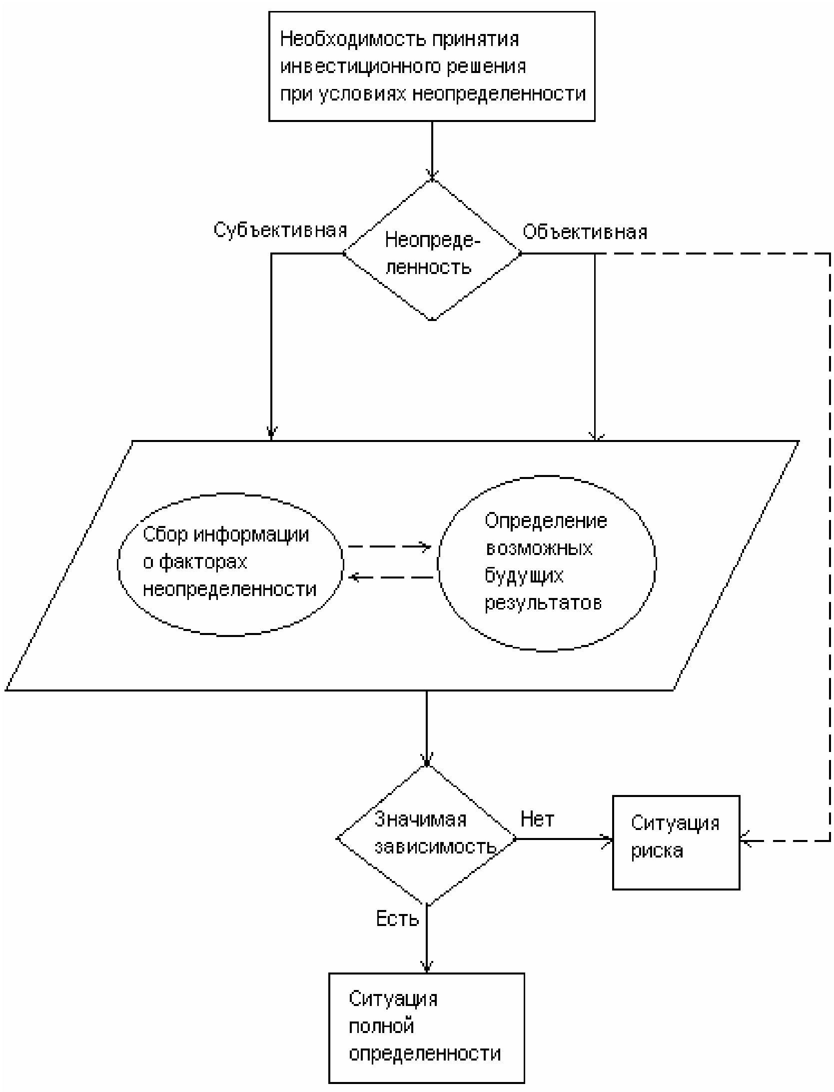

Рис. 2 Алгоритм идентификации рисковой ситуации

Могут существовать три результата данной последовательности действий:

1) обнаружение значимой зависимости (что позволяет перейти от неопределенности условий осуществления выбора к полной определенности);

2) отсутствие значимой зависимости (стохастический случай), т.е либо объективно действует большое число причин (факторов), вклад каждого из которых в общий результат незначителен, либо это постулируется (данную ситуацию неопределенности принято называть рисковой ситуацией);

3) смесь 1) и 2).

При этом ЛПР может использовать различные инструменты поиска данной зависимости:

1) статистические методы (имеется достаточный объем прошлых данных);

2) методы нечеткой логики (объем исторической информации недостаточен) [18].

Таким образом, ситуацией риска («измеримой» неопределенности по Ф. Найту [20]) считается такая ситуация неопределенности, когда индивид в результате некоторого процесса переработки доступной информации может получить ожидаемые альтернативы в виде массовых однородных случайных событий и идентифицировать их вероятностное распределение.

Формально риск можно определить как вероятностный закон распределения случайной величины (последнее называется «базовым» рисковым фактором).

Под массивом информации, доступной ЛПР, будем понимать как 1) информацию представленную в виде массива цифр (историческая статистика), так и 2) информацию представленную в виде некоторых суждений (информация лингвистического характера).

Тогда ситуации 1 и 2 переопределим следующим образом с целью более формального задания условий задачи моделирования неопределенности, а также инструментария ее решения.

Ситуация 1: ЛПР обладает исторической статистикой (помимо информации лингвистического характера), достаточной для того, чтобы либо идентифицировать некую закономерность (ситуация полной определенности (отсутствие риска)), либо идентифицировать вероятностный закон распределения (ситуация вероятностной неопределенности ≡ риск)

Ситуация 2: ЛПР обладает массивом информации, недостаточным для идентификации вероятностного закона (малый объем исторической статистики, ее непредставительность, незнание ЛПР ничего относительно возможного вероятностного закона распределения).

Ситуация 1 предполагает использование вероятностно-стати-стических методов для моделирования риска. Ситуация 2 традиционно не ассоциируется с термином риск и связывается с наличием неизмеримой/истинной неопределенности. Как следствие, она не имеет четкой формализации и строго закрепленного за ней инструментария моделирования неопределенности.

Ситуация 2 – ситуация существования неизмеримой/истинной неопределенности – есть квазириск по определению [19].

2 КЛАССИФИКАЦИЯ РИСКОВ ИНВЕСТИЦИОННО-ФИНАНСОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

2.1 ИНВЕСТИЦИОННЫЕ РИСКИ

2.1.1 Инвестиционные риски как обособленная классификационная категория

Инвестирование в ситуации риска («измеримой» неопределенности) позволяет говорить о существовании некоторого числа рисковых факторов («базового» рискового фактора). В дальнейшем, для избежания возможной путаницы, ситуацию риска будем называть риском, а, соответственно, различные типы рисковых ситуаций – различными типами рисков. Множество типов рисковых ситуаций, присущих инвестиционному процессу, будем назвать инвестиционными рисками.

Данное допущение позволяет сохранить терминологическую строгость излагаемого материала. Помимо этого, оно дает возможность использовать взгляды различных авторов на проблему рисков, не прибегая к постоянной их адаптации.

Таким образом, под инвестиционным риском, в общем случае, можно понимать риск, возникающий в процессе инвестирования. Данное определение является достаточно абстрактным. При этом оно соответствует взглядам большинства авторов работ по данной тематике. Так, у Стояновой в работе [29] под инвестиционными рисками понимаются риски, связанные с вложением капитала. Бланк определяет инвестиционный риск как риск возможных финансовых потерь в процессе инвестиционной деятельности [4]. В [27] под инвестиционным риском понимают возможность потери капитала при осуществлении инвестирования.

Однозначная позиция большинства авторов в отношении определения инвестиционных рисков сменяется достаточно противоречивыми взглядами авторов относительно их положения в общей системе рисков организации. Так, Стоянова инвестиционные риски включает в состав финансовых рисков [29]. Помимо этого, в состав последних включаются также риски, связанные с покупательной способностью денег.

Финансовые риски непосредственно включаются в состав коммерческих рисков, под которыми понимается опасность потерь в процессе финансово-хозяйственной деятельности организации.

При этом необходимо отметить, что финансовые риски, а, соответственно, и инвестиционные риски, имеют спекулятивную природу, выражающуюся в возможности получения как положительного, так и отрицательного результата (см. рис. 3).

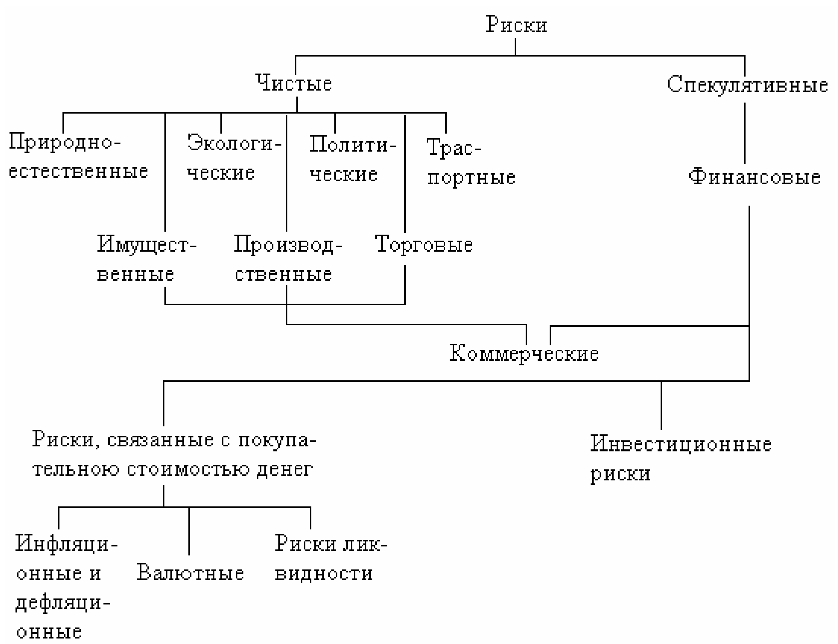

Рис. 3 Место инвестиционных рисков в общей системе рисков организации

Бланк также включает инвестиционные риски в состав финансовых, при этом относя их к группе «наиболее опасных финансовых рисков», связанных с возможной потерей капитала предприятия (организации) [4]. Как и Стоянова, Бланк подчеркивает спекулятивную природу инвестиционных рисков.

Литовских не выделяет инвестиционные риски в качестве самостоятельной категории [15]. Им рассматриваются лишь финансовые риски. При этом последние достаточно однозначно отождествляются с коммерческими.

Романов упоминает об инвестиционных рисках как о достаточно обособленной группе рисков, «характеризующих деятельность предприятия как хозяйствующего субъекта» [26].

2.1.2 Инвестиционные риски: состав и структура

Неоднозначность положения инвестиционных рисков в общей системе рисков организации приводит к достаточно различным взглядам относительно их структуры и состава. Так, у Стояновой инвестиционные риски включают в себя следующие подвиды рисков:

1) риск упущенной выгоды (риск наступления косвенного (побочного) финансового ущерба (недополученная прибыль) в результате неосуществления какого-либо мероприятия);

2) риск снижения доходности (данный риск может возникнуть в результате уменьшения размера процентов и дивидендов по портфельным инвестициям);

3) риск прямых финансовых потерь.

К риску снижения доходности относятся процентные и кредитные риски. Под первыми понимается опасность потерь (различными видами организаций), возникающая в результате возможного превышения процентных ставок, выплачиваемых ими по привлеченным средствам, над процентными ставками по предоставленным средствам. Под вторыми – опасность неуплаты заемщиком основного долга и процентов по нему.

Риски прямых финансовых потерь включают в себя биржевой риск (опасность потерь от биржевых сделок), селективный риск (риск неправильного выбора способа вложения капитала), риск банкротства (опасность, в результате неправильного выбора способа вложения капитала, полной потери собственного капитала и неспособность рассчитываться по взятым на себя обязательствам) (см. рис. 4).

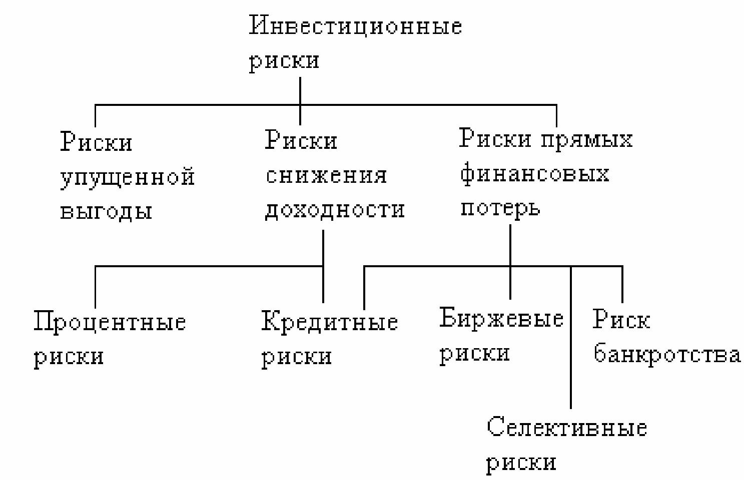

Рис. 4 Структура и состав инвестиционных рисков

Бланк выделяет следующие виды инвестиционных рисков [5]:

<table>
<tr><th>Виды систематических рисков</th><th>Виды несистематических рисков</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Макроэкономические, отраслевые и региональные риски
1 Страновой (экономический, политический и др.)
2 Риск законодательных изменений
3 Валютный риск
4 Инфляционный риск
5 Отраслевой риск
6 Региональный риск</td><td>7 Риск акционерного общества
7.1 Кредитный (деловой) риск
7.2 Риск ликвидности
7.3 Процентный риск
7.4 Риск недобросовестного проведения операций на фондовом рынке</td></tr>
<tr><td>8 Риски управления портфелем (включая технические риски)
8.1 Капитальный
8.2 Селективный
8.3 Отзывной
8.4 Риск поставки ценных бумаг
8.5 Операционный
8.6 Риск урегулирования расчетов
8.7 Квалифицированный
8.8 Информационный</td></tr>
</table>

8.9 Прочие виды рисков

Рис. 5 Структура и состав финансовых рисков

1 По сферам проявления:

1) Экономические риски – риски, связанные с изменением экономических факторов (факторов экономической природы). Так как инвестиционная деятельность осуществляется в экономической сфере, то она в наибольшей степени подвержена экономическим рискам.

2) Политические риски – различные виды возникающих административных ограничений инвестиционной деятельности, связанных с изменениями осуществляемого государством политического курса.

3) Социальные риски – риски забастовок, осуществления под воздействием работников инвестируемых предприятий незапланированных социальных программ и другие аналогичные виды рисков.

4) Экологические риски – риски различных экологических катастроф и бедствий (наводнений, пожаров и т.п.), отрицательно сказывающихся на деятельности инвестируемых объектов.

5) Другие виды рисков. К ним можно отнести рэкет, хищения имущества, обман со стороны инвестиционных или хозяйственных партнеров и т.п.

2 По формам инвестирования:

1) Риски реального инвестирования – связаны с неудачным выбором месторасположения строящегося объекта; перебоями в поставке строительных материалов и оборудования; существенным ростом цен на инвестиционные товары; выбором неквалифицированного или недобросовестного подрядчика и другими факторами, задерживающими ввод в эксплуатацию объекта инвестирования или снижающими доход (прибыль) в процессе его эксплуатации.

2) Риски финансового инвестирования – связаны с непродуманным подбором финансовых инструментов для инвестирования; финансовыми затруднениями или банкротством отдельных эмитентов; непредвиденными изменениями условий инвестирования, прямым обманом инвесторов и т.п.

3 По источникам возникновения:

1) Систематический (рыночный) риск – риска возникает для всех участников инвестиционной деятельности и форм инвестирования. Он определяется сменой стадий экономического цикла развития страны или конъюнктурных циклов развития инвестиционного рынка; значительными изменениями налогового законодательства в сфере инвестирования и другими аналогичными факторами, на которые инвестор повлиять при выборе объектов инвестирования не может.

2) Несистематический (или специфический) риск – присущ конкретному объекту инвестирования или деятельности конкретного инвестора. Он может быть связан с неквалифицированным руководством компанией (фирмой) – объектом инвестирования, усилением конкуренции в отдельном сегменте инвестиционного рынка; нерациональной структурой инвестируемых средств и другими аналогичными факторами, отрицательные последствия которых в значительной мере можно предотвратить за счет эффективного управления инвестиционным процессом.

В [6] рассмотрены систематические/несистематические риски, относимые, прежде всего, к операциям с финансовыми активами конкретизируются в виде: 1) странового риска (экономический, политический и др.), риска законодательных изменений, валютного, инфляционного, отраслевого и регионального рисков; 2) риска акционерных обществ и рисков управления портфелем (в данную группу включаются также и так называемые технические риски) (см. рис. 5).

Кроме того, здесь же по уровню допустимых финансовых потерь выделяют три вида риска:

1) допустимый финансовый риск, денежные потери по которому не превышают расчетной величины прибыли от владения инвестиционным портфелем;

2) критический финансовый риск, потери по которому не превышают расчетной величины дохода по инвестиционному портфелю;

3) катастрофический финансовый риск, потери по которому определяются полной или частичной утратой капитала (как собственного, так и заемного), что неизбежно приводит к банкротству инвестора.

Некоторые авторы, например [16], подразделяют инвестиционные риски на общие и рыночные (риск инвестиционного портфеля). При этом первые делятся на внутренние и внешние (основание деления – возможность организации оказывать влияние на данные виды рисков). Вторые подразделяются на систематические и несистематические (см. рис. 6).

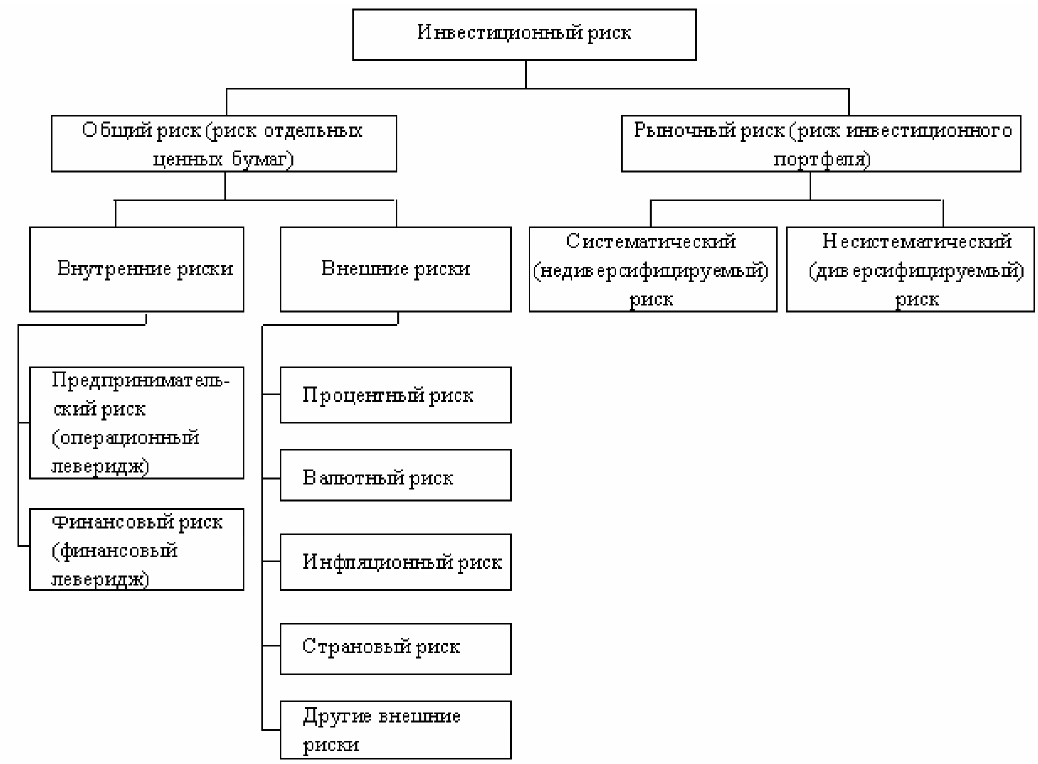

Рис. 6 Структура и состав инвестиционных рисков

Важно отметить, что у Бланка с систематическим риском отождествляется только рыночный риск, а валютный процентный инфляционный риски отнесены к финансовым рискам и не связываются непосредственно с инвестиционными [4].

Стоянова также относит валютные, процентные и инфляционные риски к финансовым. При этом к инвестиционным у нее отнесены только процентные риски.

Отдельные авторы различают в составе инвестиционных рисков: деловой риск, финансовый риск, риск ликвидности, риск обменного курса, а также политический риск.

С целью некоторой систематизации и обобщения приведенных точек зрения, автором работы предлагается следующая возможная структура и состав инвестиционных рисков (см. рис. 7).

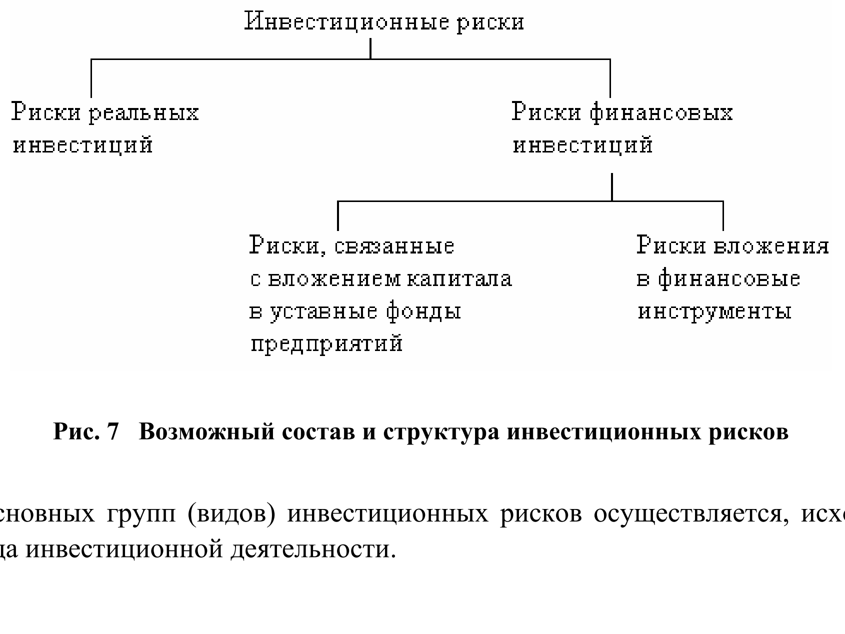

Рис. 7 Возможный состав и структура инвестиционных рисков

Выделение основных групп (видов) инвестиционных рисков осуществляется, исходя из специфики определенного вида инвестиционной деятельности.

Все инвестиционные риски можно подразделить на риски реальных инвестиций и риски финансовых инвестиций. В составе рисков реального инвестирования могут быть выделены, например, такие риски как:

- риск несвоевременной подготовки инвестиционного проекта; риск несвоевременного завершения проектно-конструкторских работ;
- риск несвоевременного окончания строительно-монтажных работ;
- риск несвоевременного открытия финансирования по инвестиционному проекту;
- риск потери инвестиционной привлекательности проекта в связи с возможным снижением его эффективности и т.п. (подробную классификацию рисков реального инвестирования можно построить, учитывая отдельные особенности реальных инвестиций).

Риски финансовых инвестиций (исходя из их основных форм) могут быть поделены на риски, связанные с вложением капитала в уставные фонды предприятий и риски вложения в финансовые инструменты[*] (инструменты денежного рынка и рынка капитала).

К первым можно отнести, например, такие риски как риск снижения финансовой устойчивости, риск неплатежеспособности, деловой риск и т.д.

Ко вторым в общем случае можно отнести все финансовые риски, выделяемые западной практикой финансовой деятельности.

2.2 ФИНАНСОВЫЕ РИСКИ

2.2.1 Структура и состав финансовых рисков

Отражением стандартного подхода западной практики и, в определенной степени, итогом эволюции исследовательской мысли выступают документы Базельского комитета по банковскому надзору, выделяющие основные виды финансовых рисков [17]:

1) кредитные;
2) рыночные риски (валютный, фондовый, товарный и процентный, в ряде случаев выделяемый отдельно);
3) прочие риски (операционные, ликвидности, правовые, потери деловой репутации и прочие).

Представленная классификация является косвенным отражением целей Базельского комитета обеспечения стабильности финансовых рынков за счет соответствия величины капитала принимаемым участниками рискам. Риски, фактически, группируются по возможным подходам к их оценке, управлению и покрытию капиталом.

В других материалах комитета, в ряде случаев, выделяются дополнительные отражающие специфические цели соответствующих документов виды рисков (например, риск введения валютных ограничений, риск манипулирования финансовой информацией, риск хищения имущества). Однако базовая классификация представлена на достаточно общем уровне, что определяет ее высокую универсальность и постоянство. Это, в частности, выразилось в отсутствии необходимости изменений при достаточно существенном пересмотре рекомендаций Базельского комитета в 2001 году, призванном отразить усложнение форм и увеличение масштабов рисков международных финансовых рынков, нововведения последних лет в части финансовых инструментов, а также достигнутыми результатами в области оценки и контроля рисков.

Банк России как регулятор рынка, наряду с предписанной ему нормотворческой функцией ставящий перед собой цель методологического содействия совершенствованию культуры делового оборота, предлагает следующую классификацию финансовых рисков [1]:

1) кредитный риск;
2) страновой риск;
3) рыночный риск;
4) процентный риск (в других документах Банка России включаемый в состав рыночных рисков);
5) риск потери ликвидности;
6) операционный риск;
7) правовой риск;
8) риск потери репутации.

Отдельной группой также выделяются риски неправомерных и некомпетентных решений работников банка.

---

[*] Граница между первыми и вторыми сточки зрения некоторых рисков является весьма условной.

Согласно классификации, разработанной аудиторской группой Coopers & Lybrand и изложенной в «Общепринятых принципах управления рисками» выделяют шесть групп риска: рыночные, кредитные, риски концентрации, риски ликвидности, операционные риски и риски бизнес-события.

Стандарт Национальной фондовой ассоциации (НФА), как результат совместной работы представителей крупнейших участников российского финансового рынка, в первой редакции (2001 год) предложил достаточно близкий вариант классификации. В соответствии с ним выделяют [2]:

1) кредитный риск;
2) процентный риск;
3) риск ликвидности;
4) рыночные риски;
5) операционный риск;
6) другие виды рисков (риск концентрации портфелей; пруденциальные риски; риск потери репутации; правовые риски и прочие).

С учетом теоретической обоснованности, а также возможности практического применения в [12] предлагается выделять следующие группы финансовых рисков:

1) кредитный риск (или, в некоторых вариантах риск на контрагента);
2) риск ликвидности (в других вариантах – фондирования);
3) рыночные риски;
4) операционный и прочие риски.

2.2.2 Рыночные риски как обособленный элемент финансовых рисков

Под рыночными рисками, в общем случае, может пониматься специфическая часть финансовых рисков, появление которых обусловлено инвестиционно-финансовой деятельностью организации.

Как часть финансовых рисков, рыночные риски обладают следующими основными характеристиками:

1 Экономическая природа. Рыночные риски как часть финансовых рисков появляются в сфере экономической деятельности организации, прямо связаны с формированием ее доходов и характеризуются возможными экономическими потерями организации в процессе осуществления инвестиционно-финансовой деятельности. Таким образом, рыночный риск как экономическая категория занимает определен место в системе экономических категорий, связанных с осуществлением хозяйственного процесса.

2 Объективность проявления. Рыночным рискам, как и финансовым, присущ объективный характер проявления в процессе осуществления организацией инвестиционно-финансовой деятельности.

3 Спекулятивный характер. Рыночные риски как и финансовые могут сопровождаться как существенными финансовыми потерями, так и формированием дополнительных доходов.

Специфическая особенность рыночных рисков заключается в том, что возможность их появления обусловлена только нестабильностью финансовых рынков.

Таким образом, под рыночными рисками можно понимать специфическую часть финансовых рисков, связанную с возможным ухудшением финансового состояния организации, вызванного неблагоприятными колебаниями финансового рынка (рыночных показателей финансового рынка – цен, ставок, курсов).

Большинство современных авторов при определении рыночных рисков обычно стараются подчеркнуть природу источников рыночных рисков, а также связанную с ними специфическую область инвестиционно-финансовой деятельности организации. Так, Романов В.С определяет рыночный риск как риск потерь, зафиксированных на балансовых и забалансовых позициях, из-за изменения рыночных цен [26]. При этом, под рыночными ценами понимаются некоторые параметры рынка, такие как процентные ставки, курсы валют, цены акций или товаров, корреляция между различными параметрами рынка и т.п. В методических рекомендациях НФА [2] под рыночным риском понимается риск того, что [открытая] позиция не будет настолько прибыльна, как это ожидал инвестор, или будет убыточна в связи с колебаниями рыночных цен или ставок (например, цен на акции, процентных ставок, курсов валют, цен на недвижимость и т.п.). Вьюков М.Л. и Ермошин С.И рыночный риск трактуют как риск, связанный с возможным изменением рыночных котировок активов и изменением процентных ставок [7]. В [32] рыночный риск определяется как возможность понижения цены определенной ценной бумаги (финансового инструмента); покупка, после совершения которой цены или конъюнктура на рынке падают; потеря, которая может произойти для владельца инвестированных средств при продаже. Положение Банка России «О порядке расчета кредитными организациями размера рыночных рисков» [1] определяет рыночный риск как риск возникновения у кредитной организации финансовых потерь (убытков) вследствие изменения рыночной стоимости финансовых инструментов торгового портфеля [сформированного данной кредитной организацией], а также курсов иностранных валют.

Исходя из приведенных определений, можно выделить следующие основные особенности рыночного риска как самостоятельной экономической категории:

1) природа источников рыночных рисков – нестабильность финансовых рынков;

2) проявляются в виде изменений (колебаний) основных характеристик финансового рынка (цен, ставок, курсов); данные характеристики можно считать базовыми рисковыми факторами.

Процесс идентификации рыночных рисков должен осуществляться организацией, исходя из особенностей ее финансово-хозяйст-венной деятельности. Наиболее просто можно идентифицировать рыночный риск, связанный с операцией покупки/продажи финансового инструмента (формированием торгового портфеля). Так, открытая позиция (длинная или короткая) означает подверженность организации (ее открывшей) определенному виду рыночного риска.

Классификация рыночных рисков осуществляется по базовым рисковым факторам (в общем смысле – по рынкам). Исходя из этого, в составе рыночного риска принято выделять валютный, фондовый, товарный и процентный риски. В российских условиях, в силу относительной неразвитости финансового рынка, законодательно выделяются валютный, процентный и фондовый риски [1].

Возникновение у организации данных видов рыночных рисков, при осуществлении организацией торговых операций на финансовом рынке, законодательно принято связывать с покупкой продажей следующих финансовых инструментов (см. табл. 1) [1].

1 Финансовые инструменты и соответствующие им виды рыночного риска

Вид рыночного риска	Финансовые инструменты
Процентный риск	а) долговые обязательства Российской Федерации; б) долговые обязательства субъектов Российской Федерации и местных органов власти; в) облигации; г) еврооблигации; д) ценные бумаги, приобретенные/проданные по сделкам типа «РЕПО»; е) ценные бумаги, принятые/переданные в залог; ж) депозитные сертификаты; з) долговые обязательства юридических лиц; и) производные финансовые инструменты (за исключением купленных опционов), чувствительные к изменению процентных ставок.
Фондовый риск	а) акции обыкновенные; б) депозитарные расписки; в) конвертируемые финансовые инструменты (облигации и привилегированные акции)*; г) производные финансовые инструменты, базисным активом которых являются ценные бумаги, указанные в п. а) – в).
Валютный риск	Иностранная валюта

3 МОДЕЛИРОВАНИЕ РИСКА

* Данные инструменты относятся к группе фондового риска только в той части, для которой выполняются некоторых

3.1 ОБЩИЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

3.1.1 Формулировка задачи принятия решения

Традиционно задача принятия инвестиционного решения в детерминированной постановке выглядит следующим образом.

Пусть имеется множество R инвестиционных результатов, которые инвестор (или ЛПР) может получить. Естественно полагать, что это множество является некоторым образом упорядоченно, так как у ЛПР всегда существуют предпочтения в отношении тех или иных доходов.

Пусть также имеется множество действий D, каждое из которых приводит к определенному инвестиционному результату из R. С математической точки зрения, таким образом, существует некоторое отображение $u: D \to R$, такое что каждому $d \in D$ ставится в однозначное соответствие $r \in R$, а именно $r = u(d)$.

Исходя из этого выбор ЛПР будет диктоваться следующим:

$$\max_{d}(\min_{d})u(d).$$

Однако в большинстве случаев функциональная связь $r = u(d)$ является неизвестной ЛПР. В частности, выбранное конкретное $d \in D$ не гарантирует появление определенного $r \in R$.

Не зная функциональной связи, можно попытаться ее идентифицировать. При этом невозможность последнего приводит к необходимости постулировать наличие в общем смысле некоторого случайного механизма, в соответствии с которым появляется некоторое $r \in R$.

Таким образом, у ЛПР теперь существует некоторая неопределенность относительно будущих инвестиционных результатов.

3.1.2 Бинарное отношение упорядоченности на элементах множества состояний среды

Обычно в теории принятия решений моделирование неопределенности результатов осуществляется посредством введения в анализ $\Omega -$ множества состояний среды (множество параметров). Каждый его элемент $\varpi \in \Omega$ отражает состояние среды, правдоподобное (а в общем случае также и неправдоподобное) с точки зрения ЛПР и влияет некоторым образом на результаты. При этом ЛПР делает некоторые предположения относительно степени правдоподобности того, что среда примет некоторое состояние ϖ. Под состоянием среды, в частности, мы можем понимать некоторую величину доходности актива за определенный период инвестирования.

С математической точки зрения это означает что на Ω можно задать (бинарное) отношение частичной упорядоченности $\leq$.

Определение 1. Бинарное отношение, обозначаемое как Rl на Ω является отношением частичной упорядоченности и обозначается $\leq$, если оно удовлетворяет условиям:

1) рефлексивности:

$$\forall \varpi \in \Omega, \varpi Rl \varpi;$$

2) транзитивности:

$$\forall \varpi, \varpi^*, \varpi^{**} \in \Omega \text{ из } \varpi Rl \varpi^* \text{ и } \varpi^* Rl \varpi^{**} \Rightarrow \varpi Rl \varpi^{**};$$

3) антисимметричности:

условия относительно: а) срочности конверсии, б) величины и условий расчета доходности для них [1].

$$\forall\varpi,\varpi^* \in \Omega \text{ из } \varpi Rl\varpi^* \text{ и } \varpi^* Rl\varpi \Rightarrow \varpi = \varpi^* .$$

Определение 2. Если на Ω задано частичное упорядочение $\leq$ (или $\leq_\Omega$), то $(\Omega,\leq)$ называется частично упорядоченным множеством.

Таким образом, $\varpi \geq_\Omega \varpi^*$ будет означать, что состояние среды ϖ по крайней мере также правдоподобно как ϖ^*.

Заметим также, что если ϖ и ϖ^* – элементы частично упорядоченного множества $(\Omega,\leq)$, то может быть, что не одно из соотношений $\varpi \geq_\Omega \varpi^*$ и $\varpi \leq_\Omega \varpi^*$ не имеет места, т.е элементы ϖ и ϖ^* являются несравнимыми.

Будем далее полагать что на $(\Omega,\leq)$ не существует несравнимых элементов.

Определение 3. Частично упорядоченное множество, не имеющее несравнимых элементов, называется упорядоченным (линейно упорядоченным).

Далее будем полагать что $(\Omega,\leq)$ есть упорядоченное множество.

Дополнительно введем некоторое отображение $g:\Omega \to [0,1]$, где $[0,1]$ упорядочено некоторым образом, $([0,1],\leq)$ При этом полагаем что g – есть изоморфизм, т.е $g(\varpi) \geq g(\varpi^*)$ выполнено только в том случае если $\varpi \geq_\Omega \varpi^*$.

Таким образом, каждому состоянию среды поставлено в соответствие правдоподобность того, что среда примет именно данное состояние.

3.1.3 Отношение упорядоченности на подмножествах множества состояний среды

3.1.3.1 *Необходимый инструментарий для моделирования неопределенности на подмножествах*

Распространим отношения упорядоченности на подмножест-ва из Ω.

Определение 4. Некоторое множество A называется подмножеством множества Ω, если всякий элемент множества A является элементом множества Ω, т.е $A \subseteq \Omega$ – множество A включено в Ω (в данном случае неисключено, что $A = \Omega$).

Заметим, что пустое множество Ø по определению является подмножеством любого множества. Исходя из этого, у каждого множества (кроме пустого) есть, по крайней мере, два подмножества – само множество и пустое.

Определение 5. Универс (универсальное множество) есть такое множество, что любое рассматриваемое множество является его подмножеством.

Введем понятие булеана, мощности, алгебры событий.

Определение 6. Множество всех подмножеств из Ω есть булеан $\mathrm{B}(\Omega)$.

Пусть множество Ω состоит из трех элементов $\Omega = \{\varpi_1,\varpi_2,\varpi_3\}$. Тогда его всевозможными подмножествами будут: пустое множество $\varnothing$, три одноэлементных подмножества $\{\varpi_1\}$, $\{\varpi_2\}$, $\{\varpi_3\}$, три двухэлементных подмножества $\{\varpi_1,\varpi_2\}$, $\{\varpi_1,\varpi_3\}$, $\{\varpi_2,\varpi_3\}$ и одно трехэлементное множество Ω.

Определение 7. Пусть Ω, произвольное конечное n-элементное множество. Тогда $|\Omega| = n$ есть его мощность.

Очевидно, что мощность булеана для Ω, произвольного конечного n-элементное множество можно определить как

$$|\mathrm{B}(\Omega)| = \sum_{i \in \mathrm{I}} C_n^i, \mathrm{I} = \{0,1,...n\},$$

где C_n^k – число различных k-элементных подмножеств n-эле-ментного множества.

С целью осуществления некоторых операций над (под)мно-жествами введем понятия алгебраических и кардинальных операций над (под)множествами.

Определение 8. Алгебраическими операциями называют такие, при выполнении которых результирующее множество либо пусто, либо состоит из элементов, из которых состоят и множества, подвергающиеся операциям.

Определение 9. Кардинальными операциями называют такие операции, при выполнении которых появляются новые элементы.

Так, основными алгебраическими операциями над (под)мно-жествами являются следующие:

1) пересечение (под)множеств:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B, A, B \subseteq \Omega\} \subseteq \Omega\,;$$

2) объединение (под)множеств:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B, A, B \subseteq \Omega\} \subseteq \Omega\,;$$

3) разность (под)множеств:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{, но } x \notin B, A, B \subseteq \Omega\} \subseteq \Omega\,.$$

Можно ввести также операции дополнения и симметрической разности.

4) дополнение подмножества A до Ω:

$$\overline{A} = \Omega \setminus A\,;$$

5) симметрическая разность:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \quad A, B \subseteq \Omega, A \Delta B \subseteq \Omega\,.$$

Введем также понятие понятия покрытия и разбиения множества.

Определение 10. Пусть Ω – некоторое множество и $\Omega = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} A_i, \mathrm{I} = \{1,2,\ldots n\}$. Тогда $A_i, i \in \mathrm{I}$ образуют покрытие множества Ω.

Определение 11. Если события $A_i, i \in \mathrm{I}$ из Ω попарно не пересекаются, т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$ то данные события несовместны.

Определение 12. Если $A_i, i \in \mathrm{I}$ образуют покрытие множества Ω и являются при этом несовместными, то система множеств $A_i, i \in \mathrm{I}$ называется разбиением множества Ω.

Введя понятие булеана на множестве Ω, можно ввести понятие алгебры и σ–алгебры множеств. Последняя в дальнейшем будет играть центральную роль в процессе моделирования.

Определение 13. Алгеброй называется пара множеств Z = (Q, T), где Q – называется основным, несущим множеством или носителем алгебры, а T = {f(1), f(2), ...} – множество операций, определенных на множестве M, называется сигнатурой алгебры.

Выделяют следующие законы алгебры множеств:

1 Коммутативность:

$$A \bigcup B = B \bigcup A, A \bigcap B = B \bigcap A.$$

2 Ассоциативность:

$$A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C, A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C.$$

3 Дистрибутивность:

$$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C), A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C).$$

4 Закон де Моргана: $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5 Законы поглощения:

$$A \bigcup (A \bigcap B) = A,\ A \bigcap (A \bigcup B) = A;$$

$$A \bigcup (\overline{A} \bigcap B) = A \bigcup B,\ A \bigcap (\overline{A} \bigcup B) = A \bigcap B.$$

6 $A \bigcup A = A,\ A \bigcap A = A.$

7 $A \bigcup \overline{A} = J,\ A \bigcap \overline{A} = \varnothing.$

8 $A \bigcup \varnothing = A,\ A \bigcap J = A.$

9 $A \bigcup J = J,\ A \bigcap \varnothing = \varnothing.$

10 Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{A}} = A.$

11 $A \Delta B = B \Delta A.$

12 $A \backslash B = A \bigcap \overline{B}.$

13 $A \Delta B = (\overline{A} \bigcap B) \bigcup (A \bigcap \overline{B}).$

Все эти законы могут быть доказаны с помощью поэлементной схемы доказательства.

Необходимо также отметить, что операция объединения является двойственной к операции пересечения и наоборот, операция пересечения является двойственной к операции объединения. Операция дополнения является двойственной сама к себе (самодвойственной). Пустое множество является двойственным к универсальному множеству и наоборот, универсальное множество является двойственным к пустому множеству.

Для введенных алгебраических операций Ω часто выступает в роле «единицы» алгебры, а Ø в виде ее «нуля».

Пусть $\mathrm{B}(\Omega)$ – булеан (универсального) множества Ω. Тогда (булевой) алгеброй множеств будем называть алгебру **A** = ($\mathrm{B}(\Omega)$,T), где $\mathrm{T} = \{\cup, \cap, \bar{\ }\}$, т.е. множество, включающее в себя операции объединения, пересечения и дополнения.

Приведем бездоказательно следующие две леммы требующиеся нам для введения в анализ понятия σ–алгебры множеств. Доказательства можно посмотреть, например в [31].

Л е м м а 1. Пусть $\mathrm{B}(\Omega)$ – булеан на Ω. Тогда существует наименьшая алгебра **A**, содержащая все множества из $\mathrm{B}(\Omega)$.

Л е м м а 2. Если **A** – монотонный класс, то **A** необходимо и достаточно есть σ–алгебра.

3.1.3.2 *Моделирование неопределенности на подмножествах*

Введенный инструментарий позволяет распространить введенное (бинарное) отношения упорядоченности на элементах из Ω на всевозможные подмножества, принадлежащие **A** – σ–алгебре множеств из Ω.

В общем случае будем говорить, что $\forall A, B \in \mathbf{A}$, A, по крайней мере, также правдоподобно, как и B если $A \geq B$.

Традиционно отношение $A \geq B, A, B \in \mathbf{A}$ можно понимать как результат выполнения условия $A \supseteq B$.

О п р е д е л е н и е А. Пусть Ω – множество состояний среды, и **A** – σ–алгебра множеств из Ω. Тогда говорят, что **A** (частично) упорядочено, если $A \geq B$ означает $A \supseteq B$.

Другой подход в понимании отношения $A \geq B, A, B \in \mathbf{A}$ предлагает Д. Дюбуа и А. Прад в [33]. Так, о справедливости отношения $A \geq_{\Omega} B$ можно говорить только в том случае, если $\forall \varpi^{*} \in B, \exists \varpi \in A$ такое, что $\varpi \geq_{\Omega} \varpi^{*}$, а именно: $A \geq_{\Omega} B$ выполняется только в том случае, если лучший элемент из A предпочтительней лучшему элементу из B.

При этом, как отмечается в [33], такое бинарное отношение упорядоченности должно отвечать следующим свойствам:

1) $\forall \varpi, \varpi^* \in A, \varpi >_\Omega \varpi^*$ следует $\varpi >_{\Omega|A} \varpi^*$, т.е отношение порядка на некотором подмножестве $A \subseteq \Omega$ не должны изменять изначальное отношение порядка, заданное на всем пространстве Ω.

2) $\forall \varpi \in A, \forall \varpi^* \notin A, \varpi >_{\Omega|A} \varpi^*$, т.е любой элемент из A предпочтительней элемента, не принадлежащего A.

3) $\forall \varpi, \varpi^* \notin A, \varpi =_{\Omega|A} \varpi^*$, т.е элементы, не принадлежащие рассматриваемому подмножеству, являются эквивалентными.

Таким образом, введенное на подмножествах из **A** отношение упорядоченности $\leq_\Omega$ позволяет говорить о том, что любого состояния среды $\varpi \in A$, по крайней мере, также правдоподобно как любое состояние $\varpi \in B$ тогда и только тогда, когда справедливо $A \geq B, A, B \in \mathbf{A}$.

3.1.4 Количественная шкала правдоподобности на подмножествах множества состояний среды

3.1.4.1 *Конструкция интеграла*

Для задания количественной шкалы правдоподобности для событий, представляющих собой множества из **A**, необходимо научить измерять подмножества множества Ω, т.е фактически нам нужна некоторая измеряющая функция (обозначим ее, например, как v), заданная на подмножествах из **A** и действующая в [0,1].

О п р е д е л е н и е 14. Пусть **A** – σ–алгебра множеств из Ω. Всякое подмножество $A \subseteq \Omega$ измеримо, если оно принадлежит σ–алгебре, т.е $A \in \mathbf{A}$.

Введем конструкцию вида (Ω,**A**).

О п р е д е л е н и е 15. Пусть Ω – множество состояний среды, **A** – σ–алгебра множеств из Ω, Тогда (Ω,**A**) есть измеримое пространство.

Пусть (Ω,**A**) и (R,**B**) измеримые пространства; **A**,**B** – σ–ал-гебры множеств из Ω и R соответственно. Введем понятие измеримой функции.

О п р е д е л е н и е 16. Абстрактная функция $f: \Omega \to R$ есть измеримая относительно пары σ–алгебр **A**,**B** (или (**A**,**B**) – измеримая) функция, если из $B \in \mathbf{B}$ следует, что $f^{-1}(B) \in \mathbf{A}$.

Пусть измеримая функция $f: \Omega \to R$ принадлежит M классу (семейству) измеримых функций. Данный класс (семейство) есть линейное пространство с определенными на нем операциями обобщенного суммирования и умножения, а именно: $\oplus$ и $\otimes$ на действительное число, соответственно. При этом M замкнуто относительно данных операций. Отметим, что $\forall f, q$ из M их произведение также принадлежит M.

Пусть M^+ – подкласс неотрицательных измеримых функций, а именно $f: \Omega \to R^+, f \in M^+$.

Далее нам потребуется понятие характеристической функции произвольного (под)множества $A \in \mathbf{A}$.

Пусть рассматривается измеримое пространство (Ω,**A**). Как известно, любое (под)множество $A \in \mathbf{A}$ можно задать с помощью некоторой функции, в общем случае вида $h_A: \Omega \to [0,1]$, называемой характеристической. В частности, если данная функция принимает вид

$$h_A(\varpi) = \begin{cases} 1, \varpi \in A; \\ 0, \varpi \notin A, \end{cases}$$

то данный вид функции обозначим по определению как $\chi_A(\varpi) := h_A(\varpi)$.

Функция $h_A(\cdot)$ – измерима в силу измеримости $A \in \mathbf{A}$.

Введем понятие простой функции. При этом первоначально будем пользоваться частным видом $h_A(\cdot)$, а именно: $\chi_A(\cdot)$.

Пусть $a_i \ge 0, i \in \mathrm{I} = \{1,2,...n\}$ есть неотрицательные действительные числа, причем, $0 \le a_1 \le a_2 \le \dots$. Определим некоторую функцию $s(\varpi)$ следующим образом:

$$\forall \varpi \in \Omega, s(\varpi) = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} a_i \otimes \chi_{A_i},$$

где $A_i = \{\varpi \in \Omega \mid s(\varpi) = a_i\}$, $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} A_i = \Omega$.

Определение 17. Функция $s(\varpi)$ есть простая функция.

Отметим, что $s(\varpi)$ является неотрицательной функцией, при этом она измерима в силу измеримости $\chi_A(\cdot)$. Кроме того, положим что $s < \infty$ и принадлежит некоторому классу H^+, являющемуся подклассом M^+.

Теорема 1. Пусть $f : \Omega \to R^+$ есть измеримая неотрицательная функция, принадлежащая классу M^+. Тогда существует такая последовательность $0 \le s_1 \le s_2 ...$ простых измеримых неотрицательных функций таких, что $\lim_{n \to \infty} s_n = f$.

Доказательство можно посмотреть, например, в [38].

Каждой функции $s \in H^+$ сопоставим число $I(s)$, называемое (простым) интегралом от s и удовлетворяющего следующим свойствам:

1) $I(\alpha \otimes z \oplus \beta \otimes s) = \alpha \otimes I(z) \oplus \beta \otimes I(s)$ для любых z и s из H^+ и $\alpha, \beta \ge 0$ (аксиома линейности интеграла);

2) $I(s) \ge 0$ т.к $s(\varpi) \ge 0$ (аксиома неотрицательности интеграла).

Тогда в соответствии с теоремой 1 имеем продолжение интеграла на класс M^+, а именно:

$$\lim_{n \to \infty} I(s_n) = I(\lim_{n \to \infty} s_n) = I(f), f \in M^+$$

Вернемся теперь к классу M измеримых функций $f : \Omega \to R$. Функцию $f(\varpi)$ из M всегда можно представить как

$$f(\varpi) = f_+(\varpi) - f\_(\varpi),$$

где $f_+(\varpi) = \max\{f(\varpi), 0\}$ и $f\_(\varpi) = -\min\{f(\varpi), 0\}$.

В силу того, что $f_+, f\_ \ge 0$ неотрицательные, можно полагать, что они принадлежат классу M^+. Тогда для $f : \Omega \to R, f \in M$ определим интеграл от f как

$$I(f) = I(f_+) - I(f\_)$$

Определение 18. Пусть f есть измеримая функция из M. Тогда $I(f)$ есть интеграл от f удовлетворяющий следующим свойствам:

1) $I(\alpha \otimes f \oplus \beta \otimes w) = \alpha \otimes I(f) \oplus \beta \otimes I(w)$ для любых f и w из M и α, β – действительных чисел (аксиома линейности интеграла);

2) $I(f) \ge 0$, если $f \ge 0$ (аксиома неотрицательности интеграла).

Следствие. Из 1 и 2 следует что $I(f) \le I(w)$, если $f \le w$.

Введем обобщенное понятие меры (при использовании операций $\oplus, \otimes$). При этом будем опираться на [30] и использовать характеристическую функцию общего вида $h_A(\varpi)$.

Определение 19. Пусть $(\Omega, \mathbf{A})$ есть измеримое пространство и функция $h_A(\varpi), \varpi \in \Omega, A \in \mathbf{A}$ измерима и $\oplus$ – суммируема. Тогда множество A называется $\oplus$ – суммируемым и число $v(A) = I(h_A)$ есть мера множества A в общем случае.

Замечание. В соответствии с комментариями к законам алгебры множеств если $A = \varnothing$ то $v(A) = I(h_A) = 0$; если Ω есть универсальное множество, то $v(\Omega) = I(h_\Omega) = 1$.

Используя обобщенное (при использовании $\oplus, \otimes$) понятие меры, интеграл от простой функции s по данной мере v можно ввести следующим образом.

Пусть

$$\forall \varpi \in \Omega, s(\varpi) = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} c_i \otimes h_{D_i},$$

где $D_1 = \Omega, D_i = \bigcup_{j=i}^{n} A_j, D_n = A_n, a_1 \le \ldots \le a_n$, $c_1 = a_1, c_i$ – определяется из уравнения $a_i = a_{i-1} \oplus c_i$. Тогда интеграл от s по мере v есть

$$I(s) = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \left[c_i \otimes v(D_i) \right].$$

3.1.4.2 *Нечеткое множество и его характеристическая функция*

Для получения окончательной конструкции введем понятие нечеткого множества как обобщающего понятия четкого множества.

Как уже отмечалось выше характеристическая функция h_A для множества $A \in \mathbf{A}$, (где $\mathbf{A}$ – σ–алгебра множеств из Ω) есть некая обобщенная конструкция. Ее частным видом является χ_A.

С этого момента функцию h_A будем представлять в виде

$$h_A(\varpi) = \begin{cases} (0,1], \varpi \in A; \\ 0, \varpi \notin A. \end{cases} \tag{1}$$

Определение 20. Множество $A \in \mathbf{A}$ называется нечетким если его характеристическая функция h_A определяется видом (1).

Заметим, что $\forall \varpi \in A, h_A(\varpi)$ понимается как степень включения ϖ в A. При этом $\exists \varpi, \varpi \in A$ что $h_A(\varpi) = 1$.

Данный вид характеристической функции был введен Л.А. Заде в 1968 году [34].

Далее нечеткое множество для отличия от его четкого аналога *A* будем обозначать как

$$A^{(F)} = \{\varpi, h_{A^{(F)}}\},$$

где $h_{A^{(F)}}$ – его характеристическая функция. Более части нечеткое множество будем обозначать просто как $A^{(F)}$.

Введем дополнительные уточнения в отношении $A^{(F)}$.

Определение 21. Носителем нечеткого множества $A^{(F)}$ называется обычное (четкое) множество A_s такое, что $A_s = \left\{\varpi \in \Omega \mid h_{A^{(F)}} > 0\right\}, \forall \varpi \in \Omega$.

Таким образом, если $A \in \mathbf{A}$ есть некоторое четкое множество, то $A_s := A$.

Заметим, что универсальное множество Ω есть всегда четкое множество с характеристической функцией $\chi_\Omega = 1$.

Определение 22. Нечеткое множество $A^{(F)}$ является конечным, если A_s есть конечное множество. Мощность такого нечеткого множества равна $|A^{(F)}| = |A_s|$.

При этом отметим, что для пустого нечеткого множества $|A^{(F)}| = 0$.

Определение 23. Нечеткое множество $A^{(F)}$ является бесконечным, если A_s не является конечным.

Исходя из этого, мощность счетного бесконечного множества $|A^{(F)}|=|A_s|=\aleph_0$. Мощность несчетного бесконечного множества $|A^{(F)}|=|A_s|=\aleph$.

Определение 24. Множество γ-уровня есть

$$A_\gamma=\left\{\varpi\in\Omega\,|\,h_{A^{(F)}}>\gamma\right\},\ \gamma\in[0,1].$$

Заметим, что множество γ-уровня A_γ есть обобщение носителя нечеткого множества. При этом, если

$$A_\gamma=\left\{\varpi\in\Omega\,|\,h_{A^{(F)}}\geq\gamma\right\},\ \gamma\in[0,1],$$

тогда $A_s:=A_0$.

Определение 25. Высота нечеткого множества есть $\sup\{h_{A^{((F)}}(\varpi)\},\forall\varpi\in\Omega$.

Согласно этому определению нечеткое множество $A^{(F)}$ пусто если $\sup\{h_{A^{((F)}}(\varpi)\}=0$.

Определение 26. Нечеткое множество $A^{(F)}$ называется нормальным, если $\exists\varpi\in\Omega$, что $h_{A^{(F)}}(\varpi)=1$.

Определение 27. Нечеткое множество $A^{(F)}$ называется субнормальным, если при $\sup\{h_{A^{(F)}}(\varpi)\}=1$ $h_{A^{(F)}}(\varpi)<1$.

Таким образом, всякое нормальное нечеткое множество $A^{(F)}$ является субнормальным с условием $\exists\varpi\in\Omega$, $h_{A^{(F)}}(\varpi)=1$.

Определение 28. Нечеткое множество $A^{(F)}$ называется унимодальным (строго унимодальным), если его функция $h_{A^{(F)}}(\varpi)$ является унимодальной (строго унимодальной).

Так, функция $h_{A^{(F)}}(\varpi)$ для некоторого нечеткого множества $A^{(F)}$ называется унимодальной на интервале $[\varpi_1,\varpi_4]\subseteq A_s$, если она непрерывна на $[\varpi_1,\varpi_4]$, а также существует некоторый непустой $[\varpi_2,\varpi_3]\subset[\varpi_1,\varpi_4]$ такой, что $\varpi_1\leq\varpi_2\leq\varpi_3\leq\varpi_4$ и выполняются следующие условия:

1) функция $h_{A^{(F)}}(\varpi)$ строго монотонно возрастает на интервале $[\varpi_1,\varpi_2]$ при $\varpi_1<\varpi_2$;

2) функция $h_{A^{(F)}}(\varpi)$ строго монотонно убывает на интервале $[\varpi_3,\varpi_4]$ при $\varpi_3<\varpi_4$;

3) функция $h_{A^{(F)}}(\varpi)$ принимает свое максимальное значение на интервале $[\varpi_2,\varpi_3]$, т.е. любая точка $\varpi_m\in[\varpi_2,\varpi_3]$ является точкой максимума функции $h_{A^{(F)}}(\varpi)$ относительно интервала $[\varpi_1,\varpi_4]$:

$$\varpi_m=\arg\max_{\varpi\in[\varpi_1,\varpi_4]}\{h_{A^{(F)}}(\varpi)\}. \tag{2}$$

В этом случае любая точка $\varpi_m\in A^{(F)}$ нечеткого множества $A^{(F)}$, удовлетворяющая условию (2), называется модальным значением или модой нечеткого множества $A^{(F)}$. Если в этом определении интервал $[\varpi_3,\varpi_4]$ вырождается в точку, т.е. $\varpi_2=\varpi_3$, то соответствующая функция $h_{A^{(F)}}(\varpi)$ называется строго унимодальной на интервале $[\varpi_1,\varpi_4]$.

Определение 29. Ядром нечеткого множества $A^{(F)}$ называется такое обычное множество C, элементы которого удовлетворяют условию $C=\{\varpi\in\Omega\,|\,h_{A^{(F)}}=1\}$.

Не трудно заметить, что если произвольное нечеткое множество не является нормальным, то ядро такого нечеткого множества будет пустым. Таким образом, имеет место следующая фундаментальная теорема.

Теорема 2. Для того чтобы некоторое нечеткое множество $A^{(F)}$ было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело непустое ядро, $C\neq\emptyset$.

Поскольку высота нечеткого множества всегда существует, то произвольное непустое нечеткое множество $A^{(F)}$ всегда можно преобразовать по меньшей мере к субнормальному нечеткому множеству $\overline{A}^{(F)}$ по формуле

$$h_{\overline{A}^{(F)}}(\varpi) = \frac{h_{A^{(F)}}(\varpi)}{\sup(h_{A^{(F)}}(\varpi))}. \tag{3}$$

Более того, если в исходном нечетком множестве $A^{(F)}$ найдется хотя бы один элемент $\varpi \in A^{(F)}$, для которого значение функции $h_{A^{(F)}}(\varpi)$ равно высоте этого нечеткого множества, то полученное после преобразования (3) нечеткое множество $\overline{A}^{(F)}$ будет нормальным.

Определение 30. Границами нечеткого множества $A^{(F)}$ называются такие элементы (универсального) множества Ω, для которых $0 < h_{A^{(F)}}(\varpi) < 1$.

Определение 31. Элементы нечеткого множества $\varpi \in A^{(F)}$, для которых выполняется условие $h_{A^{(F)}}(\varpi) = 0{,}5$, называются точками перехода этого нечеткого множества $A^{(F)}$.

Определение 32. Нечеткое множество $A^{(F)}$ на Ω называется выпуклым, если его характеристическая функция $h_{A^{(F)}}(\varpi)$ удовлетворяет неравенству

$$h_{A^{(F)}}(\varpi) \geq \min\{h_{A^{(F)}}(a), h_{A^{(F)}}(b)\}, \forall \varpi, a, b \in \Omega, a < \varpi < b \text{ и } a \neq b.$$

Определение выпуклости для нечетких множеств отличается от известного в анализе, поскольку имеет более общий математический контекст. Тем не менее, как отмечается в [14], его весьма удобно использовать на практике, поскольку кроме непрерывности характеристических функций оно применимо к конечным нечетким множествам, а также ко множествам, характеристическая функция которых не является непрерывной.

3.1.4.3 *Нечеткая мера и ее пространство*

Пусть $A^{(F)} \subseteq \Omega$ есть нечеткое множество с его характеристической функцией $h_{A^{(F)}}(\varpi), \forall \varpi \in \Omega$. Меру общего вида для нечеткого множества $A^{(F)}$ будем называть нечеткой мерой. При этом отметим, что нечеткая мера есть по определению

$$v(A^{(F)}) := I(h_{A^{(F)}}).$$

В силу того, что нечеткое множество обобщает понятие четкого множества, то мы можем говорить о существовании σ–алгебры нечетких подмножеств из Ω, а также вводить в анализ конструкцию (нечеткого) измеримого множества.

Определение 33. Нечеткой мерой называется произвольное отображение $v: \mathbf{A} \to [0,1]$, где $\mathbf{A}$ – (нечеткая) σ–алгебра на Ω, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $v(\emptyset) = 0$, $v(\Omega) = 1$, (ограниченность);

2) $A_i \in \mathbf{A}$, $A_i \subseteq A_j$, то $v(A_i) \leq v(A_j)$, (монотонность).

Иногда добавляется условие непрерывности [37], [14]:

3) если $A_i \in \mathbf{A}$ и $\{A_i, i \in \mathrm{I}\}$ является монотонной относительно включения последовательностью множеств, то

$$\lim_{i\to\infty} \nu(A_i) = \nu(\lim_{i\to\infty} A_i), \text{ (непрерывность).}$$

Данные аксиомы обуславливаются выполнением условий 1, 2 и следствия для $I(\cdot)$, а также замечанием к определению меры в общем смысле.

Иногда нечеткую меру называют еще квазимерой [14].

Определим конструкцию пространства нечеткой меры.

Определение 34. Пусть (Ω, **A**) есть (нечеткое) измеримое пространство с заданной на **A** и действующей в [0,1] нечеткой мерой v. Пространством нечеткой меры v будем называть математическую структуру вида (Ω, **A**, v), где Ω – универсальное множество, **A** – (нечеткая) σ–алгебра на Ω, $v:\mathbf{A}\to[0,1]$ удовлетворяет следующим аксиомам 1, 2, 3.

Данная математическая структура пространства с нечеткой мерой (Ω, **A**, v) является абстрактной конструкцией. Попытаемся несколько конкретизировать ее.

Пусть операции $\oplus,\otimes$ для класса M измеримых функций $f:\Omega\to R$ понимаются как обычные операции сложения и умножения. Тогда простая функция s определяется как

$$\forall\varpi\in\Omega, s(\varpi)=\sum_{i=1}^{n}c_i h_{D_i}, c_i\equiv a_i, D_i\equiv A_i, h_{A_i}\equiv\chi_{A_i}.$$

Интеграл от s по v определяется как

$$I(s)=\sum_{i=1}^{n}a_i v(A_i).$$

Данный интеграл можно понимать как интеграл Лебега [30] с счетно-суммируемой мерой v. Пространство (Ω, **A**, v) есть пространство счетно-суммируемой меры v.

Если для данного вида простой функции s положить $c_i=a_i-a_{i-1}$ а $D_i=\bigcup_{j=i}^{n}A_j$ то интеграл вида

$$I(s)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})v(D_i)$$

можно рассматривать как интеграл Шоке [41] с счетно-сумми-руемой мерой v.

Таким образом, когда мера обладает свойством счетной суммируемости, а именно операции вида $\oplus,\otimes$ понимаются как обычные операции суммирования и умножения соответственно, интеграл Шоке можно свести к интегралу Лебега [42].

Пусть теперь операции $\oplus,\otimes$ для класса M измеримых функций $f:\Omega\to R$ понимаются как операции $\vee,\wedge$ соответственно. Тогда простая функция s определяется как

$$\forall\varpi\in\Omega, s(\varpi)=\bigvee_{i=1}^{n}a_i\wedge\chi_{D_i}, D_i=\bigcup_{j=i}^{n}A_j, a_0=0.$$

Интеграл от s по v определяется как

$$I(s)=\bigvee_{i=1}^{n}a_i\wedge v(D_i).$$

Данный интеграл можно понимать как интеграл Сугено [37] с $\vee-$суммируемой нечеткой мерой v. Пространство (Ω, **A**, v) есть пространство $\vee-$суммируемой нечеткой меры v.

Таким образом, эволюционно путем все большего усложнения мы получили в итоге некую абстрактную математическую конструкцию для моделирования неопределенности.

Пусть Ω есть бесконечное счетное в общем случае универсальное множество состояний среды с **A** σ–алгеброй подмножеств из Ω. Пусть далее $\Omega=\{...,\varpi_i,\varpi_{i+1},\varpi_{i+1},...\}$ занумерованная последовательность всех элементарных состояний среды и $\{...,g_i,g_{i+1},g_{i+2},...\}$ последовательность неотрицательных чисел $g_i=g(\varpi_i)$, поставленных им в однозначное соответствие и представляющих собой степень правдоподобности наступления определенного ϖ_i.

При этом возможен переход к рассмотрению некоторого конечного множества состояний среды

$$\Omega^* = \{\varpi_{\text{ниж}},...,\varpi_{\text{верх}}\},\ \varpi_{\text{ниж}} \le \varpi_{\text{верх}},\ \Omega^* \subset \Omega .$$

Границы Ω^* могут быть определены неправдоподобностью появления состояний

$$\varpi_i < \varpi_{\text{ниж}}, \varpi_{\text{верх}} < \varpi_j,\ \varpi_{\text{ниж}}, \varpi_{\text{верх}} \in \Omega^* \subset \Omega, \varpi_i, \varpi_j \in \Omega .$$

Для любого $A^{(F)} \in \mathbf{A}$ правдоподобность его появления есть $v(A^{(F)}) = I(h_{A^{(F)}})$.

Тогда при соблюдении аксиом 1, 2, 3 можем говорить что задано пространство нечеткой меры, а именно (Ω, $\mathbf{A}$, v), где $\mathbf{A}$ – σ–ал-гебра нечетких множеств из Ω, $v:\mathbf{A} \to [0,1]$ есть нечеткая мера.

При этом объективно ясно что заданное (бинарное) отношение упорядоченности на **A**, в частности количественное выражение правдоподобности, получаемое посредством v, должно учитывать каким-либо образом (бинарное) отношение порядка на Ω, а, в частности, количественное выражение правдоподобности состояния среды $\varpi \in \Omega$, получаемое как $g(\varpi)$. Покажем как осуществляется данная взаимосвязь.

Интеграл от s по нечеткой мере v есть

$$I(s) = \mathop{\oplus}_{i=1}^{n} c_i \otimes v(D_i) .$$

Первоначально будем рассматривать четкие множества из **A**. Пусть $A_i = \{\varpi_i\}, \varpi \in \Omega$, т.е A_i – точечное множество. Тогда $v(\{\varpi_i\})$ есть степень правдоподобности ϖ_i состояния среды и следовательно по определению имеем $v(\{\varpi_i\}) = g(\varpi_i)$, где $g:\Omega \to [0,1]$ – функция, задающая степень правдоподобности состояний $\varpi \in \Omega$.

Положим

$$c_i = 1, i = \overline{1,m}, A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \{\varpi_1,...,\varpi_m\} .$$

Тогда степень правдоподобности события A есть $v(A) = \mathop{\oplus}_{i=1}^{m} 1_i \otimes g(\varpi_i)$. С другой стороны, $v(A) = I(\chi_A)$. Исходя из этого, мы можем записать следующее:

$$v(A) = I(\chi_A) = \mathop{\oplus}_{\varpi \in \Omega} \chi_A \otimes v(\{\varpi\}) .$$

В общем случае для нечеткого множества $A^{(F)} \in \mathbf{A}$ степень правдоподобности нечеткого события можно записать как

$$v(A^{(F)}) = I(h_{A^{(F)}}) = \mathop{\oplus}_{\varpi \in \Omega} h_{A^{(F)}} \otimes v(\{\varpi\}) .$$

3.1.4.4 *Двойственные меры и интегралы*

Введем понятие двойственности для нечетких мер.

Определение 35. Нечеткая мера v^* есть двойственная к нечеткой мере v если выполняется следующее условие (свойство обратного дополнения): $v^*(\cdot) = 1 - v(\overline{\cdot})$.

Пусть (Ω, $\mathbf{A}$, v) пространство нечеткой меры v. Тогда для произвольного нечеткого множества $A^{(F)}$ из **A** справедливо следующее:

$$v^*(A^{(F)}) = 1 - v(\overline{A^{(F)}}) = I(\chi_\Omega) - I(h_{\overline{A^{(F)}}}) = 1 - I(1 - h_{A^{(F)}}) .$$

3.2 МОДЕЛЬ РИСКА

3.2.1 *Пространство вероятности*

Для введения в анализ вероятностной меры и ее пространства положим, что операции $\oplus, \otimes$ для класса M измеримых функций $f: \Omega \to R$ понимаются как обычные операции сложения и умножения. Тогда пространство $(\Omega, \mathbf{A}, v)$ есть пространство счетно-суммируемой меры v четких множеств из **A**, и интеграл по данной мере соответствует интегралу Лебега.

Так для всякой простой функции s, определяемой как

$$\forall \varpi \in \Omega, s(\varpi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

интеграл от s по v определяется как

$$I(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i v(A_i) .$$

Тогда мера множества $A \in \mathbf{A}$, определяемая как

$$v(A) = I(\chi_A) = \sum_{\varpi \in \Omega} \chi_A v(\{\varpi\}) ,$$

есть вероятностная мера $v =: \mathrm{P}$ и $v(\{\varpi\}) = g(\varpi) =: p(\varpi)$ – распределение вероятности.

О п р е д е л е н и е 36. Математическая структура $(\Omega, \mathbf{A}, \mathrm{P})$ есть пространство вероятностной мерой $\mathrm{P}: \mathbf{A} \to [0,1]$, удовлетворяющей следующим аксиомам:

1) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$, $\mathrm{P}(\Omega) = 1$, (ограниченность);

2) $A_i \in \mathbf{A}$, $A_i \subseteq A_j$, то $\mathrm{P}(A_i) \le \mathrm{P}(A_j)$, (монотонность)

3) $\mathrm{P}\left(\bigcup_{i \in \mathrm{I}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{P}(A_i)$, где $A_i \in \mathbf{A}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \ne j$ (аксиома счетной или $\sigma -$ суммируемости)

О п р е д е л е н и е 37. Пусть $(\Omega, \mathbf{A}, \mathrm{P})$ – вероятностное пространство. Тогда функция $p: \Omega \to [0,1]$ есть распределение вероятностей,

$$p(\varpi) := \mathrm{P}(\{\varpi\}) .$$

Исходя из этого,

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\varpi \in A} p(\varpi) .$$

Как уже отмечалось ранее, вероятностная мера является самодвойственной. А именно:

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) .$$

3.2.2 Моделирование неопределенности на пространстве вероятности

3.2.2.1 *Ситуация риска. Рисковые факторы*

Для построения модели вероятностной неопределенности (модели риска) рассмотрим еще раз задачу принятия инвестиционного решения.

Пусть имеется множество решений (действий) D, множество всевозможных состояний среды Ω и множество результатов R, достижимых посредством действий из D при условии, что среда оказалась в некотором $\varpi \in \Omega$ состоянии. Математическая модель данной ситуации есть отображение $\xi: \Omega \times D \to R$, так что принятие решения $d \in D$ при $\varpi \in \Omega$ приводит к результату $r = \xi(\varpi, d) \in R$.

Задавая на Ω структуру вероятностного пространства (Ω , **A**, P) а на множестве R структуру измеримого пространства (R,**B**) будем считать отображение ξ измеримым (при каждом фиксированном $d \in D$) относительно пары σ–алгебр **A**,**B**.

Таким образом, при каждом фиксированном d каждому состоянию $\varpi \in \Omega$ можно ставить в соответствие отображение $\xi_d : \Omega \to R$ так, что при условии наступления состояния ϖ решение d приводит к результату $r = \xi_d(\varpi) \in R$.

Пусть теперь каждому событию $B \in \mathbf{B}$ мы ставим в соответствие в качестве его прообраза $A \in \mathbf{A}$, причем $A = \xi_d^{-1}(B)$, тогда распределение на множестве состояний среды и отображение ξ_d порождает на (R,**B**) вероятностное распределение p_d с вероятностью

$$\mathrm{P}_d(B) = \mathrm{P}(\xi_d^{-1}(B)),\ B \in \mathbf{B}.$$

Каждое решение $d \in D$ приводит при наличии «измеримой» (по вероятности) неопределенности к некоторому распределению p_d , обусловленному случайным характером Ω .

Решение данной задачи заключается в выборе ЛПР такого решения $d \in D$, которое приведет к наилучшему p_d из семейства $\boldsymbol{P} = \{p_d, d \in D\}$.

Определение 38. Измеримая функция $\xi_d : \Omega \to R$ есть случайная величина.

Определение 39. Измеримая функция $\xi = \{\xi_d, d \in D\}$ есть случайный элемент.

Определение 40. Случайная величина ξ_d есть рисковый фактор.

Определение 41. Случайный элемент $\xi = \{\xi_d, d \in D\}$ есть портфельный рисковый фактор.

Определение 42. Риск (или ситуация риска) есть вероятностное распределение p_d , индуцированное рисковым фактором ξ_d .

Определение 43. $\boldsymbol{P} = \{p_d, d \in D\}$ есть совокупный риск (или портфель рисков).

Заметим, что портфель рисковых факторов $\xi = \{\xi_d, d \in D\}$ (портфель рисков) часто обладает новыми свойствами, не присущими каждому рисковому фактору в отдельности.

С этой целью введем понятие базового и производного рисковых факторов.

Определение 44. Производный рисковый фактор есть такой рисковый фактор, который всегда может быть представлен в виде некоторой комбинации (зависимости от) базовых рисковых факторов.

Так, в предложенной задаче $\xi_d, d \in D$ есть базовые рисковые факторы, $\xi = \{\xi_d, d \in D\}$ есть производный рисковый фактор.

С учетом вышесказанного, в условиях неопределенности ЛПР может поступить двояко: 1) он может рассматривать в качестве исходных базовые рисковые факторы и путем их комбинирования получить производный рисковый фактор, либо 2) если поиск базовых рисковых факторов сопряжен с ощутимыми затратами финансовых ресурсов или времени, рассматривать в качестве исходного производный рисковый фактор.

3.2.2.2 *Отношение упорядоченности на семействе рисков (рисковых факторов)*

Решение сформулированной выше задачи, как уже отмечалось, заключается в выборе ЛПР такого решения $d \in D$, которое привело бы к наилучшему p_d из семейства $\boldsymbol{P} = \{p_d, d \in D\}$.

В самом общем случае это можно сделать задав на $\boldsymbol{P}$ (или что тоже самое на ξ) (бинарное) отношение упорядоченности $\le_P$ (или $\le_\xi$). Для этого нам потребуется ввести понятие отношения стохастического доминирования I-го II-го рода [22]. Кроме того, нам потребуется понятие функции распределения, а также дополнительной функции распределения вероятностей случайной величины.

Определение 45. Функцией распределения вероятностей произвольной случайной величины ξ на R называют функцию, ставящую в соответствие любому значению x величину вероятности события $\{\xi < x\}$, т.е $F_\xi(x) = \mathrm{P}\{\xi < x\}, x \in R$.

Определение 46. Дополнительной функцией распределения вероятностей произвольной случайной величины ξ на R называют функцию

$$S_\xi(x) = 1 - F_\xi(x) = \mathrm{P}\{\xi > x\}, x \in R .$$

Определение 47. Пусть $\xi_{d_1}, \xi_{d_2} \in \xi$. Говорят, что имеет место стохастическое доминирование 1-го порядка I-го рода: $\xi_{d_1} \leq_{1,\mathrm{I}} \xi_{d_2}$ если

$$F_{\xi_{d_1}} = \mathrm{P}\{\xi_{d_1} < x\} \geq F_{\xi_{d_2}}(x) = \mathrm{P}\{\xi_{d_2} < x\}, x \in R .$$

Говорят, что имеет место стохастическое доминирование k-го порядка I-го рода

если $$\xi_{d_1} \leq_{k,\mathrm{I}} \xi_{d_2} ,$$

$$F^{(k)}{}_{\xi_{d_1}} = \mathrm{P}^{(k)}\{\xi_{d_1} < x\} \geq F^{(k)}{}_{\xi_{d_2}}(x) = \mathrm{P}^{(k)}\{\xi_{d_2} < x\}, x \in R ,$$

где $F^{(k)}_{\xi_{d_i}}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} F^{(k-1)}_{\xi_{d_i}}(t)dt,\ k = 2,3\ldots$.

Определение 48. Пусть $\xi_{d_1}, \xi_{d_2} \in \xi$. Говорят что имеет место стохастическое доминирование 1-го порядка II-го рода: $\xi_{d_1} \leq_{1,\mathrm{II}} \xi_{d_2}$, если

$$S_{\xi_{d_1}}(x) = \mathrm{P}\{\xi_{d_1} > x\} \leq S_{\xi_{d_2}}(x) = \mathrm{P}\{\xi_{d_2} > x\}, x \in R .$$

Говорят, что имеет место стохастическое доминирование k-го порядка II-го рода

если $$\xi_{d_1} \leq_{k,\mathrm{II}} \xi_{d_2}$$

$$S^{(k)}{}_{\xi_{d_1}}(x) = \mathrm{P}^{(k)}\{\xi_{d_1} > x\} \leq S^{(k)}{}_{\xi_{d_2}}(x) = \mathrm{P}^{(k)}\{\xi_{d_2} > x\}, x \in R ,$$

где $S^{(k)}_{\xi_{d_i}}(x) = \int\limits_{x}^{+\infty} S^{(k-1)}_{\xi_{d_i}}(t)dt,\ k = 2,3\ldots$.

Далее без доказательств приведем условия существования функций распределения $F^{(k+1)}_{\xi_{d_i}}$ и $S^{(k+1)}_{\xi_{d_i}}$.

Утверждение 1. Функции $F^{(k+1)}_{\xi_{d_i}}$ и $S^{(k+1)}_{\xi_{d_i}}$ для случайных величин $\xi_{d_1}, \xi_{d_2} \in \xi$ определены, если $E(\xi^k_{d_i}) < \infty$, где $E(\cdot)$ есть математическое ожидание.

Доказательство данного утверждения можно посмотреть, например в [22].

Отметим также следующее важное обстоятельство.

Замечание. Пусть $E(\xi^k_{d_i}) = u$ есть математическое ожидание случайной величины $\xi_{d_i} \in \xi$. Пусть также существует случайная величина ψ, такая что $\mathrm{P}_\xi\{\psi = u\} = 1$, понимаемое как вырожденный риск. Тогда отношение $\xi_{d_1} \leq \psi$ понимается как любой риск хуже вырожденного риска (согласно гипотезе неприятия риска).

В [22] также упоминается о соотношениях между доминированием различных порядков. Так, из существования доминирования $(k-1)$-го порядка I-го рода следует доминирование порядка k I-го рода:

$$\xi_{d_1} \le_{(k-1)} \xi_{d_2} \Rightarrow F^{(k-1)}_{\xi_{d_1}}(x) \ge F^{(k-1)}_{\xi_{d_2}}(x) \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{x} F^{(k-1)}_{\xi_{d_1}}(t)dt \ge \int\limits_{-\infty}^{x} F^{(k-1)}_{\xi_{d_2}}(t)dt$$
$$\Rightarrow F^{(k)}_{\xi_{d_1}}(x) \ge F^{k}_{\xi_{d_2}} \Rightarrow \xi_{d_1} \le_k \xi_{d_2}.$$

То же самое справедливо и для отношения доминирования II рода.

Таким образом, для стохастического доминирования каждого рода будет справедливо следующее общее соотношение:

$$\xi_{d_1} \le_1 \xi_{d_2} \Rightarrow \xi_{d_1} \le_2 \xi_{d_2} \Rightarrow \xi_{d_1} \le_3 \xi_{d_2} \Rightarrow \ldots$$

В [22] замечают, что для некоторой пары случайных величин $\xi_{d_1}, \xi_{d_2} \in \xi$ возможен случай когда существует стохастическое доминирование 2-го порядка I-го и II-го рода, хотя доминирование 1-го порядка отсутствует.

3.2.2.3 *Меры риска*

Зададим на $\boldsymbol{P} = \{p_d, d \in D\}$ некоторый вещественно-значимый функционал $\mu : \boldsymbol{P} \to R$, такой что из $p_{d_i} \le p_{d_j} \Rightarrow \mu(p_{d_i}) \le \mu(p_{d_j})$ или для некоторых функционалов $\mu(p_{d_i}) \ge \mu(p_{d_j})$.

О п р е д е л е н и е 49. Функционал μ, заданный на семействе рисков (или рисковых факторов) и принимающий значения из R есть мера риска.

При этом необходимо отметить, что из практических соображений μ имеет смысл только если $|\mu| < \infty$. Условия существования данного функционал определяет следующая теорема.

Т е о р е м а 3. Пусть на $\boldsymbol{P}$ задано (бинарное) отношение упорядоченности $\le_P$, согласованное со стохастическим доминированием. Предположим, что для всякой неубывающей по стохастическому доминированию последовательности $p_{d_1} \le p_{d_2} \le p_{d_3} \ldots \in \boldsymbol{P}$, ограниченной по предпочтению некоторым рисковым фактором $\tilde{p} \in \boldsymbol{P}$: $p_{d_n} \le \tilde{p}, n = 1,2,\ldots$, выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} p_{d_n} \le \tilde{p}$. Тогда мера риска μ существует.

Новоселов приводит следующие примеры функционалов [21]:

а) математическое ожидание

$$a(\xi) = \int x d\mathrm{P};$$

б) дисперсия

$$\sigma(\xi) = \int (x - a(\xi))^2 d\mathrm{P}\, F;$$

в) смешанный функционал

$$(\beta > 0)\theta(\xi) = \sigma(\xi) - \beta a(\xi);$$

г) ожидаемая полезность $\rho(\xi) = \int U(x) d\mathrm{P}$; при $U(x) \equiv x$ имеем математическое ожидание;

Исходя из этого, задача принятия решения ЛПР в условиях вероятностной неопределенности может быть переформулирована как

$$\max_d (\min_d)(\mu(p_d)), p_d \in \boldsymbol{P}.$$

3.3 УМЕНЬШЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ. КОРРЕКТИРОВКА МОДЕЛИ РИСКА

3.3.1 Наличие априорной информации

Рассмотрим теперь информационный фон сформулированной модели вероятностной неопределенности (модели риска). Для этого модифицируем условия задачи принятия решения следующим образом.

Пусть как и прежде имеется множество R результатов, множество Ω состояний среды и множество D действий. Неопределенность моделируется путем задания на Ω структуры вероятностного пространства (Ω,**A**, P), а на множестве R структуры измеримого пространства (R,**B**).

Введем множество Θ параметров $\theta \in \Theta$, от которых зависит вероятностное распределение случайной величины на Ω.

Данная задача может быть легко сведена к исходной. Для этого положим, что каждому $\theta \in \Theta$ ставится в однозначное соответствие некоторое $d \in D$, т.е имеем $d = d(\theta)$. Тогда имеем задачу в исходной постановке.

Мы помним, что ЛПР фактически необходимо решить следующую оптимизационную проблему:

$$\max_{d}(\min_{d})(\mu(p_d)), p_d \in \boldsymbol{P}. \tag{4}$$

Как указывалось выше d однозначно определяется θ. Однако, при этом ЛПР не знает точно какое $\theta \in \Theta$ будет в действительности. Допустим, он выбирает некоторое действие $\hat{d}$ как решение проблемы (4), следовательно, $\hat{\theta} = d^{-1}(\hat{d})$. Однако, если в действительности имело место $\bar{\theta}$, то параллельно с основным риском (возможно к данному моменту уже реализовавшимся) возникают некоторые дополнительные потери, порожденные разницей $\bar{\theta} - \hat{\theta}$.

Таким образом, для задачи в данной постановке возникает дополнительная неопределенность в отношении параметра из Θ. Как результат, данная задача уже не может быть решена в постановке (4).

Для моделирования неопределенности на Θ зададим на нем вероятностное пространство (Θ, **Z**, P). Функция $\eta : \Theta \to \Theta$ есть **Z** – измеримая и определяет (канонический) случайный элемент (величину) на Θ с $\mathrm{P} = \mathrm{P}_\eta$.

Определение 50. Пусть (Θ, **Z**, P) – вероятностное пространство на Θ. Тогда функция $\varphi : \Omega \to [0,1]$ такая что, $\varphi_\eta(\theta) := \mathrm{P}_\eta(\{\theta\})$ есть априорное распределение вероятностей.

Определение 51. Априорный риск есть априорное распределение вероятностей $\varphi_\eta(\theta)$, порожденное случайным элементом η – суть рисковый фактор.

Тогда выбор $d \in D$ будет диктоваться выбором наиболее ожидаемого значения параметра, а именно: $\bar{\theta} = E\eta$.

Будем теперь полагать, что перед тем как выбрать тот или иной параметр $\theta \in \Theta$, ЛПР может наблюдать реализовавшиеся значения случайного элемента ξ на Ω. Множество реализовавшихся значений есть $X = \{\varpi_1, \varpi_2, ...\}$, причем $X \subset \Omega$, дает ЛПР дополнительную информацию о значении параметра из Θ, в виде апостериорного распределения вероятностей случайного элемента η.

Определение 52. Апостериорное распределение вероятностей, понимаемое в виде $\varphi_\eta(\theta \mid \{\varpi_1, \varpi_2, ...\})$, есть апостериорный рисковый фактор.

Используя $\varphi_\eta(\theta \mid \{\varpi_1, \varpi_2, ...\})$ апостериорное распределение вероятностей, ЛПР может вычислить новое наиболее ожидаемое значение параметра как $\overset{\approx}{\theta} = E(\eta \mid X)$, при это в общем случае $\overset{\approx}{\theta} \neq \bar{\theta}$.

Таким образом, дополнительная информация в виде $X = \{\varpi_1, \varpi_2, ...\}$ позволяет ЛПР корректировать значение оценок параметра и уменьшать потенциальные потери, связанные с существованием априорного риска.

3.3.2 Априорная информация: предельный случай

Проанализируем теперь каким образом увеличение объема информации влияет на решения, принимаемые ЛПР.

Пусть множество X состоит из n элементов $\{\varpi_1,...,\varpi_n\}$. Посмотрим, что будет происходить с распределением

$$\varphi_\eta(\theta \mid \{\varpi_1, \varpi_2,...\}) \text{ при } n \to \infty .$$

Для этого нам потребуется формулировка закона больших чисел.

Т е о р е м а 4. Закон больших чисел. Пусть $\xi_i, i = 1,2,...$ последовательность независимых (нековариированных) случайных элементов (величин). Причем $m_i = E\xi_i$ и существует и конечен предел $m = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ и $E(\xi_i - m_i)^2 = \sigma_i^2 \le \sigma^2$. Тогда при $n \to \infty$ среднее арифметическое $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ будет сходится по вероятности к m, а именно:

$$\mathrm{P}\{| S_n - m |> \varepsilon\} \to 0, \forall\varepsilon > 0, n \to \infty .$$

С л е д с т в и е. Базируясь на посылках данной теоремы можно доказать, что для реализовавшихся значений $\{\varpi_1,...,\varpi_n\}$ случайного элемента (величины) ξ при $n \to \infty$ $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varpi_i}{n}$ будет стремиться к m.

Доказательство: Действительно, пусть $X = \{\varpi_1,...,\varpi_n\}$ есть реализовавшиеся значения случайного элемента (величины) ξ. Очевидно, что X всегда можно представить в виде r последовательностей из l элементов ($l \le n,\ r = \frac{n}{l}$, порядок элементов сохраняется). Пусть число l есть количество реализовавшихся значений случайного элемента (величины) ξ_i из последовательности $(\xi_1,...,\xi_r)$ независимых случайных элементов (величин). Базируясь на посылках теоремы 1, получаем при $r \to \infty$ $S_r \to m$ по вероятности, где $S_r = \frac{1}{r}\sum\limits_{i=1}^{r}\xi_i$. При этом заметим, что при $r = n$ среднее арифметическое последовательности случайных элементов (величин) есть не что иное как

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varpi_i}{n}.$$

Следствие доказано.

Исходя из этого, в отношении распределения $\varphi_\eta(\theta \mid \{\varpi_1, \varpi_2,...\})$ мы можем говорить, что при $n \to \infty$ оно станет вырожденным, а именно $\mathrm{P}\{\eta = \overset{=}{\theta} \mid \{\varpi_1,...,\varpi_n\}\} \to 1$, где $\overset{=}{\theta}$ – некоторое истинное значение параметра.

Таким образом, при неограниченном возрастании объема информации ЛПР возвращается к решению оптимизационной проблемы (4).

Однако необходимо помнить, что задача инвестиционного выбора ассоциирована со временем. При этом теорема 4 и ее следствие справедливы лишь для фиксированного момента времени, для которого условия повторяемых гипотетических экспериментов с наблюдающееся последовательностью реализовавшихся значений случайных элементов (величин) сохраняются неизменными. При этом, с течением времени они в общем случае могут меняться, т.е фактически $\overset{=}{\theta}$ будет являться истинным значением параметра только для определенного момента времени t. В следующий момент $t+1$ он будет в общем случае отличным.

Для преодоления данной трудности обычно вводится дополнительное условие стационарности. Сформулируем данное условие [9].

Пусть $\{\xi(t), t \in [1,T]\}$ есть последовательность случайных элементов во времени – суть дискретный стохастический процесс.

Определение 53. Стохастический процесс $\{\xi(t), t \in [1,T]\}$ называется (строго) стационарным, если функция распределения случайного элемента не меняется с течением времени:

$$F_{\xi(t)} = F_{\xi(t+k)}.$$

Заключение 1. Если процесс (строго) стационарен, то его математическое ожидание не меняется с течением времени:

$$E\xi(t) = E\xi(t+k) = m.$$

Заключение 2. Дисперсия (строго) стационарного процесса в каждый момент времени одинакова:

$$E(\xi(t) - m)^2 = E(\xi(t+k) - m)^2 = \sigma^2.$$

Заключение 3. Ковариация зависит только от разности моментов времени:

$$Cov(\xi(t), \xi(t+k)) = Cov(\xi(1), \xi(1+k)).$$

Таким образом, соблюдение условия стационарности позволяет ЛПР использовать информацию о точном значении параметра в любой момент времени, если когда либо и каким либо образом ему удалось вычислить $\overset{=}{\theta}$.

Введение условия стационарности позволяет ЛПР окончательно вернуться к оптимизационной проблеме (4) без использования пространства Θ параметров, при условии что истинное значение параметра известно.

3.3.3 Случай частичного априорного знания о множестве параметров

Пусть теперь ЛПР не имеет никакой априорной информации в отношении Θ. Единственно, что ему доступно – это выборка $X = \{\varpi_1, \varpi_2, ...\} \subset \Omega$, представляющая собой реализованные значение случайного элемента ξ на Ω. При это закон распределения вероятностей случайного элемента описывается функцией распределения $F_\xi(\varpi \mid \theta)$, зависящей от неизвестного параметра $\theta \in \Theta$.

Не обладая информацией об априорном риске, используя выборку X ЛПР все же может сделать некоторые предположения в отношении значения параметра θ, а также некоторым образом оценить величину апостериорного риска.

Рассмотрим выборку $\{\varpi_1, ..., \varpi_n\}$. Данная выборка может рассматриваться в целом как реализованные значения некоторой последовательности случайных элементов $\{\varpi_1, ..., \varpi_n\}$. Тогда для оценки значения θ введем функцию вида

$$L(\varpi_1, ..., \varpi_n \mid \theta) = f(\varpi_1 \mid \theta) \cdot ... \cdot f(\varpi_n \mid \theta), \qquad (5)$$

где f есть вероятность $\mathrm{P}\{\xi = x\}$ если случайный элемент дискретный и плотность если непрерывный.

Данная функция есть функция правдоподобия и задает вероятность получения при извлечении выборки объемом n, именной наблюдений $(\varpi_1, ..., \varpi_n)$ (или величину пропорциональную вероятности получения выборочных значений в непосредственной близости от $(\varpi_1, ..., \varpi_n)$). Поэтому, чем больше значение $L(X \mid \theta)$ тем правдоподобнее (более вероятно) система наблюдений $(\varpi_1, ..., \varpi_n)$ при заданном значении параметра θ. Примечательно, что данная функция используется также при определении апостериорного распределения вероятностей (апостериорного риска).

Оценка $\hat{\theta}$ неизвестного параметра по выборке $(\varpi_1,...,\varpi_n)$ реализовавшихся значений случайного элемента ξ на Ω, при условии что $F_\xi(\cdot\,|\,\theta)$ функция распределения (либо плотность) известна определяется из условия

$$L(\varpi_1,...,\varpi_n\,|\,\hat{\theta}) = \max_{\hat{\theta}} L(\varpi_1,...,\varpi_n\,|\,\hat{\theta}).$$

Более формально это может быть записано как

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\hat{\theta}} \prod_{i=1}^{n} f(\varpi_i\,|\,\hat{\theta}).$$

Изменяя значения θ в $L(X\,|\,\theta)$, можно проследить какое значение θ является наиболее правдоподобным для X реализовавшихся значений. При этом, как отмечается в [1], чем резче меняется значение функции при изменении значений параметра θ, тем больше информации заключено в конкретных значениях $(\varpi_1,...,\varpi_n)$ и $\hat{\theta}$ друг о друге.

Вычисленные на основании $(\varpi_1,...,\varpi_n)$ оценка $\hat{\theta}$, как уже отмечалось ранее, является лишь приближенным значением неизвестного параметра (прежде всего, в силу конечности $(\varpi_1,...,\varpi_n)$, см. теорему 4 и следствие к ней).

Для того чтобы в некотором смысле оценить апостериорный риск, можно использовать конструкцию доверительного интервала

$$\mathrm{P}\{|\hat{\theta}-\theta| < \Delta_\alpha\} = \alpha,$$

где α близко к единице.

3.3.4 Риск в условиях частичных вероятностных знаний

Для моделирования риска в условиях частичных вероятностных знаний можно использовать конструкцию вероятностных интервалов.

Пусть ЛПР обладает следующей информацией в отношении случайной величины ξ на Ω, и η на Θ:

1) ЛПР знает или предполагает что случайная величина ξ распределена по закону $F_\xi(\cdot\,|\,\theta)$ с неизвестным параметром θ;

2) ЛПР знает или предполагает, что случайная величина η на θ распределена по закону F_η;

3) ЛПР обладает лишь отрывочными (не исключено что противоречивыми) знаниями о вероятностях в отношении 1) и 2).

Таким образом, в общем смысле знания ЛПР могут быть представлены в виде

$$\underline{p_i} \le F_\xi(a_i \le \xi \le b_i\,|\,\theta) \le \overline{p_i},\; i=\overline{1,m}; \tag{6}$$

$$\underline{\alpha_j} \le F_\eta(\theta_j \le \eta \le \theta_j) \le \overline{\alpha_j},\; j=\overline{1,n}. \tag{7}$$

Проблема моделирования риска в данной постановке формулируется Уткиным в [36] или в более обобщенном варианте Кузнецовым в [13]. Примечательно, что знания ЛПР необязательно представляются только системой (6) – (7). Возможны случаи (см. например, в [35]), когда проблема представлена только (6) или только (7).

3.4 МОДЕЛИРОВАНИЕ РИСКОВ ИНВЕСТИЦИОННО-ФИНАНСОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

3.4.1 Задача оценки риска портфеля финансовых активов по Марковицу

В 1952 году Г. Марковиц опубликовал фундаментальную работу*, которая стала основой подхода к инвестициям с точки зрения современной теории формирования портфеля (Modern Portfolio Theory).

Подход Г. Марковица начинается с предположения, что инвестор в некоторый момент времени t_0 имеет конкретную сумму денег для инвестирования. На эти деньги инвестор покупает ценные бумаги и держит их в течение определенного периода времени $\Delta t = t_1 - t_0$, который называется периодом владения. В конце периода t_1 инвестор продает ценные бумаги, которые были куплены в начале периода, после чего использует полученный доход на потребление, либо осуществляет реинвестирование (либо делает и то и другое одновременно).

Таким образом, в момент t_0 инвестор должен принять решение о покупке конкретных ценных бумаг (выборе того или иного инвестиционного портфеля). При этом он должен иметь в виду, что доходность ценных бумаг (и, таким образом, доходность портфеля) в предстоящий период владения Δt неизвестна.

Формализуем данную задачу. Пусть имеется некоторый набор (портфель) финансовых инструментов, который инвестор приобретает в момент t_0 на период $\Delta t = t_1 - t_0$.

Текущая стоимость данного портфеля

$$p^p(t_0) = \sum n_i(t_0)\, p_i(t_0),$$

где $p_i(t_0)$ – текущая рыночная стоимость i-го инструмента, а $n_i(t_0)$ – его количество в момент t_0. При этом будем предполагать, что количество i-го инструмента в портфеле остается неизменным на притяжении всего периода Δt ($\{ n_i(t) = n_i = \text{const}\,,\ t \in \Delta t \}$).

Охарактеризуем ситуацию риска. Приобретая портфель, инвестор не может точно знать его стоимость в момент t_1, из-за незнания закономерности изменения цен внутри периода Δt для финансовых инструментов, входящих в портфель. При этом он может предположить возможные значения цены каждого инструмента в некоторый момент времени $t \in \Delta t$ и, в частности, в момент времени t_1.

Это в целом позволяет говорить о ситуации неопределенности, обусловленной существованием факторов неопределенности: $p_i(t)$ и $p^p(t)$, $t \in \Delta t$. При этом, фактор $p_i(t)$ является «базовым» фактором, а фактор $p^p(t)$ – от него образованным («производным»). Деление факторов на базовые и производные можно также осуществить, учитывая тип финансового инструмента. Так, цены простых инструментов являются базовыми факторами, цены производных инструментов, связанные с ценами базовых инструментов – производными.

В целях упрощения в дальнейшем будем рассматривать портфель, состоящий лишь из одного инструмента. Это позволяет использовать довольно простую зависимость между базовым и производным факторами неопределенности

$$p^p(t) = n_i p_i(t), n_i = 1, t \in \Delta t$$

и, в принципе, что более удобно, рассматривать лишь «производный» фактор $p^p(t)$.

Если инвестор может на основе некоторой имеющейся у него информации оценить вероятности конечного числа значений цены $p^p(t)$ в момент $t = t_1$, то можно говорить о наличии ситуации риска (ситуации «измеримой»/вероятностной неопределенности).

Пусть функция распределения случайной величины (рискового фактора) $\left\{ P^p(t), t = t_1 \right\}$ определяться как

$$F(w) = P\left\{ P^p(t) < w \right\},\ t = t_1 .$$

Тогда модель риска суть вероятностное распределение рискового фактора $P^p(t)$ в момент времени $t = t_1$.

---

* Harry Markowitz «Portfolio Selection», The Journal of Finance, Vol. VII, No 1, March 1952. P. 77 – 91.

Пусть величина $L = p^p(t_1) - p^p(t_0)$ отражает некий уровень потенциальных потерь инвестора за период Δt по некоторому портфелю (финансовому инструменту). При этом предполагается, что фактическая стоимость портфеля в момент времени t_1 будет не меньше некоторой величины $p^p(t_1) = u$ с вероятностью $1 - \alpha = \text{P}$. Тогда вероятность того, что фактическая стоимость портфеля в момент t_1 составит меньшую величину (т.е величина фактических потерь за период Δt будет больше чем L) будет равняться α.

Величина L суть величина капитала под риском, обозначаемая как VAR (value at risk) (см. например [17]). Данная величина в стоимостном выражении может быть определена следующим образом:

$$VAR_{p,1-\alpha,t} = L = \left([w_\alpha - p^p(t_0)] \,\Big|\, [P\{P^p(t) < w_\alpha\} = \alpha, t = t_1]\right).$$

Вместо цены портфеля $p^p(t)$ в момент времени $t = t_1$ инвестор может попытаться оценить его доходность за период $\Delta t = t_1 - t_0$.

Доходность портфеля за период Δt, $\Delta t \in T$ будет вычисляться следующим образом:

$$r_p(\Delta t) = \frac{p^p(t_1) - p^p(t_0)}{p^p(t_0)}, \tag{8}$$

где $r_p(\Delta t)$ – доходность портфеля за период $\Delta t \in T$.

Необходимо отметить, что доходность портфеля может увеличиваться на некоторые фиксированные выплаты, производимые по отдельным инструментам, составляющим портфель. В дальнейшем будем предполагать, что доходность каждого инструмента портфеля, а следовательно и всего портфеля, образуется лишь за счет изменения курса (цены) инструмента (т.е. рассчитывается в соответствии с (8)).

Производный рисковый фактор $R_p(\Delta t), \Delta t = t_1 - t_0$ порожден «производным» рисковым фактором $P^p(t), t = t_1$.

Исходя из этого, под риском будет пониматься вероятностное распределение рискового фактора

$$R_p(\Delta t), \Delta t = t_1 - t_0.$$

Функция распределения $R_p(\Delta t)$ будет определяться как

$$F(u) = \text{P}\left\{R_p(\Delta t) < u\right\}, \ \Delta t = t_1 - t_0.$$

Величина VAR портфеля в относительном выражении (доля потерь в первоначальной стоимости инвестированных средств $p^p(t_0)$) будет определяться следующим образом:

$$VAR_{p,1-\alpha,\Delta t} = \left(u_\alpha \,\middle|\, [\text{P}\{R_p(\Delta t) < u_\alpha\} = \alpha]\right)$$

или абсолютном выражении

$$VAR_{p,1-\alpha,\Delta t} = u_\alpha p^p(t_0).$$

3.4.2 Особенности моделирования риска финансового актива (портфеля финансовых активов) во времени

Как уже упоминалось выше, существенную роль при формировании модели риска играет критерий полноты информации, а также ряд условий, накладываемых с целью упрощения модели.

Рассмотрим некоторую совокупность наблюдений случайной величины $X(t)$ (доходность или цена некоторого финансового актива – рисковый фактор) в определенные моменты времени $t = t_k$ из временного периода *T*, т.е данная совокупность является упорядоченной по времени и является конечной, т.е

$$t_{k-1} < t_k, k = \overline{1,n}.$$

Данную последовательность, где каждому моменту времени t_k соответствует по определенному правилу $X(t_k)$, распределенная по некоторому закону, можно рассматривать как функцию двух разнородных величин: случая и времени [9] (дискретный скалярный случайный процесс).

При фиксированном значении случая имеем некоторую временную последовательность (временной ряд длиной l) реализованных значении $x(t_k)$ случайной величины (реализация случайного процесса).

Дискретный скалярный случайный процесс, в общем виде, в дальнейшем будем обозначать как

$$\{ X(t_k), t_k \in T, k = \overline{1,n} \}^*,$$

а его реализацию как $\{ x(t_k), t_k \in T, k = \overline{1,l} \}$.

Наиболее полной характеристикой дискретного скалярного случайного процесса является совместная функция распределения случайной величины или совместная функция плотности, если она существует [9].

Таким образом, при моделировании риска финансового актива (портфеля финансовых активов) во времени в качестве риска рассматривается в общем случае совместная функция распределения случайной величины.

В качестве мер риска можно использовать математическое ожидание, и матрицу ковариаций, которые суть характеристики случайного процесса.

Для определения характеристик случайного процесса в общем случае может быть использована совокупность реализаций за некоторый прошедший период *T*. При этом делается предположение относительно степени постоянства данных характеристик во времени (предположение относительно стационарности случайного процесса).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данной работы являлось рассмотрение проблемы анализа рисков инвестиционно-финансовой деятельности. При этом особое внимание уделялось проблемам классификации рисков инвестиционно-финансовой деятельности а также общим вопросам моделирования рисков.

---

* Система скалярных случайных процессов есть векторный случайный процесс (некоторому моменту времени соответствует вектор случайных величин $(X_1(t_k),...,X_m(t_k))$. Векторный случайный процесс можно рассматривать в случае, когда портфель состоит более чем из одного инструмента.

Для реализации данной цели автором рассмотрена проблема неопределенности инвестиционного процесса, объективно обусловленная действием факторов неопределенности. При этом с целью предельной формализации задачи предложен алгоритм действий ЛПР в условиях неопределенности. Возможность выявление факторов неопределенности-риска позволила, в свою очередь, предложить возможный механизм классификации рисков инвестиционно-финансовой деятельности.

Кроме того, автором детально проанализирована проблема построения модели неопределенности, обобщающей традиционную модель риска посредством ввода в анализ понятия пространства с нечеткой мерой. В данном отношении можно говорить о возможности расширения традиционного инструментария анализа неопределенности возникающей в инвестиционном процессе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 О порядке расчета кредитными организациями размера рыночных рисков: Положение Центрального Банка РФ от 24.09.1999. № 89-П.

2 Методические рекомендации по управлению рисками кредитных организаций на рынке ценных бумаг. М.: НФА. 2000.

3 Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика. Основы эконометрики: Учебник для вузов: В 2 т. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.

4 Бланк И.А. Финансовый менеджмент: Учебный курс. Киев, 2002.

5 Бланк И.А. Инвестиционный менеджмент. Киев: МП Итем; ЛТД Юнайтед. Лондон Трейд Лимитед, 1995.

6 Бочаров В.В., Леонтьев В.Е. Корпоративные финансы. СПб., 2004.

7 Вьюков М.Л., Ермошин С.И. Управление портфельными рисками в России. [www document]. URL http://www.fact400. ru/rmis/rm_article.htm

8 М.Де Гоот Оптимальные статистические решения. Пер. с англ. А.Л. Рухина М., 1974.

9 Канторович Г.Г. Анализ временных рядов. Лекционные и методические материалы // Экономический журнал ВШЭ. 2002. № 1, С. 85 – 116.

10 Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятности: Пер. с нем. Г.М. Бавли. М., 1936.

11 Колмогоров А.Н. Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа М., 1968.

12 Кудрявцев О., Кудрявцева М. Финансовые риски: теоретическое понятие и практическая классификация. [www document]. URL http://riskinfo.ru

13 Кузнецов В.П. Интервальные статистические модели. М., 1991.

14 Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. СПб.: «БХВ-Петербург» 2003.

15 Литовских А.М. Финансовый менеджмент. [www document]. URL http://www.aup.ru

16 Лытнев О. Основы финансового менеджмента: Курс лекций. [www document]. URL http://http://www.cfin.ru/finanalysis/lytnev/index.shtml

17 Милосердов А.А., Герасимова Е.Б. Рыночные риски: формализация, моделирование, оценка качества моделей: Монография. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. 116 с.

18 Милосердов А.А., Герасимова Е.Б. Ситуация риска и неопределенности: алгоритм идентификации риска // Математические и инструментальные методы экономического анализа: управление качеством: Сб. науч. тр. Тамбов, 2004. Вып. 15. С. 130 – 136.

19 Милосердов А.А. Моделирование неопределенности на пространстве с нечеткой мерой // Математические и инструментальные методы экономического анализа: управление качеством: Сб. науч. тр. Тамбов, 2006. Вып. 20. С. 125 – 131.

20 Найт Ф. Понятие риска и неопределенности // В сб. THESIS. 1994. Вып. 5. С. 12 – 28.

21 Новоселов А.А. Понятие риска и методы его измерения // Proceedings of the International Scientific School "Modelling and Analysis of Safety, Risk and Quality in Complex Systems", St.-Petersburg, 2001. P. 77 – 80.

22 Новоселов А.А., Варочкина Т.С. Стохастическое доминирование I и II рода. [www document]. URL http://anov.narod.ru

23 Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры: Пер с англ. А.В. Прохорова, М., 1983.

24 Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применения. М., 2000.

25 Романов В.С. Понятие рисков в экономической деятельности. [www document]. URL http://www.aup.ru

26 Романов В.С. Классификация рисков: принципы и критерии. [www document]. URL http://www.aup.ru

27 Рубенчик А. Словарь терминов риск-менеджмента. [www document]. URL http://www.ndc.ru

28 Финансовый менеджмент: Под ред. Г.Б. Поляка М.: Финансы, Юнити, 1997.

29 Финансовый менеджмент: теория и практика: Учебник: Под ред. Е.С. Стояновой. М.: Изд-во «Перспектива», 2002.

30 Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера, производная. М., 1967.

31 Ширяев А.Н. Вероятность М., 1980.

32 Электронный словарь. [www document]. URL http://www. znay.ru/dictionary/

33 Dubois D., Prade H., Independence in Qualitative Uncertainty Frameworks. [www document]. URL http://citeseer.ist.psu.edu/cs

34 Zadeh L.A., Probability Measure of Fuzzy Events. J. Math. Analysis and Appl. 23 (1968), P. 421 – 427.

35 Harry Markowitz «Portfolio Selection». The Journal of Finance. Vol. VII, No 1, March 1952. P. 77 – 91.

36 Utkin L.V. A method for processing the unreliable expert judgments about parameters of probability distributions Department of Computer Science, St.Petersburg Forest Technical Academy. [www document]. URL http://citeseer.ist.psu.edu/cs

37 Grabisch M., Sugeno M., Murofushi T. Fuzzy Measure of Fuzzy Events Defined by Fuzzy Integrals, Tokyo Institute of Technology, Dept. of System Science. [www document]. URL http://citeseer. ist.psu.edu/cs

38 Benvenuti P., Vivona D., General Theory of Fuzzy Integrals, Dip. Metodi e Mod. Matematici per Sci. Applicate Universita degli Studi «La Sapienza». [www document]. URL http://citeseer.ist.psu.edu/cs

39 Benferhat S., D. Dubois, S. Kasi and H. Prade, Modeling Positive and Negative Information in Possibility Theory, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (I.R.I.T.) – C.N.R.S., 2002.

40 18.125 Measure and Integration, Fall 2003, lecture notes, Mathematics, MITOpenCourseWare [www document]. URL http://ocw. mit.edu/Ocw Web/Mathematics/18 – 125 Fall 2003/CourseHome/index. htm

41 Choquet G. Theory of capacities //Ann. Inst. Fourier, 1953/1954, 5. P. 131 – 295.

42 Gert De Cooman, E.E. Kere, Possibility and Necessity Integrals. [www document]. URL http://citeseer.ist.psu.edu/cs