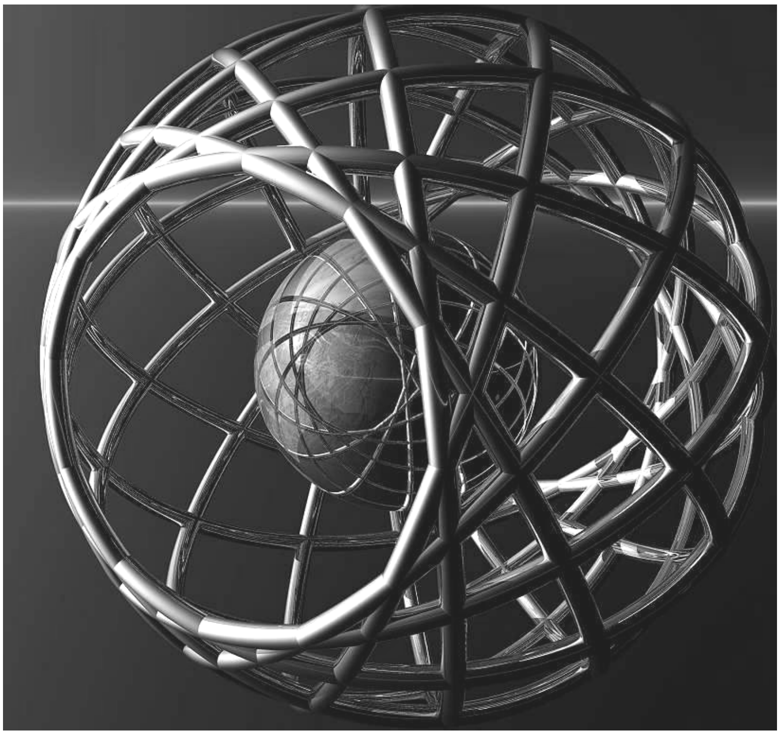
Ю.Ю. ГРОМОВ, О.Г. ИВАНОВА,
Ю.А. КОСТЫЛЕВ, А.В. ЛАГУТИН

АЛГЕБРА



Издательство ТГТУ

Учебное издание

ГРОМОВ Юрий Юрьевич,
ИВАНОВА Ольга Геннадьевна,
КОСТЫЛЕВ Юрий Александрович,
ЛАГУТИН Андрей Владимирович

АЛГЕБРА

Учебное пособие

Редактор В.Н. Митрофанова
Компьютерное макетирование М.А. Филатовой

Подписано в печать 8.11.2006
Формат 60 × 84 / 16. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman.
4,6 уч.-изд. л. Тираж 100 экз. Заказ № 608

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета,
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

Ю.Ю. ГРОМОВ, О.Г. ИВАНОВА,
Ю.А. КОСТЫЛЕВ, А.В. ЛАГУТИН

АЛГЕБРА

Тамбов
♦ Издательство ТГТУ ♦
2006

УДК 512 (07)

ББК В14я73
А456

Р е ц е н з е н т
Заведующий кафедрой прикладной информатики
ТФ ФГОУ ВПО МГУКИ кандидат технических наук, доцент
В.Н. Точка

Громов, Ю.Ю.
А456 Алгебра : учебное пособие / Ю.Ю. Громов, О.Г. Иванова, Ю.А. Костылев, А.В. Лагутин. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. – 80 с. – 100 экз. ISBN 5-8265-0526-5

Учебное пособие знакомит иностранных учащихся с основными понятиями алгебры, содержит тексты, лексико-грамматические материалы, примеры и вопросы, позволяющие студентам-иностранцам овладеть основными понятиями и определениями элементарной алгебры.

Содержание пособия соответствует стандарту по математике на подготовительных факультетах для иностранных граждан.

Предназначено для студентов иностранцев, проходящих предвузовскую подготовку.

ISBN 5-8265-0526-5

ВВЕДЕНИЕ

Структура и содержание пособия соответствуют отраслевому стандарту по математике и разработаны с учетом специфических особенностей системы обучения иностранных студентов, а также принципа преемственности в обучении на предвузовском этапе подготовки и первых курсах высших учебных заведений.

Изложение материала рассчитано на продолжение чтения основного курса лекций по математике после изучения иностранными студентами вводного курса по математике, направленного на овладение научным стилем речи.

В пособии приведен необходимый объем учебной информации, обеспечивающий овладение основами алгебры. Материал для изучения дается в сжатом виде, освещает основные понятия и определяется элементарной алгеброй: алгебраические выражения и действия над ними, уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств.

Для обеспечения доступности усвоения учебного материала иностранными студентами текст пособия адаптирован.

Содержание учебного пособия соответствует стандарту по курсу «Математика» на подготовительных факультетах для иностранных студентов.

1 АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ. ОДНОЧЛЕНЫ И МНОГОЧЛЕНЫ

1.1 ВЫРАЖЕНИЕ. ЧИСЛОВОЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ. ОДНОЧЛЕНЫ И МНОГОЧЛЕНЫ

Одно из основных понятий алгебры – это понятие выражения. Числовое выражение записывается с помощью чисел, знаков действий и скобок. Например, $(15 - 10) : 2$. Это выражение содержит числа, знаки действий и круглые скобки. Если, соблюдая принятый порядок, выполнить указанные в выражении действия, то получится число: например, $(15 - 10) : 2 = 2{,}5$. Число 2,5 называется числовым значением данного числового выражения.

Числовое выражение не всегда имеет числовое значение. Так числовое $(2 + 4) : 4 + 2 - 6)$ не имеет числового значения, так как не все указанные действия можно выполнить. В данном примере предполагается деление на нуль, что невозможно.

В соответствии с данным определением числового выражения, любое число можно рассматривать как числовое выражение. Например, число 4 – это числовое выражение. Его числовое значение равно 4.

Итак, числовое выражение или имеет одно числовое значение, или не имеет числового значения. В последнем случае говорят, что числовое выражение не имеет смысла. Выражение, которое содержит числа, знаки действий, скобки и буквы, называется выражением с переменными. Буквы могут принимать определенные числовые значения. Эти буквы переменные величины. Например, выражение $4(3a + 2b)$ – это выражение с переменными a и b. Переменные a и b могут принимать любые значения из множества действительных чисел. При различных значениях переменных a и b выражение может принимать различные числовые значения.

Числовое значение выражения с переменными – это число, которое получится, если в это выражение вместо переменных подставить их числовые значения и выполнить указанные действия

При некоторых значениях переменных выражение может не иметь смысла. Например, выражение $3 : (x - 5)$ не имеет числового значения при $x = 5$. Действительно, при этом значении переменной x знаменатель выражения обращается в нуль. А по правилам алгебры деление на нуль невозможно.

Множество значений переменных, при которых выражение с переменными имеет смысл, называется областью определения этого выражения

Подставив все значения переменных из области определения, мы получим множество числовых значений данного выражения.

Числовые значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называются допустимыми значениями переменных

Значение $x = 3$ является допустимым значением переменной выражения $3 : (x - 5)$. Значение $x = 5$ не является допустимым значением данного выражения

Множество всех допустимых значений переменных выражения называется областью допустимых значений выражения с переменными

Для множества допустимых значений выражения с переменными принято сокращение ОДЗ. Найдем, например, ОДЗ выражения $x : (x - 1)$. Это выражение имеет смысл при всех значениях переменной, за исключением $x = 1$. Поэтому ОДЗ данного выражения с переменной – это множество всех действительных чисел за исключением $x = 1$.

Найдем ОДЗ выражения $(a + b) : ab$. Допустимыми значениями переменных a и b являются пары чисел $(a; b)$ в которых ни одна из переменных не равна нулю. Поэтому ОДЗ данного выражения – множество пар $(a; b)$, таких что a и b не равны нулю. Например, пары чисел (1; 4) и (5; 2) принадлежат ОДЗ выражения $(a + b) : ab$. А пары чисел (2; 0) и (0; 5) не принадлежат ОДЗ этого выражения.

Два выражения тождественно равны, если числовые значения этих выражений равны при всех значениях переменных

Например, выражения $(x^2 + x)$ и $x(x + 1)$ при всех действительных значениях переменной принимают равные значения. Поэтому они тождественно равны.

Равенства, в которых левая и правая части тождественно равны, называются тождествами

Тождественное равенство обозначается символом $\equiv$. Например, равенство $x^2 + x \equiv x(x + 1)$ – это тождественное равенство.

1.2 ЦЕЛЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ.

Рассмотрим выражения 2; a; $3b$; $4a^2b$; $5{,}4ab^2c^3$. Они содержат числа, переменные, с натуральным и показателями, их произведения.

Выражения, представляющие собой произведение чисел, переменных и степеней переменных, называется одночленом
Числовой множитель одночлена называется коэффициентом. Например, у одночлена $5xy$ числовой множитель 5 – это коэффициент

Стандартным видом одночлена называется произведение, составленное из числового множителя (коэффициента) и буквенного выражения, в котором каждая из переменных взята в натуральной степени

Степенью одночлена стандартного вида называется сумма показателей степеней переменных

Например, $5x^2y^3$ – это одночлен пятой степени. Степень одночлена $5x$ равна единице, а степень одночлена 8 равна нулю.

Одночлены, отличающиеся только числовым коэффициентом или равные между собой, называются подобными

Например, одночлены $3x^2y^3$, $5x^2y^3$ и $5x^2y^3$ являются подобными. Подобные члены можно соединить в один член. Соединение подобных членов в один называется приведением подобных членов. Чтобы привести подобные члены нужно сложить их коэффициенты и написать общее буквенное выражение. Например, $4a + 5ax - 3a - 7ax = (4 - 3)a + (5 - 7)ax = a - 2ax$. Алгебраическая сумма одночленов называется многочленом. Одночлены, которые составляют многочлен, называются его членами

Если многочлен содержит два члена, например $2x + 3y$, он называется двучленом. Если многочлен содержит три члена, то его называют трехчленом и т.д. Одночлен можно рассматривать как частный случай многочлена.

Рассмотрим многочлен одной переменной x

$$3x^2 + 4x + 5x^4 + 2.$$

Он содержит четыре члена. Наибольшую степень имеет третий член. Этот член называется старшим членом многочлена. Степень старшего члена многочлена называется степенью многочлена. Поэтому данный многочлен – это многочлен четвертой степени.

Рассмотрим пример

$$3x^2y^4(-2xy^2) = 3(-2)(x^2x)(y^4y^2) = -6x^{2+1}y^{4+2} = -6x^3y^6.$$

При умножении одночленов мы применяем коммутативный и ассоциативный законы и свойства умножения степеней.

Чтобы умножить одночлен на одночлен нужно перемножить их коэффициенты и сложить показатели степеней, которые имеют одинаковые основания

Рассмотрим пример

$$(2x^2y^3)^2 = 2^2(x^2)^2(y^3)^2 = 4x^{2\cdot 2}y^{3\cdot 2} = 4x^4y^6.$$

При возведении одночлена в степень мы применяем свойства степени.

Чтобы возвести одночлен в степень нужно возвести коэффициент в эту степень и умножить показатели степеней переменных на показатель степени, в которую возводим одночлен

Чтобы умножить многочлен на одночлен, достаточно каждый член многочлена умножить на одночлен и полученные произведения сложить

Деление многочлена на одночлен производится по аналогичному правилу.

Чтобы умножить многочлен на многочлен нужно каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго и полученные произведения сложить

Например

$$5x(x-y) + (2x+y)(x-y) = 5x^2 - 5xy + 2x^2 - 2xy +$$
$$+ xy - y^2 = 7x^2 - 6xy - y^2.$$

Чтобы сложить многочлены, нужно записать все члены многочленов последовательно и затем привести подобные члены

Например

$$(5x^2 - 2x + 3) + (3x^2 + 4x - 7) = 5x^2 - 2x + 3 + 3x^2 + 4x - 7 =$$
$$= 8x^2 + 4 = 4(2x^2 + 1).$$

Чтобы вычесть из одного многочлена другой многочлен, нужно записать все члены первого многочлена с их знаками и приписать к ним все члены второго многочлена с противоположными знаками и привести подобные члены

Например

$$(x^2 + 5x - 2) - (7x^2 - 8x + 4) = 3x^2 + 5x - 2 - 7x^2 + 8x - 4 =$$
$$= -4x^2 + 13x - 6.$$

1.3 ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Одночлены и многочлены – это целые алгебраические выражения. Применим к ним операцию деления. Рассмотрим пример

$$6x^5y^3 : 2x^3y = \frac{6x^5}{2x^3}\frac{y^3}{y} = 3x^{5-3}y^{3-1} = 3x^2y^2.$$

Здесь мы использовали свойство деления степеней.

Чтобы разделить одночлен на одночлен, нужно разделить коэффициент делимого на коэффициент делителя и вычесть показатели степеней делителя из показателей степеней одинаковых оснований делимого

Разделим многочлен $x + y$ на одночлен $c(c \neq 0)$. Заменим деление на многочлен с умножением на обратный ему многочлен $1/c$ и применим дистрибутивный закон умножения.

Получим:

$$\frac{x+y}{z} = (x+y) \cdot \frac{1}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}.$$

Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно разделить каждый член многочлена на этот одночлен и сложить частные

Например: $\dfrac{8x^3 + 6x^2}{2x} = \dfrac{8x^3}{2x} + \dfrac{6x^2}{2x} = 4x^2 + 3x$.

Многочлен называется расположенным многочленом, если его члены расположены в порядке убывания или возрастания показателей степеней

Например: многочлены $4x^3y^4 - 2x^2y + 5xy^2 + 3$ и $3 + 5xy^2 - 2x^2y + 4x^3y^4$ – расположенные многочлены. В первом многочлене показатели входящих в него одночленов убывают, а во втором – возрастают.

1.4 ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Найдем произведение суммы двух чисел $(a + b)$ на их разность $(a - b)$ $(a + b)\cdot(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$. Итак, мы получили тождество $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел

$$\boldsymbol{(a + b)(a - b) = a - b^2}$$

Возведем сумму двух чисел $(a + b)$ в квадрат. Мы получим:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа, т.е.

$$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Возведем разность двух чисел $(a - b)$ в квадрат. Мы получим:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа, т.е.

$$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Возведем сумму двух чисел $(a - b)$ в куб. Мы получим:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Куб суммы двух чисел равен кубу первого числа плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго плюс куб второго числа, т.е.

$$\boldsymbol{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Возведем разность двух чисел $(a - b)$ в куб. Мы получим

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Куб разности двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго минус куб второго числа, т.е.

$$\boldsymbol{(ab)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

Выражение $(a^2 - ab + b^2)$ принято называть неполным квадратом разности. Найдем произведение суммы двух чисел ($a + b$) на неполный квадрат их разности. Мы получим:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

Сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на их неполный квадрат разности, т.е.

$$\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)(a - ab + b^2)}$$

Выражение $(a^2 + ab + b^2)$ принято называть неполным квадратом суммы. Умножим разность двух чисел ($a - b$) на их неполный квадрат суммы. Мы получим:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3).$$

Разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел на их неполный квадрат суммы, т.е.

$$\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)(a + ab + b^2)}$$

1.5 РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Разложить многочлен на множители – это значит записать этот множитель как произведение двух или нескольких многочленов. Например: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Рассмотрим основные методы разложения многочленов на множители.

Метод вынесения общего множителя за скобки. Разложим на множители многочлен ($ac + bc$). Его члены ac и bc имеют общий множитель c. Общий множитель можно вынести за скобки, а в скобках записать результат деления данного многочлена на общий множитель. Мы получим: $(ac + bc) = c(a + b)$. Это равенство верно, так как оно выражает дистрибутивный закон умножения.

Если все члены многочлена имеют общий множитель, то его можно вынести за скобки, а в скобках записать результат деления многочлена на этот общий множитель

Метод группировки. Разложим на множители многочлен

$$ax + bx + ay + by.$$

Все члены этого многочлена не имеют общего множителя, но первые два члена имеют общий множитель x, а вторые два члена имеют общий множитель y. Соединим первый и второй члены в одну группу, а третий и четвертый в другую группу. Мы получим: $(ax + bx) + (ay + by)$. В первой группе общий множитель x, а во второй группе – общий множитель y. Вынесем их за скобки. Тогда получим: $x(a + b) + y(a + b)$. Каждое из двух слагаемых этого многочлена имеет множитель $(a + b)$. Вынесем его за скобки. Тогда окончательно получим: $(a + b)(x + y)$. Итак

$$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y).$$

Метод разложения на множители по формуле сокращенного умножения. При разложении многочлена на множители иногда можно применить формулы сокращенного умножения. В качестве примера рассмотрим разложение на множители многочлена $9a^4 - 25b^2$. Этот многочлен можно рассматривать как разность квадратов

$$9a^4 - 25b^2 = (3a^2)^2 - (5b)^2 = (3a^2 + 5b)(3a^2 - 5b) .$$

Здесь мы воспользовались формулой сокращенного умножения $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Метод введения вспомогательных членов. Разложим на множители многочлен $x^2 + 2x - 3$. Рассмотрим два способа.

1 способ. Введем вспомогательные члены 1 и –1. Затем применим способ группировки и формулу разности квадратов. Тогда получим

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x + 1)^2 - 2^2 =$$
$$= (x + 1 - 2)(x + 1 + 2) = (x - 1)(x + 3).$$

2 способ. Член $2x$ запишем как сумму $-x + 3x$ и, применив метод группировки, получим:

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 - x + 3x - 3 = (x^2 - x) + (3x - 3) = x(x - 1) + 3(x - 1) =$$
$$= (x - 1)(x + 3).$$

Контрольные вопросы

1 Что называется числовым выражением?
2 Что такое числовое значение выражения?
3 Сколько числовых значений имеет числовое выражение?
4 Что называется выражением с переменными?
5 Что такое числовое значение выражения с переменными?
6 Что называется допустимыми значениями переменных?
7 Что такое область допустимых значений выражения с переменными?
8 Какие выражения называются тождественно равными?
9 Что такое одночлен?
10 Что такое степень одночлена?
11 Сформулируйте правило умножения одночленов.
12 Сформулируйте правило возведения одночленов в степень.
13 Что такое многочлен?
14 Как называются одночлены составляющие многочлен?
15 Какие члены многочлена называются подобными?
16 Сформулируйте правило приведения подобных членов.
17 Сформулируйте правило сложения многочленов.
18 Сформулируйте правило вычитания многочленов.
19 Сформулируйте правило умножения многочлена на одночлен.
20 Сформулируйте правило умножения многочлена на многочлен.
21 Что такое целое алгебраическое выражение?
22 Как разделить одночлен на одночлен?
23 Как разделить многочлен на одночлен?
24 Какой многочлен называется расположенным многочленом?
25 Как разделить многочлен на многочлен?
26 Что значит разложить многочлен на множители?
27 Какие методы разложения на множители Вы знаете?

2 АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

2.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ДРОБИ

Алгебраической дробью называется выражение вида $\frac{A}{B}$, где A и B одночлены или многочлены ($B \neq 0$); A – это числитель дроби, B – это знаменатель дроби

Например, выражения $\frac{3}{x}, \frac{2a^3b}{5c}, \frac{a-c}{a+c}$ – это алгебраические дроби. Алгебраическая дробь $\frac{a-c}{a+c}$ читается так: «дробь, в числителе $a - c$, в знаменателе, $a + c$».

Область допустимых значений (ОДЗ) алгебраической дроби – это множество всех значений переменных, при которых знаменатель дроби не равен нулю

Например, ОДЗ дроби $\frac{2a^2x}{5c(x-4)}$ – это множество всех действительных значений переменной x, за исключением $x = 4$.

Рассмотрим условие равенства дроби нулю. Дробь, равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, т.е.

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ и } B \neq 0.$$

Например, дробь $\frac{x+3}{x-2} = 0$, если $x + 3 = 0$ и $x - 2 \neq 0$. Или если $x = -3$ и $x \neq 2$. Следовательно, рассматриваемая дробь равна нулю, если $x = -3$.

Рассмотрим основное свойство алгебраической дроби. Если A, B и C – многочлены такие, что $B \neq 0$ и $C \neq 0$, то

$$\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}.$$

С помощью основного свойства дроби можно сокращать дроби и приводить дроби к общему знаменателю.

Сокращение дробей. Пусть дана дробь $\frac{5ab}{10a^3b}$. Числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель $5ab$. Поэтому данную дробь можно сократить на $5ab$ ($a \neq 0,\ b \neq 0$)

$$\frac{5ab}{10a^3b} = \frac{5ab}{5ab2a^2} = \frac{1}{2a^2}.$$

Приведение дробей к общему знаменателю. Пусть даны дроби, которые имеют разные знаменатели

$$\frac{1}{3c} \text{ и } \frac{1}{2c^2}.$$

Приведем их к наименьшему общему знаменателю (НОЗ). Наименьший общий знаменатель – это простейший общий знаменатель, который делится на знаменатель каждой дроби. Найдем НОЗ. НОЗ = $6c^2$. Найдем дополнительные множители каждой дроби. Для этого разделим НОЗ на знаменатель каждой дроби. Тогда получим:

$$\frac{6c^2}{3c} = 2c, \qquad \frac{6c^2}{2c^2} = 3.$$

Умножим числитель, и знаменатель каждой дроби на ее дополнительный множитель. Мы получим дроби, у которых знаменатели равны, т.е.

$$\frac{2c}{6c^2} \text{ и } \frac{3}{6c^2}.$$

Изменение знаков у членов дроби. Пусть задана дробь $\frac{A}{B}(B \neq 0)$. Тогда

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}.$$

Это означает, что можно изменить знаки на противоположные: 1) одновременно в числителе и знаменателе; 2) одновременно перед дробью и в числителе; 3) одновременно перед дробью и в знаменателе. Рассмотрим пример:

$$\frac{b-a}{a-b} = -\frac{-(b-a)}{a-b} = -\frac{a-b}{a-b} = -1.$$

2.2 ВЫДЕЛЕНИЕ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ ИЗ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ДРОБИ

Будем рассматривать дроби, числители и знаменатели которых являются многочленами относительно одних и тех же переменных.

Алгебраическая дробь $\frac{P}{Q}$ называется правильной, если степень многочлена P меньше степени многочлена Q

Рассмотрим, например, дробь $\frac{2x^2+x-5}{7x^3+4x^2+x-4}$. В числителе этой дроби находится многочлен второй степени, а в знаменателе – многочлен третьей степени. Следовательно, данная алгебраическая дробь является правильной.

Алгебраическая дробь $\frac{P}{Q}$ называется неправильной, если степень многочлена P больше степени многочлена Q

Например, алгебраическая дробь $\frac{3x^3+5x^2+x+2}{x^2+4x-3}$ – неправильная. Действительно, степень многочлена в числителе больше степени многочлена в знаменателе.

Из правильной дроби всегда можно выделить целую часть. Другими словами всякую неправильную дробь можно записать в виде $\frac{P}{Q}=T+\frac{R}{Q}$.

Пример 1. Выделим целую часть из дроби $\frac{a-2}{a}$. Разделим каждый член многочлена в числителе на знаменатель. Тогда получим

$$\frac{a-2}{a}=\frac{a}{a}-\frac{2}{a}=1-\frac{2}{a}.$$

Пример 2. Выделим целую часть из дроби $\frac{a^2-3}{a-2}$. Разделим числитель на знаменатель a^2-3. Мы получим $a+2$ и остаток равный 1. Поэтому $\frac{a^2-3}{a-2}=(a+2)+\frac{1}{a-2}$.

Контрольные вопросы

1 Что называется алгебраической дробью?
2 Что называется областью допустимых значений алгебраической дроби?
3 Сформулируйте правило сокращения алгебраических дробей.
4 Что такое наименьший общий знаменатель?
5 Сформулируйте правило приведения дробей к общему знаменателю?
6 Сформулируйте правило изменения знаков у дроби.
7 Какая алгебраическая дробь называется правильной?
8 Какая алгебраическая дробь называется неправильной?
9 Как выделить целую часть из алгебраической дроби?
10 Как сложить алгебраические дроби?
11 Как вычитаются алгебраические дроби?
12 Сформулируйте правило умножения алгебраических дробей.
13 Сформулируйте правило деления алгебраических дробей.
14 Как возвести алгебраическую дробь в степень?

3 УРАВНЕНИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1 РАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА

Пусть даны два алгебраических выражения $2x^3+3x+5$ и $2x^3+4$. Соединим эти выражения знаком равно « = ». Мы получим равенство $2x^3+3x+5=2x^3+4$.

Приведем примеры равенств:

8 + 2 = 10 – это числовое равенство. Это верное равенство.

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ – это равенство с переменными *x* и *y*.

У равенства различают левую и правую части. Сформулируем основные свойства числовых равенств.

Свойство 1. Левую и правую части равенства можно поменять местами. Если $a = b$, то $b = a$.

Свойство 2. Если два числа равны третьему, то они равны между собой. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.

Свойство 3. Равные числа можно прибавить к обеим частям равенства или вычесть из обеих частей равенства: если $a = b$, то $a + c = b + c$ и $a – c = b – c$.

Свойство 4. Обе части равенства можно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число: если $a = b$, то $ac = bc$ и $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$. В частности у обеих частей равенства можно изменить знаки на противоположные. Ясно, что это эквивалентно умножению обеих частей равенства на –1

Тождества и уравнения. Рассмотрим алгебраическое равенство $3(x + y) = 3x + 3y$. Несложно убедиться, что оно выполняется при любых значениях переменных.

> **Определение.** Равенство, верное при любых допустимых значениях переменных, называется тождеством

Верное числовое равенство также принято называть тождеством.

> **Определение.** Равенство, верное только при определенных значениях переменных, называется уравнением

Переменные, входящие в уравнение, называются неизвестными. Неизвестные принято обозначать буквами латинского алфавита x, y, z, ….

Рассмотрим уравнение с одним неизвестным x

$$2x - 1 = 3x + 6.$$

Легко проверить, что при $x = 7$, данное уравнение обращается в числовое тождество. Действительно $2\cdot(-7)-1=3\cdot(-7)+6$ или $-15 = -15$. В этом случае говорят, что число -7 – это решение или корень уравнения.

> **Определение.** Решением (корнем) уравнения с одним неизвестным называется значение неизвестного, которое обращает уравнение в верное числовое равенство

Если значение неизвестного является корнем уравнения, то говорят, что это значение удовлетворяет уравнению. Если значение неизвестного не обращает уравнение в тождество, то говорят, что оно не является корнем уравнения, или не удовлетворяет уравнению.

Рассмотрим уравнение с двумя неизвестными x и y:

$$3x + y = 5.$$

Пара значений неизвестных $x = 2$, $y = 1$ обращает это уравнение в верное числовое равенство $5 = 5$. Пара чисел (2; 1) является решением данного уравнения.

> **Определение.** Решением уравнения с двумя неизвестными x и y называется пара чисел $(x_0; y_0)$, которая обращает уравнение в верное равенство.

Числа x_0, y_0 называются координатами пары. x_0 – первая координата, а y_0 – вторая координата. Например, пара чисел (0; 5) является решением уравнения

$$3x + y = 5.$$

Пара чисел (2; 3) не является решением этого уравнения, потому что ее координаты $x = 2$ и $y = 3$ не удовлетворяют данному уравнению: $3\cdot 2+3\neq 5$ или $9\neq 5$.

Все возможные решения данного уравнения образуют множество решений этого уравнения. Решить уравнение – это значит найти множество всех его решений.

3.2 РАВНОСИЛЬНЫЕ (ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ) УРАВНЕНИЯ

> **Определение.** Два уравнения с одинаковыми неизвестными называются равносильными, если множества их решений совпадают

Из определения следует, что все решения первого уравнения являются решениями второго уравнения, и все решения второго уравнения являются решениями первого. Вместо термина равносильные уравнения часто используют термин эквивалентные уравнения. Если два уравнения равносильны, то между ними пишут знак $\Leftrightarrow$.

Пример 1. Рассмотрим уравнения $x^2=1$ и $|x|=1$. Первое из этих уравнений имеет множество решений $\{-1; 1\}$, потому, что $(-1)^2=1^2=1$. Второе из этих уравнений имеет то же самое множество решений. Поэтому эти уравнения эквивалентны.

Пример 2. Рассмотрим уравнения $x^2+4=-5$ и $3x = 3x + 7$. Первое из этих уравнений не имеет решений. Действительно при любом значении независимой переменной x левая часть уравнения положительна, а правая часть – это отрицательное число. Второе из этих уравнений тоже не имеет решений. Итак, оба уравнения имеют одно и то же множество решений – пустое множество. Поэтому эти уравнения эквивалентны.

Пример 3. Рассмотрим уравнения $4x = 8$ и $x^2 = 4$. Первое уравнение имеет только один корень $x^2 = 4$. Второе из этих уравнений имеет два корня $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$. Итак, множества решений этих уравнений не совпадают. Поэтому эти уравнения не эквивалентны.

3.3 СВОЙСТВА РАВНОСИЛЬНОСТИ УРАВНЕНИЙ.

Свойство 1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число или один и тот же многочлен, который содержит неизвестное, то получится равносильное уравнение

Рассмотрим, например, уравнение $2x + 3 = 11$. Оно имеет единственный корень $x = 4$. Прибавим число 5 к обеим частям этого уравнения. Мы получим уравнение $2x + 3 + 5 = 11 + 5$ или $2x + 8 = 16$. Множество решений этого уравнения совпадает с множеством решений исходного уравнения. Следовательно, они эквивалентны. Прибавим к обеим частям уравнения $2x + 3 = 11$ многочлен $x + 1$.

Мы получим новое уравнение $2x + 3 + x + 1 = 11 + x + 1$ или $3x + 4 = x + 12$. Новое уравнение и исходное уравнение имеют единственный корень $x = 4$. Следовательно, эти уравнения эквивалентны.

Следствие. Члены уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую с обратными знаками.

Например, прибавим к обеим частям уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ одночлен $5x$. Мы получим равносильное уравнение $x^2 + 6 = 5x$. Но это уравнение можно получить, если в исходном уравнении перенести член $-5x$ из левой части в правую часть с противоположным знаком.

Свойство 2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же не равное нулю число, то получится равносильное уравнение

Например, уравнение $2x + 3 = 11$ имеет единственный корень $x = 4$. Умножим обе части этого уравнения на 2. Мы получим новое уравнение $4x + 6 = 22$. Это уравнение имеет единственный корень $x = 4$. Множества решений нового и исходного уравнений совпадают. Поэтому эти уравнения эквивалентны.

Рассмотрим уравнение $12x - 28 = 20 + 8x$. Все члены этого уравнения имеют общий множитель 4. Разделим обе части этого уравнения на 4. Тогда мы получим новое уравнение $3x - 7 = 5 + + 2x$. Это же уравнение можно получить, если обе части исходного уравнения умножить на дробь $\frac{1}{4}$. Следовательно, новое уравнение $3x - 7 = 5 + 2x$ и исходное уравнение $12x - 28 = 20 + + 8x$ эквивалентны.

Свойства эквивалентности уравнений используют при решении уравнений.

Решим, например, уравнение $5x - 2 = 3x + 4$. Перенесем член -2 из левой части в правую часть уравнения с обратным знаком. Одновременно из левой части в правую часть перенесем член $3x$, изменив его знак на противоположный. Тогда мы получим новое уравнение $2x = 6$. Разделив обе части этого уравнения на 2, мы получим $x = 3$. Это и есть корень уравнения $5x - 2 = 3x + 4$. Таким образом, множество решений уравнения $5x - 2 = 3x + 4$ состоит из одного элемента 3.

3.4 ОБЛАСТЬ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение $\frac{1}{x-1} = 2x + 3$. Левая часть уравнения имеет смысл при всех при всех значениях переменной x, кроме $x = 1$. Правая часть уравнения определена при всех значениях независимой переменной x.

Определение. Множество значений неизвестного, при которых обе части уравнения имеют смысл, называется областью допустимых значений уравнения (ОДЗ)

Согласно данному определению, рассмотренное уравнение в качестве ОДЗ имеет множество всех действительных чисел R без числа 1. Или, что то же самое, объединение двух бесконечных интервалов $]-\propto; 1[\cup]1; +\propto[$.

Пример. Найдем ОДЗ уравнения $\frac{3x}{x^2-25}+\frac{12}{1-x}=8$. Слагаемые в левой части уравнения имеют смысл при $x^2-25\neq 0$ и $1-x\neq 0$. Отсюда получаем, что уравнение определено, если $x\neq -5$, $x\neq 5, x\neq 1$. Таким образом, область допустимых значений данного уравнения множество всех действительных кроме чисел –5, + 5 и 1. Символически это записывается так ОДЗ = $=R/\{-5;+5;1\}$.

3.5 РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Определение. Линейным уравнением с одним неизвестным называется уравнение вида $ax + b = 0$, где x – неизвестное, a – коэффициент при неизвестном, b – свободный член; a и b – действительные числа

Например, уравнения $x - 5 = 0$ и $2x + 9 = 0$ – это линейные уравнения с одним неизвестным.

Решим уравнение $ax + b = 0$. Перенесем свободный член из левой части уравнения в правую часть, изменив его знак на противоположный. Тогда получим эквивалентное уравнение $ax = -b$. При решении этого уравнения могут быть три случая.

1 Уравнение имеет единственное решение. Если коэффициент $a\neq 0$, то обе части уравнения можно разделить на a. Мы получим $x = -\frac{b}{a}$. Следовательно, множество решений уравнения $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

2 Уравнение имеет бесконечное множество решений. Если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение принимает вид $0\cdot x=0$. При всех действительных значениях независимой переменной получается верное равенство 0 = 0. Следовательно, множеством решений данного уравнения является множество всех действительных чисел.

3 Уравнение не имеет решений. Если $a = 0$ и $b\neq 0$, то уравнение принимает вид $0\cdot x=-b$. При всех значениях независимой переменной левая часть равна нулю, а правая часть не равна нулю. Следовательно, множество решений уравнения – это пустое множество.

Пример 1. Решим линейное уравнение $2x + 3 = -5x + 10$. Перенесем неизвестный член $-5x$ в левую часть уравнения со
знаком (+), а известный член 3 в правую часть со знаком (–). Тогда мы получим эквивалентное уравнение $2x + 5x = 10 - 3$.

После приведения подобных членов мы снова получим эквивалентное уравнение $7x = 7$. Разделим обе части этого уравнения на коэффициент при неизвестном 7. При этом мы получим $x = 1$. Таким образом, данное уравнение имеет единственное решение $x = 1$.

Пример 2. Решим линейное уравнение с дробными членами

$$8x+\frac{2x-7}{2}-\frac{3x+1}{5}=5-\frac{x+6}{2}.$$

Найдем наименьший общий знаменатель. Он равен 10. Умножим данное уравнение на 10. Мы получим эквивалентное уравнение $10x + 5(2x - 7) - 2(3x + 1) = 50 - 5(x + 6)$. Теперь раскроем скобки $10x + 10x - 35 - 6x - 2 = 50 - 5x - 30$. Перенесем неизвестные члены в левую часть уравнения, а известные члены перенесем в правую часть уравнения и приведем подобные члены. Тогда мы получим эквивалентное уравнение $19x = 57$. Разделим обе части этого уравнения на коэффициент при неизвестном 19. Тогда мы получим $x = 3$. Это и есть решение данного уравнения.

3.6 ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Определение. Уравнение вида $ax + by = c$, где x и y – неизвестные, a, b и c – это коэффициенты, одновременно не равные нулю, называется уравнением первой степени (линейным уравнением) с двумя неизвестными

Число a – это коэффициент при x, число b – это коэффициент при y, число c – это свободный член. Например , $2x + 4y = 5$ – это линейное уравнение с двумя неизвестными.

Решением уравнения $ax + by = c$ называется пара чисел (x_0, y_0), которая обращает уравнение в верное числовое равенство

Пусть, например, дано уравнение $3x + y = 5$. Пара чисел (1; 2) – это решение уравнения, потому что $3 \cdot 1 + 2 = 5$, или 5 = 5. Пара чисел (0; 5) –это тоже решение уравнения. Но пара чисел (2; 3) не является решением данного уравнения, потому что $3 \cdot 2 + 3 \neq 5$. Данное уравнение имеет бесконечное множество решений.

Контрольные вопросы

1 Какое равенство называется тождеством?
2 Какое равенство называется уравнением?
3 Что называется корнем уравнения с одним неизвестным?
4 Что значит решить уравнение?
5 Какие уравнения называются равносильными?
6 Что называется областью допустимых значений уравнения?
7 Сколько корней может иметь уравнение с одним неизвестным?
8 Что называется решением уравнения с двумя неизвестными?
9 Сколько решений имеет уравнение с двумя неизвестными?

4 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1 СИСТЕМА ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Два линейных уравнения с двумя неизвестными $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ образуют систему, если нужно найти общее решение этих уравнений. Систему записывают следующим образом:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где a_1 и b_1 – одновременно не равны нулю, a_2 и b_2 – также одновременно не равны нулю.

Решением системы уравнений называется пара чисел (x_0, y_0), которая удовлетворяет каждому уравнению системы. Другими словами, эта пара чисел обращает оба уравнения в верные числовые равенства:

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1; \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2. \end{cases}$$

Решить систему уравнений – это значит найти множество всех решений данной системы. Каждое уравнение системы имеет бесконечное множество решений. Пусть A – это множество решений первого уравнения системы, а B – это множество решений второго уравнения этой системы. Тогда множество решений системы является пересечением этих двух множеств, т.е. $A \cap B$.

4.2 РАВНОСИЛЬНЫЕ (ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ) СИСТЕМЫ

Две системы уравнений называются равносильными (эквивалентными), если множества их решений совпадают

Рассмотрим основные свойства эквивалентных систем уравнений.

Свойство 1. Любое уравнение системы можно заменить эквивалентным уравнением. При этом получится эквивалентная система уравнений

Пусть, например, дана система двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = 5; \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение системы на 2. Мы получим эквивалентное уравнение $2x - 2y = 4$. Теперь заменим второе уравнение системы этим уравнением. Мы получим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x + 2y = 5; \\ 2x - 2y = 4. \end{cases}$$

Свойство 2. Любое уравнение системы можно заменить суммой или разностью данных уравнений, получится равносильная система уравнений

Пусть, например, дана система уравнений:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 5; \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы, мы получим: $6x = 12$. Заменим, например, первое уравнение системы этим уравнением. Тогда мы получим эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x = 12; \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

> **Свойство 3.** Из любого уравнения системы можно выразить какое-нибудь неизвестное через другое и подставить это выражение во второе уравнение. Новое уравнение и другое уравнение образуют эквивалентную систему уравнений

Пусть, например, дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - 3y = 6; \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы выразим неизвестное x через y . При этом мы получим $x = 6 + 3y$. Подставим выражение $(6 + 3y)$ во второе уравнение вместо неизвестной переменной x. В результате мы получим эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} x = 6 + 3y; \\ 3(6 + 3y) + 2 = 7. \end{cases}$$

Если две системы уравнений эквивалентны, между ними принято ставить знак. Например, можно записать:

$$\begin{cases} x - 3y = 6; \\ 3x + 2y = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + 3y; \\ 3(6 + 3y) + 2y = 7. \end{cases}$$

4.3 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Метод подстановки. В этом методе сначала из какого-либо уравнения системы выражают какое-либо неизвестное через другое неизвестное, например, $x = f(y)$. Затем во втором уравнении заменяют это неизвестное полученным выражением. При этом получается эквивалентное уравнение. Оно вместе с уравнением $x = f(y)$, образует систему эквивалентную данной. При этом во втором уравнении оказывается только одна неизвестная (в нашем случае это неизвестная y). Решая второе уравнение, находят одну из неизвестных, а затем из первого уравнения находят вторую неизвестную.

В качестве примера решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = 7; \\ 5x - 2y = 4. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения неизвестное y через x

$$2x + y = 7 \Leftrightarrow y = 7 - 2x.$$

Подставим выражение $(7 – 2x)$ вместо y во второе уравнение

$$5x – 2y = 4 \Leftrightarrow 5x - (7 - 2x) = 4.$$

Теперь мы формируем эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 7 - 2x; \\ 5x - 2(7 - 2x) = 4. \end{cases}$$

Второе уравнение этой системы содержит только одну неизвестную x. Решая это уравнение, мы находим эту неизвестную. После этого из первого уравнения находим вторую неизвестную y. В итоге мы получим пару (2; 3). Эта пара является решением данной системы уравнений.

Метод алгебраического сложения. В этом методе с помощью эквивалентных преобразований уравнивают коэффициенты при каком-либо одном неизвестном. После этого уравнения складывают (вычитают). Получается уравнение с одним неизвестным. Это уравнение решают и находят одну из неизвестных величин. После этого по одному из исходных уравнений находят другую неизвестную величину.

В качестве примера решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x+3y=14; \\ 4x-3y=10. \end{cases}$$

В данных уравнениях коэффициенты при неизвестном y равны по модулю и противоположны по знаку. Сложим уравнения. Тогда члены + $3y$ и $-3y$ взаимно уничтожатся. Мы получим уравнение с одним неизвестным: $6x = 24$.

Заменим первое уравнение системы этим уравнением. Мы получим новую систему, равносильную исходной системе:

$$\begin{cases} 6x=24; \\ 4x-3y=10. \end{cases}$$

Эта система легко решается, так как первое из этих уравнений – это уравнение с одним неизвестным x

$$\begin{cases} 6x=24; \\ 4x-3y=10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4; \\ 4\cdot 4-3y=10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4; \\ -3y=-6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4; \\ y=2. \end{cases}$$

Ответ: $\{(4;2)\}$.

Пример 2. Решим систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x+3y=3; \\ 3x+5y=4. \end{cases}$$

В данных уравнениях модули коэффициентов при x не равны, и модули коэффициентов при y также не равны. Поэтому уравняем, например, коэффициенты при x. Для этого найдем их наименьшее общее кратное: НОК = 6.

Дополнительный множитель первого уравнения равен 3, а второго уравнения –2.

Умножим первое уравнение на 3, а второе уравнение на (–2). Мы получим равносильную систему:

$$\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 3x+5y=4 \end{cases}\left|\begin{matrix} .3; \\ .(-2); \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+9y=9; \\ -6x-10y=-8. \end{cases}$$

В уравнениях этой системы коэффициенты при x равны по модулю и противоположны по знаку. Их сумма равна нулю. Сложим уравнения системы. Мы получим уравнение, содержащее только переменную y: $-y = 1$. Другими словами мы исключили неизвестную x. В исходной системе заменим второе уравнение уравнением $-y = 1$. Мы получим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} 2x+3y=3; \\ -y=1. \end{cases}$$

Теперь решаем эту систему:

$$\begin{cases} 2x+3y=3; \\ -y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=3; \\ y=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=3; \\ y=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3; \\ y=-1. \end{cases}$$

Мы получили ответ: $\{3;-1\}$.

4.4 РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Определение. Разность двух произведений $ad - bc$, которая обозначается символом, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, где a, b, c, d – любые числа, называется определителем второго порядка

Числа a, b, c, d называются элементами определителя. Определитель второго порядка имеет две строки $(a \quad b), (c \quad d)$ и два столбца $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

По определению, определитель второго порядка вычисляется так

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ab - cd.$$

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_2; \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

Составим определитель второго порядка, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных. Его называют определителем системы и обозначают греческой буквой Δ (дельта).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1.$$

В определителе системы Δ заменим столбец при неизвестном *x*: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ столбцом свободных членов $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Мы получим определитель, который называют определителем неизвестного *x*. Его обозначают символом Δ_x. Его читают как дельта-икс.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 b_1.$$

Теперь в определителе системы Δ заменим столбец коэффициентов при неизвестном $y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, столбцом свободных членов $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Мы получим определитель, который называют определителем неизвестного *y*. Его обозначают символом Δ_y и читают дельта-игрек

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1.$$

Если система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение, то это решение можно записать с помощью определителей:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \text{ где } \Delta \neq 0.$$

Докажем эти формулы. Для этого решим данную систему методом алгебраического сложения. Сначала найдем неизвестное *x*. Умножим первое уравнение на b_2, а второе уравнение на $(-b_1)$ и сложим уравнения. Мы получим $a_1 b_2 x - a_2 b_1 x = c_1 b_2 - c_2 b_1$. Вынесем за скобки общий множитель *x*.

$$x\,(a_1 b_2 - a_2 b_1) = c_1 b_2 - c_2 b_1.$$

Это уравнение можно записать с помощью определителей Δ и Δ_y:

$$x \cdot \Delta = \Delta_x.$$

Отсюда мы легко получаем *x*:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}.$$

Аналогично найдем неизвестное *y*. Для этого умножим первое уравнение системы на $(-a_2)$, а второе уравнение умножим на a_1 и сложим полученные результаты. При этом мы получим: $a_1 b_2 x - a_2 b_1 x = a_1 c_2 - a_2 c_1$. Вынесем за скобки общий множитель *y*: $y(\,a_1 b_2 - a_2 b_1) = a_1 c_2 - a_2 c_1$. Это уравнение записывается с помощью определителей следующим образом

$$y \cdot \Delta = \Delta_y.$$

Отсюда легко получаем

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Таким образом, мы доказали, что при $\Delta \neq 0$ система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

4.5 СИСТЕМА ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Определение. Уравнение вида $ax + by + cz = d$, где *a*, *b*, *c*,

d – числа и x, y, z – неизвестные, называется линейным уравнением с тремя неизвестными

Решением линейного уравнения с тремя неизвестными называется тройка чисел $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, которая обращает это уравнение в тождество. Например, тройка чисел (1; 3; 2) является решением уравнения $5x - 2y + z = 1$. Действительно, эта тройка чисел обращает данное уравнение в верное числовое равенство $5 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 2 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$.

Тройка чисел (4; –2; 1) не является решением этого уравнения, потому что $5 \cdot 4 - 2 \cdot (-2) + 1 \neq 1 \Leftrightarrow 25 \neq 1$.

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1; \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2; \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Коэффициенты при неизвестных каждого уравнения вместе не равны нулю.

Тройка чисел $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ называется решением системы трех уравнений с тремя неизвестными, если ее координаты удовлетворяют каждому уравнению системы

Решить систему – это значит найти множество ее решений. Метод решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными был разработан Гауссом. Этот метод называется методом Гаусса. Метод Гаусса состоит в том, что данную систему сначала приводят к равносильной треугольной системе вида:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d; \\ my + nz = p; \\ qz = t. \end{cases}$$

Из этой треугольной системы последовательно находят z, y, x.

В качестве примера решим систему:

$$\begin{cases} x + 4y + 2z = 24; \\ 3x - 2y + z = 17; \\ 5x + y - 3x = -8. \end{cases}$$

Приведем эту систему к треугольному виду. Первое уравнение этой системы выберем в качестве первого уравнения треугольной системы: $x - 4y + 2z = 24$. С помощью этого уравнения исключаем неизвестное x из второго и третьего уравнений заданной системы. Для этого уравнение $x - 4y + 2z = 24$ умножим на (–3) и сложим со вторым уравнением системы. Тогда мы получим уравнение

$$2y - z = 11.$$

Это уравнение принимаем в качестве второго уравнения треугольной системы. Теперь с помощью уравнений $x - 4y + 2z = 24$ и $2y - z = 11$ исключаем из третьего уравнения системы неизвестные x и y. Тогда мы получим $z = 5$. Итак, мы получили треугольную систему:

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 24; \\ 2y - z = 11; \\ z = 5. \end{cases}$$

Теперь решаем эту систему. Из третьего уравнения имеем $z = 5$. Из второго уравнения находим y

$$2x - z = -11 \Leftrightarrow 2y = -11 + z \Leftrightarrow 2y = -6 \Leftrightarrow y = -3.$$

Наконец, из первого уравнения треугольной системы находим неизвестную y:

$$x - 4y + 2z = 24 \Leftrightarrow x = 24 + 4y - 2z \Leftrightarrow x = 24 + 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 5 \Leftrightarrow x = 2.$$

Итак, данная система имеет единственное решение $\{2;\ -3;\ 5\}$.

Контрольные вопросы

1 Что понимают под системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными?
2 Что называется решением системы уравнений ?
3 Что значит решить систему уравнений?

4 Что представляет собой множество решений системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными?

5 Какие системы уравнений называются эквивалентными?

6 Сформулируйте свойства эквивалентных систем уравнений?

7 Какие методы решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными Вы знаете?

8 В чем сущность метода подстановки?

9 В чем сущность метода алгебраического сложения?

10 В чем сущность метода определителей?

11 Что такое определитель?

12 Сформулируйте правило вычисления определителя второго порядка.

13 Что понимают под системой трех уравнений с тремя неизвестными?

14 Что понимают под решением системы трех уравнений с тремя неизвестными?

15 В чем сущность метода Гаусса?

5 КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Определение. Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c – некоторые числа ($a \neq 0$); x – неизвестное, называется квадратным уравнением

Числа a, b, c называются коэффициентами квадратного уравнения. Коэффициент a называется первым коэффициентом. Коэффициент b называется вторым коэффициентом. И коэффициент c называется свободным членом.

Если в квадратном уравнении коэффициент $a = 1$, то уравнение называется приведенным квадратным уравнением и его записывают в виде

$$x^2+px+q=0.$$

Если в квадратном уравнении коэффициенты b и c не равны нулю, то уравнение называется полным квадратным уравнением. Например, уравнение $2x^2-8x+3=0$ – это полное квадратное уравнение.

Если один из коэффициентов b или c равен нулю или оба коэффициента b и c равны нулю, то квадратное уравнение называется неполным.

Например, уравнение $5x^2-2x=0$; $3x^2-6=04$; $x^2=0$ – это неполные квадратные уравнения.

Значение неизвестного x, при котором квадратное уравнение обращается в верное числовое равенство, называется корнем этого уравнения. Например, значение $x = 2$ является корнем квадратного уравнения $x^2-5x+6=0$, потому что $2^2-5\cdot 2-6=0$ или $0 = 0$ – это верное числовое равенство.

Решить квадратное уравнение – это значит найти множество его корней

5.2 РЕШЕНИЕ НЕПОЛНЫХ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1 Пусть квадратное уравнение имеет вид $ax^2+bx=0$, где $a \neq 0$; $b \neq 0$. В левой части этого уравнения есть общий множитель x. Вынесем его за скобки. Мы получим $x(ax + b) = 0$. Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому получаем $x = 0$ или $ax + b = 0$. Таким образом, данное уравнение эквивалентно двум уравнениям

$$\begin{cases} x=0; \\ ax+b=0. \end{cases}$$

Решив эту систему, мы получим $x = 0$ и $x=-\frac{b}{a}$. Следовательно, данное квадратное уравнение имеет два корня $x = 0$ и $x=-\frac{b}{a}$.

В качестве примера решим неполное квадратное уравнение $3x^2-12x=0$.

Разложим левую часть уравнения на множители и найдем корни $3x^2-12x=0 \Leftrightarrow 3x(x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=0; \\ x-4=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0; \\ x=4. \end{cases}$

Ответ: $\{0;\ 4\}$.

2 Пусть квадратное уравнение имеет вид: $ax^2+c=0,\ a\neq=,\ c\neq 0.$ Из этого уравнения выразим x^2; $ax^2+c=0 \Leftrightarrow ax^2=-c \Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{a}.$ При решении последнего уравнения возможны два случая:

а) если $-\frac{c}{a}>0$, то получаем два корня $x=\ \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$;

b) если $-\frac{c}{a}<0,$ то уравнение во множестве действительных чисел не имеет решений.

В качестве примера решим квадратное уравнение $3x^2-48=0.$ $3x^2-48=0 \Leftrightarrow 3x^2=48 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm 4.$

Таким образом, данное квадратное уравнение имеет два корня $x=4$ и $x=-4$.

c) Рассмотрим теперь квадратное уравнение $ax^2=0, (a\neq 0).$ Разделив обе части уравнения на a, мы получим: $x^2=0 \Leftrightarrow x=0.$ Таким образом, данное квадратное уравнение имеет один корень $x=0$. В этом случае говорят, что квадратное уравнение имеет двукратный корень $x=0$ или корень кратности 2.

Тогда можно записать $x_1=x_2=0.$

5.3 РЕШЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Теперь найдем решение полного квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0.$ Для этого разделим это уравнение на a. Мы получим эквивалентное уравнение

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Выделим полный квадрат суммы в левой части этого уравнения. Тогда мы получим:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=$$

$$=\left[x^2+2x\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Теперь квадратное уравнение можно записать в виде:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0 \text{ или } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Выражение b^2-4ac называется дискриминантом квадратного уравнения и обозначается буквой D

$$D=b^2-4ac\,.$$

Теперь мы получаем

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{(2a)^2}.$$

При решении этого уравнения возможны три случая:

1) $D>0.$ Тогда правая часть уравнения положительна. Тогда мы получаем

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{D}}{2a}.$$

Из этого уравнения находим x

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{D}}{2a} \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \Leftrightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};\ x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Таким образом, в данном случае квадратное уравнение имеет два корня.

2) $D = 0$. В этом случае квадратное уравнение принимает вид

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Решение этого уравнения дает два двукратных корня: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

3) $D = 0$. В этом случае правая часть уравнения отрицательна. Поэтому в области действительных чисел квадратное уравнение не имеет решений.

4) Корни приведенного квадратного уравнения можно найти по формуле

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right) - q}.$$

5.4 СВОЙСТВА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$. Это уравнение имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Найдем сумму и произведение этих корней

$$x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5 \text{ и } x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Мы видим, что сумма корней равна второму коэффициенту при неизвестном x с противоположным знаком. Произведение корней равно свободному члену уравнения.

> **Теорема Виета.** Сумма корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна p, а произведение корней равно q

Доказательство. Корни приведенного квадратного уравнения можно найти по формулам:

$\boldsymbol{x}_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ и $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Найдем сумму корней

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) =$$

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} - \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p.$$

Теперь найдем произведение корней.

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) =$$

$$= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q.$$

Таким образом мы доказали, что сумма корней приведенного квадратного уравнения равна $-p$, а произведение корней равно q.

> **Обратная теорема.** Если сумма двух чисел x_1 и x_2 равна p, а произведение этих чисел равно q, то числа x_1 и x_2 являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

Доказательство. По условию теоремы $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$. Отсюда следует, что $p = -(x_1 + x_2)$ и $q = x_1 \cdot x_2$. Подставим значения p и q в уравнение

$$x^2 + px + q = 0.$$

Тогда мы получим

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0 \Leftrightarrow x^2-x_1\cdot x-x_2x+x_1\cdot x_2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-x_1\cdot x)-(x_2x-x_1\cdot x_2)=0 \Leftrightarrow x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)=0 \Leftrightarrow x=x_1 \text{ или } x=x_2.$$

Таким образом мы доказали, что $x_1, x_2 -$ это корни приведенного квадратного уравнения.

Разделим обе части этого уравнения на первый коэффициент. При этом мы получим эквивалентное уравнение

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Это приведенное квадратное уравнение, в котором $\frac{b}{a}=p,\ \frac{c}{a}=q.$ Применив теорему Виета, мы получим:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

При помощи теоремы Виета и обратной теоремы можно находить корни квадратного уравнения только путем подбора.

Пример 1. Найдем корни приведенного квадратного уравнения $x^2+x+64=0$.

По теореме Виета имеем $x_1+x_2=-1,\ x_1\cdot x_2=-6.$ Отсюда видим, что корнями данного квадратного уравнения могут быть только числа 2 и 3. Ответ: $\{2;\,3\}$.

Пример 2. Известно, что x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0.$ Составим квадратное уравнение, корни которого равны $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}.$ По теореме Виета $x_1+x_2=-p,\ x_1\cdot x_2=q.$ Поэтому найдем сумму и произведение дробей $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}.$ Мы получим

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{p}{q};\ \frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{q}.$$

По обратной теореме числа $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ – это корни квадратного уравнения $x^2+\frac{p}{q}x+\frac{1}{q}=0$ или $qx^2+px+1=0.$ Например, числа 2 и 3 являются корнями квадратного уравнения $x^2+5x+6=0.$ Тогда числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ являются корнями квадратного уравнения $6x^2-5x+1=0.$

5.5 РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

Определение. Многочлен вида $ax^2+bx+c=0$, где x – переменная, $a, b, c -$ некоторые числа, называется квадратным трехчленом

Если переменная x принимает различные числовые значения, то квадратный трехчлен тоже принимает различные числовые значения. Значения переменной $x,$ которые обращают квадратный трехчлен в нуль, называются корнями трехчлена. Следовательно, корни трехчлена – это корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0.$

Теорема. Если $x_1, x_2 -$ корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то его можно записать в виде

$$x^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Для доказательства преобразуем левую часть квадратного уравнения. Сначала вынесем за скобки первый коэффициент

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}).$$

По теореме Виета имеем

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

откуда $$\frac{b}{a} = -x_1 + x_2, \ \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2.$$

Теперь уравнение преобразуется к виду:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})\left[x^2 - (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2\right] =$$
$$= a\left[x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2\right] = a\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right] =$$
$$= a(x - x_1)(x - x_1).$$

Теорема доказана.

Следствие. Если приведенный квадратный трехчлен имеет корни $x_1,\ x_2,$ то его можно разложить на множители:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Пример. Разложим на множители квадратный трехчлен

$$2x^2 + 5x - 3.$$

Сначала решим квадратное уравнение

$$2x^2 + 5x - 3 = 0. \ \ x_{1-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

или $x_1 = 0{,}5$ и $x_2 = -3.$

Теперь можно записать разложение данного квадратного трехчлена на множители

$$2x^2 + 5x - 3 = 2(x - 0{,}5)(x + 3).$$

5.6 БИКВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Определение. Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называется биквадратным уравнением

Биквадратное уравнение приводится к квадратному уравнению при помощи подстановки $y = x^2$. Действительно, используя эту подстановку, мы получаем

Квадратное уравнение относительно новой переменной y

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Решая это уравнение, мы получим $y_1 = \varphi(x), y_2 = \eta(x)$, где y_1 и y_2 – корни квадратного уравнения. Решая эти два уравнения относительно переменной $x,$ мы получим корни данного биквадратного уравнения.

Пример 1. Решим биквадратное уравнение $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0.$ Сначала приводим это уравнение к квадратному. Для этого введем вспомогательное неизвестное y такое, что $y = x^2$. Тогда $x^4 = y^2$. Теперь данное биквадратное уравнение приводится к виду

$$4y^2 - 5y + 1 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, мы получим $y_1 = 1,\ y_2 = \frac{1}{4}.$ Так как $y = x^2$, то данное биквадратное уравнение эквивалентно системе двух уравнений

$$\begin{cases} x^2 = y_1; \\ x^2 = y_2; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 = 1; \\ x^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Решим каждое из этих уравнений и найдем объединение множеств их решений.

Тогда мы получим

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1;\ x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = -\frac{1}{2}.$$

Контрольные вопросы

1 Какое уравнение называется квадратным?
2 Что называют коэффициентами квадратного уравнения?
3 Какой из коэффициентов называют первым?
4 Какой из коэффициентов называют вторым?
5 Какой из коэффициентов называют свободным членом?
6 Что значит решить квадратное уравнение?
7 Какое квадратное уравнение называется неполным?
8 Какое квадратное уравнение называется полным?
9 Что называется корнем квадратного уравнения?
10 Сколько корней может иметь квадратное уравнение?
11 Что называют дискриминантом квадратного уравнения?
12 Какие случаи при решении квадратного уравнения Вы знаете?
13 Сколько корней имеет квадратное уравнение, если его дискриминант положителен?
14 Сколько корней имеет квадратное уравнение, если его дискриминант равен нулю?
15 Сколько корней имеет квадратное уравнение, если его дискриминант отрицателен?
16 По какой формуле можно вычислить корни полного квадратного уравнения?
17 Какое квадратное уравнение называется приведенным?
18 По какой формуле можно вычислить корни приведенного квадратного уравнения?
19 Сформулируйте теорему Виета.
20 Сформулируйте обратную теорему Виета.
21 Что называется квадратным трехчленом?
22 Как записывается разложение квадратного трехчлена на множители?
23 Как записывается разложение приведенного квадратного трехчлена на множители?
24 Какое уравнение называется биквадратным уравнением?
25 Как решаются биквадратные уравнения?

6 НЕРАВЕНСТВА

6.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Действительные числа можно сравнивать по величине. Если два числа a и b не равны, то a может быть больше, чем число b $(a > b)$ или число a может быть меньше, чем число b ($a < b$).

Определение 1. Число a больше, чем число b если разность $b - a$ – положительное число

Например, $5 > -3$ потому что $5 - (-3) = 8$ – положительное число.

Определение 2. Число a меньше, чем число $b(a < b)$, если разность $a - b$ – отрицательное число

Например, $-12 < 8$, потому что $-12 - 8 = -20$ – это отрицательное число.

Любое положительное число больше нуля. Любое отрицательное число меньше нуля. Следовательно $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$; $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$.

Определение 3. Два действительных числа или два алгебраических выражения образуют неравенство, если их соединяет знак > (больше), знак < (меньше), знак ≥ (больше или равно), знак ≤ (меньше или равно).

Если неравенство содержит знак > или <, то оно называется строгим неравенством. Если неравенство содержит знак ≥ или ≤, то оно называется нестрогим неравенством. Два неравенства $a > b$ и $c > d$ называются неравенствами одинакового смысла. Два неравенства $a > b$ и $c < d$ называются неравенствами противоположного смысла.

Неравенства могут содержать одну или несколько переменных величин.

Определение 4. Неравенство, верное при любых допустимых значениях переменных, называется тождественным неравенством

Например, $(a+b)^2 \geq 0$ – является тождественным неравенством.

Тождественные неравенства с переменными можно доказать. В качестве примера докажем неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

где $a, b \in R$. Составим и упростим разность левой и правой частей неравенства

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

Мы получили выражение, которое положительно или равно нулю при всех действительных значениях, входящих в него переменных. Следовательно, по определению 1 имеем

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Таким образом, неравенство доказано.

6.2 СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

Свойство 1. Если $a > b$, то $b < a$ и наоборот, если $b > a$, то $a < b$. Если первое число больше второго, то второе число меньше первого

Например, 12 > 7, тогда 7 < 12, 4 < 6, тогда 6 > 4

Свойство 2. Транзитивность. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. Если первое число больше второго числа, а второе число больше третьего числа, то первое число больше третьего числа

Например, 5 > 3 и 3 > 2. Тогда 5 > 2.

Свойство 3. Если $a > b$ и $c \in R$, то $a + c > b + c$. Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же действительное число, то знак неравенства не изменится

Например, 7 > 2 и $3 \in R$. Тогда 7 + 3 > 2 + 3 или 10 > 5.

Свойство 4. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$ и $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится

Например, пусть дано неравенство 12 > 8 и положительное число $m = 4 > 0$. Тогда $12 \cdot 4 > 8 \cdot 4$ или 48 > 32; $\frac{12}{4} > \frac{8}{4}$ или 3 > 2. Знак данного неравенства не изменился.

Свойство 5. Если $a > b$ и $c < 0$, то $a{\cdot}c < b{\cdot}c$ и $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный

Пусть, например, дано неравенство 9 > –6. И пусть дано отрицательное число $c = -3$. Тогда 9·(–3) < (–6)·(–3) или –27 < 18. 9 : (–3) < (–6) : (–3) или –3 < 2. Таким образом, знак данного неравенства изменился на противоположный.

Свойство 6. Сложение неравенств. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$. Неравенства одинакового смысла можно почленно складывать, получается неравенство того же смысла

Пусть, например, даны два неравенства $2 > -1$ и $5 > 3$. Сложим левую часть первого неравенства с левой частью второго неравенства, а правую часть первого неравенства сложим с правой частью второго неравенства. Тогда получим неравенство $7 > 2$. Таким образом, при сложении двух неравенств одинакового смысла мы получили неравенство того же смысла.

Свойство 7. Вычитание неравенств. Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$. Если из неравенства одного смысла вычесть неравенство противоположного смысла, то получится неравенство того же смысла, что и неравенство уменьшаемое

Пусть, например, даны два неравенства $9 > 3$ и $-5 < 1$. Вычтем из первого неравенства второе неравенство. Тогда мы получим $14 > 2$. Мы получили неравенство того же смысла, что и первое неравенство.

Свойство 8. **Умножение неравенств.** Если $a > b$ и $c > d$, где $a, b, c, d \in R^+$, то $ac > bd$. Два неравенства одинакового смысла с положительными членами можно умножить, при этом получится неравенство того же смысла

Пусть, например, даны два неравенства с положительными членами $3 > 2$ и $5 > 4$. Если мы перемножим эти неравенства, то получим неравенство $15 > 8$. Это неравенство того же смысла, что и неравенства сомножители.

Свойство 9. Если $a > b$, где $a,\ b \in R^+$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Во множестве положительных чисел неравенство, составленное из величин обратных величинам некоторого неравенства имеет обратный смысл

Пусть, например, дано неравенство $5 > 2$. Числа, обратные 5 2 – это $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{2}$. Очевидно, что $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$.

Свойство 10. Деление неравенств. Если $a > b$ и $c < d$, где $a, b, c, d \in R^+$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$. Во множестве положительных чисел неравенства противоположного смысла можно делить, при этом получается неравенство такого же смысла, что и неравенство делимое

Пусть, например, даны неравенства $12 > 6$ и $2 < 3$. Разделив первое неравенство на второе, мы получим $6 > 2$. Это неравенство имеет тот же смысл, что и неравенство делимое.

Свойство 11. Возведение неравенства в степень. Если $a > b$, где $a,\ b,\ c,\ d \in R^+$ и $n \in N$, то $a^n > b^n$. Во множестве положительных чисел члены неравенства можно возводить в степень, получится неравенство того же смысла, что и исходное неравенство

Пусть, например, дано неравенство $3 > 2$. Возведем его в степень 4. Мы получим $81 > 16$.

Свойство 12. Извлечение корня из неравенства. Если $a > b$, где $a, b \in R^+$ и $n \in n/\{1\}$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. Из обеих частей неравенства с положительными членами можно извлекать корень, при этом получится неравенство того же смысла

Пусть, например, дано неравенство $125 > 64$. Извлечем из него корень степени 4, мы получим неравенство $5 > 4$. Это неравенство имеет тот же смысл, что и данное неравенство.

6.3 НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определение. Неравенством с одной переменной называется неравенство вида $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ – выражения с переменной x

Множество всех значений переменной, при которых имеют смысл обе части неравенства, называется областью допустимых значений неравенства. Например, область допустимых значений неравенства $2x + 5 > 3x - 1$ – это множество всех действительных чисел, а множество допустимых значений неравенства $\frac{5x-1}{x} < \frac{7}{9}$ – это множество всех действительных чисел без нуля, т.е. $R/\{0\}$.

Решением неравенства $f(x) > g(x)$ называется такое значение переменной x, которое обращает его в верное числовое неравенство. Например, значение $x = -2$ является решением неравенства $5x - 7 < 0$, потому что оно обращает данное неравенство в верное числовое неравенство $5(-2) - 7 < 0$ или $-14 < 0$.

Решить неравенство с переменной – это значит найти множество его решений.

6.4 ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Определение. Два неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ и

$$\begin{cases} 3^{2x} - 2y = 725; \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25 \end{cases}$$

называются равносильными или эквивалентными, если множества их решений совпадают

Другими словами, два неравенства являются эквивалентными, если решения первого неравенства являются решениями второго неравенства, а решения второго неравенства являются решениями первого неравенства. Если два неравенства эквивалентны, то между ними ставится знак $\Leftrightarrow$.

Например, $2x > 10 \Leftrightarrow x - 2 > 3$, потому что каждое неравенство имеет множество решений $]5; +\infty[$. Два неравенства с одинаковой переменной, которые не имеют решений, также равносильны, потому что их множество решений $\varnothing$.

Теорема 1. Если к левой и правой части неравенства $f(x) > g(x)$ прибавить одно и то же число или выражение $F(x)$, которое имеет смысл при всех допустимых значениях переменной данного неравенства, то получим неравенство эквивалентное данному неравенству

Доказательство. Сначала покажем, что все решения данного неравенства $f(x) > g(x)$ являются решениями неравенства $f(x) + \; + F(x) > g(x) + F(x)$. Пусть число a – любое решение данного неравенства. Тогда верно неравенство $f(a) > g(a)$. Прибавим к обеим частям этого неравенства число $F(a)$. Мы получим верное числовое неравенство $f(x) + F(x) > g(x) + F(x)$. Отсюда следует, что число a является решением неравенства $f(x) + F(x) > g(x) + F(x)$. Но a – это произвольно выбранное число из множества решений данного неравенства. Поэтому мы доказали, что все решения данного неравенства являются решениями нового неравенства.

Следствие. Члены неравенства можно переносить из одной части неравенства в другую часть с противоположным знаком.

Теорема 2. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить или разделить на одно и то же положительное число m, то получатся неравенства того же смысла

$$mf(x) > mg(x), \frac{f(x)}{m} > \frac{g(x)}{m}.$$

Эти неравенства эквивалентны данному неравенству $f(x) > g(x)$

Теорема 3. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить или разделить на одно и то же отрицательное число m, то получатся неравенства противоположного смысла

$$mf(x) > mg(x), \frac{f(x)}{m} < \frac{g(x)}{m}.$$

Эти неравенства эквивалентны данному неравенству $f(x) > g(x)$

6.5 ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ РЕШЕНИЕ

Определение. Неравенства вида

$$ax + b > 0,$$

где x – переменная, a и b – некоторые числа, называется линейным

Рассмотрим решение линейного неравенства вида $ax + b > 0$. Перенесем свободный член из левой части неравенства в правую часть

$$ax > -b. \tag{1}$$

Возможны следующие случаи решения этого неравенства при различных значениях a и b

$$a > 0, -b \in R.$$

Разделим обе части неравенства (1) на положительное число a. Мы получим эквивалентное неравенство $x > -\frac{b}{a}$. Отсюда следует, что множество решений данного неравенства – это бесконечный интервал $\left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$.

$$a < 0, -b \in R.$$

Разделим обе части неравенства (1) на отрицательное число a и изменим знак неравенства на противоположный. Мы получим равносильное неравенство $x < -\frac{b}{a}$. Множество решений этого неравенства – бесконечный интервал $\left]-\infty; -\frac{b}{a}\right[$.

Если, $a = 0$, $-b < 0$, то неравенство (1) выполняется при любых действительных значениях переменной x, так как левая часть всегда равна нулю, а правая часть – отрицательное число.

6.6 СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Определение. Системой линейных неравенств называется два или несколько неравенств, которые содержат одну и ту же переменную

Решением системы неравенств называется значение переменной, которое обращает каждое неравенство системы в верное числовое неравенство. Например, значение $x = 2$ является решением системы неравенств

$$\begin{cases} 3x < 12; \\ x - 1 > 0, \end{cases}$$

потому что оно удовлетворяет каждому неравенству данной системы. Действительно, если подставить это значение переменной в каждое неравенство системы, то получим верную систему числовых неравенств

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 < 12; \\ 2 - 1 > 0. \end{cases}$$

Решить систему линейных неравенств – значит найти множество всех ее решений. При решении системы сначала находят множество решений каждого неравенства системы, затем находят пересечение этих множеств. В качестве примера решим систему двух линейных неравенств

$$\begin{cases} -2x + 1 > 3x - 4; \\ x - 4 < -2x + 5. \end{cases}$$

Найдем множества решений каждого неравенства данной системы

$$\begin{cases} -2x - 3x > -4 - 1; \\ x + 2x < 5 + 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x > -5; \\ 3x < 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1; \\ x < 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{x \in \left]-\infty; 1\right[,\ x \in \left]-\infty; 3\right[.$$

Мы получили два бесконечных интервала. Найдем их пересечение: $\left]-\infty; 1\right[\cap \left]-\infty; 3\right[= \left]-\infty; 1\right[$.

Ответ: $]-\infty; 1[$.

Контрольные вопросы

1 В каком случае говорят, что число a больше, чем число b?
2 В каком случае говорят, что число a меньше, чем число b?
3 В каком случае два числа образуют числовое неравенство?
4 Что называется неравенством?
5 Какое неравенство называется тождественным?
6 Сформулируйте свойства неравенств.
7 Какие неравенства называются неравенствами одного смысла?
8 Какие неравенства называются неравенствами противоположного смысла?
9 Какие неравенства можно складывать?
10 Какие неравенства можно вычитать?
11 Какие неравенства можно умножать?
12 Какие неравенства можно делить?
13 Сформулируйте правило возведения неравенства в степень.
14 Сформулируйте правило извлечения корня из неравенства.
15 Что называется неравенством с одной переменной?
16 Что называется областью допустимых значений неравенства?
17 Что называется решением неравенства?
18 Какие неравенства называются эквивалентными?
19 Какие свойства эквивалентных неравенств Вы знаете?
20 Какое неравенство называется линейным?
21 Что такое система линейных неравенств?
22 Что значит решить систему линейных неравенств?

7 РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

7.1 УРАВНЕНИЯ, КОТОРЫЕ СОДЕРЖАТ МОДУЛЬ

При решении уравнений, которые содержат модуль, используется определение модуля и его свойства.

Модуль действительного числа – это расстояние на числовой прямой от начала отсчета до точки, которая соответствует числу *x*

Символически модуль числа обозначается так $|x|$. По определению

$$|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \ge 0; \\ -x, \text{если } x \le 0. \end{cases}$$

Модуль действительного числа обладает следующими свойствами.

1 Для любого числа x справедливо равенство $|x| = |-x|$.

2 Для любых чисел x и y справедливы равенства

$$|xy| = |x| \cdot |y|, \ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} (y \ne 0), \ |x|^2 = x^2.$$

3 Для любого числа x справедливо неравенство $|x| \ge 0$.

4 Для любого x справедливо двойное неравенство

$$|x| \le x \le |x|.$$

5 Для любых двух чисел x и y модуль суммы не превосходит суммы модулей этих чисел

$$|x + y| \le |x| + |y|.$$

6 Для любых двух чисел x и y модуль разности не меньше разности модулей этих чисел.

Пример 1. Решим нелинейное уравнение

$$|x| = 4.$$

По определению модуля число x может принимать два значения $x_1 = 4$ и $x_2 = –4$. Поэтому данное нелинейное уравнение имеет два корня 4 и –4.

Ответ: $\{4; –4\}$.

Пример 2. Решим нелинейное уравнение

$$|x| = –2.$$

По определению модуль любого числа – это не отрицательное число. Поэтому данное нелинейное уравнение не имеет решений.

Пример 3. Решим нелинейное уравнение $|x-2| = 3.$ Модуль выражения $x-2$ равен 3, если выражение $x-2$ принимает два значения 3 и –3. Поэтому мы получаем два уравнения: $x-2=3$ и $x-2=-3$. Следовательно нужно решить два этих уравнения и объединить множество их решений. В этом случае говорят, что уравнения образуют систему и пишут

$$\begin{cases} x-2=-3; \\ x-2=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3+2; \\ x=3+2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1; \\ x=5. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение имеет два корня –1 и 5.

Ответ: $\{–1; 5\}$.

Пример 4. Решим нелинейное уравнение

$$|x+2| + |2x-6| = 7.$$

По определению модуля числа получим:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, \text{ если } x+2 \ge 0, \text{ или } x \ge -2; \\ -x-2, \text{ если } x+2 < 0, \text{ или } x < -2; \end{cases}$$

$$|2x-6| = \begin{cases} 2x-6, \text{ если } 2x-6 \ge 0, \text{ или } x \ge 3; \\ -2x+6, \text{ если } 2x-6 < 0, \text{ или } x < 3. \end{cases}$$

Числа –2 и 3 разбивают числовую прямую на три промежутка $]-\infty; -2]$; $]2; 3[$; $[3; +\infty[$. В каждом промежутке будем искать корни данного нелинейного уравнения.

1) $x \in]-\infty; -2]$ или $x \ge -2$. Тогда $|x+2| = -x-2$ и $|2x-6| = -2x+6$. Данное уравнение принимает вид:

$$-x-2-2x+6=7,$$

или $\quad -3x+4=7 \Leftrightarrow -3x=3 \Leftrightarrow x=-1,$

но $\quad -1 \notin]-\infty;-2]$.

Поэтому в данном интервале корней нет.

2) $x \in]-2; 3[$ или $-2 < x < 3$.

Тогда $|x+2| = x+2$ и $|2x-6| = -2x+6$.

Данное уравнение принимает вид: $x+2-2x+6=7$.

или $\quad -x+8=7 \Leftrightarrow -x=-1 \Leftrightarrow x=1$.

Так как $1 \in]-2; 3[$, то $x=1$ – корень данного уравнения.

3) $x \in [3;+\infty[$ или $x \ge 3$.

Тогда $|x+2| = x+2$ и $|2x-6| = 2x-6$.

Данное уравнение принимает вид

$$x+2+2x-6=7.$$

Найдем x

$$3x-4=7 \Leftrightarrow 3x=11 \Leftrightarrow x=\frac{11}{3} \Leftrightarrow x=3\frac{2}{3}.$$

Так как $3\frac{2}{3} \in [3; +\infty[$, то $x=3\frac{2}{3}$ – корень данного уравнения. Следовательно данное нелинейное уравнение имеет два корня 1 и $3\frac{2}{3}$.

Ответ: $\left\{1; 3\frac{2}{3}\right\}$.

7.2 РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рациональные уравнения включают в себя целые и дробно-рациональные уравнения.

Целое рациональное уравнение – это уравнение, которое можно записать в виде: $$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = 0,$$ где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ – заданные числа; x – неизвестное; $n \ge 1$.

Дробно-рациональное уравнение – это уравнение вида $$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0 x^0} = 0,$$ где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0, b_n, b_{n-1}, \ldots, b_0$ – заданные числа; x – неизвестное; $n \ge 0$; $m \ge 0$.

Рассмотрим основные методы решения рациональных уравнений.

Простейшие уравнения. Простейшие уравнения решаются с помощью обычных упрощений – приведением к общему знаменателю, приведением подобных членов и т.д.

Квадратные уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

решаются по формуле

$$x_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

или используется теорема Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

В качестве примера решим уравнение

$$\frac{7(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x-7)(x+2)(x-6)} = -2.$$

Сначала находим область допустимых значений данного уравнения:

$$\begin{cases} 2x - 7 \neq 0; \\ x + 2 \neq 0; \\ x - 6 \neq 0. \end{cases}$$

После этого приводим уравнение к виду

$$(7x-14)(x^2-7x+12) = (-4x+14)(x^2-4x-12).$$

Теперь раскроем скобки

$$7x^3 - 49x^2 + 84x - 14x^2 + 98x - 168 + 4x^3 - 16x^2 - 48x - 14x^2 +$$
$$+ 56x + 168 = 0.$$

$$11x^3 - 93x^2 + 190x = 0, x(11x^2 - 93x + 190) = 0.$$

$$\begin{cases} x = 0; \\ 11x^2 - 93x + 190 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, найдем

$$x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ x_3 = \frac{38}{11}.$$

Метод группировки. С помощью группировки слагаемых уравнение приводится к виду, в котором левая часть имеет произведение нескольких многочленов, а правая часть равна нулю. В качестве примера решим уравнение

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0.$$

Сначала раскрываем скобки

$$x^3 - ax^2 - bx^2 cx^2 + abx + acx + bcx - abc = 0.$$

Теперь делаем группировку

$$x^2(x-a) - bx(x-a) - cx(x-a) - bc(x-a) = 0;$$

$$(x-a)(x^2 - bx - cx + bc) = 0.$$

Теперь мы получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x - a = 0; \\ x^2 - bx - ax + bc = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a; \\ x(x-b)c(x-b) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a; \\ (x-b)(x-c) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a; \\ x_2 = b, x_3 = c. \end{cases}$$

Ответ: $\{a; b; c\}$.

Метод подстановки. Этот метод имеет другое название- метод введения новой переменной. Его можно применять, если в заданном уравнении имеется повторяющееся выражение. Это выражение обозначают новой переменной. При этом уравнение принимает более простой вид. В некоторых случаях сначала необходимо преобразовать уравнение, а после этого ввести новую переменную. В качестве примера решим уравнение

$$(x^2+2x)-(x+1)^2=55.$$

Сначала преобразуем это уравнение к виду

$$(x^2+2x)-(x^2+2x+1)=55.$$

Теперь сделаем подстановку

$$t=x^2+2x.$$

При этом мы получим

$$t^2-t-56=0.$$

Это квадратное уравнение легко решается.

Для некоторых уравнений есть стандартные подстановки. Рассмотрим следующие примеры:

1) уравнение

$$(x+a)^4+(x+b)^4=c$$

сводится к биквадратному, если сделать подстановку

$$x=t-\frac{a+b}{2}.$$

2) симметрическое уравнение

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^2+....+a_1x^1+a_0=0.$$

В симметрическом уравнении коэффициенты членов, равноотстоящих от концов, равны. Симметрические уравнения решаются с помощью подстановки

$$t=x+\frac{1}{x},$$

если n – четное число. Если n – число нечетное, то уравнение имеет единственный корень $x=-1$.

3) уравнение вида $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=1$ сводится к квадратному, если $a+b=c+d$.

7.3 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Иррациональным уравнением относительно переменной *x* называется уравнение, содержащее это уравнение под знаком радикала

Решение иррационального уравнения следует искать в области допустимых значений неизвестного. Мы рассмотрим основные методы решения иррациональных уравнений.

Уединение радикала и возведение в степень. Смысл этих преобразований заключается в сведении данного иррационального уравнения к равносильному рациональному уравнению. В качестве примера рассмотрим решение иррационального уравнения

$$\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$$

Вначале замечаем, что

$$15-x\ge 0{,}3-x\ge 0{,}6-\sqrt{3-x\ge 0.} \qquad (1)$$

Теперь уединяем первый радикал и возводим уравнение в квадрат

$$\sqrt{15-x}=6-\sqrt{3-x}\Leftrightarrow 15-x=36-12\sqrt{3-x}+3-x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\sqrt{3-x}=24\Leftrightarrow\sqrt{3-x=2}\Leftrightarrow 3-x=4\Leftrightarrow x=-1.$$

Найденное значение неизвестной удовлетворяет условиям (1).

Метод подстановки или метод введения новой переменной. В этом методе вводится новая переменная, что позволяет свести данное уравнение к другому уравнению, решение которого известно. Поясним сущность этого метода на следующем примере

$$x^2+3x-18+\sqrt{x^2+3x-18}=0.$$

Вводим новую переменную

$$t=x^2+3x-18.$$

После этого мы получим уравнение

$$t+\sqrt{t}=0.$$

Теперь уединяем радикал

$$\sqrt{t=-t}$$

и возводим это эквивалентное уравнение в квадрат $t=t^2$, $t\ge 0$.

или $\quad t^2-t=0,\ t\ge 0 \Leftrightarrow t(t-1)=0,\ t\ge 0 \Leftrightarrow t=0,\ t=1,\ t\ge 0$.

Теперь мы имеем

$$\begin{cases} x^2+3x-18=0; \\ x^2+3x-18=1. \end{cases}$$

Решая эту систему мы получим решение данного уравнения.

Уравнения содержащие кубические радикалы. Основным методом решения таких уравнений является последовательное возведение в куб обеих частей уравнения, используя формулы

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

и $$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Проиллюстрируем это на следующем примере

$$\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16})^3=1 \Leftrightarrow$$
$$(x+45)-3\sqrt[3]{(x+45)^2(x-16)}+3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)^2}-x+16=$$
$$=1 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}(\sqrt[3]{x+45}+\sqrt[3]{x-16})=60 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=20 \Leftrightarrow (x+45)(x-16)=20^3 \Leftrightarrow x^2+29x-$$
$$-8720=0 \Leftrightarrow x_1=80,\ x_2=-109.$$

Проверкой убеждаемся, что это корни данного уравнения.

7.4 СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим основные методы решения систем алгебраических уравнений.

Способ подстановки. В этом методе из какого-либо уравнения системы выражаем одно неизвестное через другие и подставляем в оставшиеся уравнения системы. Проиллюстрируем это на следующем примере

$$\begin{cases} 2x+y+z=7; \\ x+2y+z=8; \\ x+y+2z=9. \end{cases}$$

Выразим, например, неизвестное z из первого уравнения

$$z=7-2x-y.$$

Теперь подставим это выражение для z во второе и третье уравнение. Тогда мы получим

$$\begin{cases} z=7-2x-y; \\ x+2y+7-2z-y=8; \\ x+y+14-4x-2y=9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=7-2x-y; \\ -x+y=1; \\ -3x-y=-5. \end{cases}$$

Теперь из второго уравнения выражаем неизвестное y и постанавливаем это в третье уравнение. При этом мы получим

$$\begin{cases} z = 7 - 2x - y; \\ y = x + 1; \\ x = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7 - 2x - y; \\ y = 2; \\ x = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3; \\ y = 2; \\ x = 1. \end{cases}$$

Таким образом, система решена.

Способ алгебраического сложения. Сущность этого способа поясним на примере

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 65; \\ x^2 y + xy^2 = 20. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 3 и сложим с первым уравнением

$$\begin{cases} 3x^2 y + 3xy^2 = 60; \\ (x+y)^3 = 125; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 20; \\ x + y = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4; \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Решая эту систему методом подстановки, мы получим два решения

$$\begin{cases} x_1 = 4; \\ y_1 = 1; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 1; \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Способ введения новых переменных. Сущность этого метода поясним на примере

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + 13; \\ x + y = 3 + \sqrt{xy}. \end{cases}$$

Для решения воспользуемся формулой

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Перепишем данную систему иначе

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = xy + 13; \\ x + y = 3 + \sqrt{xy}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 3xy = 13; \\ x + y - \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$$

Введем новые переменные по соотношениям

$$u = x + y, v = \sqrt{xy}, (xy \geq 0).$$

Тогда данная система принимает вид

$$\begin{cases} u^2 - 3v^2 = 13; \\ u - v = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 3v^2 = 13; \\ u = v + 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 - 3v + 2 = 0; \\ u = v + 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 1,\ u_1 = 4; \\ v_2 = 2,\ u_2 = 5. \end{cases}$$

Теперь возвращаемся к старым переменным

$$\begin{cases} x + y = 4; \\ \sqrt{xy} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 5; \\ \sqrt{xy} = 2. \end{cases}$$

Сначала решаем первую систему:

$$y = 4 - x,\ x(4 - x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$x_1 = 2 - \sqrt{3},\ y_1 = 2 + \sqrt{3};\ x_2 = 2 + \sqrt{3},\ y_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Теперь решаем вторую систему

$$x_3 = 4,\ y_3 = 1;\ x_4 = 1,\ y_4 = 4.$$

Ответ: $(2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3});\ (2+\sqrt{3};\ 2-\sqrt{3});\ (4;\ 1);\ (1;\ 4).$

7.5 ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

Показательным уравнением называется уравнение, в котором неизвестное входит в показатель степени

Рассмотрим основные методы решения показательных уравнений.

Простейшие. Простейшее уравнение имеет вид

$$a^x = b.$$

Из этого равенства следует

1) $a > 0, a \neq 1;$ 2) $b > 0;$ 3) $x = \log_a = b.$

Примеры: 1) $4^x = 5.$

Решение $x = \log_4 = 5;$

2) $2^x = -3.$

Решение $x \in \varnothing$, так как $b = -3 < 0;$

3) $2^{x-1} = 1024.$

Решение $x - 1 = \log_2 1024 \Leftrightarrow x = 1 + \log_2 1024.$

Способ приведения к одному основанию. Этот способ основан на следующем свойстве степеней: если две степени равны и равны их основания, то равны и их показатели. Отсюда следует, что данное уравнение нужно привести к виду

$$a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)}.$$

Отсюда следует

$$f_1(x) = f_2(x).$$

Проиллюстрируем сказанное на примере

$$\sqrt{2} \cdot 0{,}5^{\frac{5}{4\sqrt{x}+10}} - 16^{\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)}} = 0.$$

Нетрудно заметить, что все степени можно привести к степеням с основанием 2. Поэтому перепишем уравнение в виде

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{-5}{4\sqrt{x}+10}} - 2^{\frac{4}{2(\sqrt{x}+1}} = 0 \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4\sqrt{x}+10}} = 2^{\frac{4}{2(\sqrt{x}+1)}}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{4\sqrt{x}+10} = \frac{4}{2(\sqrt{x}+1)}.$$

Мы получили иррациональное уравнение. Введем подстановку

$$\sqrt{x} = t \geq 0.$$

Тогда наше уравнение приведется к виду

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{4t+10} = \frac{2}{t+1} \Leftrightarrow 4t^2 + 10t + 4t + 10 - 10t - 10 = 16t + 40$$
$$\Leftrightarrow 4t^2 + 12t - 40 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 10 = 0.$$

Решая это уравнение мы найдем два корня

$$t_1 = 5,\ t_2 = -2.$$

Второй корень не подходит, так как

$$t \geq 0.$$

Таким образом,

$$\sqrt{x} = 5,\ x = 25.$$

Ответ: $x = 25.$

Способ подстановки. Этот способ обычно используется после соответствующих преобразований данного уравнения. В качестве примера решим уравнение

$$3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0{,}2.$$

Сначала преобразуем это уравнение

$$\frac{3(5^x)^2}{5} - 2 \cdot \frac{5^x}{5} = 0{,}2.$$

Теперь введем новую переменную

$$5^x = t > 0\ .$$

Тогда данное уравнение примет вид

$$\frac{3}{5}t^2 - \frac{2}{5}t = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 1 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются

$$t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{1}{3}.$$

Второй из этих корней не подходит. Итак,

$$5^x = 1 = 5^0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Таким образом данное уравнение имеет только один корень $x = 0.$

Метод почленного деления. Этот метод применяют для решения однородных уравнений. Суть метода состоит в почленном делении трехчленного уравнения, члены которого представляют собой степени с одинаковыми показателями и различными основаниями на одну из степеней. Проиллюстрируем это на примере

$$5 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0.$$

Это однородное уравнение. Его можно переписать в виде

$$6 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x - 6 \cdot 3^{2x} = 0.$$

Разделим обе части этого уравнения на $2^{2x} \neq 0.$
Тогда мы получим

$$6 - 13 \cdot \frac{6^x}{4^x} + 6 \cdot \frac{9^x}{4^x} = 0 \Leftrightarrow 6 - 13\left(\frac{3}{2}\right)^x + 6\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 0.$$

Обозначив $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0,$ мы получим

$$6t^2 - 13t + 6 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня: $t_1 = \frac{3}{2},\ \ t_2 = \frac{2}{3}.$

Таким образом, мы получаем два уравнения

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \text{ и } \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3}.$$

Отсюда мы находим, что $x_1 = 1,\ x_2 = -1$.

Способ группировки. Сущность этого метода поясним на следующем примере

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}.$$

Сначала преобразуем члены уравнения

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^x \cdot 81 = 6 \cdot 4^x \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 9^x \cdot 9.$$

Теперь перегруппируем слагаемые

$$3 \cdot 4^x - 24 \cdot 4^x = \frac{9}{2} \cdot 9^x - 27 \cdot 9^x \Leftrightarrow 4^x (3 - 24) = 9^x \left(-\frac{9}{2} - 27\right)$$

$$\Leftrightarrow -21 \cdot 4^x = -\frac{63}{2} \cdot 9^x \Leftrightarrow \frac{4^x}{9^x} = \frac{63}{2 \cdot 21} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}.$$

Отсюда: $2x = -1,\ x = -\frac{1}{2}$.

Системы показательных уравнений. При решении систем показательных уравнений используются как приемы решения систем алгебраических уравнений, так и методы решения показательных уравнений. Поясним это на следующем примере

$$\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725; \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25. \end{cases}$$

Введем новые переменные, положив

$$3^x = t > 0, 2^{\frac{y}{2}} = z > 0.$$

Тогда мы получим

$$\begin{cases} t^2 - z^2 = 725; \\ t - z = 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t - z)(t + z) = 725; \\ t - z = 25. \end{cases}$$

Отсюда мы получаем

$$\begin{cases} t - z = 25; \\ t + z = 29. \end{cases}$$

7.6 ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

Предварительно приведем основные свойства логарифмов.

> **Логарифмом положительного числа *b* по основанию** $a (a > 0, a \neq 0)$ **называется показатель степени *x*, в который нужно возвести основание *a*, чтобы получить число *a*, т.е. из** $a^x = b$ **следует** $x = \log_a b$ **и наоборот**

Свойства логарифмов:

1) $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x,\ a \neq 1, b > 0;$

2) $\log_a a = 1$;

3) $\log_a 1 = 0$;

4) $\log_a (x_1 x_2) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$;

5) $\log_a \left(\dfrac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$;

6) $\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a |x|$;

7) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $c > 0,\ c \neq 0$;

8) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$;

9) $\log_a b = \log_{a^\alpha} b^\alpha$, $\alpha \neq 0$;

10) $c = \log_a a^c$;

11) $c = a^{\log_a c}$;

12) $\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x), (f_1(x), f_2(x) > 0) -$ операция потенцирования; $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Логарифмическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестное находится под знаком логарифма

Рассмотрим основные методы решения логарифмических уравнений.

По определению логарифма. Этим методом решаются простейшие уравнения вида

$$\log_a x = b.$$

В качестве примера решим уравнение

$$\log_3 x(x-2) = 1.$$

Используя свойства логарифмов, перепишем это уравнение в виде

$$x(x-2) = 3.$$

Отсюда легко находим $x_1 = 3,\ x_2 = -1$.

Метод потенцирования. Суть этого метода состоит в следующем: с помощью формул уравнение приводится к виду

$$\log_a f(x) = \log_a g(x).$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, g(x) > 0; \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

В качестве примера решим уравнение

$$3\log_5 + 2 - x = \log_5 (3^x - 5^{2-x}).$$

Теперь используем формулы (4), (5) и (12)

$$\log_5 \frac{8 \cdot 25}{5^x} = \log_5 \left(3^x - \frac{25}{5^x} \right) \Leftrightarrow \frac{200}{5^x} = 3^x - \frac{25}{5^x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 200 - 15^x - 25 \Leftrightarrow 15^x = 15^2 \Rightarrow x = 2.$$

Метод подстановки. Как правило. подстановку (замену) производят после некоторых преобразований данного уравнения. В качестве примера решим уравнение $\log_x 9x^2 \log_3{}^2 x = 4$. Воспользуемся формулами (2), (4), (8), (6) и перепишем данное уравнение в виде

$$\left(\log_x 9+\log_x x^2\right)\log_3{}^2=4 \Leftrightarrow (2\log_x 3+2)(\log_3 x)^2=4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\log_3 x+2}\right)(\log_3 x)^2=4.$$

Вводим подстановку $\log_3 x=t.$ Тогда данное уравнение принимает вид

$$\left(\frac{2}{t}+2\right)\cdot t^2=4 \Leftrightarrow t^2+t-2=0.$$

Корнями этого квадратного уравнения являются

$$t_1=-2, t_2=1.$$

Поэтому $\log_3=-2, \log_3=1.$

Отсюда $x_1=3^{-2},\ x_2=3.$

Метод приведения к одному основанию. Обычно из условия примера видно к какому основанию нужно перейти. При этом используются формулы (7) – (9) свойств логарифмов. Как правило, метод приведения к одному основанию «работает» в паре с методом подстановки. В качестве примера решим уравнение

$$\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11.$$

Перейдем к основанию 2 (используем при этом свойство 4 и считаем, что $x>0$)

$$\log_2 x+\log_2\sqrt{x}+\log_2\sqrt[3]{x}=11 \Leftrightarrow \log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x=11.$$

Обозначим $\log_2 x=t.$ Тогда уравнение примет вид

$$t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}t=11 \Leftrightarrow \frac{11}{6}t=11 \Rightarrow t=6.$$

Теперь получаем уравнение

$$\log_2 x=6 \Rightarrow x=2^6 \Leftrightarrow x=64.$$

Метод логарифмирования. Этот метод применяют для решения уравнений вида

$$f_1(x)^{f_2(x)}=f_3(x).$$

В качестве примера решим уравнение

$$x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{5+\lg x},\ x>0.$$

Прологарифмируем это уравнение по основанию 10. Мы получим эквивалентное уравнение

$$\frac{\lg x+5}{3}\lg x=(5+\lg x)\lg 10.$$

Воспользуемся подстановкой $\lg x=t.$

Тогда данное уравнение примет вид

$$\frac{(t+5)t}{3}=5+t \Leftrightarrow t^2+5t=15+3t \Leftrightarrow t^2+2t-15=0 \Rightarrow t_1=-5,\ t_2=3.$$

Теперь мы получаем два уравнения

$$\lg x=-5,\ \lg x=3 \Rightarrow x_1=10^{-5},\ x_2=10^2.$$

Системы логарифмических уравнений. В этом методе используются приемы решения систем алгебраических уравнений, свойства логарифмов и методы решения логарифмических уравнений. В качестве примера решим систему

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{x}} xy = 8; \\ \log_3\left(\log_{\sqrt{9}} \dfrac{x}{y}\right) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $x > 0,\ x \neq 1,\ y > 0,\ \log_{\sqrt{9}} \dfrac{x}{y > 0}$.

По определению логарифма имеем

$$\begin{cases} xy = \left(\sqrt{x}\right)^8; \\ \log_{\sqrt{9}} \dfrac{x}{y} = 3^0 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = x^4; \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{9}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3; \\ y = 9x; \end{cases} \Leftrightarrow x^3 = 9x \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Нам подходит только $x = 3$. Поэтому $y = 27$. Таким образом данная система имеет решение $x = 3,\ y = 27$.

Контрольные вопросы

1 Что называется модулем действительного числа?
2 Сформулируйте свойства модуля действительного числа.
3 Какое уравнение называется рациональным?
4 Какие методы решения рациональных уравнений Вы знаете?
5 В чем сущность метода группировки?
6 В чем сущность метода подстановки?
7 Какое уравнение называется иррациональным?
8 Какие методы решения иррациональных уравнений Вы знаете?
9 В чем сущность метода уединения радикала?
10 В чем сущность метода подстановки?
11 Как решаются иррациональные уравнения, содержащие кубические радикалы?
12 Какие методы решения алгебраических уравнений Вы знаете?
13 В чем сущность метода подстановки?
14 В чем сущность способа алгебраического сложения?
15 В чем сущность способа введения новых переменных?
16 Какое уравнение называется показательным?
17 Какие способы решения показательных уравнений Вы знаете?
18 В чем сущность способа приведения к одному основанию?
19 В чем сущность способа подстановки?
20 В чем сущность способа почленного деления?
21 В чем сущность способа группировки?
22 Как решаются системы показательных уравнений?
23 Какое уравнение называется логарифмическим?
24 Сформулируйте свойства логарифмов.
25 Какие методы решения логарифмических уравнений Вы знаете?
26 В чем сущность метода потенцирования?
27 В чем сущность метода подстановки?
28 В чем сущность метода приведения к одному основанию?
29 В чем сущность метода логарифмирования?
30 Как решаются системы логарифмических уравнений?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Цыпкин, А.Г. Справочник по математике для средней школы / А.Г. Цыпкин. – 2-е изд. –М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

2 Егерев, В.К. Сборник задач по математике для поступающих в вузы (с решениями) : в 2-х кн. / В.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский и др. – Кн. 1: Алгебра : учебное пособие. – 8-е изд., испр. – М. : Высшая школа, 1998.

3 Лазарева, Е.А. Алгебра и элементарные функции : учебное пособие по математике для студентов иностранцев подготовительных факультетов / Е.А. Лазарева, И.П. Пацей. – М. : Изд-во МГУ, 1989.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДЛЯ ЗАМЕТОК