

**Н.П. ЖУКОВ, Н.Ф. МАЙНИКОВА**

**МНОГОМОДЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И СРЕДСТВА  
НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ  
ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ  
МАТЕРИАЛОВ И ИЗДЕЛИЙ**

**МОСКВА**

**"ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1"**

**2004**

УДК 620.179.1.05:691:658.562.4

ББК 31.312.06

Ж85

Рецензент

Заслуженный деятель науки РФ, академик РАН,  
доктор физико-математических наук, профессор  
*Э.М. Карташов*

**Жуков Н.П., Майникова Н.Ф.**

Ж85 Многомодельные методы и средства неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов и изделий. М.: "Издательство Машиностроение-1", 2004. 288 с.

Посвящена решению актуальной проблемы – созданию новых более надежных методов и средств оперативного неразрушающего контроля теплофизических свойств твердых материалов и изделий на их основе.

Предназначена для инженеров, научных сотрудников, аспирантов и студентов, занимающихся вопросами изучения и разработки измерительных средств экспресс-контроля ТФС материалов и готовых изделий из них.

УДК 620.179.1.05:691:658.562.4  
ББК 31.312.06

ISBN 5-94275-165-X

© Жуков Н.П., Майникова Н.Ф., 2004  
© "Издательство Машиностроение-1",  
2004

**Н.П. ЖУКОВ, Н.Ф. МАЙНИКОВА**

**МНОГОМОДЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И СРЕДСТВА  
НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ  
ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ  
МАТЕРИАЛОВ И ИЗДЕЛИЙ**

---

МОСКВА  
"ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1"  
2004

Научное издание

ЖУКОВ Николай Павлович,  
МАЙНИКОВА Нина Филипповна

**МНОГОМОДЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И СРЕДСТВА  
НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ  
ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ И ИЗДЕЛИЙ**

Монография

Редактор З.Г. Чернова  
Компьютерное макетирование М.А. Филатовой

Подписано к печати 24.12.2004  
Формат 60 × 84/16. Гарнитура Times. Бумага офсетная. Печать офсетная  
Объем: 16,74 усл. печ. л.; 17,00 уч.-изд. л.  
Тираж 400 экз. С. 877<sup>М</sup>

"Издательство Машиностроение-1",  
107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Подготовлено к печати и отпечатано в издательско-полиграфическом центре  
Тамбовского государственного технического университета  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14т

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И АББРЕВИАТУРЫ

---

- $a$  – температуропроводность,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  
 $c'$  – удельная объемная теплоемкость,  $\text{Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$ ;  
 $c$  – удельная теплоемкость,  $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ;  
 $c_p$  – объемная теплоемкость;  $\text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$ ;  
 $c_n$  – теплоемкость нагревателя на единицу площади,  $\text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ;  
 $\rho$  – плотность материала,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  
 $q$  – удельный тепловой поток,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ;  
 $W$  – мощность на нагревателе,  $\text{Вт}$ ;  
 $W$  – водопоглощение, % масс;
- \*
- $R$  – радиус поверхностного сферического нагревателя, м;  
 $R_n$  – радиус круглого плоского нагревателя, м;  
 $T^*$  – температура изделия,  $^{\circ}\text{C}$ ;  
 $T$  – избыточная температура,  $^{\circ}\text{C}$ ;  
 $T_s$  – среднее значение температуры из  $k$  измеренных значений,  $^{\circ}\text{C}$ ;  
 $T_n$  – начальная температура опыта,  $^{\circ}\text{C}$ ;  
 $T_j$  – температура на  $j$  шаге измерения,  $^{\circ}\text{C}$ ;  
 $H_n$  – толщина подложки зонда, мм;  
 $H_n$  – толщина исследуемого изделия, мм;
- $x, y, z, r$  – пространственные координаты, м;  
 $\varepsilon$  – тепловая активность,  $\text{Вт} \cdot \text{с}^{0.5}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ;  
 $\lambda$  – теплопроводность,  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ;  
 $\tau$  – время, с;  
 $\Delta\tau$  – временной шаг измерения температуры, с;
- АЦП – аналого-цифровой преобразователь;  
Б – блок питания;
- П
- ДСК – дифференциальная сканирующая калориметрия;  
ДТА – дифференциальный термический анализ;  
ИВС – измерительно-вычислительная система;  
ИЗ – измерительный зонд;  
ИВУ – измерительно-вычислительное устройство;  
НК – неразрушающий контроль;  
ПММА – полиметилметакрилат;  
ПТФЭ – политетрафторэтилен;  
ТФС – теплофизические свойства;  
ТА – термический анализ;  
Ф4К20 – коксонаполненный политетрафторэтилен.

## ВВЕДЕНИЕ

---

Совершенствование известных и создание новых методов и средств контроля востребованы и являются актуальными в связи со сложностью и большим объемом экспериментальных исследований по определению качества, долговечности и надежности как традиционных, так и вновь синтезированных материалов конструкционного, электро- и теплоизоляционного назначения. Тепловые методы неразру-

шающего контроля (НК) и диагностики позволяют определять качество исследуемых материалов и готовых изделий из них по теплофизическим свойствам (ТФС), к числу которых относятся коэффициенты теплоемкости, тепло- и температуропроводности, тепловой активности.

В случае НК активными тепловыми методами искомые ТФС проявляются через температурный отклик (термограмму) исследуемого образца на тепловое воздействие, которому подвергается образец (или изделие) в специально организованном эксперименте.

Известно, что теплофизические измерения отличаются сложностью проведения эксперимента и трудоемкостью обработки полученных данных.

В настоящее время для обработки данных эксперимента при НК ТФС материалов и изделий тепловыми методами в основном применяются следующие подходы. Во-первых, предполагается получение и использование эмпирических зависимостей на основе проведения большого числа экспериментов в достаточно узком диапазоне контролируемых свойств и материалов. Простота математического обеспечения измерительных систем является достоинством данного подхода. Появляется возможность их реализации дешевыми техническими средствами. Существенный недостаток – достаточную точность можно обеспечить лишь для узкого класса материалов. Во-вторых, предполагается использование аналитических моделей, получаемых решением классических задач теплопроводности. Достоинством таких методов является достаточно высокая точность в широком диапазоне исследуемых свойств. Однако, несмотря на относительно точное и, вместе с тем, громоздкое математическое описание динамики тепловой системы, оно все равно не может учесть всех индивидуальных особенностей конкретных процессов измерения. Более того, сопоставление расчетных и экспериментальных термограмм показывает невозможность их точного совпадения на всем временном интервале. Эти обстоятельства не позволяют гарантировать для методов второго подхода отсутствия значительных погрешностей во всем диапазоне измерения.

Реализация тепловых методов неразрушающего контроля ТФС усложняется еще и тем, что тепловое воздействие и получение измерительной информации в ходе эксперимента возможно осуществлять только на ограниченном участке поверхности исследуемого объекта. Поэтому наиболее сложной и важной задачей при создании новых методов неразрушающего контроля ТФС является разработка физико-математических моделей, адекватно описывающих тепловые процессы в объектах контроля.

Анализ процессов измерения, их моделей и источников погрешностей показывает, что в пределах временного интервала измерения в тепловой системе могут происходить существенные изменения, которые не позволяют описывать весь процесс измерения одной аналитической моделью с неизменными ограничениями и условиями. Неучет данного обстоятельства ведет к существенному увеличению погрешностей при определении ТФС неразрушающими методами.

Основные источники погрешностей для измерительных средств, использующих тепловые методы, следующие: не соблюдается условие соответствия тепловой системы одной из классических моделей теплопереноса, например, модели полупространства; нарушается допущение относительно постоянства плотности теплового потока от нагревателя; не выполняются условия о направлении теплового потока вследствие конечных размеров нагревателя; не соблюдается предположение об адекватности аналитической модели процессу теплопереноса.

В основе разработанных авторами многомодельных методов лежат следующие предположения.

На термограмме имеются участки (рабочие), для которых обеспечивается высокая точность совпадения с результатами вычислительных экспериментов по аналитическим моделям. Причем этим участкам соответствуют тепловые режимы опыта, вышедшие на стадию регуляризации.

Участки экспериментальных термограмм, хорошо совпадающие с рассчитанными по аналитическим моделям, имеют место для широкого класса твердых материалов (электро- и теплоизоляционных, полимерных и др.).

Для рабочих участков существуют удобные вычислительные соотношения, позволяющие однозначно определить значения теплофизических свойств в зависимости от параметров аналитической функции, соответствующей термограмме на данном временном интервале. Расчетные уравнения, описывающие термограмму на рабочих участках, следует искать на основе анализа решений соответствующих краевых задач.

Цель настоящей книги – показать многомодельные методы НК ТФС, позволяющие использовать достоинства и уменьшить недостатки упомянутых подходов к обработке данных теплофизического эксперимента.

Поскольку в самых различных отраслях промышленности все больший удельный вес приобретают синтезированные материалы и композиты на их основе, которые по своим технологическим и эксплуатационным параметрам часто имеют значительные преимущества перед природными материалами, то задача создания методов и средств неразрушающего контроля становится еще более актуальной, так как ее решение позволяет оперативно и с необходимой точностью определить весь комплекс характеристик, в том числе и ТФС, как на стадиях технологического контроля в процессе производства этих материалов, так и прогнозировать качества готовых изделий при дальнейшей их эксплуатации. Так все более широкое применение современных полимерных материалов во многом обусловлено разнообразием их свойств, которые можно варьировать как путем создания (синтеза) новых типов полимеров, так и разрабатывая новые технологии конструирования полимерных материалов из уже имеющихся типов полимеров или путем их модификации. Однако, полимерные материалы всегда неравновесны, т.е. находятся в состоянии, весьма далеком от полного равновесия. В основном это обусловлено цепочечным строением молекул (макромолекул) их составляющих, препятствующих реализации такой их упаковке в пространстве, которая соответствовала бы полному равновесию. Как указывалось выше, тепловые методы неразрушающего контроля ТФС предусматривают нагрев участка поверхности контролируемого объекта. Известно, что при нагревании полимеров и композиционных материалов на их основе часто наблюдаются тепловые эффекты, сопровождающие, во-первых, твердофазные переходы из одной кристаллической решетки в другую, а во-вторых, возможные релаксационные превращения. Авторы работы показали, что разработанные методы контроля ТФС позволяют регистрировать структурные превращения в полимерных материалах и исключать влияние последних на определение ТФС.

Книга построена следующим образом.

В первой главе рассмотрены современное состояние и проблемы неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов и изделий. Кратко представлены известные методы НК ТФС материалов и изделий при воздействии различных источников тепла: локальных импульсных, изотермических поверхностных, с помощью источника постоянной мощности и др. Интерес к перечисленным тепловым источникам объясняется, прежде всего, тем, что для них возможно получение строгих аналитических решений, а кроме того они достаточно легко реализуются в опыте.

Во второй главе рассмотрены различные подходы к обработке данных экспериментов при неразрушающем контроле теплофизических свойств. Приводятся исходные предпосылки и основные положения применения многомодельных тепловых методов.

В третьей главе представлен новый метод неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов с использованием линейного источника тепла. Изложены математическая модель нестационарного процесса теплопереноса от линейного источника тепла, расчетные выражения и основные операции при определении теплофизических свойств, оценка погрешностей измерения ТФС.

В четвертой и пятой главах книги рассмотрены теоретические основы метода неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов и изделий с использованием плоского круглого источника тепла, расчетные выражения при определении ТФС, оценка погрешностей метода. Подробно описаны математические модели нестационарного процесса теплопереноса от плоского источника тепла. Приведены измерительные схемы с несколькими термоприемниками. Получены расчетные выражения и основные операции при определении ТФС на стадиях нагрева и остывания с использованием моделей плоского и сферического полупространств. Дана оценка погрешностей метода.

В шестой главе представлены техническое и алгоритмическое обеспечения измерительно-вычислительной системы (ИВС), реализующей многомодельные методы. Рассмотрены состав и принципы функционирования ИВС, основные операции при реализации способов определения ТФС материалов и изделий, расчетные формулы, связывающие параметры моделей с искомыми свойствами. Один из разделов шестой главы посвящен использованию статистических критериев для выделения рабочих участков термограмм.

В заключительной седьмой главе приводятся результаты экспериментальных исследований ТФС различных материалов и изделий.

Книга предназначена для инженеров, научных сотрудников, аспирантов и студентов, занимающихся вопросами изучения и разработки измерительных средств экспресс-контроля ТФС материалов и го-

товых изделий из них. Книга может быть полезна всем специалистам, интересующимся проблемами теплофизических измерений.

## 1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПРОБЛЕМЫ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ, ИЗДЕЛИЙ И ОБРАЗЦОВ

Современное развитие промышленности характеризуется ростом номенклатуры и объемов производства новых материалов (строительных, теплозащитных, полимерных и др.), интенсификацией технологических процессов их переработки в изделия. Большой объем экспериментальных исследований по определению качества, долговечности и надежности как традиционных, так и вновь синтезированных материалов и изделий из них требуют совершенствования известных и создания новых методов и средств контроля [1 – 3]. Среди них особое место занимают тепловые методы (ТМ) неразрушающего контроля и диагностики.

В данной главе проведен анализ, представлены развитие и совершенствование методов и средств НК теплофизических свойств готовых изделий и образцов из твердых материалов. Теплофизические свойст-

ва – теплоемкость, теплопроводность и температуропроводность являются важнейшими характеристиками веществ и материалов. Количественные расчеты тепловых и температурных полей реальных тел возможны только тогда, когда известны конкретные значения ТФС материала этих тел.

В экспериментальной теплофизике различают две большие группы методов определения ТФС: стационарные и нестационарные [4 – 27]. Определение ТФС стационарным методом основано на том, что тепловой поток, проходящий через исследуемое тело во время проведения измерений, сохраняется постоянным по величине и направлению. Существующие стационарные методы [8 – 10, 19 – 21, 25 – 27] отличаются друг от друга способами учета и компенсации потерь, формами и размерами исследуемых образцов, размещением нагревателей, конструкцией измерительных ячеек, приемами регистрации и обработки измерительной информации.

Следует отметить, что стационарные методы практически не пригодны для определения ТФС материалов и изделий без нарушения их целостности. Серьезными недостатками стационарных методов являются большая длительность экспериментов, необходимость использования специально подготовленных образцов и возможность определения в процессе эксперимента только одного теплофизического параметра – коэффициента теплопроводности.

Методы определения ТФС материалов, основанные на закономерностях нестационарного потока тепла [7, 11, 21 – 24, 28 – 32, 37 – 55], можно разделить на группы:

- а) методы регулярного режима;
- б) методы, основанные на определении параметров нестационарного температурного поля на начальной стадии его развития.

Различают регулярные режимы 1-го, 2-го и 3-го рода. Общая теория методов регулярного режима разработана Г.М. Кондратьевым [8, 9] и его учениками. Различным вариантам этих методов посвящены работы [8, 9, 15, 21], в которых рассмотрены способы измерения теплофизических свойств образцов цилиндрической формы конечных размеров, стержней, многослойных систем и т.д. Основными недостатками методов регулярного режима являются: длительность эксперимента, возможность проведения измерений только на специально подготовленных образцах определенной формы. Последнее затрудняет применение этих методов для неразрушающего контроля ТФС материалов.

Наиболее приемлемыми для оперативного НК ТФС материалов и изделий являются методы измерения, основанные на определении параметров нестационарного температурного поля на начальной стадии процесса теплопроводности. В данных методах исследуемый образец моделируется в виде полуграниченного тела. Рассмотрим эти методы, останавливаясь, в основном, на тех работах, где определяются ТФС без нарушения целостности и эксплуатационных характеристик исследуемых изделий.

Неразрушающие методы определения ТФС представлены в работах [21 – 23, 28, 29, 36 – 55]. Они включают в себя методы: кратковременного линейного источника тепла; кратковременного плоского источника тепла; постоянного линейного, цилиндрического и плоского источников тепла; мгновенного источника тепла; шарового зонда, неограниченного эталона и др.

### 1.1. ИМПУЛЬСНЫЕ МЕТОДЫ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТФС

Остановимся более подробно на импульсных методах определения ТФС. Импульсным называют такое воздействие, при котором выделившаяся за время действия источника конечная энергия не успевает заметно рассеяться за пределы зоны его локализации [46]. В импульсных методах важную роль играет начальное тепловое состояние образца. Пространственно-временное развитие импульсного теплового возмущения внутри образца прослеживается в опыте наиболее явно, если перед началом опыта образец имеет равномерное температурное поле. Во всех других случаях приходится существенно усложнять схему опыта, в частности, переходить на дифференциальный принцип регистрации температурных полей в двух идентичных по тепловому фону калориметрических ячейках.

Имеются два существенно различных приема использования импульсных источников при теплофизических измерениях. В первом из них тепловой источник распределяется равномерно во всем объеме образца и, если образец адиабатизирован от окружающей среды, не создает в нем направленных тепловых потоков. При втором случае импульсный тепловой источник действует на сравнительно небольшом участке образца (часто на локальном участке его поверхности), оставляя после себя направленный тепловой поток, а следовательно, и нестационарное неравномерное температурное возмущение в рабочей зоне образца.

Импульсные методы, в которых используется второй прием, обладают более широкими техническими возможностями, позволяя определять независимо две, а иногда и все три теплофизические характеристики. Среди указанных методов можно выделить, прежде всего, группу методов, в которых используются образцы и изделия неограниченных размеров, с плоскими, линейными или точечными импульсными источниками [21, 46 – 70].

Анализ температурных полей (в целях упрощения структуры решения) обычно проводят в предположении, что теплоемкость и область локализации теплового источника пренебрежимо малы в сравнении с теплоемкостью и размерами всего образца. Предполагают также, что открытые участки образца теплоизолированы от среды, а между источником и образцом имеет место идеальный тепловой контакт.

Применительно к НК комплекса теплофизических свойств, широкое применение нашли методы, основанные на импульсном тепловом воздействии от линейного источника тепла. В этом случае идеальный объект контроля представляет собой полубесконечное в тепловом отношении тело, ограниченное плоскостью, на поверхности которого помещены линейный источник тепла и датчик температуры. Если нагреватель выделяет импульс тепловой энергии  $Q$ , то для данной системы будет справедлива математическая модель температурного поля [10]:

$$T(r, \tau) = \frac{Q}{2\pi\lambda\tau} \exp\left[-\frac{r^2}{4a\tau}\right], \quad (1.1)$$

где  $\tau$  – текущее время от момента подачи теплового импульса;  $r$  – расстояние от нагревателя до точки контроля;  $\lambda$ ,  $a$  – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности материала.

Несмотря на простоту одноимпульсной модели и математического описания температурного поля, в явном виде она трудно реализуема на практике из-за малых величин (порядка единиц градусов) избыточных температур в точке контроля. Для увеличения температуры тепловое воздействие осуществляют серией импульсов. Данному направлению посвящен ряд работ [46 – 70]. Все эти методы базируются на соотношении (1.1), из которого в зависимости от закона подачи импульсов, выбранной схемы контроля температурно-временной зависимости в заданных точках тепловой системы, по принципу суперпозиций, получают расчетные соотношения для определения ТФС.

Рассмотрим несколько экспресс-методов НК ТФС, в основу которых положено использование в качестве источников энергии линейных или плоских импульсных источников тепла, воздействующих на поверхность исследуемых объектов.

Контактный метод НК ТФС материалов и варианты его модернизации представлены в работе [51].

На поверхности исследуемого тела, теплоизолированного от окружающей среды, помещаются линейный импульсный источник тепла и на заданном расстоянии от него рабочие концы термопреобразователей (термопар). После подачи теплового импульса заданной мощности от источника тепла измеряется момент времени  $\tau_1$ , когда соотношение между избыточными температурами в двух разноотстоящих от линейного источника тепла точках поверхности исследуемого тела достигнет определенного, наперед заданного значения, согласно зависимости

$$T_1(x_1, \tau_1) = nT_2(x_2, \tau_1),$$



где  $T_1(x_1, \tau_1)$  и  $T_2(x_2, \tau_1)$  – соответственно температура в точках  $x_1$  и  $x_2$  поверхности тела в момент времени  $\tau_1$ ;  $n$  – постоянный коэффициент ( $n > 1$ ).

Фиксируется мощность источника тепла.

Определение времени  $\tau_1$  осуществляется путем непрерывного сравнения термо-э.д.с.  $E_{T_1}$  термопары, расположенной в точке  $x_1$ , и усиленной в  $n$  раз термо-э.д.с.  $E_{T_2}$  от термопары в точке  $x_2$ , а момент времени  $\tau_1$  наступает при достижении равенства  $E_{T_1} = nE_{T_2}$ .

Момент времени, соответствующий условию  $E_{T_1} = nE_{T_2}$ , наступает значительно раньше момента появления экстремума термограммы нагрева, вследствие чего повышается оперативность и уменьшаются неучтенные тепловые потери, что способствует повышению точности метода НК ТФС.

Расчетные формулы для вычисления комплекса ТФС исследуемого материала имеют вид:

$$a = \frac{x_2^2 - x_1^2}{4\tau_1 \ln n};$$

$$\lambda = \frac{p_0}{2\pi T_1(x_1, \tau_1)\tau_1} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4a\tau_1}\right).$$

Предлагаемый метод [51] позволяет определить весь комплекс ТФС исследуемого тела в течение одного опыта без нарушения структуры материала.

Данный метод НК ТФС выгодно отличается быстродействием, которое увеличивается с увеличением  $n$ , сравнительно небольшой погрешностью определения искомого ТФС, вследствие уменьшения тепловых потерь в эксперименте. Метод позволяет легко автоматизировать теплофизический эксперимент, является перспективным для использования в ИВС неразрушающего контроля. Недостатком метода [51] является процедура непрерывного сравнения между собой низких по уровню сигналов двух преобразователей при определении момента времени  $\tau_1$ . Для устранения указанного недостатка возможно внести изменение в алгоритм измерения, заключающееся в том, что в заданный момент времени  $\tau_1$  измеряют температуры в точках поверхности тела  $x_1$  и  $x_2$ . Это обстоятельство существенно упрощает реализацию метода НК ТФС и способствует снижению погрешности результатов измерения, так как момент времени  $\tau_1$  может быть задан с высокой степенью точности.

Точность разработанного метода НК ТФС можно повысить, если в два заранее заданные моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  (после подачи теплового импульса) измерять температуру в одной точке поверхности исследуемого тела, расположенной на заданном расстоянии от линии действия источника тепла. При этом повышение точности происходит из-за устранения погрешности от возмущающего действия второго термопреобразователя и от необходимости его расположения в строго фиксированной точке поверхности исследуемого тела.

ТФС исследуемого материала определяются при этом по формулам:

$$a = \frac{x_1^2(\tau_2 - \tau_1)}{4\tau_1\tau_2} \left\{ \ln \left[ \frac{T_1(x_1, \tau_2)\tau_2}{T_2(x_1, \tau_1)\tau_1} \right] \right\}^{-1};$$

$$\lambda = \frac{p}{2\pi\tau_1 T_1(x_1, \tau_1)} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4a\tau_1}\right),$$

где  $x_1$  – координата точки на заданном расстоянии от источника тепла;  $\tau_1$  и  $\tau_2$  – заранее заданные моменты времени контроля температуры в точке  $x_1$ ;  $T_1(x_1, \tau_1)$  и  $T_2(x_2, \tau_1)$  – температура в точке  $x$  в момент времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , соответственно.

К числу основных преимуществ описанных выше методов относится то, что они являются абсолютными и могут быть использованы при градуировке тепловых эталонов, применяемых для сравнительных методов определения теплофизических коэффициентов. Однако это обстоятельство влечет за собой и основной недостаток разработанных методов, заключающийся в том, что при исследовании теплоизоляционных материалов (или близких к ним по теплофизическим свойствам) возрастает погрешность результатов измерения, обусловленная соизмеримостью потоков тепла от источника к исследуемому телу и к изолятору на его поверхности. Эти утечки тепла становятся тем больше, чем ближе по ТФС исследуемое тело и охранный теплоизолятор на его поверхности. Следовательно, разработанные абсолютные способы можно успешно применять лишь для ограниченного класса материалов, а именно, для материалов с высокими значениями коэффициентов тепло- и температуропроводности [51].

Для расширения области применения перечисленных выше методов предлагается использовать тепловой эталон в контакте с исследуемым телом [48]. Под эталонным телом подразумевается материал с известными до определенной степени точности и постоянными ТФС.

Тепловой эталон с известными значениями ТФС ( $\lambda_{\text{эт}}$ ,  $a_{\text{эт}}$ ), выполненный в виде пластины определенной толщины, приводится в тепловой контакт с исследуемым телом [62]. В плоскости контакта помещается линейный импульсный источник тепла заданной мощности. После подачи теплового импульса регистрируется момент времени  $\tau_1$ , когда соотношение между избыточными температурами в двух точках плоскости контакта достигнет заданного значения, определяемого математическим выражением

$$T_1(x_0, \tau_1) = nT_2(x_1, \tau_1),$$

где  $T_1(x_0, \tau_1)$  и  $T_2(x_1, \tau_1)$  – соответственно температура в точках  $x_0$  и  $x_1$  в момент времени  $\tau_1$ ;  $n$  – постоянный коэффициент ( $n > 1$ ). Точка  $x_0$  расположена на линии действия линейного импульсного источника тепла, а  $x_1$  – на фиксированном расстоянии от нее.

Для определения комплекса ТФС исследуемого тела измеряется также температура в момент времени  $\tau_1$  в точке, расположенной на линии действия источника тепла, и мощность теплового воздействия. Расчет ТФС осуществляют по формулам:

$$\lambda = \frac{P_0}{2\pi T_1(0, \tau_1) \tau_1} - \lambda_{\text{эт}};$$

$$a = \frac{x_1^2}{4\tau_1 \ln \left\{ n + \frac{\lambda_{\text{эт}}}{\lambda} \left[ n - \exp\left(\frac{x_1^2}{4a_{\text{эт}}\tau}\right) \right] \right\}}.$$

Данный метод [62] обладает теми же достоинствами, что и предыдущий в отношении быстродействия, объективности установления временного интервала  $\tau_1$  и удобства автоматизации процесса определения комплекса ТФС исследуемого тела. Существенным преимуществом метода является практически неограниченная область применения его для всех твердых однородных изотропных материалов.

С целью увеличения точности определения искомого ТФС описанный выше метод измерения был модифицирован по аналогии с абсолютным методом [51].

Для устранения погрешности от операции непрерывного сравнения низких по уровню сигналов двух термопреобразователей при определении момента времени  $\tau_1$ , а также погрешности от возмущающего воздействия второго термоприемника, расположенного на линии действия источника тепла, необходимо в заранее заданные моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  измерить температуру в фиксированной точке плоскости контакта эталонного и исследуемого тел.

В работе [54] предлагается метод неразрушающего контроля ТФС материалов, состоящий в импульсном тепловом воздействии по прямой линии на поверхность исследуемого тела, измерении температуры в точке поверхности тела, расположенной на заданном расстоянии от линии действия источника теплового воздействия, и измерении энергии теплового воздействия, фиксировании интегрального во времени значения температуры с момента подачи теплового импульса до момента наступления максимума термограммы, а также измерении момента времени, когда интегральное во времени значение температуры после наступления максимума температуры станет равным значению зафиксированной интегральной во времени температуры.

Искомые ТФС в этом случае рассчитывают по формулам:

$$a = \frac{x_1^2(\tau_x - \tau_1)}{4\tau_1\tau_x \ln\left(\frac{\tau_x}{\tau_1}\right)};$$

$$\lambda = \frac{q}{2\pi S_1(x_1, \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_{\text{max}}} \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right) d\tau,$$

где  $x_1$  – координата точки, расположенной на заданном расстоянии от линии действия импульсного источника тепла;  $\tau_1$  – заранее заданный момент времени;  $\tau_x$  – момент времени, когда интегральное значение температуры на первом интервале времени  $\tau_1 - \tau_{\text{max}}$  равно значению интегральной температуры на втором интервале от  $\tau_{\text{max}}$  до  $\tau_x$ ;  $\tau_{\text{max}}$  – момент наступления максимума температурной кривой;  $S_1(x_1, \tau)$ ,

$S_2(x_1, \tau)$  – интегральное значение температуры на первом интервале времени от  $\tau_1$  до  $\tau_{\max}$  и на втором от  $\tau_{\max}$  до  $\tau_x$ , соответственно.

Таким образом, измерив момент времени  $\tau_x$  и интегральное во времени значение температуры  $S_1(x_1, \tau)$  и, зная мощность теплового воздействия, можно рассчитать значения коэффициентов тепло- и температуропроводности исследуемых тел [54].

В предлагаемом методе измерительная информация о температурно-временных изменениях в объекте исследования снимается на максимальном по амплитуде участке термограммы нагрева. Поэтому относительная погрешность измерений температуры в предлагаемом методе значительно меньше, чем в известных методах, так как большие по амплитуде значения температуры измеряются с меньшей относительной погрешностью.

Доля случайной составляющей общей погрешности измерения в предлагаемом методе меньше за счет того, что измерительная информация усредняется на интервале времени от  $\tau_1$  до  $\tau_x$ . В представленных ранее методах измерительная информация определяется как мгновенное значение температуры в один фиксированный момент времени. Следовательно, достоверность результатов и помехозащищенность при реализации данного метода возрастают.

Ряд методов НК ТФС предусматривает воздействие на объект измерения источника тепла, имеющего плоский участок нагрева, приводимого в контакт с поверхностью исследуемого объекта. Такое воздействие позволяет значительно упростить математическое описание тепловых процессов в объекте измерения, так как краевые задачи теплопроводности в этом случае трансформируются в одномерные задачи, что в итоге повышает адекватность моделей измерения и точность результатов измерения.

Известен метод [57], согласно которому полубесконечное в тепловом отношении тело приводят в контакт с пластиной, обладающей известными ТФС. Перед началом эксперимента систему исследуемое тело-пластина термостатируют при постоянной начальной температуре. Затем температуру свободной поверхности пластины скачкообразно меняют и потом поддерживают постоянной на новом температурном уровне. После начала теплового воздействия в заданный момент времени  $\tau_1$  измеряют значение теплового потока  $q(-R, \tau_2)$  на поверхности пластины.

Расчет искомых теплофизических свойств осуществляют согласно решению обратной задачи теплопроводности для системы: полуограниченное в тепловом отношении тело-пластина из эталонного материала [57].

Разработан также метод НК ТФС материалов с использованием плоского импульсного источника тепла [55], согласно которому полубесконечные в тепловом отношении эталонное и исследуемое тела приводят в тепловой контакт по ограничивающей поверхности и термостатируют при постоянной начальной температуре. Затем подают тепловой импульс от источника тепла, предварительно помещенного в эталонное тело на заданном расстоянии  $R$  от контактной плоскости тел, и в заранее заданные два момента времени ( $\tau_1$  и  $\tau_2$ ) фиксируют температуру в одном из сечений (с координатой  $x_1$ ). Искомое значение коэффициента температуропроводности рассчитывают по формуле

$$a = \frac{x_1^2}{(R\sqrt{a_3} + \sqrt{z})^2},$$

где

$$z = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2 \tau_1} \ln \left[ \frac{T_1(-x_1, \tau_1) \sqrt{\tau_1}}{T_2(-x_1, \tau_2) \sqrt{\tau_2}} \right].$$

Рассмотрим ряд способов НК ТФС, в которых тепловое воздействие на объект измерения осуществляется от источника в виде нагретой нити (линейного источника). При этом тепловая энергия от источника подается на исследуемый объект в виде импульсов различной частоты, скважности и амплитуды. В экспериментальной теплофизике такое воздействие часто называют частотно-импульсным или же импульсно-динамическим.

Отличительной особенностью импульсно-динамических методов измерения ТФС материалов является то, что измерительная информация в ходе теплофизического эксперимента регистрируется в дискретной форме (число или частота тепловых импульсов), что позволяет легко преобразовать измери-

тельную информацию в цифровую форму, облегчает реализацию методов измерения на базе процессорных устройств.

Известен метод НК ТФС материалов и готовых изделий [58] на теплоизолированную от внешней среды поверхность исследуемого тела помещают линейный источник тепла заданной мощности и осуществляют тепловое воздействие на тело импульсами с заданной скважностью. Затем фиксируют число импульсов, нанесенных на поверхность тела от начала теплового воздействия до момента установления неизменного значения температуры в точке контроля, расположенной на заданном ближнем расстоянии  $x_1$  от линии действия источника. После этого фиксируют число импульсов от начала теплового воздействия до момента, когда температура во второй точке, удаленной на большее расстояние  $x_2$  от источника теплового воздействия, достигнет установившегося значения. Установившееся значение температуры в точках контроля  $x_1$  и  $x_2$  наступает тогда, когда очередной тепловой импульс из серии импульсов теплового воздействия не изменяет температуры, соответственно, вначале в точке  $x_1$ , затем в точке  $x_2$ . Зная значения этих температур и число тепловых импульсов до насыщения, искомые ТФС определяют по формулам:

$$a = \frac{\left( \frac{x_2^2}{n_2} - \frac{x_1^2}{n_1} \right)}{4\Delta\tau \ln(n_1/n_2)};$$

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi T_{\text{уст1}}(x_1, \tau)} \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\tau_i} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4a\tau_i}\right),$$

где  $x_1, x_2$  – расстояние от линии действия источника тепла до точек контроля температуры, соответственно;  $n_1$  – число импульсов, нанесенных на поверхность исследуемого тела от источника тепла до момента времени, когда температура в точке  $x_1$  достигает установившегося значения, равного  $T_{\text{уст1}}(x_1)$ ;  $n_2$  – число импульсов, поданных на тело от источника тепла до момента времени, когда температура в точке  $x_2$  достигает установившегося значения;  $Q$  – мощность линейного импульсного источника тепла.

Таким образом, определив число импульсов теплового воздействия  $n_1$  и  $n_2$  и зная значение установившейся температуры в точке  $x_1$  и мощность одного теплового импульса, можно рассчитать значения коэффициентов тепло- и температуропроводности исследуемых тел.

С целью повышения оперативности вышеописанного метода и повышения точности за счет уменьшения неучтенных тепловых потерь разработан метод НК ТФС [59], согласно которому на поверхность исследуемого тела помещают линейный источник тепла заданной мощности и осуществляют тепловое воздействие на тело импульсами с заданной скважностью. Затем фиксируют число импульсов, нанесенных на поверхность тела от начала теплового воздействия до момента установления наперед заданного значения температуры  $T_1$  в точке контроля, расположенной на заданном ближнем расстоянии  $x_1$  от линии действия источника. Кроме того, фиксируют число импульсов, поданных источником тепла от начала эксперимента до момента времени, когда температура во второй точке контроля станет равной второму заданному значению  $T_2$ , а искомые ТФС определяют по формулам:

$$a = \frac{x_2^2/m - x_1^2/n}{4\Delta\tau \ln[(T_1 n x_2^2)/(T_2 m x_1^2)]};$$

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi T_1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i \Delta\tau} \exp\left[-\frac{x_1^2}{4ai\Delta\tau}\right],$$

где  $x_1, x_2$  – расстояния от линии действия источника тепла до точек контроля температуры;  $n$  – число импульсов, нанесенных на поверхность тела до момента времени, когда температура в точке  $x_1$  станет равной заданной величине  $T_1$ ;  $m$  – число импульсов, поданных источником тепла от начала эксперимента до момента времени, когда температура во второй точке  $x_2$  достигнет заданного значения  $T_2$ ;  $\Delta\tau$  – интервал времени между импульсами;  $\tau_i = i\Delta\tau$ ;  $i$  – натуральный ряд чисел.

Большой оперативностью и адекватностью математического описания физики тепловых процессов в исследуемом объекте характеризуется метод НК ТФС материалов [56].

На теплоизолированную от внешней среды поверхность исследуемого тела помещают линейный источник тепла. Тепловое воздействие на тело осуществляют импульсами с заданной постоянной частотой. Мощность импульсов, наносимых на тело источником тепла, изменяют от начала воздействия (от первого импульса) в соответствии с условием  $p_i = Q_0/i^\alpha$ , где  $Q_0$  – мощность первого теплового импульса;  $p_i$  – мощность  $i$ -го импульса из пачки импульсов, выдаваемых источником тепла, причем  $i = t/\Delta\tau$ ;  $t$  – время действия источника тепла;  $\Delta\tau$  – интервал времени между импульсами;  $i = 1, 2, 3, \dots$  (натуральный ряд чисел);  $\alpha$  – постоянный положительный коэффициент. Затем фиксируют число импульсов, нанесенных на поверхность тела, от начала теплового воздействия до момента установления неизменного значения температуры в точке контроля, расположенной на расстоянии  $x_1$  от линии действия источника тепла. После этого фиксируют число импульсов, поданных источником тепла от начала воздействия до момента, когда температура во второй точке, удаленной на расстоянии  $x_2$  от источника, достигнет установившегося значения. Установившееся значение температуры в заданных точках контроля  $x_1$  и  $x_2$  наступает тогда, когда очередной импульс из серии импульсов теплового воздействия не изменяет температуру в пределах наперед заданной минимальной величины  $\delta$  (порог чувствительности измерительной аппаратуры).

Определив значения установившейся температуры в контролируемых точках поверхности тела  $T_{\text{ycr1}}$  и  $T_{\text{ycr2}}$  и число импульсов теплового воздействия  $n$  и  $m$ , поданных источником от включения до момента насыщения (постоянство избыточной температуры в точках контроля), искомые ТФС определяют по формулам [56]:

$$a = \frac{1}{4\Delta\tau} \frac{x_2^2 T_{\text{ycr1}}(x_1, \tau) S_2(m) - x_1^2 T_{\text{ycr2}}(x_2, \tau) S_2(n)}{T_{\text{ycr1}}(x_1, \tau) S_1(m) - T_{\text{ycr2}}(x_2, \tau) S_1(n)},$$

$$\lambda = \frac{Q_0}{2\pi\Delta\tau T_{\text{ycr1}}(x_1, \tau)} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_1^2}{4a\Delta\tau(n-i)}} \frac{1}{i^\alpha(n-i)}.$$

Таким образом, определив число импульсов теплового воздействия  $n$  и  $m$  и значение установившейся температуры, соответственно, в точках  $x_1$  и  $x_2$ , а также, зная мощность первого теплового импульса  $Q_0$  и коэффициент  $\alpha$ , можно определить значения коэффициентов тепло- и температуропроводности исследуемых тел.

Основным преимуществом методов, представленных далее, является поиск в процессе измерения оптимальных значений режимных и энергетических параметров теплофизического эксперимента, что позволяет в условиях недостаточной априорной информации о ТФС объектов измерения исследовать все твердые материалы с полной гарантией сохранения их целостности и эксплуатационных характеристик. Получение измерительной информации в ходе теплофизического эксперимента в число- и частотно-импульсной форме позволяет легко преобразовывать измерительную информацию в цифровую форму, что облегчает реализацию адаптивных алгоритмов измерения на основе процессорных измерительно-вычислительных систем.

Согласно методу, изложенному в работе [63], на теплоизолированную от внешней среды поверхность исследуемого тела помещают линейный импульсный источник тепла. После подачи теплового импульса фиксируют интегральное значение температуры в точке поверхности исследуемого тела, расположенной на заданном расстоянии от линии действия источника тепла. При наступлении равенства интегральных значений температуры до и после максимума термограммы нагрева, который определяется дифференцированием температурной кривой, осуществляется тепловое воздействие на исследуемое тело от того же источника вторым тепловым импульсом, равным по мощности первому импульсу. Затем в момент времени, когда интегральное во времени значение температуры в контролируемой точке с момента подачи второго теплового импульса до момента наступления максимума термограммы станет равным интегральному значению после максимума, воздействуют на исследуемое тело третьим тепловым импульсом той же мощности и т.д. При этом измеряют частоту следования импульсов на исследуемое тело, а искомые ТФС определяют по соответствующим формулам, аналогичным формулам работы [54].

Таким образом, измерив частоту следования тепловых импульсов от источника тепла к исследуемому телу, интегральное во времени значение температуры  $S_1(x, \tau)$ , и зная мощность теплового воздействия, время наступления максимума термограммы нагрева, можно рассчитать значения коэффициентов тепло- и температуропроводности исследуемых тел [63].

В методе НК ТФС материалов, представленных в работе [64], на поверхность исследуемого тела помещают линейный импульсный источник тепла заданной мощности; осуществляют тепловое воздействие одним импульсом. Затем определяют интервал времени  $\tau_{\text{имп1}}$  и  $\tau_{\text{имп2}}$  от начала теплового воздействия до момента, когда температура в точках контроля  $x_1$  и  $x_2$  станет равной первоначальной температуре  $T_0$ , после чего определяют минимальную частоту следования импульсов

$$F_{\min} = \min\left(\frac{1}{\tau_{\text{имп1}}}; \frac{1}{\tau_{\text{имп2}}}\right),$$

при которой не происходит роста температуры в исследуемом теле.

Далее увеличивают частоту подачи тепловых импульсов по закону

$$\Delta F = F_{\min} T_{\text{изм}} \frac{\Delta T}{T_{\text{зад1}}^2},$$

где  $T_{\text{изм}}$  – значение избыточной температуры в первой точке контроля;  $T_{\text{зад1}}$  – наперед заданное значение температуры;  $\Delta T = T_{\text{зад1}} - T_{\text{изм}}$  – разность значений температуры.

Увеличение частоты следования тепловых импульсов осуществляют до тех пор, пока установившееся интегральное значение контролируемой температуры в точке контроля  $x_1$  не станет равным наперед заданному значению  $T_{\text{зад1}}$ , и определяют при этом частоту следования импульсов  $F_{x_1}$ . Затем продолжают увеличение частоты следования тепловых импульсов по указанной зависимости до тех пор, пока установившееся значение избыточной температуры во второй точке контроля  $x_2$  станет равным наперед заданному значению  $T_{\text{зад2}}$  и определяют соответствующую этому тепловому режиму частоту следования тепловых импульсов  $F_{x_2}$ . Установившееся значение температуры достигается в точках контроля тогда, когда очередной импульс не изменяет температуру в этих точках. По найденным значениям частот  $F_{x_1}$  и  $F_{x_2}$  и интервалам  $\tau_{\text{имп1}}$ ,  $\tau_{\text{имп2}}$  (времени релаксации термоприемника при действии одиночного импульса) рассчитывают искомые ТФС исследуемого материала по формулам:

$$a = \frac{(x_2 F_{x_2})^2 \sum_{i=1}^{n_2} \frac{1}{i^2} - (x_1 F_{x_1})^2 \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{i^2}}{4 \left( F_{x_2} \sum_{i=1}^{n_2} \frac{1}{i} - F_{x_1} \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{i} \right)};$$

$$\lambda = \frac{Q F_{x_1}}{2\pi T_{\text{зад1}}} \sum_{i=1}^{n_2} \frac{1}{i} \exp\left(-\frac{x_1^2 F_{x_1}}{4ai}\right).$$

Возможно и иное осуществление метода [51]. Применяется только один теплоприемник. После определения частоты тепловых импульсов  $F_{x_1}$ , соответствующей равенству текущего значения температуры  $T_{\text{изм}}$  наперед заданному значению в точке контроля, увеличивают частоту тепловых импульсов до тех пор, пока значение избыточной контролируемой температуры в этой же точке не достигнет второго наперед заданного значения  $T_{\text{зад2}}$ . Определяют частоту тепловых импульсов  $F_{x_2}$ . Искомые ТФС рассчитывают по соответствующим формулам.

Общими недостатками данной группы методов является то, что в них практически не рассматривается влияние конечности размеров нагревателя, его собственной теплоемкости, теплоемкости термоприемников, недостаточно полно используется измерительная информация, полученная в результате теплофизического эксперимента (предполагается использование только отдельных точек термограмм), довольно узкий диапазон контроля ТФС.

Помимо рассмотренных способов НК ТФС, использующих плоские и линейные импульсные источники тепла, нашли применение методы с использованием точечных импульсных источников. Особенности применения данных методов детально представлены в работах [21, 29, 38 – 44, 100].

Анализ импульсных методов показывает, что в их основу положены математические модели температурного поля, которые адекватны только идеальным физическим моделям. Поэтому, реализация их на практике приводит к существенной методической погрешности. В ряде случаев эта погрешность устраняется ценой сужения диапазона за счет проведения относительных измерений на исследуемом и эталонном материалах. Отмечена тенденция создания методов со сложными алгоритмами управления тепловым воздействием и измерениями для получения простых расчетных формул. Однако их использование вызывает трудности при реализации и снижает достоверность конечных результатов.

## 1.2. МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ТЕПЛОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ

Остановимся более подробно на методах, использующих источник тепла постоянной мощности [71 – 88]. Тепловое воздействие постоянной мощности может быть объемным и поверхностным. Объемный источник генерирует теплоту внутри образца, обеспечивая в адиабатических условиях линейное увеличение его энтальпии или внутренней энергии. Поверхностный источник воздействует на ту или иную поверхность образца, создавая через нее постоянный тепловой поток. В отдельных случаях поверхностный источник постоянной мощности может действовать в одном из внутренних слоев образца. В методе НК ТФС находят применение, главным образом, те схемы и задачи, в которых источник создает внутри образца одномерное температурное поле. Применительно к НК ТФС, наибольшее распространение получили методы, при которых поверхностный источник тепла постоянной мощности действует на ограниченном участке исследуемого образца. В большинстве случаев в качестве источника постоянной мощности используют электрический нагреватель. Иногда для этой цели пригодно высокотемпературное тепловое излучение.

В теплофизических измерениях с точки зрения простоты расчетных соотношений, эксплуатационных возможностей и общей информативности наибольший интерес представляет квазистационарная стадия теплового процесса. На этой стадии температурное поле образца перестает зависеть от начальных условий, а в большинстве случаев и от времени [19].

В неразрушающих методах контроля ТФС различные авторы достаточно активно используют измерительные устройства, базирующиеся на исследовании круглого участка поверхности [21, 47 – 51, 77 – 87].

В работе [77] рассматривается метод, основанный на решении задачи теплопроводности для полуограниченного тела, нагреваемого через участок его поверхности в виде круга радиусом  $R$  тепловым потоком  $q$ . В методе используются закономерности нестационарного теплообмена, что значительно уменьшает длительность эксперимента. Искомые ТФС определяются путем регистрации измеряемых значений температуры в центре круга в произвольные, но кратные моменты времени  $n\tau$  и  $2n\tau$ . Из-за сложности тепловой физической системы не удастся получить явные и простые аналитические выражения для расчета искомых ТФС. Поэтому сначала для различных значений  $n$  строится график (или составляется таблица) зависимости

$$\frac{T_2(2n\tau) - T_0(0)}{T_1(n\tau) - T_0(0)} = \frac{\sqrt{2} \left( 1,1284 - 2 \operatorname{ierfc} \left( \frac{1}{2\sqrt{2nFo}} \right) \right)}{\left( 1,1284 - 2 \operatorname{ierfc} \left( \frac{1}{2\sqrt{nFo}} \right) \right)},$$

затем определяется критерий Фурье ( $Fo$ ), а ТФС определяются из соотношений:

$$\lambda = \frac{qR}{T(\tau) - T_0(0)} \sqrt{Fo} \left( 1,1284 - 2 \operatorname{ierfc} \left( \frac{1}{2\sqrt{Fo}} \right) \right); \quad a = \frac{R^2 Fo}{\tau},$$

где  $\operatorname{ierfc}(x) = (\sqrt{\pi})^{-1} \exp[-x^2] - x \left( 1 - (2\sqrt{x}) \int_0^x \exp[-s^2] ds \right)$ ;  $T_0(0)$  – начальная температура.

К недостаткам данного метода следует отнести то, что необходима графическая обработка результатов измерения для расчета искомых ТФС, усложняющая практическое его применение.

В работах [83 – 88] рассматриваются методы НК ТФС массивных образцов, с использованием аппарата интегральных характеристик. Рассмотрим данный подход на примере работы [84], в которой рассматривается метод, базирующийся на решении задачи теплопроводности для полуограниченного тела, нагреваемого через участок его поверхности в виде круга радиуса  $R$  тепловым потоком  $q$ . В методе предлагается измерение интегральной температуры нагреваемого круга  $S(\tau)$  (поверхностной интегральной характеристики) металлическим термометром сопротивления, уложенным по спирали, близкой к спирали Архимеда. Вводится понятие поверхностной временной интегральной характеристики нагреваемого круга

$$S^*(p) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} S(\tau) d\tau.$$

В методе непосредственно снимается экспериментальная зависимость  $S(\tau)$ . Затем по  $S(\tau)$ , на основании квадратурной формулы, численно определяют значение поверхностной временной интегральной характеристики –  $S^*(p)$ . Значения коэффициентов теплопроводности определяются на основании установившегося (стационарного) значения  $S_{ст} = S(\tau \rightarrow \infty)$ , а температуропроводности – на основании  $S^*(p)$ . Важным преимуществом данного метода является то, что ТФС предлагается определять на основании информации, полученной с определенной площади образца, что позволяет снизить ошибку измерения в случае исследования дисперсных материалов. Другим преимуществом является то, что для расчета ТФС используется практически вся экспериментально снятая термограмма. Среди недостатков такого подхода необходимо отметить то, что авторы учитывают только погрешность приближенного вычисления интегралов. Предполагается, что подынтегральная функция задается точно, т.е. погрешность измерения  $S(\tau)$  не учитывается. Другой недостаток заключается в том, что для определения ТФС необходимо проводить эксперимент вплоть до установившегося значения  $S_{ст}^*$ , что увеличивает длительность эксперимента. Так же не учитывается тот факт, что образец можно рассматривать как неограниченный только определенный промежуток времени.

Интегральным представлениям постоянных коэффициентов теплопереноса посвящены работы Ю.С. Шаталова [101, 102].

К активно развивающимся и перспективным в плане повышения производительности и достоверности методам НК ТФС в настоящее время следует отнести методы, позволяющие проводить исследования на рабочих участках термограмм, где тепловой процесс выходит на стадию регуляризации [50]. Длительность и время появления таких участков связаны аналитическими зависимостями с ТФС нагреваемых образцов.

В работе [88] показана необходимость проведения серий идентичных измерений с целью повышения достоверности получаемых результатов, предложен многостадийный метод.

Все приведенные в работе [100] нестационарные температурные поля, возникающие вследствие нагрева полуограниченного тела локальными источниками тепла, также могут служить аналитическим материалом ("фундаментом") для разработки абсолютных методов комплексного определения ТФС материалов без нарушения их целостности при практической реализации в теплофизическом эксперименте требуемых теоретически-постулированных краевых условий.

При наличии внутри тела объемных тепловыделений необходимо рассматривать неоднородное дифференциальное уравнение теплопроводности с внутренними источниками тепла [7, 10, 15, 103, 249]. При высокоинтенсивных нестационарных процессах теплообмена в сильно разреженных средах следует рассматривать гиперболическое дифференциальное уравнение теплопроводности, учитывающее конечную скорость распространения тепла [10, 15, 103]. Асимптотическим методам решения дифференциального уравнения теплопроводности посвящены работы [103, 249, 250] и др. При нагревании полимеров и различных материалов на их основе часто наблюдаются регистрируемые методами дифференциальной сканирующей калориметрии тепловые эффекты. При НК ТФС эти эффекты могут возникать вследствие структурных превращений (как фазовых, так и релаксационных) и существенно влиять на результат измерения.

Рассмотрим более подробно вопросы, посвященные аналитическим методам решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами.

### 1.3. СОВРЕМЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОБЛАСТЯХ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

Современные производственные процессы промышленной теплофизики, связанные с высокими технологиями, такими как разработка тепловой защиты летательных аппаратов, упрочнение материалов методами химико-термической обработки, различные виды плавки и кристаллизации, и многими другими, потребовали достаточно точного математического моделирования и развития аналитической теории нестационарного переноса [103, 105, 107 – 109].

Введение дополнительных факторов в постановку краевой задачи даже линейного типа (движение границы области; временная или пространственная зависимость теплофизических характеристик среды и т.д.) приводит к необходимости разработки специального математического аппарата, который, как правило, дает приближенное решение задачи и оказывается эффективным для получения точного решения задачи только в определенной ситуации [233 – 237].

Процессы нестационарного переноса [103], описываются уравнением вида



$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\Delta T(M, \tau) - b^2 T(M, \tau) + \vec{\psi} \cdot \text{grad} T(M, \tau) + \frac{1}{c\rho} F(M, \tau), \quad (1.2)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа по координатам точки  $M$ ;  $b^2 = \text{const}$ ;  $\vec{\psi}$  – вектор скорости движущейся границы,  $\vec{\psi} = \psi_1 \vec{i} + \psi_2 \vec{j} + \psi_3 \vec{k}$ ,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы, ( $\psi_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ).

При использовании метода произведения решений для многомерной области, можно ограничиться одномерным случаем:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{1}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^n \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{c\rho} F(x, \tau), \quad n = 0, 1, 2, \quad (1.3)$$

в нецилиндрической области  $\Omega_\tau = \{(x, \tau): x \in [0, \xi(\tau)]; x \in [\xi(\tau), \infty]; x \in [\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)], \tau \geq 0\}$ , где все  $\xi(\tau)$  – непрерывно дифференцируемые функции, заданные в классических задачах переноса для уравнений параболического типа или подлежащие нахождению в задачах Стефана и более сложных типа Стефана для уравнения теплопроводности со свободной границей.

Качественной теории краевых задач для линейных уравнений (1.3) и квазилинейных типа (1.3) в  $\Omega_\tau$ , касающейся теорем существования и единственности решений, принципа максимума, априорных оценок, асимптотического поведения решений, посвящены многочисленные публикации, список которых приведен в работах [103, 107 – 109]. В [109, 233 – 235] приведена обширная библиография публикаций (отечественных и зарубежных), посвященных нахождению аналитических решений соответствующих краевых задач для уравнения в нецилиндрических областях, включая многослойные области с подвижными границами, а также сингулярно возмущенные краевые задачи нестационарного переноса в областях сложной формы. Фактически речь идет об обобщении "метода отражений" ("изображений"), допускающего перенос на более сложные случаи: системы параболического и гиперболического уравнений; задачи Стефана и типа Стефана; задачи с несколькими малыми параметрами и т.д. Заслуживают также внимания работы по геометро-оптическому асимптотическому методу решения линейных и нелинейных сингулярно возмущенных задач нестационарного переноса в многослойных средах с дефектами типа трещин (нецилиндрические области), включающие литературу по термомеханике в областях с движущимися границами [103, 107, 278].

Что касается нахождения точных аналитических решений краевых задач для уравнения (1.2) в  $\Omega_\tau$ , то ситуация здесь менее благополучная.

Фактически изучены области  $\xi(\tau) = l + \psi\tau$  ( $l, \psi = \text{const}$ ),  $\xi(\tau) = \beta\sqrt{\tau}$  ( $\beta = \text{const}$ ),  $\xi(\tau) = \alpha_1\tau^2 + \alpha_2\tau + \alpha_3$  ( $\alpha_i = \text{const}$ ), отдельные частные случаи для однородного уравнения (1.3) при постоянных значениях краевых функций или функций, допускающих автомодельные решения, приведены в [103], причем, в основном, это касается декартовой системы координат, цилиндрических и сферических координат в условиях симметрии (радиальный случай). Перечисленные ниже аналитические подходы дают возможность существенно уменьшить указанный пробел в аналитической теории нестационарного переноса [103, 233 – 237, 278].

1. Метод функций Грина развит в основном для  $\Omega_\tau$  с  $\xi(\tau) = l + \psi\tau$ . Всякий случай нахождения функции Грина весьма важен, так как позволяет записать интегральное представление решения задачи через неоднородности в исходной постановке.

2. Модифицированный метод тепловых потенциалов применяется при построении функции Грина в  $\Omega_\tau$  для  $\xi(\tau) = l + \psi\tau$ , но может быть использован и при решении исходной задачи. Операционная форма исходного потенциала устанавливает вид неизвестной плотности в пространстве изображений по Лапласу, что приводит, в конечном счете, к решениям в новой аналитической форме.

3. Метод контурного интегрирования обобщает классические интегральные преобразования на нецилиндрические области  $[0, \xi(\tau)]$ ,  $\tau \geq 0$  вырожденного и невырожденного видов для классических задач, задач Стефана и типа Стефана. Метод приводит к аналитическим решениям в новых функциональных формах.

4. Метод функциональных преобразований, основанный на введении подвижной системы координат, в которой исходная краевая задача допускает применение классических подходов для широкого класса законов движения границы, включая области, изменяющиеся с сохранением и без сохранения подобия в одно-, двух- и трехмерных случаях.

5. Метод дифференциальных рядов для области  $x \in [0, \xi(\tau)]$ ,  $\tau \geq 0$  особенно эффективен при рассмотрении обратных задач Стефана для области невырожденного типа. Метод основан на использовании функционального ряда, общий член которого содержит производные любого порядка от краевых функ-

ций задачи и закона движения границы. Следует отметить, что установление скорости сходимости такого рода рядов – открытая проблема указанного подхода [235].

Таким образом, задачи указанного класса являются одними из наиболее сложных не только в теории теплопроводности, но и в математической физике, так как решение задачи ищется в области, граница которой движется по закону, который неизвестен (задачи стефановского типа). Закон движения границы подлежит определению самосогласованным с искомым температурным полем способом из дополнительного физического условия, задаваемого на движущейся межфазной границе (МГ). Поэтому при решении задач стефановского типа, в общем случае, не применимы классические методы математической физики, так как при этом не удастся согласовать решение уравнения теплопроводности с изменением во времени области теплопереноса.

Указанное обстоятельство обусловило разработку различных специальных аналитических методов решения задач стефановского типа, позволяющих найти приближенные аналитические выражения для закона движения МГ и температурного поля. Наиболее существенные результаты, полученные в этой области теории теплопроводности, представлены в [103, 233 – 237, 253, 267, 268, 270, 278, 287 – 303].

Однако аналитические выражения даже для конкретных, известных законов движения МГ приближенные, имеют весьма сложный вид и поэтому их использование в методах неразрушающего контроля ТФС затруднительно.

#### 1.4. ТЕПЛОФИЗИЧЕСКАЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ АППАРАТУРА

Дифференциальные сканирующие калориметры, выпускаемые фирмой "Perkin-Elmer", получили наибольшее распространение в научных исследованиях. Прибор DSC-2 является наиболее удачной и распространенной моделью этой фирмы [141]. Ячейки этого калориметра изготовлены из платины и имеют относительно малую массу, что позволяет получить интервал скоростей 0,3...320 К/мин и предельную рабочую температуру до 700 °С. Поток инертного газа, подаваемого в прибор, за счет конвекции обеспечивает интенсивный теплообмен между образцом и оболочкой калориметра, температуру которой можно поддерживать постоянной до –170 °С (при использовании жидкого азота) [316]. Относительная погрешность измерения удельной теплоемкости и энтальпии составляет менее 7 %.

Другая модель прибора, выпускаемого фирмой "Perkin-Elmer", DSC-4, по конструкции аналогична модели DSC-2. Калориметр DSC-4 снабжен микропроцессором, благодаря чему упрощаются проведение эксперимента и обработка данных. Интервал скоростей нагревания составляет 0,1...200 К/мин; уровень шума – 4 мкВт [315, 316]. DSC-7 – более совершенная модель калориметров этой фирмы. В нем используется автоматическая настройка базовой линии и компьютерная обработка экспериментальных данных.

Промышленным изготовлением дифференциальных сканирующих калориметров занимаются также фирмы "Ригаку" (Япония), "СЕА Гренобль" (Франция). В приборах фирмы "Ригаку" оболочка, в которую помещен образец, может линейно нагреваться со скоростью от 0,6 до 160 К/мин до температуры 800 °С. В приборе фирмы "СЕА Гренобль" теплообмен калориметрического вещества с оболочкой практически полностью исключен, так как эксперимент проводят при вакуумировании калориметрической системы. Нагревание элементов калориметрической системы происходит с одинаковой скоростью 0,5...6 К/мин. Интервал рабочих температур прибора от –198 до 320 °С [315, 316].

Из отечественных приборов, выпускаемых серийно, наиболее распространены ДСМ-2М и ДАСМ, разработанные СКБ "Биоприбор". Интервал рабочих температур 0...100 °С; скорость нагревания 0,1...2 К/мин.

Приборы, работающие по методу дифференциального термического анализа (ДТА), выпускаются фирмами Du Pont, Stone, Fisher, Mettler, Setaram и др. Приборы, работающие по методу ДТА, способны работать при более высоких температурах, чем приборы ДСК. К примеру, нагреватели, применяемые в термоанализаторах фирмы Mettler, работают в интервале температур от –150 до 2400 °С. Выбор нагревательного элемента и типа печи зависит от исследуемого интервала температур [315].

Характеристики отечественных приборов, предназначенных для определения ТФС твердых и сыпучих материалов, даны в работах [19 – 21, 25 – 29].

Изготовление отечественных промышленных теплофизических приборов, предназначенных для проведения массовых теплофизических измерений, началось с прибора, разработанного в Ленинградском технологическом институте холодильной промышленности (ЛТИХП), ИТ-λ-400, предназначенного для измерения теплопроводности в широком интервале температур. Институтом также создан ряд приборов, позволяющих проводить измерения ТФС твердых материалов на основе базовой модели ИТ-400: ИТ-λ-400; ИТ-а-400; ИТС-400; ИТС-2; ИТЭМ-1. Данные приборы позволяют проводить измерения

ТФС в области температур  $0 \dots 400$  °С в режиме непрерывного разогрева с погрешностями до 10 % [21]. Характерной особенностью этого оборудования является то, что оно рассчитано на обслуживание оператором с последующей обработкой информации [21]. Из зарубежных аналогов следует отметить приборы, выпускаемые фирмой Showa Denko К.К (Япония), которые воплотили в себе новейшие достижения современной электроники, имеют высокую точность, сравнительно малый вес, надежны в эксплуатации [27]. Приборы Shotherm QTM-D2 (Япония), Shotherm QTM-F1 (Япония), приборы модели ТС-3000 японской фирмы Ulvac Corp., приборы фирмы Netzsch-Geratebau GmbH (ФРГ) предназначены для контроля только теплопроводности твердых материалов. Диапазон измерения теплопроводности до 25 Вт/(м·К), температурный диапазон  $20 \dots 150$  °С. Погрешность измерения составляет около 6 %.

Теплофизическая измерительная аппаратура, представленная в этом разделе, реализует методы определения ТФС на специально подготовленных образцах и не может быть применена для НК ТФС.

### 1.5. РЕШЕНИЕ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ ПРИ НЕРАЗРУШАЮЩЕМ КОНТРОЛЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

Известно, что задачи по определению ТФС и других свойств материалов относятся к классу обратных задач моделирования [95 – 99]. Например, ТФС определяются на основе косвенных измерений – по температурному отклику образца на внешнее тепловое воздействие. Такие задачи, в общем случае, являются некорректно поставленными по Адамару [97, 98] и требуют, чтобы исследователи учитывали этот факт при построении математической модели процесса измерения ТФС. В литературе [97] в течение длительного времени была широко распространена точка зрения, что только корректно поставленные математические задачи могут описывать физические явления. Позже, помимо требований корректности по Адамару, было сформулировано понятие корректности по Тихонову [98]. Подход А.Н. Тихонова позволил теоретически обоснованно решать обратные задачи, в том числе – обратные задачи теплопроводности.

Требования корректности к задаче удовлетворяются, если задача формулируется следующим образом [97].

Необходимо найти решение  $a$  по входным (экспериментальным) данным  $t$  с использованием зависимости  $a = R(t)$ , где  $R$  – некоторый оператор. Например,  $a$  и  $t$  принадлежат многообразиям  $A$  и  $T$ , для элементов которых определено расстояние (метрика)  $\rho_A(a_1, a_2)$  и  $\rho_T(t_1, t_2)$ . Здесь  $a_1, a_2 \in A$ ;  $t_1, t_2 \in T$ .  $A$  и  $T$  – метрические пространства. Для корректной формулировки задачи должны выполняться три требования:

1) для всякого  $t \in T$  существует решение  $a$  из  $A$  (существование решения); 2) решение определяется однозначно (однозначность решения); 3) решение должно непрерывно зависеть от входных данных (устойчивость решения).

Обратные задачи теплопереноса являются частным случаем широкого класса некорректно поставленных задач. Приведем формулировку обратной задачи теплопроводности так, как это сделано для всего класса обратных задач В.Я. Арсениным и А.Н. Тихоновым [96 – 98].

Пусть изучаемое тепловое явление характеризуется элементом  $a_T$ , принадлежащим многообразию  $A$  ( $a_T \in A$ ). Часто элемент  $a_T$  недоступен для прямого изучения и поэтому изучается некоторое его проявление  $f(a_T) = t$ ,  $t \in f(A)$ . Здесь  $f(A)$  – образ множества  $A$  при отображении  $f$ . Уравнение  $f(a) = t$  имеет решение только для таких элементов  $t$ , которые принадлежат множеству  $f(A)$ . Элемент – температура  $t_T$  – обычно получается путем измерений и поэтому известен приближенно. Пусть  $t$  – приближенное значение, тогда речь идет о нахождении приближенного к  $a_T$  решения уравнения

$$f(a) = t. \quad (1.4)$$

При этом  $t$  не принадлежит множеству  $f(A)$  – всему температурному полю данного объекта. Оператор  $f$  во многих случаях является таким, что обратный ему оператор  $f^{-1}$  не является непрерывным. В этих случаях нельзя в качестве приближенного решения брать точное решение уравнения (1.4) с приближенным  $t$ , т.е. нельзя в качестве приближенного решения брать элемент  $a = f^{-1}(t)$ , так как такого решения может и не быть, поскольку  $a$  может не принадлежать множеству  $A$ . Значит, не выполняется первое требование корректности по Адамару. Такое решение, если даже оно существует, не будет обладать свойством устойчивости, так как оператор  $f^{-1}$  не является непрерывным. Условие устойчивости задачи (1.4) обычно является следствием ее физической детерминированности, поэтому приближенное решение должно обладать этим свойством. Для обратного оператора  $f^{-1}$  не выполняется третье условие коррект-

ности по Адамару. Следовательно, задача (1.4) является некорректно поставленной. Физическая интерпретация результатов измерений из-за неустойчивости может оказаться невозможной.

Возникает вопрос, что считать приближенным решением уравнения (1.4)? Если ответить на этот вопрос, то задача будет состоять в нахождении алгоритмов построения приближенных решений уравнения (1.4), обладающих свойством устойчивости к малым изменениям входных данных. Эти алгоритмы и называют решением обратной задачи [97].

Обобщим вышесказанное на случай определения ТФС материалов. Некорректность задачи по определению ТФС материалов будет определяться двумя основными факторами:

- непосредственно снимаемые экспериментальные данные (чаще всего температура) измеряются с определенной погрешностью (случайной);
- математическая модель, описывающая процессы, происходящие при измерении, является приближенной, вследствие чего при обработке экспериментально снятой информации возникают систематические погрешности.

Рассмотрим, как эти два фактора проявляют себя при обработке экспериментальных данных. Будем считать, что в процессе эксперимента измеряется температура в фиксированные моменты времени и в заданной точке исследуемого образца. Тогда можем записать

$$T_{\text{экс}}(\tau_i) = T_{\text{м}}(\tau_i) + \Delta T_{\text{сл}}(\tau_i) + \Delta T_{\text{сист}}(\tau_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

где  $T_{\text{экс}}$  – экспериментально снимаемая температура;  $T_{\text{м}}$  – температура, полученная решением математической модели, положенной в основу метода измерения;  $\Delta T_{\text{сл}}$  – случайная составляющая погрешности измерения температуры;  $\Delta T_{\text{сист}}$  – систематическая составляющая погрешности, вызванная тем, что математическая модель приближенно описывает процессы, происходящие при измерении;  $\tau_i$  – моменты времени измерения температуры.

Погрешность  $\Delta T_{\text{сл}}$  рассматривается как случайная величина с нормальным или другим законом распределения. Ее конкретная величина будет определяться прежде всего используемыми техническими средствами. Кроме того, при исследовании композиционных материалов, представляющих собой сложные гетерогенные системы, к погрешности  $\Delta T_{\text{сл}}$  будет добавляться погрешность, связанная с различием локальных значений ТФС от их средних значений для данного материала.

Погрешность  $\Delta T_{\text{сист}}$  будет в общем случае величиной, зависящей от времени и свойств материала.

Температура  $T_{\text{м}}$  представляет собой функцию времени, связывающую измеряемую температуру с геометрическими размерами, начальными и граничными (видом теплового воздействия) условиями, а также ТФС исследуемого материала. Вид функции  $T_{\text{м}}$  считается неизвестным, т.е. можно записать

$$T_{\text{м}} = T_{\text{м}}(\{a_j\}, \tau_i), \quad (1.6)$$

где  $\{a_j\}$  – коэффициенты (параметры) модели, по которым определяются искомые ТФС (параметры  $a_j$  являются функцией ТФС материала).

В свою очередь, для  $\Delta T_{\text{сист}}$  также можно записать

$$\Delta T_{\text{сист}} = \Delta T_{\text{сист}}(\{b_j\}, \tau_i), \quad (1.7)$$

где  $\{b_j\}$  – коэффициенты, зависящие от ТФС исследуемого материала и неучтенных факторов. В качестве этих факторов обычно выступают термические сопротивления, теплоемкости нагревателей и термоприемников и др. Причем конкретный вид уравнения (1.7) обычно неизвестен.

Для обработки экспериментальных данных, с целью расчета ТФС, обычно используют два варианта.

По первому варианту, который, применительно к неразрушающим контактным методам, используется чаще всего, ТФС определяются на основе отдельных измерений температуры в заданные моменты времени. Например, если определяются два теплофизических свойства, то записывают два уравнения, соответствующих моментам времени  $\tau_{k1}$  и  $\tau_{k2}$ :

$$T_{\text{экс}}(\tau_{k1}) = T_{\text{м}}(\{a_1, a_2\}, \tau_{k1}); \quad (1.8)$$

$$T_{\text{экс}}(\tau_{k2}) = T_{\text{м}}(\{a_1, a_2\}, \tau_{k2}). \quad (1.9)$$

Так как  $T_{\text{экс}}(\tau_{k1})$ ,  $T_{\text{экс}}(\tau_{k2})$ ,  $\tau_{k1}$ ,  $\tau_{k2}$  известны, то, решив систему (1.8) – (1.9), находят коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$ , а по ним – искомые ТФС. Такой вариант решения обратной задачи имеет следующие недостатки. Во-первых, используется только малая часть полученной измерительной информации. Во-вторых, погреш-

ность определения ТФС зависит от выбора  $\tau_{k1}$ ,  $\tau_{k2}$  и определяемых ТФС (см. (1.5), (1.7)). Причем, ошибочный выбор  $\tau_{k1}$ ,  $\tau_{k2}$  может привести к тому, что  $T_m(\tau_k)$  будет по величине сравнима с  $\Delta T_{\text{сист}}(\tau_k)$  и погрешность определения ТФС будет неоправданно высокой. В-третьих, вследствие того, что ТФС определяются на основе отдельных измерений, значительное влияние на точность определения ТФС будет оказывать погрешность, связанная с неоднородностью исследуемого материала, что особенно важно для композиционных материалов.

По второму варианту ТФС определяются на основе всей снятой термограммы. В этом случае чаще всего используют следующий подход. Считают, что экспериментальные данные описываются уравнением (1.6) на всем временном интервале измерений. Затем, по методу наименьших квадратов проводится оценка параметров модели  $\{a_j\}$ . Здесь предполагается, что

$$T_{\text{экс}} = T_m(\{a_j\}, \tau_i) + \Delta_i, \quad (1.10)$$

где  $\Delta_i$  – ошибка [111], имеющая известное распределение (обычно нормальное) с математическим ожиданием, равным нулю.

Кроме того, предполагается, что  $\Delta_i$  не зависит от  $\tau$ . Однако, если сравнить (1.3) и (1.8), то можем видеть, что

$$\Delta_i = \Delta T_{\text{сл}}(\tau_i) + \Delta T_{\text{сист}}(\tau_i). \quad (1.11)$$

На самом деле  $\Delta_i$  не является случайной величиной с математическим ожиданием, равным нулю, и, кроме того,  $\Delta_i$  зависит от  $\tau$ . Из теории математической статистики известно, что в этом случае оценки параметров модели  $\{a_j\}$  будут смещенными и неэффективными [111]. Практически, это означает, что при подобном подходе погрешность определения коэффициентов  $\{a_j\}$  может быть выше, чем при первом варианте обработки экспериментальных данных (определенные при таком подходе значения  $\{a_j\}$  могут не соответствовать их физическому смыслу, например, оказаться отрицательными, когда по своему физическому смыслу должны быть положительными). Кроме того, так как модель  $T_m = T_m(\{a_j\}, \tau_i)$  в общем случае является нелинейной как по параметрам  $\{a_j\}$ , так и по независимой переменной ( $\tau$ ), то значения  $\{a_j\}$  будут также зависеть от начально заданного приближения (неустойчивость модели).

Вышесказанное особенно важно для контактных методов НК ТФС, так как здесь на ход эксперимента оказывают влияние гораздо больше факторов, чем в случае, если ТФС определяются при помощи стационарной установки на специально подготовленных образцах. И даже если удастся получить вид зависимости  $\Delta T_{\text{сист}} = \Delta T_{\text{сист}}(\{b_j\}, \tau)$ , то для ее вычисления требуется информация, которая априорно неизвестна (например, термические сопротивления) или трудноопределима (например, теплоемкость нагревателя).

Часто, для уменьшения влияния  $\Delta T_{\text{сист}}$ , используют так называемую модель введения поправок [152 – 154]. Суть ее заключается в следующем. На основании уравнений типа (1.8), (1.9) определяют расчетные значения контролируемых параметров. А затем по модели введения поправок, связывающей расчетные параметры с действительными значениями ТФС, определяют искомые ТФС. Собственно модель введения поправок строится на основе эмпирической формулы (чаще всего полинома), и для нахождения коэффициентов этой модели необходимо иметь ряд образцовых мер ТФС.

Такой подход имеет следующие недостатки. Во-первых, не решается вопрос о более полном использовании информации, полученной в результате эксперимента (так как используются отдельные точки термограммы). Во-вторых, остается нерешенным вопрос о выборе моментов времени, в которые необходимо проводить измерения. В-третьих, так как модель введения поправок базируется на эмпирической формуле, то для расчета ее параметров необходимо иметь достаточное количество образцов с известными ТФС. Причем диапазон достоверного определения ТФС по этой модели будет определяться имеющимися образцами с известными ТФС.

Анализ литературных данных показал, что наиболее точно учитываются как систематические, так и случайные погрешности в методах, основанных на регулярном тепловом режиме [8, 9]. А.В. Лыковым было показано [10], что регулярные тепловые режимы первого и второго рода имеют общее свойство, которое характеризуется независимостью от времени отношения теплового потока  $q$  в любой точке тела к потоку тепла на его поверхности  $q_{\text{п}}$ . В частном случае, когда на поверхности образца действует источник тепла постоянной мощности, в теле возникает стационарное поле тепловых потоков.

Характерной особенностью методов измерения ТФС, основанных на регулярном тепловом режиме, является простота расчетных формул. Математическая модель, описывающая термограмму, чаще всего является линейной по параметрам или легко линеаризуется. Систематические погрешности учитываются в виде независимых от времени и простых по форме поправок. Основная часть этих методов базируется на моделях для тел конечных размеров (пластина, цилиндр, шар). Большая же часть методов НК базируются на моделях полупространства (плоского, цилиндрического, сферического). Можно показать, что вышеприведенное высказывание А.В. Лыкова применимо и для методов, базирующихся на моделях подпространства. Однако в этом случае нужно говорить не о регулярном тепловом режиме для всего тела в целом (так как оно принимается неограниченным), а о регуляризации теплового процесса только для какой-то определенной области тела. Ход термограммы будет определяться, прежде всего, внутренними слоями исследуемого образца.

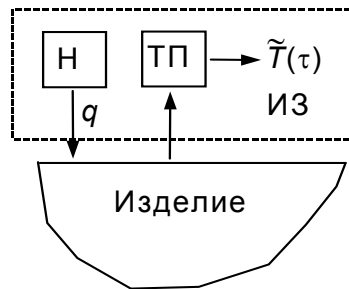
Отсюда можно сделать вывод, что, если проводить измерение ТФС основываясь только на участках термограммы, соответствующих регуляризации теплового режима в области нагревателей и термоприемников, то, во-первых, расчетные соотношения будут простыми и во многих случаях линейными по параметрам; во-вторых, систематические погрешности будут либо значительно меньшими, чем случайные, либо будут носить постоянный характер, т.е. не будут зависеть от времени ( $\Delta T_{\text{сист}} = \text{const}$ ).

Анализируя вышесказанное, можно сделать вывод, что методы неразрушающего контроля ТФС материалов отличаются сложностью, так как требуют измерения не только основных информативных параметров теплового процесса, таких как температура, тепловой поток, пространственно-временных характеристик, но и, во-первых, осуществлять активное воздействие на объект измерения в соответствии с заданным алгоритмом; во-вторых, с учетом изменения состояния и параметров объекта осуществлять адаптивный поиск в процессе измерения режимных и энергетических параметров теплофизического эксперимента с целью повышения метрологического качества результатов измерений; в-третьих, предусмотреть такой вид теплового воздействия, чтобы обеспечить адекватность математических моделей, описывающих физику тепловых процессов в исследуемых объектах; в-четвертых, создать такие условия и алгоритмы, чтобы измерительная информация о температурно-временных измерениях в контролируемых объектах регистрировалась в частотно-импульсной или число-импульсной форме, что в значительной степени повышает помехозащищенность, позволяет легко преобразовать измерительную информацию в цифровую форму, а это также способствует улучшению метрологических характеристик. Поэтому, методы НК ТФС материалов и изделий можно эффективно реализовать только на основе разработки и применения измерительно-вычислительных систем ИВС, которые позволяют ускорить и полностью автоматизировать проведение теплофизического эксперимента, адаптивно изменять режимные и энергетические параметры процесса измерения с целью обеспечения адекватности физической и математической моделей тепловых процессов. Применение ИВС позволяет осуществлять адаптивную алгоритмическую коррекцию на тепловые потери в окружающую среду, термическое сопротивление в зоне контакта измерительного зонда с объектом измерения, на изменение начальной температуры и влажности исследуемых материалов и на другие дестабилизирующие факторы.

## 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОГОМОДЕЛЬНЫХ ТЕПЛОВЫХ МЕТОДОВ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

---

В случае неразрушающего контроля материалов активными тепловыми методами (рис. 2.1) искомые ТФС проявляются через температурный отклик ( $\tilde{T}(\tau)$ ) исследуемого образца на тепловое воздействие ( $q$ ), которому подвергается образец (или изделие) в специально организованном эксперименте.



**Рис. 2.1. Схема измерительного процесса:**  
 Н – нагреватель, ТП – термоприемник, ИЗ – измерительный зонд

## 2.1. ИЗВЕСТНЫЕ ПОДХОДЫ К ОБРАБОТКЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПРИ НЕРАЗРУШАЮЩЕМ КОНТРОЛЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

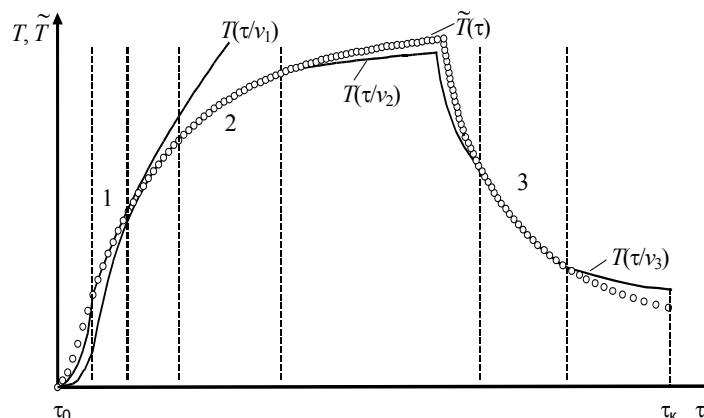
В настоящее время для обработки данных эксперимента при НК ТФС материалов тепловыми методами в основном применяется два подхода.

Первый предполагает получение и использование эмпирических зависимостей на основе проведения большого числа экспериментов во всем диапазоне контролируемых свойств и материалов. Достоинством данного подхода является простота математического обеспечения измерительных систем, а следовательно, возможность их реализации дешевыми техническими средствами. Существенный недостаток – достаточную точность можно обеспечить лишь для узкого класса материалов.

Второй подход предусматривает использование аналитических моделей, получаемых решением классических задач теплопроводности. Достоинством таких методов является достаточно высокая точность в широком диапазоне исследуемых свойств. Однако, несмотря на относительно точное и, вместе с тем, громоздкое математическое описание динамики тепловой системы, оно все равно не может учесть всех индивидуальных особенностей конкретных процессов измерения. Более того, сопоставление расчетных и экспериментальных термограмм показывает невозможность их точного совпадения на всем временном интервале. Эти обстоятельства не позволяют гарантировать для методов второго подхода отсутствие значительных погрешностей во всем диапазоне измерения. Поэтому целью настоящего исследования является разработка теплофизических многомодельных методов, позволяющих использовать достоинства и уменьшить недостатки обоих упомянутых подходов.

## 2.2. ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ МНОГОМОДЕЛЬНЫХ ТЕПЛОВЫХ МЕТОДОВ

Анализ процессов измерения, их моделей и источников погрешностей показывает, что в пределах временного интервала измерения в тепловой системе могут происходить существенные изменения, которые не позволяют описывать весь процесс измерения одной аналитической моделью с неизменными ограничениями и условиями (рис. 2.2). Неучет данного обстоятельства ведет к существенному увеличению погрешностей при определении ТФС неразрушающими методами.



**Рис. 2.2. Экспериментальная  $\tilde{T}(\tau)$  и расчетные**

**$T(\tau/v_1), T(\tau/v_2), T(\tau/v_3)$  термограммы:**

$v_1, v_2, v_3$  – обозначают, что расчетные уравнения имеют различный функциональный вид;  $\tau_0, \tau_k$  – время начала и конца измерения

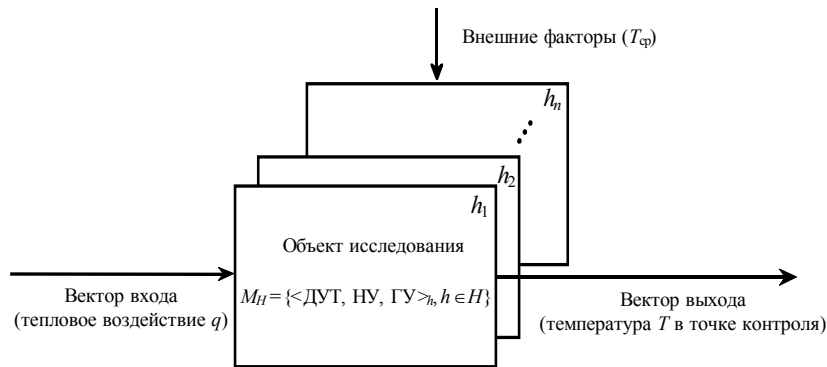
Основными источниками погрешностей для ИВС, использующих тепловые методы, являются следующие:

- 1) не соблюдается условие соответствия тепловой системы одной из классических моделей процесса теплопереноса, например, модели полупространства;
- 2) нарушается допущение относительно постоянства плотности теплового потока от нагревателя;
- 3) не выполняются условия о направлении теплового потока вследствие конечных размеров нагревателя;
- 4) не соблюдается предположение об адекватности аналитической модели процессу теплопереноса.

Если на временном интервале процесса измерения могут изменяться вид основного уравнения теплопроводности или граничные условия, то данную тепловую систему нельзя рассматривать как систему, которая весь период измерения находится в одном состоянии функционирования  $h$ , т.е. при неизменном основном уравнении (операторе) и граничных условиях.

Рассмотрим измерительный зонд и исследуемое тело с позиции динамической системы. Выделим следующие основные переменные системы (рис. 2.3): вектор входа  $q$ , характеризующий тепловое воздействие; вектор переменных состояния  $z$ , в качестве которого рассматриваются значения температур в характерных точках системы; вектор выхода  $y$  – значения температур в точках контроля  $T$ .

При смене условий (режимов), определяющих характер изменения переменных состояния  $z$ , будем говорить, что тепловая система переходит из одного состояния функционирования  $h_i$  в другое  $h_{i+1}$ . Тогда все возможные состояния  $h_i, i = 1, 2, \dots$  тепловой системы – множество состояний функционирования (МСФ)  $H$ .



**Рис. 2.3. Структурная схема модели процесса измерения на МСФ**

Основу математической модели для данного состояния функционирования  $h$  составляют:

- 1) дифференциальное уравнение теплопроводности (ДУТ), например,

$$\frac{\partial T(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} = a \nabla^2 T(\bar{x}, \tau);$$

- 2) начальные условия (НУ), например,  $T(\bar{x}, 0) = f(\bar{x})$ ;

- 3) граничные условия (ГУ), например,

$$\lambda \frac{\partial T(\bar{x}, \tau)}{\partial n} \Big|_{\Pi} + \alpha(\bar{x}_n, T_n, \tau) (T_n - T_{cp}(\bar{x}_n, \tau)) + q_n(\bar{x}_n, \tau) = 0.$$

Здесь  $T(\bar{x}, \tau)$  – температура тела при значении  $\bar{x}$  – вектора пространственных координат в момент времени  $\tau$ ;  $T_n$  – температура поверхности тела;  $T_{cp}$  – температура внешней среды;  $\bar{x}_n$  – координаты поверхности тела;  $a, \lambda, \alpha$  – коэффициенты температуропроводности, теплопроводности и теплоотдачи, соответственно;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа;  $q_n$  – удельная поверхностная мощность от действия внешнего источника тепла.

Множество таких моделей для всех  $h \in H$  образуют модель на МСФ  $M_H$ .

Мощность множества состояний функционирования  $H$  системы и характер изменения значений переменной  $z$  в основном будут определяться:

- размерностью пространственной координаты  $\bar{x}$ ;
- видом граничных условий (образец неограниченный, образец ограниченный);
- стадией процесса (начальная, регулярная, стационарная стадии).



На основании вышеизложенного можно сформулировать исходные предпосылки для использования многомодельного подхода к НК ТФС материалов.

Во-первых, состояния функционирования измерительной системы в ходе эксперимента претерпевают изменения, т.е. не остаются постоянными ДУТ, НУ, ГУ.

Во-вторых, применительно к полученным термограммам можно выделить (идентифицировать) участки, на которых наблюдается хорошее совпадение экспериментальных и расчетных значений температур, и участки, для которых построение точных аналитических моделей вызывает большие теоретические трудности.

В-третьих, в целях повышения достоверности (надежности) получаемой информации о ТФС материала появляется возможность за одну реализацию эксперимента определить ТФС с использованием различных математических моделей, адекватно отражающих процессы теплопереноса.

### 2.3. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МНОГОМОДЕЛЬНЫХ ТЕПЛОВЫХ МЕТОДОВ

В основе многомодельного теплового метода лежат следующие предположения:

1) на термограмме имеются участки, для которых обеспечивается высокая точность совпадения с результатами вычислений по аналитическим моделям. Причем этим участкам соответствуют тепловые режимы опыта, вышедшие на стадию регуляризации;

2) участки экспериментальных и рассчитанных по моделям термограмм имеют место для всего класса исследуемых материалов;

3) для участков существуют удобные вычислительные соотношения, позволяющие однозначно определить значения теплофизических свойств в зависимости от параметров аналитической функции, описывающей термограмму на данном временном интервале.

Так как метод определения ТФС не предполагает идентификацию всего температурного поля, а требуемые параметры определяются по значениям  $x(\cdot) = (x(\tau), \tau \in [\tau_0, \tau_k])$  и  $y(\cdot, \bar{x}) = (y(\tau, \bar{x}), \tau \in [\tau_0, \tau_k])$ , то аналитическая модель может быть представлена одним оператором, ставящим в соответствие значениям  $z(\tau_0)$  и  $x(\cdot)$  выход  $y(\tau, \bar{x}), \tau > \tau_0$

$$\varphi: T \times T \times \bar{X} \times Z \times X(\cdot) \rightarrow Y$$

или

$$y(\tau) = \varphi(x(\cdot), z(\tau_0)),$$

здесь  $T, \bar{X}, Z, X(\cdot), Y$  – множества, соответственно, значений  $\tau, (\tau_0), \bar{x}, z(\tau_0), x(\cdot), y$ .

Определение 1. Будем говорить, что ИВС на временном интервале  $[\tau', \tau'']$  находится в одном состоянии функционирования (или операторном состоянии)  $h$ , если на этом интервале времени процесс измерения адекватно описывается одним (известным) оператором и соблюдаются необходимые ограничения и условия. Модель процесса измерения в состоянии  $h$  обозначим  $M_h$ . Система выходит из состояния  $h$ , когда модель  $M_h$  перестает быть адекватной реальному процессу измерения. Такое состояние функционирования  $h$  будем называть четким или однородным. Все четкие состояния  $h$ , в которых может находиться ИВС на временных интервалах измерения, образуют подмножество однородных состояний  $H_0$ .

Наряду с  $H_0$  вводится подмножество нечетких состояний функционирования.

Определение 2. ИВС на временном интервале  $[\tau'', \tau''']$  находится в нечетком (или переходном) состоянии функционирования  $\tilde{h}$ , если описание процесса измерения на этом интервале одним известным оператором с соответствующими условиями и ограничениями можно признать лишь приближенно, с некоторой степенью уверенности. В состоянии  $\tilde{h}$  процесс может быть представлен суперпозицией (взвешенной суммой) различных операторов, при этом "веса" этих операторов не остаются постоянными.

Например, модель в нечетком состоянии  $\tilde{h}$  в момент времени  $\tau$  может быть записана в виде

$$M_{\tilde{h}} = k(\tau)M_{h_i} + (1 - k(\tau))M_{h_j}, \quad \tau \in [\tau'', \tau'''],$$

где  $M_{h_i}$ ,  $M_{h_j}$  – модели в четких состояниях  $h_i$  и  $h_j$ ;  $k(\tau)$  – весовой коэффициент, изменяющийся во времени.

Нечетким состояниям  $\tilde{h}$  соответствуют функции принадлежности, характеризующие степень уверенности в том, что вместо модели  $M_{\tilde{h}}$  можно использовать одну из моделей четкого состояния  $M_{h_i}$ . Все нечеткие состояния  $\tilde{h}$ , которые могут иметь место для ИВС на временных интервалах измерения, образуют множество переходных состояний  $\tilde{H}_n$ . Множество нечетких состояний  $\tilde{H}_n$  обусловлено наличием временного интервала выхода ИВС на рабочий режим, влиянием краевых эффектов и т.п.

Определение 3. Общее множество состояний функционирования  $H$  для ИВС представляет собой объединение множеств четких  $H_0$  и переходных  $\tilde{H}_n$  состояний, т.е.  $H = H_0 \cup \tilde{H}_n$ .

Определение 4. Модель процесса измерения на множестве  $H$  (обозначим как  $M_H$ ) образуется совокупностью моделей  $M_h$ ,  $h \in H_0$  и  $M_{\tilde{h}}$ ,  $\tilde{h} \in \tilde{H}_n$ , т.е.  $M_H = \{M_h, h \in H\}$ .

Из состояний  $h \in H_0$  и  $\tilde{h} \in \tilde{H}_n$  можно построить траекторию  $h(\cdot)$  изменения состояний функционирования тепловой системы на временном интервале измерения, например,

$$h(\cdot) = (\tilde{h}_1(\tau), \tau \in [\tau_0, \tau_1); h_2(\tau), \tau \in [\tau_1, \tau_2); \tilde{h}_3(\tau), \tau \in [\tau_2, \tau_3); \dots). \quad (2.1)$$

Определение 5. Траекторию  $h(\cdot)$ , в которой происходит чередование состояний  $\tilde{h} \in \tilde{H}_n$  и  $h \in H_0$ , будем называть типовой, а ее запись типовой формой.

В зависимости от степени определенности факторы, вызывающие изменения состояний функционирования, можно разбить на две группы. Факторы первой группы вызывают предсказуемые изменения  $h$  или  $\tilde{h}$ , связанные с особенностями протекания процесса измерения, например, отклонением размеров реального датчика от размеров теоретически идеального образца, используемого в аналитической модели. Вторая группа факторов носит случайный характер, например, нарушение работоспособности отдельных элементов конструкции ИВС. Такие изменения состояний функционирования случайны, достаточно редки и их предсказать нельзя.

Утверждение 1. Если на временном интервале измерения  $[\tau_0, \tau_k]$  отсутствуют непредсказуемые изменения состояний функционирования, то траектория  $h(\cdot)$  может быть представлена в типовой форме (2.1).

Это следует, во-первых, из того, что время перехода из одного четкого состояния в другое конечно и на этом промежутке времени можно ввести нечеткое состояние  $\tilde{h}$ . Во-вторых, несколько, следующих друг за другом, нечетких состояний можно объединить в одно.

Для четких состояний  $h \in H_0$  проверка адекватности моделей  $M_h$  производится аналогично тому, как это делается для традиционных моделей, не учитывающих изменение состояний функционирования. Однако исключительно важное значение здесь приобретают задачи идентификации состояний  $h$  и  $\tilde{h}$ .

Задача идентификации состояния функционирования заключается в определении по измеренным с временным шагом  $\Delta\tau$  значениям  $y(\tau_0 + i\Delta\tau)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  и известным входным воздействиям  $x(\tau_0 + i\Delta\tau)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  моментов смены состояний функционирования  $\tau_j$  и значения нового состояния функционирования  $h_{j+1}$ .

Согласно утверждению 1 в отсутствии непредсказуемых изменений состояний функционирования модель процесса измерения на множестве  $H$  представляет собой кортеж моделей вида

$$M_H = \{M_{\tilde{h}_1}, \tilde{h}_1 \in \tilde{H}_n; M_{h_2}, h_2 \in H_0; M_{\tilde{h}_3}, \tilde{h}_3 \in \tilde{H}_n; \dots\}. \quad (2.2)$$

Определение 6. Идентифицируемые состояния функционирования  $h \in H_0$ , в которых измеренные значения компонент вектора фазовых координат можно использовать для расчета исследуемых свойств материалов, будем называть рабочими; они образуют подмножество рабочих состояний функционирования  $H_p \subset H_0$ .

Модели  $M_h$ ,  $h \in H_p$  используются при разработке математического обеспечения ИВС.

Процедуру определения ТФС можем представить в виде следующих операторов:

$\Psi_1 : \{ \tilde{T}(\tau_i) \} \cap \{ T(\tau_i / v_k) \} \rightarrow \{ \tilde{T}_i \}_{p,k}$  – на основе сопоставления экспериментальных данных  $\{ \tilde{T}(\tau_i) \}$  и расчетных уравнений  $\{ T(\tau_i / v_k) \}$  осуществляется поиск участков термограмм  $\{ \tilde{T}_i \}_{p,k}$ , где эти уравнения адекватно описывают тепловой процесс. Такие участки будем называть "рабочими",  $k$  – номер рабочего участка.

$\Psi_2 : \{ \tilde{T}(\tau_i) \} \rightarrow \{ d_j \}_k$  – по рабочим участкам термограмм определяются параметры аналитических моделей  $\{ d_j \}_k$ .

$\Psi_3 : \{ d_j \}_k \rightarrow \{ \text{ТФС} \}_k$  – на основании параметров  $\{ d_j \}_k$  определяются искомые теплофизические свойства.

Расчетные уравнения, описывающие термограмму на рабочих участках, будем искать на основе анализа решений соответствующих краевых задач.

### 3. МЕТОД НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

#### 3.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ТЕПЛОПЕРЕНОСА ОТ ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

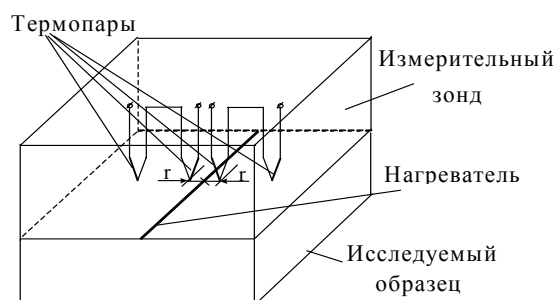
**ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ СХЕМА МЕТОДА С ЛИНЕЙНЫМ ИМПУЛЬСНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА ПРЕДСТАВЛЕНА НА РИС. 3.1. ТЕПЛОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ИССЛЕДУЕМОЕ ТЕЛО С РАВНОМЕРНЫМ НАЧАЛЬНЫМ ТЕМПЕРАТУРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ, ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО ИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА (НАГРЕВАТЕЛЯ). В ЭКСПЕРИМЕНТЕ ФИКСИРУЕТСЯ ТЕМПЕРАТУРА НА ЗАДАННОМ РАССТОЯНИИ ОТ НАГРЕВАТЕЛЯ.**

**ПРОВЕДЕМ АНАЛИЗ ДАННОЙ СИСТЕМЫ. РАССМОТРИМ МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ТЕПЛОПЕРЕНОСА ОТ ЛИНЕЙНОГО ИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА, ДЕЙСТВУЮЩЕГО НА ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ТЕЛА.**

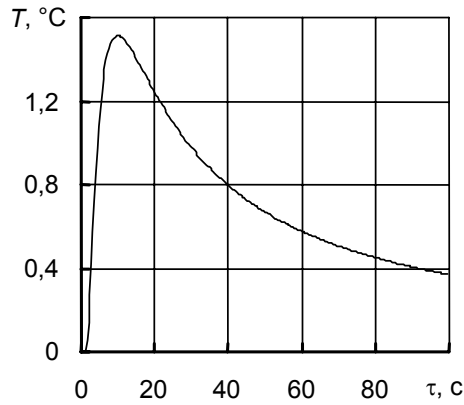
**ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ИССЛЕДУЕМОМ МАТЕРИАЛЕ ОТ ОДНОГО ИМПУЛЬСА (ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОСТИ ТЕЛА) БУДЕТ ОПИСЫВАТЬСЯ УРАВНЕНИЕМ [7, 10] (РИС. 3.2) ВИДА**

$$T(r, \tau) = \frac{Q}{2\pi\lambda\tau} \exp\left[-\frac{r^2}{4a\tau}\right], \quad (3.1)$$

где  $Q$  – количество тепла, выделившееся на единице длины нагревателя;  $r$  – расстояние от нагревателя;  $\tau$  – время;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $a$  – коэффициент температуропроводности.



**Рис. 3.1. Измерительная схема метода с линейным импульсным источником тепла**



**Рис. 3.2. Вид зависимости  $T(\tau)$  при единичном импульсном тепловом воздействии**

**ЕСЛИ ПОДАЕТСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ  $N + 1$  ТЕПЛОВЫХ ИМПУЛЬСОВ С ПЕРИОДОМ  $\Delta\tau$ , ТО ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ОБРАЗЦЕ БУДЕТ ОПРЕДЕЛЯТЬСЯ ВЫРАЖЕНИЕМ**

$$T_{\text{им}}(r, \tau) = \frac{Q}{2\pi\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{4a(\tau - (i-1)\Delta\tau)}\right]}{\tau - (i-1)\Delta\tau}, \quad (n-1)\Delta\tau \leq \tau \leq n\Delta\tau, \quad (3.2)$$

которое мало подходит для вычисления ТФС образца.

Если нагрев осуществляется с постоянной мощностью  $q$ , то температурное поле в полуограниченной среде будет определяться формулой [7]

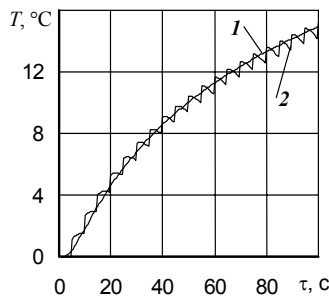
$$T_c(r, \tau) = \frac{q}{2\pi\lambda} \int_0^{\frac{r^2}{4a\tau}} \frac{\exp[-u]}{u} du = \frac{q}{2\pi\lambda} \int_0^{\frac{4a\tau}{r^2}} \frac{\exp[-\frac{1}{u}]}{u} du, \quad (3.3)$$

где  $q$  – мощность, выделяющаяся на единицу длины нагревателя.

**МОЖНО ПОКАЗАТЬ, ЧТО ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЯ**

$$q = \frac{Q}{\Delta\tau}, \quad (3.4)$$

многоимпульсный источник тепла можно рассматривать (при больших  $\tau$ ) как источник тепла постоянной мощности с  $q = \frac{Q}{\Delta\tau}$  (рис. 3.3).



**Рис. 3.3. Вид зависимостей  $T(\tau)$  при выполнении условия (3.4) в случае действия: источника тепла постоянной мощности (кривая 1) и импульсного источника тепла (КРИВАЯ 2)**

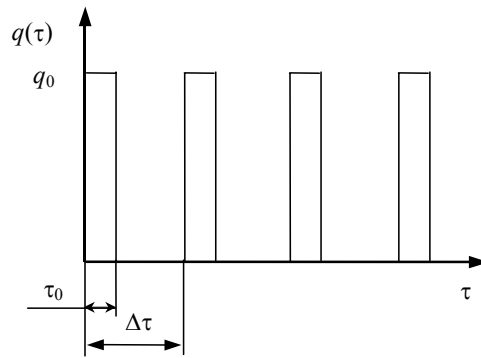


РИС. 3.4. МОЩНОСТЬ НА НАГРЕВАТЕЛЕ ПРИ МНОГОИМПУЛЬСНОМ ИСТОЧНИКЕ ТЕПЛА

**НУЖНО ОТМЕТИТЬ, ЧТО НА ПРАКТИКЕ ДЕЙСТВИЕ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА НЕ ЯВЛЯЕТСЯ МГНОВЕННЫМ, А ИМЕЕТ ОПРЕДЕЛЕННУЮ ДЛИТЕЛЬНОСТЬ  $\tau_0$  (С МОЩНОСТЬЮ НА ЕДИНИЦУ ДЛИНЫ НАГРЕВАТЕЛЯ –  $Q_0$ ). МОЩНОСТЬ НА НАГРЕВАТЕЛЕ ЯВЛЯЕТСЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ВРЕМЕНИ (РИС. 3.4), Т.Е.**

$$q(\tau) = \begin{cases} q_0, & 0 \leq \tau \leq \tau_0 \\ 0, & \tau_0 < \tau < \Delta\tau \end{cases}, \quad q(\tau + n\Delta\tau) = q(\tau). \quad (3.5)$$

**УСЛОВИЕ (3.4) В ЭТОМ СЛУЧАЕ ВЫГЛЯДИТ СЛЕДУЮЩИМ ОБРАЗОМ:**

$$q = \frac{q_0 \tau_0}{\Delta\tau}. \quad (3.6)$$

**ВОСПОЛЬЗОВАВШИСЬ МЕТОДОМ ИСТОЧНИКОВ [7, 10], ЗАПИШЕМ ФОРМУЛУ, ОПРЕДЕЛЯЮЩУЮ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ОТ ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКОНОМ ПОДАЧИ МОЩНОСТИ НА НАГРЕВАТЕЛЕ, В ВИДЕ**

$$T(r, \tau) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^\tau \frac{q(u) \exp\left[-\frac{r^2}{4a(\tau-u)}\right]}{(\tau-u)} du. \quad (3.7)$$

**ЗАВИСИМОСТЬ  $Q(\tau)$ , ОПРЕДЕЛЯЕМАЯ ИЗ (3.5), ЯВЛЯЕТСЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ С ПЕРИОДОМ  $\Delta\tau$  И ЕЕ МОЖНО РАЗЛОЖИТЬ В РЯД ФУРЬЕ, Т.Е.**

$$q(\tau) = \frac{q_0 \tau_0}{\Delta\tau} + \frac{q_0 \tau_0}{\Delta\tau \pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \sin\left[\frac{2k\pi\tau_0}{\Delta\tau}\right] \cos\left[\frac{2k\pi\tau}{\Delta\tau}\right] + \left(1 - \cos\left[\frac{2k\pi\tau_0}{\Delta\tau}\right]\right) \sin\left[\frac{2k\pi\tau}{\Delta\tau}\right] \right\}. \quad (3.8)$$

**ПОДСТАВИВ ВЫРАЖЕНИЕ (3.8) В ФОРМУЛУ (3.7), ПОЛУЧИМ ВЫРАЖЕНИЕ**

$$T_{\text{им}}(r, \tau) = \frac{q_0 \tau_0}{2\pi\lambda\Delta\tau} \int_0^\tau \frac{\exp\left[-\frac{1}{u}\right]}{u} du + \frac{q_0}{2\pi^2\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \int_0^\tau \frac{\left( \sin\left[\frac{2k\pi}{\Delta\tau}(\tau_0 - u)\right] + \sin\left[\frac{2k\pi u}{\Delta\tau}\right] \right) \exp\left[-\frac{r^2}{4a(\tau-u)}\right]}{(\tau-u)} du \right\}. \quad (3.9)$$

**ЗАМЕТИМ, ЧТО ИЗ ФОРМУЛЫ (3.9) ТАКЖЕ МОЖНО ПОЛУЧИТЬ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ОТ МГНОВЕННОГО МНОГОИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА, ТОЖДЕСТВЕННОЕ ВЫРАЖЕНИЮ (3.2).**

**ЕСЛИ УМЕНЬШАТЬ ПРОМЕЖУТОК ПОДАЧИ ИМПУЛЬСА  $\tau_0$  И ОДНОВРЕМЕННО УВЕЛИЧИВАТЬ МОЩНОСТЬ  $Q_0$  ТАК, ЧТОБЫ  $Q_0\tau_0 = Q$ , ТО, ПЕРЕЙДЯ К ПРЕДЕЛУ И УЧИТЫВАЯ, ЧТО**

$$\lim_{\tau_0 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin \left[ \frac{2k\pi\tau_0}{\Delta\tau} \right]}{\tau_0} \right\} \rightarrow \frac{2k\pi}{\Delta\tau}, \quad \lim_{\tau_0 \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - \cos \left[ \frac{2k\pi\tau_0}{\Delta\tau} \right]}{\tau_0} \right\} \rightarrow 0,$$

МОЖЕМ ЗАПИСАТЬ

$$T_{\text{им}}(r, \tau) = \frac{Q}{2\pi\lambda\Delta\tau} \int_0^{\frac{4a\tau}{r^2}} \frac{\exp\left[-\frac{1}{u}\right]}{u} du + \frac{Q}{\pi\lambda\Delta\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \frac{\cos\left[\frac{2k\pi u}{\Delta\tau}\right] \exp\left[-\frac{r^2}{4a(\tau-u)}\right]}{(\tau-u)} du. \quad (3.10)$$

**СУММЫ, СТОЯЩИЕ В ПРАВОЙ ЧАСТИ ВЫРАЖЕНИЙ (3.9) И (3.10), ПРЕДСТАВЛЯЮТ СОБОЙ ОГРАНИЧЕННЫЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ  $\tau$  [106]. ПРИ БОЛЬШИХ  $\tau$**

$\left( \int_0^{\frac{4a\tau}{r^2}} \frac{\exp\left[-\frac{1}{u}\right]}{u} du \right)$  – ЕСТЬ МОНОТОННО ВОЗРАСТАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ, А ПРИ  $\tau \rightarrow \infty$ ,

$\left( \int_0^{\frac{4a\tau}{r^2}} \frac{\exp\left[-\frac{1}{u}\right]}{u} du \rightarrow \infty \right)$  ЭТИМИ СУММАМИ МОЖНО ПРЕНЕБРЕЧЬ, Т.Е. ПРИ БОЛЬШИХ  $\tau$  С УЧЕ-

ТОМ УСЛОВИЙ  $q = \frac{q_0\tau_0}{\Delta\tau}$  И  $q = \frac{Q}{\Delta\tau}$  МОЖНО СЧИТАТЬ, ЧТО

$$T_{\text{им}}(r, \tau) \approx T_c(r, \tau) = \frac{q}{2\pi\lambda} \int_{\frac{r^2}{4a\tau}}^{\infty} \frac{\exp[-u]}{u} du.$$

**ТЕПЕРЬ ОБРАТИМСЯ К АНАЛИЗУ УРАВНЕНИЯ (3.3). ИЗВЕСТНО [7, 112], ЧТО**

$$-\int_x^{\infty} \frac{\exp[-u]}{u} du = \ln[x] + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k k!},$$

где  $\gamma \approx 0,5772$  – число Эйлера.

**С УЧЕТОМ ЭТОГО ВЫРАЖЕНИЯ МОЖЕМ ЗАПИСАТЬ**

$$T_c(r, \tau) = \frac{q}{2\pi\lambda} \left( \ln\left[\frac{4a\tau}{r^2}\right] - \gamma - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{r^2}{4a\tau}\right)^k}{k k!} \right) \quad (3.11)$$

и при больших  $\tau$  (рис. 3.5)

$$T_c(r, \tau) \approx \frac{q}{2\pi\lambda} \left( \ln\left[\frac{4a\tau}{r^2}\right] - \gamma \right) = \frac{q}{2\pi\lambda} \left( \ln[\tau] + \ln[a] - \ln\left[\frac{r^2}{4}\right] - \gamma \right). \quad (3.12)$$

**НА ОСНОВАНИИ ВЫШЕИЗЛОЖЕННОГО МОЖНО СДЕЛАТЬ ВЫВОД О ХАРАКТЕРЕ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА, ПРОИСХОДЯЩЕГО В СИСТЕМЕ ПОДЛОЖКА ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ЗОНДА-НАГРЕВАТЕЛЬ-ИЗДЕЛИЕ.**

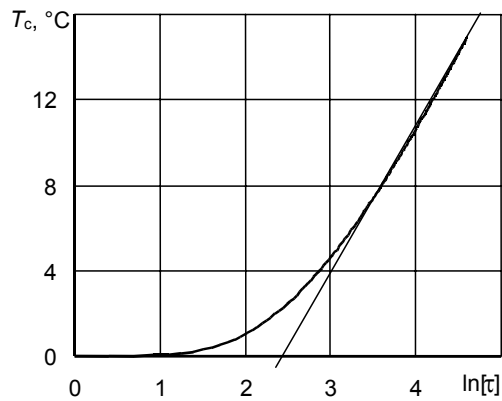


Рис. 3.5. График  $T_c = f(\ln[\tau])$

ДИНАМИКА ТЕПЛООВОГО ПРОЦЕССА В СИСТЕМЕ ЗОНД-ИЗДЕЛИЕ БУДЕТ ХАРАКТЕРИЗОВАТЬСЯ ВХОДНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ (ЗАКОНОМ ПОДАЧИ МОЩНОСТИ НА НАГРЕВАТЕЛЬ), ВЫХОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ  $T(\tau)$ , ЗНАЧЕНИЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ СОСТОЯНИЯ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ( $H_1, H_2, \dots$ ). ЗНАЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ СОСТОЯНИЯ  $H$  ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ ХАРАКТЕРОМ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА, ПРОХОДЯЩЕГО ЧЕРЕЗ ТОЧКУ ИЗМЕРЕНИЯ,  $Q'$  (РИС. 3.6).

В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ НА ТЕРМОГРАММАХ (РИС. 3.7) НА ОСНОВАНИИ ХАРАКТЕРА ПОВЕДЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ СОСТОЯНИЯ МОЖНО ВЫДЕЛИТЬ ТРИ УЧАСТКА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ РАЗЛИЧНЫМ СОСТОЯНИЯМ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ (РИС. 3.6).

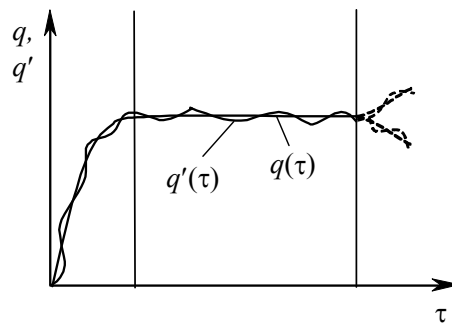


Рис. 3.6. Изменение переменной состояния в процессе эксперимента:

$q'$  – тепловой поток через точку измерения при импульсном тепловом воздействии;  $q$  – тепловой поток через точку измерения при постоянном тепловом воздействии

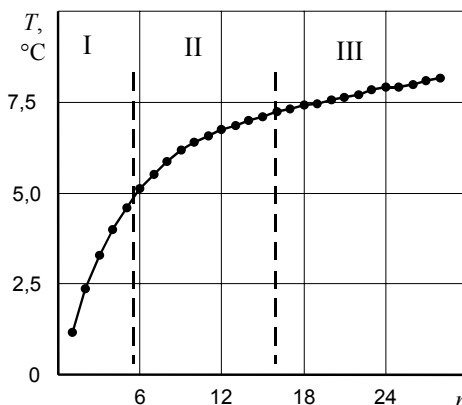


РИС. 3.7. УЧАСТКИ ТЕРМОГРАММЫ, СНЯТОЙ НА ПЕНОПОЛИУРЕТАНЕ МАРКИ РИПОР

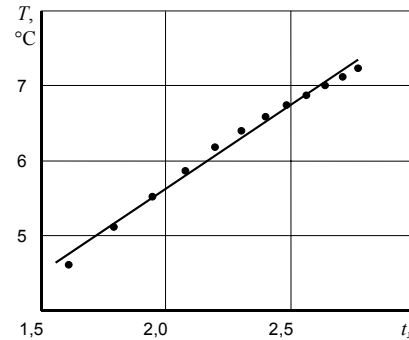
ПЕРВЫЙ (I) УЧАСТОК ТЕРМОГРАММЫ (СОСТОЯНИЕ  $H_1$ ) ХАРАКТЕРИЗУЕТСЯ ТЕМ, ЧТО ТЕПЛОВОЙ ПОТОК, ПРОХОДЯЩИЙ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ ИЗМЕРЕНИЯ, ЯВЛЯЕТСЯ ПЕРЕМЕННЫМ ВО ВРЕМЕНИ И СООТВЕТСТВУЕТ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ТЕПЛООВОГО ПРОЦЕССА,  $H_1$ :

$$q(\tau) = q'(\tau) + \Delta q(\tau), \quad \frac{\Delta q}{q} \neq 0, \quad q' = \text{var}.$$

**ВТОРОЙ (II) УЧАСТОК ТЕРМОГРАММЫ (СОСТОЯНИЕ  $H_2$ ) ХАРАКТЕРИЗУЕТСЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ (ТЕПЛОВОЙ ПОТОК, ПРОХОДЯЩИЙ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ ИЗМЕРЕНИЯ, СТАНОВИТСЯ ПРАКТИЧЕСКИ ПОСТОЯННЫМ):**

$$q(\tau) = q'(\tau) + \Delta q(\tau), \quad \frac{\Delta q}{q} \approx 0, \quad q' \approx \text{const}.$$

**ДЛЯ ЭТОГО УЧАСТКА БУДЕТ СПРАВЕДЛИВО ВЫРАЖЕНИЕ (3.12) (РИС. 3.8). ПРИЧЕМ УРАВНЕНИЕ (3.12) БУДЕТ СПРАВЕДЛИВО ДЛЯ II УЧАСТКА И В СЛУЧАЕ, ЕСЛИ УЧЕСТЬ РЕАЛЬНЫЕ РАЗМЕРЫ И ТЕПЛОЕМКОСТИ НАГРЕВАТЕЛЯ И ТЕРМОПРИЕМНИКОВ.**



**Рис. 3.8.** II-ой участок термограммы, представленной на рис. 3.7, в координатах  $T, t_n$

**ТРЕТИЙ (III) УЧАСТОК ТЕРМОГРАММЫ (СОСТОЯНИЕ  $H_3$ ) ХАРАКТЕРИЗУЕТСЯ ТЕМ, ЧТО НАРУШАЕТСЯ УСЛОВИЕ НЕОГРАНИЧЕННОСТИ ИССЛЕДУЕМОГО МАТЕРИАЛА И ТЕПЛОВОЙ ПОТОК, ПРОХОДЯЩИЙ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ ИЗМЕРЕНИЯ, СТАНОВИТСЯ ПЕРЕМЕННЫМ:**

$$q(\tau) = q'(\tau) + \Delta q(\tau), \quad q' = \text{var}.$$

**ТАКИМ ОБРАЗОМ, ВЫРАЖЕНИЕ (3.12) ЯВЛЯЕТСЯ РАСЧЕТНЫМ ДЛЯ II (РАБОЧЕГО) УЧАСТКА ТЕРМОГРАММЫ (РИС. 3.8). С УЧЕТОМ ТОГО, ЧТО В ПРОЦЕССЕ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ТЕМПЕРАТУРА ФИКСИРУЕТСЯ ЧЕРЕЗ ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ПРОМЕЖУТКИ ВРЕМЕНИ  $\Delta\tau$ , Т.Е.  $\tau = N \cdot \Delta\tau$ ,  $N = 1, 2, 3, \dots$ , МОЖЕМ ЗАПИСАТЬ ВЫРАЖЕНИЕ (3.12) В ВИДЕ**

$$T(t_n) = \frac{q}{2\pi\lambda} \left( t_n + \ln[a] - \ln\left[\frac{r^2}{4\Delta\tau}\right] - \gamma \right), \quad (3.13)$$

где  $t_n = \ln[n]$ .

Данную формулу удобно использовать в алгоритме для расчета ТФС.

### 3.2. РАСЧЕТНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

**ОСНОВНЫМ РАСЧЕТНЫМ СООТНОШЕНИЕМ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТФС БУДЕТ ВЫРАЖЕНИЕ (3.13). СОГЛАСНО УРАВНЕНИЮ (3.13) ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТФС НЕОБХОДИМО ЗНАТЬ РЯД ВЕЛИЧИН, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ РЕЖИМНЫМИ ( $Q, \Delta\tau$ ) И КОНСТРУКТИВНЫМИ ( $R$ ) ОСОБЕННОСТЯМИ ПРИМЕНЯЕМОГО ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА. ПОЭТОМУ ПРИ ЗАДАННЫХ РЕЖИМАХ ЭКСПЕРИМЕНТА МОЖЕМ СЧИТАТЬ ЭТИ ВЕЛИЧИНЫ ПОСТОЯННЫМИ ПРИБОРА. ЗНАЧЕНИЯ ПОСТОЯННЫХ БУДЕМ ОПРЕДЕЛЯТЬ НА ОСНОВЕ ГРАДУИРОВОЧНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА ОБРАЗЦЕ С ИЗВЕСТНЫМИ ТФС (ЗДЕСЬ ДОСТАТОЧНО ОДНОГО ОБРАЗЦА).**

**ДЛЯ РАСЧЕТА ТФС ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ ПРЕДСТАВИМ ВЫРАЖЕНИЕ (3.13) В ВИДЕ**

$$T(t_n) = b_1 t_n + b_0, \quad (3.14)$$

где  $b_1 = \frac{\alpha}{\lambda}$ ,  $b_0 = \frac{\alpha}{\lambda} (\ln[a] - \beta)$  — параметры модели, описывающей термограмму на рабочем участке;  $\alpha = \frac{q}{2\pi}$ ,

$\beta = \ln\left[\frac{r^2}{4\Delta\tau}\right] + \gamma$  — постоянные прибора, определяемые конструктивными особенностями применяемого измерительного устройства и режимами опыта;  $t_n = \ln[n]$ ,  $n$  — номер точки на термограмме ( $\tau = n\Delta\tau$ ).



**ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ТФС И ПОСТОЯННЫХ ПРИБОРА ИМЕЮТ ВИД**

$$\alpha = \lambda_0 b_{10}; \quad (3.15)$$

$$\beta = \ln[a_0] - \frac{b_{00}}{b_{10}}; \quad (3.16)$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{b_1}; \quad (3.17)$$

$$a = \exp\left[\frac{b_0}{b_1} + \beta\right], \quad (3.18)$$

где  $\lambda$ ,  $a$ ,  $\lambda_0$ ,  $a_0$  – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности исследуемого материала и образцовой меры соответственно;  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_{00}$ ,  $b_{10}$  – коэффициенты, определенные из термограмм (рис. 3.8), снятых на исследуемом материале и образцовой мере.

**ТАКИМ ОБРАЗОМ, МОЖНО ЗАПИСАТЬ ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТФС В ВИДЕ СЛЕДУЮЩЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЕЙСТВИЙ:**

- 1) градуировка прибора:
  - **СНЯТИЕ ТЕРМОГРАММЫ НА ОБРАЗЦЕ С ИЗВЕСТНЫМИ ТФС;**
  - **ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОЧЕГО УЧАСТКА ТЕРМОГРАММЫ;**
  - **РАСЧЕТ ПО ЭТОМУ УЧАСТКУ КОЭФФИЦИЕНТОВ  $B_{00}$ ,  $B_{10}$ ;**
  - **РАСЧЕТ ПОСТОЯННЫХ ПРИБОРА СОГЛАСНО ВЫРАЖЕНИЯМ (3.15), (3.16);**
- 2) определение ТФС исследуемого материала:
  - **СНЯТИЕ ТЕРМОГРАММЫ НА ИССЛЕДУЕМОМ ОБРАЗЦЕ;**
  - **ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОЧЕГО УЧАСТКА ТЕРМОГРАММЫ;**
  - **РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ  $B_0$ ,  $B_1$ ;**
  - **РАСЧЕТ ТФС МАТЕРИАЛА ПО ВЫРАЖЕНИЯМ (3.17), (3.18).**

### 3.3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТФС

#### 3.3.1. Случайные погрешности

**СЛУЧАЙНУЮ СОСТАВЛЯЮЩУЮ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ БУДЕМ РАССМАТРИВАТЬ КАК ПОГРЕШНОСТЬ ПРИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ [111, 113 – 121]. В ЭТОМ СЛУЧАЕ В СООТВЕТСТВИИ С (3.17), (3.18) МОЖНО ЗАПИСАТЬ:**

$$\delta\lambda = \sqrt{\delta^2\alpha + \delta^2b_1}; \quad (3.19)$$

$$\delta a = \sqrt{(\delta^2b_0 + \delta^2b_1)\left(\frac{b_0}{b_1}\right)^2 + \Delta^2\beta}; \quad (3.20)$$

$$\delta\alpha = \sqrt{\delta^2\lambda_0 + \delta^2b_{10}}; \quad (3.21)$$

$$\Delta\beta = \sqrt{\delta^2a_0 + (\delta^2b_{00} + \delta^2b_{10})\left(\frac{b_{00}}{b_{10}}\right)^2}. \quad (3.22)$$

**ПРОАНАЛИЗИРУЕМ ВЫРАЖЕНИЯ (3.19) И (3.20) НА ПРЕДМЕТ ТОГО, В КАКОМ ДИАПАЗОНЕ МОЖНО ПРОВОДИТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ТФС И КАКИМ ОБРАЗОМ ЕГО МОЖНО РАСШИРИТЬ. ПРЕЖДЕ ВСЕГО, ОТМЕТИМ, ЧТО ПОГРЕШНОСТЬ РАСЧЕТА КОНСТАНТ ПРИБОРА БУДЕТ ОПРЕДЕЛЯТЬСЯ ПОГРЕШНОСТЬЮ, СВЯЗАННОЙ С НЕТОЧНОСТЬЮ ИНФОРМАЦИИ О ТФС ОБРАЗЦОВОЙ МЕРЫ. НУЖНО ОТМЕТИТЬ, ЧТО АБСОЛЮТНУЮ ПОГРЕШНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ  $B_0$ ,  $B_1$  МОЖНО В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПРИНЯТЬ ПОСТОЯННОЙ, ТАК КАК ОНА БУДЕТ ОПРЕДЕЛЯТЬСЯ ПОГРЕШНОСТЬЮ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (КОТОРУЮ МОЖНО СЧИТАТЬ ПОСТОЯННОЙ ОТ ОПЫТА К ОПЫТУ).**

**ТОГДА ИЗ ВЫРАЖЕНИЯ (3.19), С УЧЕТОМ ФОРМУЛЫ (3.17), МОЖЕМ ЗАПИСАТЬ**

$$\delta\lambda = \sqrt{\delta^2\alpha + \frac{\Delta^2b_1\lambda^2}{\alpha^2}}. \quad (3.23)$$

**КАК ВИДНО ИЗ УРАВНЕНИЯ (3.23), ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ  $\delta\lambda$  БУДЕТ ЗАВИСЕТЬ ОТ САМОЙ ВЕЛИЧИНЫ  $\lambda$  (РИС. 3.9) И БУДЕТ УВЕЛИЧИВАТЬСЯ С ВОЗРАСТА-**

НИЕМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ИССЛЕДУЕМОГО МАТЕРИАЛА. ИЗ ВЫРАЖЕНИЯ (3.23) ТАКЖЕ СЛЕДУЕТ, ЧТО ПОГРЕШНОСТЬ МОЖНО СНИЗИТЬ ПУТЕМ УВЕЛИЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА  $\alpha$ . ЭТО МОЖНО СДЕЛАТЬ ЗА СЧЕТ УВЕЛИЧЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ТЕПЛА, КОТОРОЕ ВЫДЕЛЯЕТСЯ НА НАГРЕВАТЕЛЕ, ЗА СЧЕТ УВЕЛИЧЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ И МОЩНОСТИ НА НАГРЕВАТЕЛЕ ( $\alpha \sim Q$ , СМ. РАЗДЕЛ 3.2).

РАССМОТРИМ ФОРМУЛУ (3.20), КОТОРУЮ С УЧЕТОМ ФОРМУЛ (3.17) И (3.18), МОЖЕМ ЗАПИСАТЬ

$$\delta a = \sqrt{(\Delta^2 b_0 + \Delta^2 b_1 (\ln(a) - \beta)^2) \frac{\lambda^2}{\alpha^2} + \Delta^2 \beta}. \quad (3.24)$$

ИЗ ЗАВИСИМОСТИ (3.24) ВИДНО, ЧТО ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ  $\delta a$  БУДЕТ ЗАВИСЕТЬ ОТ  $A$  И  $\lambda$  ИССЛЕДУЕМОГО МАТЕРИАЛА (РИС. 3.10), ПРИЧЕМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ БУДЕТ КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  $\lambda$ . С УВЕЛИЧЕНИЕМ  $\lambda$  УВЕЛИЧИВАЕТСЯ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ  $\delta a$ . ИЗ УРАВНЕНИЯ (3.24) ТАКЖЕ ВИДНО, ЧТО УМЕНЬШЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ  $A$ , МОЖНО ДОБИТЬСЯ ЗА СЧЕТ УВЕЛИЧЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ ПРИБОРА –  $\alpha$ .

НА ОСНОВАНИИ ВЫРАЖЕНИЙ (3.23) И (3.24) МОЖНО ПРОВЕСТИ ОЦЕНКУ ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТФС ПО ДИАПАЗОНУ ИХ ИЗМЕНЕНИЯ. НА РИС. 3.9 И 3.10 ПРИВЕДЕНЫ РЕЗУЛЬТАТЫ ТАКОЙ ОЦЕНКИ.

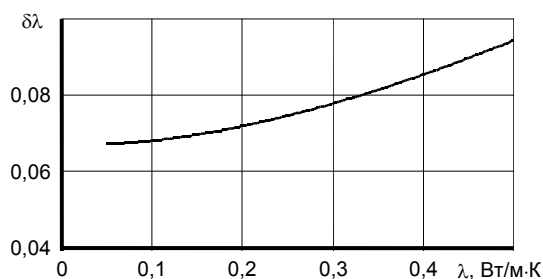


Рис. 3.9. Зависимость  $\delta\lambda = f(\lambda)$ , рассчитанная по формуле (3.23)

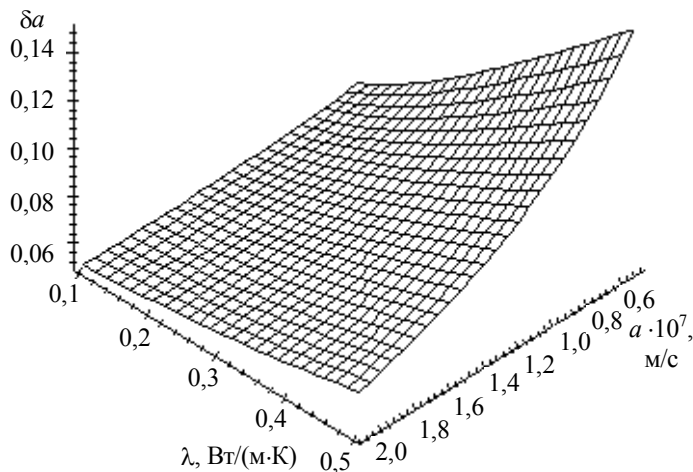


Рис. 3.10. Зависимость  $\delta a = f(\lambda, a)$ , рассчитанная по формуле (3.24)

### 3.3.2. Систематические погрешности

УРАВНЕНИЯ (3.19) И (3.20) УЧИТЫВАЮТ СЛУЧАЙНУЮ СОСТАВЛЯЮЩУЮ ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТФС ПО РАЗРАБОТАННОМУ МЕТОДУ.

РАССМОТРИМ ВЛИЯНИЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТФС ИССЛЕДУЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО РАЗРАБОТАННОМУ МЕТОДУ.

ЭТИ ПОГРЕШНОСТИ ВЫЗЫВАЮТСЯ СЛЕДУЮЩИМИ ФАКТОРАМИ: ВО-ПЕРВЫХ, НАГРЕВАТЕЛЬ В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ ИМЕЕТ КОНЕЧНЫЕ РАЗМЕРЫ; ВО-ВТОРЫХ, НАГРЕВАТЕЛЬ ОБЛАДАЕТ ОПРЕДЕЛЕННОЙ ТЕПЛОЕМКОСТЬЮ; В-ТРЕТЬИХ, МЕЖДУ НАГРЕВАТЕЛЕМ И ИЗДЕЛИЕМ, А ТАКЖЕ МЕЖДУ ИЗДЕЛИЕМ И ТЕРМОПРИЕМНИКАМИ

СУЩЕСТВУЮТ ТЕРМИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ; В-ЧЕТВЕРТЫХ, ЧАСТЬ ТЕПЛА, ВЫДЕЛЯЮЩЕГОСЯ НА НАГРЕВАТЕЛЕ, ИДЕТ НА НАГРЕВ МАТЕРИАЛА ИЗ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ОТМЕТИМ, ЧТО РАНЕЕ БЫЛА ПОКАЗАНА ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МНОГОИМПУЛЬСНОГО ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА И ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ В ТОЙ ОБЛАСТИ ТЕРМОГРАММЫ, КОТОРАЯ ИСПОЛЬЗУЕТСЯ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТФС. ПОЭТОМУ ДАЛЕЕ БУДЕМ СЧИТАТЬ, ЧТО У НАС НЕ МНОГОИМПУЛЬСНЫЙ ИСТОЧНИК ТЕПЛА, А ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ЕМУ ИСТОЧНИК ТЕПЛА ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ, И ВЫРАЖЕНИЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПРИ БОЛЬШИХ  $\tau$ , ИМЕЕТ ВИД

$$T(r, \tau) = \frac{q_0}{2\pi\lambda} \left( \ln\left(\frac{4a\tau}{r^2}\right) - \gamma \right). \quad (3.25)$$

### 3.3.2.1. Влияние конечности размеров нагревателя

ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОСТИ РАЗМЕРОВ НАГРЕВАТЕЛЯ НА ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТФС РАССМОТРИМ ДЛЯ ДВУХ СЛУЧАЕВ:

- НАГРЕВАТЕЛЬ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА РАДИУСА  $R$ , ЧЕРЕЗ БОКОВУЮ ПОВЕРХНОСТЬ КОТОРОГО В МАТЕРИАЛ ПОДАЕТСЯ ТЕПЛОВЫЙ ПОТОК  $\bar{q}_0$  (РИС. 3.11);
- НАГРЕВАТЕЛЬ В ВИДЕ ПОЛОСЫ ШИРИНОЙ  $2h$ , ЧЕРЕЗ КОТОРУЮ В МАТЕРИАЛ ПОДАЕТСЯ ТЕПЛОВЫЙ ПОТОК  $\bar{q}_0$  (РИС. 3.12).

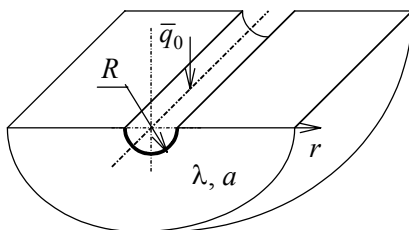


Рис. 3.11. Тепловая схема для нагревателя в виде цилиндра

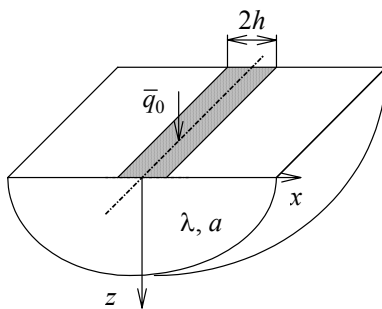


Рис. 3.12. Тепловая схема для нагревателя в виде полосы

Для первого случая, решение задачи в общем виде имеет вид [7]

$$T(r, \tau) = -\frac{2\bar{q}_0}{\pi\lambda} \int_0^{\infty} (1 - \exp[-au^2\tau]) \frac{J_0(ur)Y_1(uR) - Y_0(ur)J_1(uR)}{u^2 [J_0^2(uR) + Y_1^2(uR)]} du, \quad (3.26)$$

где  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  – цилиндрические функции первого рода или функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка, соответственно;  $Y_0(x)$ ,  $Y_1(x)$  – цилиндрические функции второго рода или функции Неймана [106].

ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ  $\tau$  ЭТО ВЫРАЖЕНИЕ УПРОЩАЕТСЯ, Т.Е. [7]

$$T(r, \tau) = \frac{\bar{q}_0 R}{2\lambda} \left[ \ln\left(\frac{4a\tau}{r^2}\right) - \gamma \right] \quad (3.27)$$

или, если выразить (3.27) через мощность на единицу длины нагревателя ( $q_0 = \bar{q}_0 \pi R$ , см. рис. 3.11), получим

$$T(r, \tau) = \frac{q_0}{2\pi\lambda} \left[ \ln\left(\frac{4a\tau}{r^2}\right) - \gamma \right]. \quad (3.28)$$

**СРАВНИВ ВЫРАЖЕНИЕ (3.28) С ВЫРАЖЕНИЕМ (3.25) ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ОТ ЛИНЕЙНОГО ИДЕАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА ПРИ БОЛЬШИХ  $\tau$ , МОЖЕМ ОТМЕТИТЬ ИХ ИДЕНТИЧНОСТЬ.**

**ДЛЯ ВТОРОГО СЛУЧАЯ (РИС. 3.12) ТЕМПЕРАТУРА  $T$  В ТОЧКЕ С КООРДИНАТАМИ  $(x, 0)$  ПОВЕРХНОСТИ В МОМЕНТ ВРЕМЕНИ  $\tau$  БУДЕТ ОПРЕДЕЛЯТЬСЯ ИЗ ВЫРАЖЕНИЯ [7]**

$$T(x, 0, \tau) = \frac{\bar{q}_0 h \text{Fo}^{1/2}}{\pi^{1/2} \lambda} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{h+x}{2h\text{Fo}^{1/2}}\right] + \operatorname{erf}\left[\frac{h-x}{2h\text{Fo}^{1/2}}\right] - \frac{h+x}{2h(\pi\text{Fo})^{1/2}} E_1\left[-\frac{(h+x)^2}{4h^2\text{Fo}}\right] - \frac{h-x}{2h(\pi\text{Fo})^{1/2}} E_1\left[-\frac{(h-x)^2}{4h^2\text{Fo}}\right] \right\}, \quad (3.29)$$

где  $\text{Fo} = \frac{a\tau}{h^2}$  – число Фурье;  $h$  – ширина полосы;  $x$  – координата.

**ИСПОЛЬЗУЯ ИЗВЕСТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ [10, 104]:**

$$\operatorname{erf}[x] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}; \quad (3.30)$$

$$E_1[-x] = \gamma + \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n n!}, \quad (3.31)$$

получим выражение для температуры поверхности  $z = 0$  в точке с координатой  $x$  для больших значений  $\tau$ :

$$T(x, 0, \tau) = \frac{\bar{q}_0 h}{\lambda \pi} \left\{ \ln(4a\tau) - \frac{h+x}{2h} \ln(h+x)^2 - \frac{h-x}{2h} \ln(h-x)^2 + 2 - \gamma \right\}. \quad (3.32)$$

**ЕСЛИ ПЕРЕПИСАТЬ ВЫРАЖЕНИЕ (3.32) ЧЕРЕЗ МОЩНОСТЬ НА ЕДИНИЦУ ДЛИНЫ НАГРЕВАТЕЛЯ ( $q_0 = \bar{q}_0 2h$ , СМ. РИС. 3.12), ПОЛУЧИМ**

$$T(x, 0, \tau) = \frac{q_0}{2\pi\lambda} \left\{ \ln(4a\tau) - \frac{h+x}{2h} \ln(h+x)^2 - \frac{h-x}{2h} \ln(h-x)^2 + 2 - \gamma \right\}. \quad (3.33)$$

**ПРОАНАЛИЗИРУЕМ БОЛЕЕ ПОДРОБНО ВЫРАЖЕНИЯ (3.28) И (3.33).**

**КАК УЖЕ ОТМЕЧАЛОСЬ ВЫШЕ, ВЫРАЖЕНИЕ (3.28) ПОЛНОСТЬЮ ИДЕНТИЧНО ВЫРАЖЕНИЮ (3.25). ВЫРАЖЕНИЕ (3.33) ОТЛИЧАЕТСЯ ОТ ФОРМУЛЫ (3.25). ЗАМЕТИМ ТАКЖЕ, ЧТО**

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{h+x}{2h} \ln(h+x)^2 + \frac{h-x}{2h} \ln(h-x)^2 \right\} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{h}{2h} \ln[(h+x)^2(h-x)^2] + \frac{x}{2h} \ln \left[ \frac{(h+x)^2}{(h-x)^2} \right]^2 \right\} = \ln(x^2) - 2. \end{aligned}$$

**ПОЭТОМУ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЯ  $x \gg h$  ВЫРАЖЕНИЕ (3.33) ПРИНИМАЕТ ВИД**

$$T(r, \tau) = \frac{q_0}{2\pi\lambda} \left( \ln\left(\frac{4a\tau}{r^2}\right) - \gamma \right) \quad (3.34)$$

и будет полностью эквивалентно выражению (3.25).

**ВЫРАЖЕНИЕ (3.25) МОЖНО ПРЕДСТАВИТЬ В ВИДЕ**

$$T(r, \tau) = \frac{q_0}{2\pi\lambda} (\ln(4a\tau) - \ln(r^2) - \gamma). \quad (3.35)$$

**ТОГДА ВЫРАЖЕНИЯ (3.33) И (3.35) МОЖНО ЗАПИСАТЬ В ЕДИНОЙ ФОРМЕ**

$$T(r, \tau) = T(x, 0, \tau) = \frac{q_0}{2\pi\lambda} (\ln(4a\tau) - C(r \text{ (или } x))), \quad (3.36)$$

где  $C(r \text{ (или } x))$  – величина, не зависящая от времени и ТФС исследуемого материала, а полностью определяющаяся конструктивными особенностями ИЗ (является, по сути дела, постоянной прибора). В разработанном методе постоянные прибора определяются, исходя из градуировочных опытов на образцах с известными ТФС, причем и градуировка, и собственно определение ТФС исследуемого

материала, определяются на участке термограммы, где реально выполняются температурно-временные зависимости вида (3.25), (3.28), (3.33).

**В РЕЗУЛЬТАТЕ МОЖЕМ СДЕЛАТЬ ВЫВОД О ТОМ, ЧТО СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ, СВЯЗАННАЯ С КОНЕЧНОСТЬЮ РАЗМЕРОВ НАГРЕВАТЕЛЯ, НЕ БУДЕТ СКАЗЫВАТЬСЯ НА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТФС. ПРИЧЕМ, КАК УЖЕ ОТМЕЧАЛОСЬ ВЫШЕ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТФС НА ОСНОВЕ ГРАДУИРОВОЧНЫХ ОПЫТОВ ДЕЙСТВИТЕЛЬНО ПОЗВОЛЯЕТ ЧАСТИЧНО УЧЕСТЬ И СИСТЕМАТИЧЕСКУЮ СОСТАВЛЯЮЩУЮ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ (СМ. (3.33), (3.35), (3.36)).**

### 3.3.2.2. Влияние теплоемкости нагревателя и теплоемкости термодатчиков

**ТАК КАК В РЕАЛЬНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ НАГРЕВАТЕЛЬ ОБЛАДАЕТ ОПРЕДЕЛЕННОЙ ТЕПЛОЕМКОСТЬЮ, ТО ЧАСТЬ ТЕПЛА, ВЫДЕЛЯЮЩАЯСЯ НА НАГРЕВАТЕЛЕ, ПОЙДЕТ НА ЕГО РАЗОГРЕВ, Т.Е., МОЩНОСТЬ, ПОСТУПАЮЩАЯ В ИЗДЕЛИЕ, БУДЕТ НЕ  $Q_0$ , А  $Q_0 - Q'_0$ , ГДЕ  $Q'_0$  – ЧАСТЬ МОЩНОСТИ, ИДУЩЕЙ НА РАЗОГРЕВ НАГРЕВАТЕЛЯ. ПРИМЕМ, ЧТО НАГРЕВАТЕЛЬ ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ БЕСКОНЕЧНЫЙ ЦИЛИНДР РАДИУСОМ  $R$  И ЯВЛЯЕТСЯ ИДЕАЛЬНЫМ ПРОВОДНИКОМ. ТОГДА  $Q'_0$  БУДЕТ ОПРЕДЕЛЯТЬСЯ ИЗ ВЫРАЖЕНИЯ**

$$q'_0 = C_n \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial \tau}, \quad (3.37)$$

где  $C_n$  – теплоемкость единицы длины нагревателя.

**В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ  $T(R, \tau)$  МОЖНО НАЙТИ ИЗ ВЫРАЖЕНИЯ (3.28) ПРИ  $R = R$ . ТОГДА ИЗМЕНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТОЧКЕ С КООРДИНАТОЙ  $R$  ОПИСЫВАЕТСЯ ВЫРАЖЕНИЕМ**

$$T(r, \tau) = \frac{q_0 - q'_0}{2\pi\lambda} \left( \ln \left[ \frac{4a\tau}{r^2} \right] - \gamma \right) = \frac{q_0 - C_n \frac{q_0}{2\pi\lambda\tau}}{2\pi\lambda} \left( \ln \left[ \frac{4a\tau}{r^2} \right] - \gamma \right) \quad (3.38)$$

или

$$T(r, \tau) = \frac{q_0}{2\pi\lambda} \left( \ln \left[ \frac{4a\tau}{r^2} \right] - \gamma \right) - \frac{C_n q_0}{4\pi^2 \lambda^2} \left( \frac{\ln[\tau]}{\tau} + \frac{\ln \left[ \frac{4a}{r^2} \right] - \gamma}{\tau} \right). \quad (3.39)$$

**ИЗ ФОРМУЛЫ (3.39) ВИДНО, ЧТО ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОЕМКОСТИ НАГРЕВАТЕЛЯ С ТЕЧЕНИЕМ ВРЕМЕНИ БУДЕТ УМЕНЬШАТЬСЯ, ТАК КАК**

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln[\tau]}{\tau} \right) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln \left[ \frac{4a}{r^2} \right] - \gamma}{\tau} \right) \rightarrow 0.$$

**ПРИЧЕМ, УСЛОВИЕ, КОГДА ТЕПЛОЕМКОСТЬЮ НАГРЕВАТЕЛЯ МОЖНО ПРЕНЕБРЕЧЬ (СМ. (3.38)), ИМЕЕТ ВИД**

$$\frac{C_n}{2\pi\lambda\tau} \ll 1.$$

**ВЫРАЖЕНИЯ (3.38) И (3.39) ПОКАЗЫВАЮТ, ЧТО ТАМ, ГДЕ ТЕПЛОЕМКОСТЬ НАГРЕВАТЕЛЯ СУЩЕСТВЕННО ВЛИЯЕТ НА ХОД РАЗВИТИЯ ТЕПЛООВОГО ПРОЦЕССА, ВИД ЗАВИСИМОСТИ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТОЧКЕ ИЗМЕРЕНИЯ ОТ ВРЕМЕНИ (ТЕРМОГРАММЫ) БУДЕТ ОТЛИЧАТЬСЯ ОТ ВИДА ВЫРАЖЕНИЙ (3.25), (3.28), (3.33), (3.36). В МЕТОДЕ УЧИТЫВАЮТСЯ ТОЛЬКО ТЕ ТОЧКИ ТЕРМОГРАММЫ, ГДЕ РЕАЛЬНО ВЫПОЛНЯЮТСЯ ЭТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ТЕМПЕРАТУРЫ ОТ ВРЕМЕНИ ( $T(\tau) = a \ln[\tau] + b$ ). ОТСЮДА СЛЕДУЕТ ВЫВОД, ЧТО ТЕПЛОЕМКОСТЬ НАГРЕВАТЕЛЯ В РАСЧЕТНОЙ ОБЛАСТИ ТЕРМОГРАММЫ НЕ ВЛИЯЕТ НА ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТФС. АНАЛОГИЧНО, ЭТО МОЖНО ПОКАЗАТЬ ДЛЯ НАГРЕВАТЕЛЯ В ВИДЕ ПОЛОСЫ, А ТАКЖЕ ДЛЯ ТЕРМОПРИЕМНИКОВ.**

### 3.3.2.3. ВЛИЯНИЕ ОТТОКОВ ТЕПЛА В МАТЕРИАЛ ПОДЛОЖКИ

## ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ЗОНДА

ПУСТЬ  $q_0$  – МОЩНОСТЬ, ВЫДЕЛЯЮЩАЯСЯ НА ЕДИНИЦУ ДЛИНЫ НАГРЕВАТЕЛЯ,  $q_{10}$ ,  $q_{20}$  – ЧАСТИ МОЩНОСТИ, ИДУЩИЕ НА НАГРЕВ ИССЛЕДУЕМОГО МАТЕРИАЛА И МАТЕРИАЛА ПОДЛОЖКИ ИЗ СООТВЕТСТВЕННО. УСЛОВИЕ, КОГДА ОТТОКИ ТЕПЛА В ПОДЛОЖКУ ИЗ БУДУТ ПРЕНЕБРЕЖИМО МАЛЫ, МОЖНО ЗАПИСАТЬ В ВИДЕ

$$\frac{q_{20}}{q_{10}} \ll 1. \quad (3.40)$$

НАЙДЕМ, ЧЕМУ РАВНО ДАННОЕ СООТНОШЕНИЕ, ДЛЯ ЧЕГО РАССМОТРИМ СЛЕДУЮЩУЮ ЗАДАЧУ.

Два полуограниченных тела находятся в идеальном тепловом контакте (см. рис. 3.13). В плоскости контакта действует линейный источник тепла постоянной мощности в виде полосы шириной  $2h$ . Мощность, выделяющаяся на единицу площади нагревателя, равна  $\bar{q}_0$  (или через мощность на единицу длины нагревателя –  $\bar{q}_0 = \frac{q_0}{2h}$ ) (рис. 3.13)).

Тогда температурное поле в любой момент времени в данной системе будет определяться решением математической задачи:

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T_1(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1(x, y, \tau)}{\partial y^2}, \quad \tau > 0, \quad -\infty > x > \infty, \quad y > 0; \quad (3.41)$$

$$\frac{1}{a_2} \frac{\partial T_2(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T_2(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2(x, y, \tau)}{\partial y^2}, \quad \tau > 0, \quad -\infty > x > \infty, \quad y < 0;$$

(3.42)

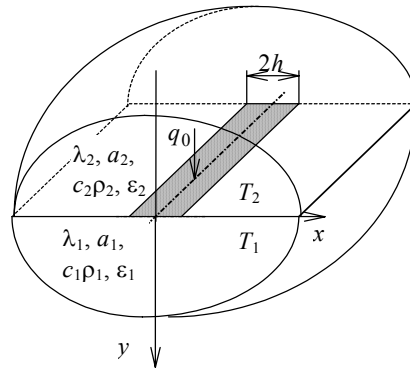


Рис. 3.13. Тепловая схема для нагревателя, действующего в плоскости контакта двух полуограниченных тел

$$T_1(x, y, 0) = T_2(x, -y, 0) = 0; \quad (3.43)$$

$$T_1(x, \infty, \tau) = T_1(\infty, y, \tau) = T_2(x, -\infty, \tau) = T_2(\infty, -y, \tau) = 0; \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial T_1(\infty, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial T_1(x, \infty, \tau)}{\partial y} = \frac{\partial T_2(\infty, -y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial T_2(x, -\infty, \tau)}{\partial y} = 0; \quad (3.45)$$

$$T_1(x, +0, \tau) = T_2(x, -0, \tau); \quad (3.46)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(x, +0, \tau)}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial T_2(x, -0, \tau)}{\partial y} = f(x); \quad (3.47)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{q_0}{2h}, & |x| < h; \\ 0, & |x| > h, \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial T_1(0, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial T_2(0, -y, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (3.49)$$

**ПРОИНТЕГРИРУЕМ УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ (3.41) – (3.49) ПО  $X \in (-\infty, \infty)$ . ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (3.41) ИМЕЕТ МЕСТО:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1(x, y, \tau)}{\partial \tau} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 T_1(x, y, \tau)}{\partial x^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 T_1(x, y, \tau)}{\partial y^2} dx;$$

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial \int_{-\infty}^{+\infty} T_1(x, y, \tau) dx}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \int_{-\infty}^{+\infty} T_1(x, y, \tau) dx}{\partial y^2} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 T_1(x, y, \tau)}{\partial x^2} dx ;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 T_1(x, y, \tau)}{\partial x^2} dx = \frac{\partial T_1(x, y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0}^{\infty} = \left( \begin{array}{l} \text{см. (3.45)} \\ (3.49) \end{array} \right) = 0 ;$$

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial \int_{-\infty}^{+\infty} T_1(x, y, \tau) dx}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \int_{-\infty}^{+\infty} T_1(x, y, \tau) dx}{\partial y^2} . \quad (3.50)$$

**АНАЛОГИЧНО ПОЛУЧАЕМ:**

- для уравнения (3.42)

$$\frac{1}{a_2} \frac{\partial \int_{-\infty}^{+\infty} T_2(x, y, \tau) dx}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \int_{-\infty}^{+\infty} T_2(x, y, \tau) dx}{\partial y^2} ; \quad (3.51)$$

- для выражения (3.43)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_1(x, y, 0) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} T_2(x, y, 0) dx = 0 ; \quad (3.52)$$

- для выражения (3.44)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_1(x, \infty, \tau) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} T_2(x, -\infty, \tau) dx = 0 ; \quad (3.53)$$

- для выражения (3.45)

$$\frac{\partial \int_{-\infty}^{+\infty} T_1(x, \infty, \tau) dx}{\partial y} = \frac{\partial \int_{-\infty}^{+\infty} T_2(x, -\infty, \tau) dx}{\partial y} = 0 ; \quad (3.54)$$

- для выражения (3.46)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_1(x, 0, \tau) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} T_2(x, 0, \tau) dx ; \quad (3.55)$$

- для выражений (3.47) и (3.48):

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \lambda_1 \frac{\partial T_1(x, 0, \tau)}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial T_2(x, 0, \tau)}{\partial y} \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-h}^{+h} \frac{q_0}{2h} dx = \frac{q_0}{2h} x \Big|_{x=-h}^h = q_0 ,$$

$$- \lambda_1 \frac{\partial \int_{-\infty}^{+\infty} T_1(x, 0, \tau) dx}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial \int_{-\infty}^{+\infty} T_2(x, 0, \tau) dx}{\partial y} = q_0 . \quad (3.56)$$

**ВВЕДЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:**

$$S_1(y, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_1(x, y, \tau) dx ; \quad (3.57)$$

$$S_2(y, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_2(x, y, \tau) dx , \quad (3.58)$$

т.е.  $S_1(y, \tau)$  и  $S_2(y, \tau)$  – представляют собой интегральные температуры плоскостей, параллельных плоскости контакта двух тел и проходящих через точки с координатой  $y$ . С учетом зависимостей (3.50) – (3.58) можем переписать систему (3.41) – (3.49) через новые функции  $S_1(y, \tau)$ ,  $S_2(y, \tau)$  в следующем виде:

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial S_1(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 S_1(y, \tau)}{\partial y^2} , \quad \tau > 0, y > 0 ; \quad (3.59)$$

$$\frac{1}{a_2} \frac{\partial S_2(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 S_2(y, \tau)}{\partial y^2} , \quad \tau > 0, y < 0 ; \quad (3.60)$$

$$S_1(y, 0) = S_2(y, 0) = 0 ; \quad (3.61)$$

$$S_1(\infty, \tau) = S_2(-\infty, \tau) = 0; \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial S_1(\infty, \tau)}{\partial y} = \frac{\partial S_2(-\infty, \tau)}{\partial y} = 0; \quad (3.63)$$

$$S_1(+0, \tau) = S_2(-0, \tau); \quad (3.64)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial S_1(+0, \tau)}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial S_2(-0, \tau)}{\partial y} = q_0. \quad (3.65)$$

### РАССМОТРИМ ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ВЫРАЖЕНИЙ

$$-\lambda_1 \frac{\partial S_1(0, \tau)}{\partial y} \quad \text{и} \quad -\lambda_2 \frac{\partial S_2(0, \tau)}{\partial y}.$$

С УЧЕТОМ ТОГО, ЧТО  $-\lambda_1 \frac{\partial T_1(x, 0, \tau)}{\partial y}$  – ЕСТЬ ТЕПЛОВОЙ ПОТОК, ПОСТУПАЮЩИЙ В

ТЕЛО 1,  $-\lambda_2 \frac{\partial T_2(x, 0, \tau)}{\partial y}$  – ТЕПЛОВОЙ ПОТОК, ПОСТУПАЮЩИЙ В ТЕЛО 2, А

$-\lambda_1 \frac{\partial S_1(0, \tau)}{\partial y} = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 \frac{\partial T_1(x, 0, \tau)}{\partial y} dx$  И  $-\lambda_2 \frac{\partial S_2(0, \tau)}{\partial y} = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda_2 \frac{\partial T_2(x, 0, \tau)}{\partial y} dx$  ЕСТЬ МОЩНОСТЬ, ИДУЩАЯ НА

НАГРЕВ ТЕЛА 1 И ТЕЛА 2 СООТВЕТСТВЕННО, Т.Е. (СМ. (3.40)), МОЖНО ЗАПИСАТЬ:

$$-\lambda_1 \frac{\partial S_1(0, \tau)}{\partial y} = q_{10}; \quad -\lambda_2 \frac{\partial S_2(0, \tau)}{\partial y} = q_{20}. \quad (3.66)$$

ТАКИМ ОБРАЗОМ, РЕШИВ СИСТЕМУ (3.59) – (3.65) И ЗАТЕМ НАЙДЯ  $-\lambda_1 \frac{\partial S_1(0, \tau)}{\partial y}$  И

$-\lambda_2 \frac{\partial S_2(0, \tau)}{\partial y}$ , МЫ ПОЛУЧИМ УСЛОВИЕ, ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ КОТОРОГО УТЕЧКАМИ ТЕП-

ЛА В МАТЕРИАЛ ПОДЛОЖКИ ИЗ МОЖНО ПРЕНЕБРЕЧЬ. ЗАМЕТИМ ТАКЖЕ, ЧТО В ЭТУ СИСТЕМУ НЕ ВХОДИТ РАЗМЕР НАГРЕВАТЕЛЯ, А В ПРАВУЮ ЧАСТЬ ВЫРАЖЕНИЯ (3.65) ВХОДИТ ВЕЛИЧИНА  $Q_0$  (МОЩНОСТЬ НА ЕДИНИЦУ ДЛИНЫ НАГРЕВАТЕЛЯ). ОТСЮДА МОЖНО СДЕЛАТЬ ВЫВОД О ТОМ, ЧТО СИСТЕМА (3.59) – (3.65) ТАКЖЕ БУДЕТ ОПИСЫВАТЬ ПРОЦЕССЫ И ДЛЯ ИДЕАЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА ( $2H \rightarrow 0$ ).

ЗАДАЧА (3.59) – (3.65) ЭКВИВАЛЕНТНА ЗАДАЧЕ О НАГРЕВЕ ДВУХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛ, В ПЛОСКОСТИ КОНТАКТА КОТОРЫХ ДЕЙСТВУЕТ ПЛОСКИЙ ИСТОЧНИК ТЕПЛА ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ [10]. РЕШЕНИЕ ТАКОЙ ЗАДАЧИ МОЖЕТ БЫТЬ ЗАПИСАНО В ВИДЕ [10]:

$$S_1(y, \tau) = \frac{2q_0\sqrt{\tau}}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \operatorname{ierfc} \left[ \frac{y}{2\sqrt{a_1\tau}} \right]; \quad S_2(y, \tau) = \frac{2q_0\sqrt{\tau}}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \operatorname{ierfc} \left[ \frac{y}{2\sqrt{a_2\tau}} \right]. \quad (3.67)$$

### СЛЕДОВАТЕЛЬНО

$$q_{10} = -\lambda_1 \frac{\partial S_1(0, \tau)}{\partial y} = \frac{q_0\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}; \quad q_{20} = -\lambda_2 \frac{\partial S_2(0, \tau)}{\partial y} = \frac{q_0\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \quad (3.68)$$

С УЧЕТОМ (3.40), ПОЛУЧИМ ВЫРАЖЕНИЕ, ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ КОТОРОГО УТЕЧКАМИ ТЕПЛА В МАТЕРИАЛ ПОДЛОЖКИ ИЗ МОЖНО ПРЕНЕБРЕЧЬ,

$$\frac{q_{20}}{q_{10}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ll 1, \quad (3.69)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – тепловые активности исследуемого материала и материала подложки ИЗ соответственно.

ПРИ ПОЛУЧЕНИИ УСЛОВИЯ (3.69) ПРЕДПОЛАГАЛОСЬ, ЧТО ТЕЛА 1 И 2 НАХОДЯТСЯ В ИДЕАЛЬНОМ ТЕПЛОВОМ КОНТАКТЕ. ОДНАКО, В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ МЕЖДУ ИЗ И ИССЛЕДУЕМОМ МАТЕРИАЛОМ В ПЛОСКОСТИ КОНТАКТА ВСЕГДА БУДУТ ПРИСУТСТВОВАТЬ ТЕРМИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ. ПРИЧЕМ, ЭТИ ТЕРМИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ В ОБЛАСТИ НАГРЕВАТЕЛЯ БУДУТ ЗНАЧИТЕЛЬНО НИЖЕ, ЧЕМ В ОБЛАСТИ СОПРИКОСНОВЕНИЯ МАТЕРИАЛА ПОДЛОЖКИ ИЗ И ИССЛЕДУЕМОГО МАТЕРИАЛА, Т.Е. УСЛОВИЕ (3.69) БУДЕТ ЗАВЫШЕННЫМ. В СВЯЗИ С ЭТИМ ПРЕДСТАВЛЯЕТ ИНТЕРЕС ПОЛУЧИТЬ ВЫРАЖЕНИЕ (3.40) ПРИ УСЛОВИИ, ЧТО ТЕПЛОВЫЕ ПОТЕРИ В МАТЕРИАЛ



**ИЗ ПРОИСХОДЯТ ТОЛЬКО В ОБЛАСТИ НАГРЕВАТЕЛЯ.  
ПРЕЖДЕ ВСЕГО ОТМЕТИМ, ЧТО ТФС ИССЛЕДУЕМОГО МАТЕРИАЛА ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ НА УЧАСТКЕ ТЕРМОГРАММЫ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ УСТАНОВИВШЕМУСЯ СТАЦИОНАРНОМУ ПОЛЮ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ В СИСТЕМЕ (РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ТЕПЛООВОГО РЕЖИМА ОПЫТА). ДЕЙСТВИТЕЛЬНО, С УЧЕТОМ (3.25)**

$$\bar{q}(r, \tau) = -\lambda \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} = \frac{q_0}{\pi r} \quad (3.70)$$

и, следовательно, не зависит от  $\tau$ .

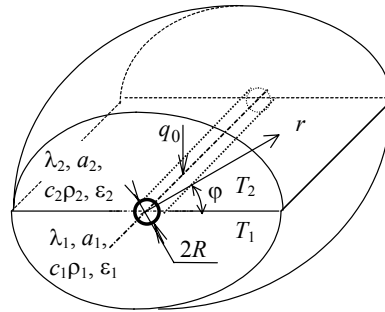
**НАЙДЕМ СТАЦИОНАРНОЕ ПОЛЕ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ В СИСТЕМЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЙ ЗОНД–НАГРЕВАТЕЛЬ–ИЗДЕЛИЕ ПРИ УСЛОВИИ, ЧТО ТЕПЛОВЫЕ ПОТЕРИ В МАТЕРИАЛ ИЗ ПРОИСХОДЯТ ТОЛЬКО В ОБЛАСТИ НАГРЕВАТЕЛЯ (РИС. 3.14).**

Два полуограниченных тела (рис. 3.14) с различными ТФС находятся в идеальном тепловом контакте с поверхностным линейным источником тепла постоянной мощности в виде цилиндра радиуса  $R$ . Соприкасающиеся поверхности тел теплоизолированы. Мощность, выделяющаяся на единицу площади нагревателя, равна  $\bar{q}_0$  (или через мощность на единицу длины нагревателя –  $\bar{q}_0 = \frac{q_0}{2\pi R}$  (см. рис. 3.14)).

Тогда температурное поле в любой момент времени в данной системе будет определяться решением математической задачи

$$\frac{\partial T_1(r, \varphi, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \left( \frac{\partial^2 T_1(r, \varphi, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1(r, \varphi, \tau)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1(r, \varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} \right) \quad (3.71)$$

$$\left( r > R, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0, \tau > 0 \right);$$



**Рис. 3.14. Тепловая схема для цилиндрического нагревателя, действующего в плоскости контакта двух полуограниченных тел**

$$\frac{\partial T_2(r, \varphi, \tau)}{\partial \tau} = a_2 \left( \frac{\partial^2 T_2(r, \varphi, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2(r, \varphi, \tau)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_2(r, \varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} \right) \quad (3.72)$$

$$\left( r > R, 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \tau > 0 \right);$$

$$T_1(r, \varphi, 0) \Big|_{\substack{r \geq R \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0}} = 0, \quad T_2(r, \varphi, 0) \Big|_{\substack{r \geq R \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}}} = 0;$$

$$T_1(\infty, \varphi, \tau) \Big|_{\substack{\tau > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0}} = T_2(\infty, \varphi, \tau) \Big|_{\substack{\tau > 0 \\ 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}}} = 0,$$

$$T_1(R, \varphi, \tau) \Big|_{\substack{\tau > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0}} = T_2(R, \varphi, \tau) \Big|_{\substack{\tau > 0 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}}},$$

$$\frac{\partial T_1(r, \varphi, \tau)}{\partial \varphi} \Big|_{\substack{\varphi = -0 \\ r > R \\ \tau > 0}} = \frac{\partial T_2(r, \varphi, \tau)}{\partial \varphi} \Big|_{\substack{\varphi = +0 \\ r > R \\ \tau > 0}} = 0, \quad \frac{\partial T_1(r, \varphi, \tau)}{\partial \varphi} \Big|_{\substack{\varphi = -\frac{\pi}{2} \\ r > R \\ \tau > 0}} = \frac{\partial T_2(r, \varphi, \tau)}{\partial \varphi} \Big|_{\substack{\varphi = \frac{\pi}{2} \\ r > R \\ \tau > 0}} = 0,$$

(3.73)

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(R, \varphi, \tau)}{\partial r} \Big|_{-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < -0} = \bar{q}_{10}, \quad -\lambda_2 \frac{\partial T_2(R, \varphi, \tau)}{\partial r} \Big|_{+0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}} = \bar{q}_{20}, \quad \tau > 0,$$

$$\pi R \bar{q}_{10} + \pi R \bar{q}_{20} = q_0.$$

В предположении, что градиент температуры в каждом из рассматриваемых полуограниченных тел не зависит от координаты  $\varphi$ , и с учетом условия (3.73) получаем задачу, эквивалентную приведенной выше. Уравнения (3.71) и (3.72) с соответствующими начальными и граничными условиями запишутся следующим образом:

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial T_1(r, \tau)}{\partial r} \right], \quad \tau > 0, \quad r > R; \quad (3.74)$$

$$\frac{1}{a_2} \frac{\partial T_2(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial T_2(r, \tau)}{\partial r} \right], \quad \tau > 0, \quad r > R; \quad (3.75)$$

$$T_1(r, 0) = T_2(r, 0) = 0; \quad (3.76)$$

$$T_1(r, \tau) = T_2(r, \tau) = 0, \quad r \rightarrow \infty; \quad (3.77)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(R, \tau)}{\partial r} = \bar{q}_{10}; \quad (3.78)$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2(R, \tau)}{\partial r} = \bar{q}_{20}; \quad (3.79)$$

$$\pi R \bar{q}_{10} + \pi R \bar{q}_{20} = q_0; \quad (3.80)$$

$$T_1(R, \tau) = T_2(R, \tau). \quad (3.81)$$

**ПРИМЕНИВ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА К (3.74), (3.75) С УЧЕТОМ (3.76), ПОЛУЧИМ:**

$$\frac{d^2 T_{1L}(r, p)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_{1L}(r, p)}{dr} - \frac{p}{a_1} T_{1L}(r, p) = 0, \quad (3.82)$$

$$\frac{d^2 T_{2L}(r, p)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_{2L}(r, p)}{dr} - \frac{p}{a_2} T_{2L}(r, p) = 0. \quad (3.83)$$

**ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (3.82) И (3.83) (УРАВНЕНИЙ БЕССЕЛЯ) ИМЕЮТ ВИД:**

$$T_{1L}(r, p) = A_1 I_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} r \right] + B_1 K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} r \right]; \quad (3.84)$$

$$T_{2L}(r, p) = A_2 I_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} r \right] + B_2 K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} r \right], \quad (3.85)$$

где  $I_0[x]$  – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка,  $K_0[x]$  – модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

**ИЗ ВЫРАЖЕНИЯ (3.77) СЛЕДУЕТ, ЧТО  $A_1 = A_2 = 0$ . ТОГДА ВЫРАЖЕНИЯ (3.84), (3.85) ПРИНИМАЮТ ВИД:**

$$T_{1L}(r, p) = B_1 K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} r \right]; \quad (3.86)$$

$$T_{2L}(r, p) = B_2 K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} r \right]. \quad (3.87)$$

**КОЭФФИЦИЕНТЫ  $B_1, B_2$  ОПРЕДЕЛИМ ИЗ УСЛОВИЙ (3.78) – (3.81):**

$$\pi R \lambda_1 B_1 \sqrt{\frac{p}{a_1}} K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} r \right] + \pi R \lambda_2 B_2 \sqrt{\frac{p}{a_2}} K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} r \right] = \frac{q_0}{p};$$

$$B_1 K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} r \right] = B_2 K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} r \right].$$

**РЕШИВ ЭТУ СИСТЕМУ ОТНОСИТЕЛЬНО  $B_1$  И  $B_2$ , ПОЛУЧИМ**

$$B_1 = \frac{q_0 K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right]}{\pi R p^{\frac{3}{2}} \left( \varepsilon_1 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right] + \varepsilon_2 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right] \right)}; \quad (3.88)$$

$$B_2 = \frac{q_0 K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right]}{\pi R p^{\frac{3}{2}} \left( \varepsilon_1 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right] + \varepsilon_2 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right] \right)}. \quad (3.89)$$

**ПОДСТАВИВ ВЫРАЖЕНИЯ (3.88), (3.89) В ФОРМУЛЫ (3.86), (3.87), ПОЛУЧИМ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (3.74) – (3.81) В ОБЛАСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА:**

$$T_1(r, p) = \frac{q_0 K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} r \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right]}{\pi R p^{\frac{3}{2}} \left( \varepsilon_1 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right] + \varepsilon_2 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right] \right)}; \quad (3.90)$$

$$T_2(r, p) = \frac{q_0 K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} r \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right]}{\pi R p^{\frac{3}{2}} \left( \varepsilon_1 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right] + \varepsilon_2 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right] \right)} \quad (3.91)$$

и выражения для определения поля тепловых потоков:

$$\bar{q}_1(r, p) = \frac{q_0 \varepsilon_1 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} r \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right]}{\pi R p \left( \varepsilon_1 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right] + \varepsilon_2 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right] \right)}; \quad (3.92)$$

$$\bar{q}_2(r, p) = \frac{q_0 \varepsilon_2 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} r \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right]}{\pi R p^{\frac{3}{2}} \left( \varepsilon_1 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right] + \varepsilon_2 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right] \right)}. \quad (3.93)$$

**ВОСПОЛЬЗОВАВШИСЬ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМОЙ [10], ОПРЕДЕЛИМ СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ В РАССМАТРИВАЕМОЙ СИСТЕМЕ:**

$$\begin{aligned} \bar{q}_1(r) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} (\bar{q}_1(r, \tau)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \bar{q}_1(r, p)) = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{q_0 \varepsilon_1 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} r \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right]}{\pi R \left( \varepsilon_1 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right] + \varepsilon_2 K_1 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right] K_0 \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right] \right)} \right); \\ \bar{q}_1(r) &= \frac{q_0 \lambda_1}{\pi r (\lambda_1 + \lambda_2)}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

**АНАЛОГИЧНО, ДЛЯ ВЫРАЖЕНИЯ (3.93) МОЖНО ЗАПИСАТЬ**

$$\bar{q}_2(r) = \frac{q_0 \lambda_2}{\pi r (\lambda_1 + \lambda_2)}. \quad (3.95)$$

**МОЩНОСТИ, ПОСТУПАЮЩИЕ НА НАГРЕВ ТЕЛА 1 И ТЕЛА 2, БУДУТ ОПРЕДЕЛЯТЬСЯ**

**СЯ ПО ФОРМУЛАМ:**

$$q_{10} = \pi R \bar{q}_1(R) = \frac{q_0 \lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)}, \quad (3.96)$$

$$q_{20} = \pi R \bar{q}_2(R) = \frac{q_0 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)}. \quad (3.97)$$

**УСЛОВИЕ (3.40) ПРИНИМАЕТ ВИД**

$$\frac{q_{20}}{q_{10}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ll 1. \quad (3.98)$$

**УРАВНЕНИЯ (3.94), (3.95) ПОЗВОЛЯЮТ НАЙТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ИЗДЕЛИИ И ИЗ ОТНОСИТЕЛЬНО ТЕМПЕРАТУРЫ НАГРЕВАТЕЛЯ (В ДАННОЙ СИСТЕМЕ НЕТ УСТАНОВИВШЕГОСЯ СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ).**

**В СЛУЧАЕ  $R = R$**

$$T_1(R, \tau) = T_2(R, \tau) = T_H(\tau),$$

где  $T_H(\tau)$  – температура нагревателя.

**С УЧЕТОМ ТОГО, ЧТО**

$$\bar{q}_1(r) = -\lambda_1 \frac{\partial T_1(r, \tau)}{\partial r} \quad (3.99)$$

и  $\bar{q}_1(r)$  определяется из (3.94), можем записать, предварительно проинтегрировав (3.99) от  $R$  до  $r$ ,

- для тела 1

$$T_1(r, \tau) = T_H(\tau) - \frac{q_0}{\pi(\lambda_1 + \lambda_2)} \ln \left[ \frac{r}{R} \right]; \quad (3.100)$$

- для тела 2

$$T_2(r, \tau) = T_H(\tau) - \frac{q_0}{\pi(\lambda_1 + \lambda_2)} \ln \left[ \frac{r}{R} \right]. \quad (3.101)$$

**КАК ВИДНО ИЗ ВЫРАЖЕНИЙ (3.100) И (3.101), ТЕМПЕРАТУРЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ТЕЛА В ОБЛАСТИ КОНТАКТА БУДУТ С ТЕЧЕНИЕМ ВРЕМЕНИ СБЛИЖАТЬСЯ.**

### 3.3.2.4. Влияние термических сопротивлений

**С УЧЕТОМ ТОГО, ЧТО ИЗМЕРЕНИЯ ПРОВОДЯТСЯ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ СТАЦИОНАРНОМ ПОЛЕ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ, А ТАКЖЕ СЧИТАЯ, ЧТО ВЫПОЛНЯЮТСЯ УСЛОВИЯ (3.69), (3.98) (Т.Е. ПРЕНЕБРЕГАЕМ ТЕПЛОВЫМИ ПОТЕРЯМИ В МАТЕРИАЛ ИЗ), МОЖЕМ ЗАПИСАТЬ ДЛЯ РАСЧЕТНОЙ ОБЛАСТИ ТЕРМОГРАММЫ**

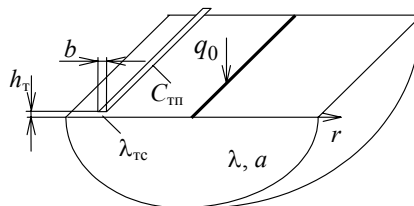
$$T_{\text{тп}} = \frac{q_0}{2\pi\lambda} \left( \ln \left[ \frac{4a\tau}{r^2} \right] - \gamma \right) - \Delta T_{\text{тс}}, \quad (3.102)$$

где  $T_{\text{тп}}$  – температура термоприемника;  $\Delta T_{\text{тс}}$  – разность между температурой термоприемника и температурой поверхности изделия (рис. 3.15). Значение  $\Delta T_{\text{тс}}$  можно представить в виде  $\Delta T_{\text{тс}} = \bar{q}' R_{\text{тс}}$ ,

где  $\bar{q}'$  – тепловой поток между термоприемником и изделием,  $R_{\text{тс}}$  – термическое сопротивление между термоприемником и изделием, равное

$$R_{\text{тс}} = \frac{h_{\text{т}}}{\lambda_{\text{тс}}},$$

здесь  $h_{\text{т}}$  – толщина слоя между термоприемником и изделием,  $\lambda_{\text{тс}}$  – теплопроводность материала слоя.



**Рис. 3.15. Расчетная схема**

**ВЕЛИЧИНУ  $R_{\text{тс}}$  МОЖНО СЧИТАТЬ ПОСТОЯННОЙ В ТЕЧЕНИЕ ВСЕГО ОПЫТА. НАЙДЕМ ПРИБЛИЖЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ  $\bar{q}'$ . ЕСЛИ МОЖНО ПРЕНЕБРЕЧЬ УТЕЧКАМИ ТЕПЛА В МАТЕРИАЛ ИЗ (УСЛОВИЯ (3.69), (3.98)), ТО ВСЕ ТЕПЛО, ПОСТУПАЮЩЕЕ К ТЕРМОПРИ-**

**ЕМНИКУ, ИДЕТ ТОЛЬКО НА ЕГО РАЗОГРЕВ. ТОГДА**

$$\bar{q}' = \frac{C_{тп}}{b} \frac{\partial T_{тп}}{\partial \tau} = \frac{C_{тп}}{b} \left( \frac{q_0}{2\pi\lambda\tau} - \frac{\partial(\Delta T_{тп})}{\partial \tau} \right), \quad (3.103)$$

где  $C_{тп}$  – теплоемкость единицы длины термопары.

**ОЧЕВИДНО, ЧТО  $\frac{q_0}{2\pi\lambda\tau} > \frac{\partial(\Delta T_{тп})}{\partial \tau}$ , ТАК КАК В ПРОТИВНОМ СЛУЧАЕ ПРОИСХОДИЛО БЫ НЕ НАГРЕВАНИЕ, А ОСТЫВАНИЕ ТЕРМОПРИЕМНИКА. С ДРУГОЙ СТОРОНЫ, ИЗ ВЫРАЖЕНИЯ (3.103) ВИДНО, ЧТО  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left( \frac{q_0}{2\pi\lambda\tau} \right) \rightarrow 0$ , Т.Е., В РАСЧЕТНОЙ ОБЛАСТИ ТЕРМОГРАММЫ  $\bar{q}' \approx 0$ , И**

$$T_{тп} = \frac{q_0}{2\pi\lambda} \left( \ln \left[ \frac{4a\tau}{r^2} \right] - \gamma \right)$$

при выполнении условия

$$\frac{\Delta T_{тп}}{T(r, \tau)} \approx \frac{h_{тп} C_{тп}}{\lambda_{тп} b \tau \left( \ln \left[ \frac{4a\tau}{r^2} \right] - \gamma \right)} \ll 1. \quad (3.104)$$

**ОТМЕТИМ, ЧТО ВЫРАЖЕНИЕ (3.104) БУДЕТ КОРРЕКТНЫМ ТОЛЬКО ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ТЕРМИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ МЕЖДУ ИЗДЕЛИЕМ И ТЕРМОПРИЕМНИКОМ.**

**ИЗ ВЫРАЖЕНИЙ (3.102) И (3.103) ВИДНО, ЧТО ТАМ, ГДЕ УСЛОВИЕ (3.104) НЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ, ВИД ЗАВИСИМОСТИ ТЕМПЕРАТУРЫ ОТ ВРЕМЕНИ В ТОЧКЕ ИЗМЕРЕНИЯ (ТЕРМОГРАММЫ) БУДЕТ ОТЛИЧЕН ОТ ВИДА УРАВНЕНИЙ (3.25), (3.28), (3.33). В МЕТОДЕ УЧИТЫВАЮТСЯ ТОЛЬКО ТЕ ТОЧКИ ТЕРМОГРАММЫ, ГДЕ ЭТИ ЗАВИСИМОСТИ ВЫПОЛНЯЮТСЯ.**

**3.4. УЧЕТ ИНТЕРВАЛА ВРЕМЕНИ, В ТЕЧЕНИЕ КОТОРОГО ИССЛЕДУЕМЫЙ ОБЪЕКТ МОЖНО СЧИТАТЬ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫМ**

Реальные объекты измерений имеют конечные размеры. С целью фиксирования временного интервала, в течение которого исследуемый объект можно считать полуограниченным, представим выражение (3.10) в виде [100]

$$T(r, \tau) = \frac{q_0 \tau_0}{2\pi\lambda\Delta\tau} E_1 \left[ \frac{r^2}{4a\tau} \right] + \frac{q_0}{2\pi^2\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \int_0^{\tau} \frac{\left( \sin \left[ \frac{2k\pi}{\Delta\tau} (\tau_0 - u) \right] + \sin \left[ \frac{2k\pi u}{\Delta\tau} \right] \right) \exp \left[ -\frac{r^2}{4a(\tau - u)} \right]}{(\tau - u)} du \right\}, \quad (3.105)$$

где  $E_1[x] = \int_x^{\infty} \frac{\exp[-u]}{u} du$  – экспоненциальный интеграл.

Второе слагаемое правой части уравнения (3.105) представляет собой ограниченную и периодическую функцию времени [106], при числе импульсов  $n > 5 - 7$  им можно пренебречь, отнеся к случайной погрешности измерения температуры, т.е. для точки поверхности полуограниченного тела, начиная с некоторого момента времени  $\tau > (5-7)\Delta\tau$ , имеет место зависимость

$$T(r, \tau) = \frac{q_0 \tau_0}{2\pi\lambda\Delta\tau} E_1 \left[ \frac{r^2}{4a\tau} \right]. \quad (3.106)$$

Так как реальные объекты измерения имеют конечные размеры, то формула (3.106) будет справедлива только ограниченное время испытания. С целью фиксирования интервала времени, в течение которого исследуемый объект можно считать полуограниченным, предлагается измерять разность температур между двумя точками его поверхности, причем дальняя точка должна находиться на расстоянии от нагревателя, не большем толщины объекта испытания. Для этой разности температур можно записать уравнение

$$T^*(s, r_1, \tau) = \frac{q_0 \tau_0}{2\pi\lambda\Delta\tau} \left( E_1 \left[ \frac{r_1^2}{4a\tau} \right] - E_1 \left[ \frac{s^2 r_1^2}{4a\tau} \right] \right), \quad (3.107)$$

где  $s = r_2/r_1$ .

Выражение (3.107) можно переписать в безразмерной форме

$$\Theta^*(s, Fo) = E_1 \left[ \frac{1}{4Fo} \right] - E_1 \left[ \frac{s^2}{4Fo} \right], \quad (3.108)$$

где  $Fo = \frac{a\tau}{r_1^2}$  – число Фурье (безразмерное время);  $\Theta^* = \frac{T^*}{q_0 \tau_0 / 2\pi\lambda\Delta\tau}$  – безразмерная температура,  $T^*$  – разность температур между двумя точками поверхности объекта испытания.

Характерной особенностью функции  $\Theta^*(s, Fo)$  является то, что для любого заданного значения  $s > 1$  на графике  $\Theta^* = \Theta^*(s, Fo)$  будет наблюдаться точка перегиба (например, на рис. 3.16 при  $s = 4$ ,  $Fo^* = 1,35$ ,  $\ln(Fo^*) = 0,3$ ), соответствующая значению

$$Fo^* = \frac{1}{8} \frac{s^2 - 1}{\ln[s]}, \quad (3.109)$$

которое получено из решения уравнения

$$\frac{d^2 \Theta(s, \ln[Fo^*])}{d(\ln[Fo])^2} = \frac{1}{4} \exp \left[ -\ln[Fo^*] - \frac{1}{4Fo^*} \right] - \frac{1}{4} s^2 \exp \left[ -\ln[Fo^*] - \frac{s^2}{4Fo^*} \right] = 0. \quad (3.110)$$

Касательная к точке  $\Theta^*(s, Fo^*)$  кривой  $\Theta^*(s, Fo)$  имеет вид (рис. 3.16)

$$\hat{\Theta}(s, Fo) = p(s)(\ln[Fo] + h(s)), \quad (3.111)$$

где

$$p(s) = \left( s \frac{2}{s^2 - 1} - s \frac{2s^2}{s^2 - 1} \right),$$

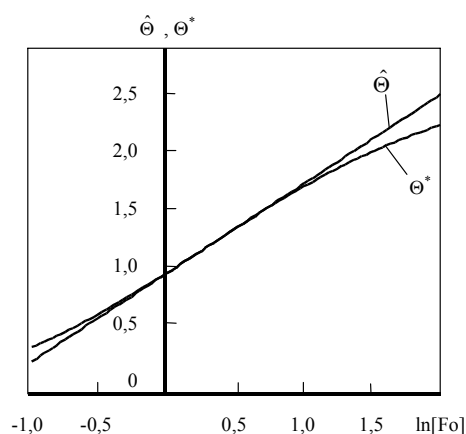


Рис. 3.16. Зависимости  $\Theta^* = f(\ln(Fo))$ ,  $\hat{\Theta} = f(\ln(Fo))$

$$h(s) = 3 \ln[2] - \ln \left[ \frac{s^2 - 1}{\ln[s]} \right] + \frac{E_1 \left[ \frac{2 \ln[s]}{s^2 - 1} \right] - E_1 \left[ \frac{2s^2 \ln[s]}{s^2 - 1} \right]}{\frac{2}{s \frac{2}{s^2 - 1}} - \frac{2s^2}{s^2 - 1}}.$$

На рис. 3.17 представлена зависимость  $p = f(s)$ , а на рис. 3.18 – зависимость  $h = f(s)$ . Точка перегиба будет соответствовать максимуму кривой  $\frac{d\Theta^*(s, \ln[\text{Fo}])}{d(\ln[\text{Fo}])}$  и значению

$$\frac{d\Theta^*(s, \ln[\text{Fo}^*])}{d(\ln[\text{Fo}])} = \text{Fo}^* \frac{d\Theta^*(s, \text{Fo}^*)}{d\text{Fo}} = p(s). \quad (3.112)$$

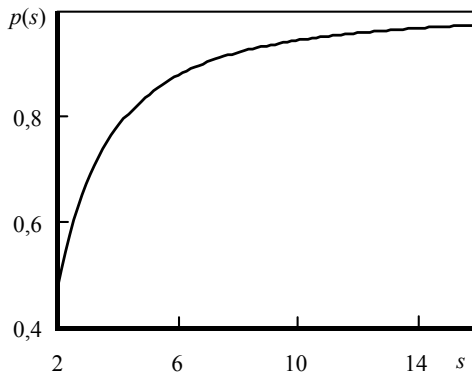


Рис. 3.17. Зависимость  $p = f(s)$

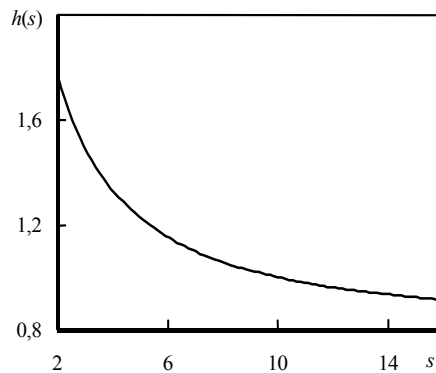


Рис. 3.18. Зависимость  $h = f(s)$

Поскольку расстояние  $r_2$  от нагревателя до дальней точки контроля температуры, относительно которой измеряется температура ближней точки поверхности объекта испытания, связано с его толщиной, для точек экспериментальной кривой, расположенных правее  $\text{Fo}^*$  ( $\text{Fo} > \text{Fo}^*$ ), начнут сказываться граничные условия. Поэтому в уравнение (3.108) необходимо ввести дополнительный член, величина которого будет тем больше, чем правее относительно  $\text{Fo}^*$  находится точка экспериментальной кривой (чем больше величина  $(\text{Fo} - \text{Fo}^*)$ ). Так как способ предполагает неразрушающее определение ТФС, учет этих граничных условий в явном виде затруднителен.

С учетом изложенного выше и принимая во внимание, что разность температур измеряется со случайной погрешностью, в которую входит и отбрасываемая сумма ряда (выражение (3.105)), на экспериментально снятой термограмме в координатах  $T^*$ ,  $\ln(\tau)$  можно выделить прямолинейный (рабочий) участок, соответствующий уравнению

$$T^* = \frac{p(s)q_0\tau_0}{2\pi\lambda\Delta\tau} [\ln(\tau) + \ln(a) - 2\ln(r_1) + h(s)]. \quad (3.113)$$

Данное уравнение можно записать в виде

$$T^* = \frac{\alpha}{\lambda} z + \frac{\alpha}{\lambda} (\ln(a) + \beta), \quad (3.114)$$

где  $z = \ln(\tau)$  – новая переменная;  $\alpha$  и  $\beta$  – постоянные, определяемые режимными и конструктивными особенностями устройства, реализующего способ, т.е.

$$\alpha = \frac{p(s)q_0\tau_0}{2\pi\lambda\Delta\tau}, \quad \beta = -h(s) + 2\ln(r_1). \quad (3.115)$$

Уравнение (3.114) можно представить в виде

$$T^* = b_1 z + b_0,$$

где  $b_1$  и  $b_0$  – величины, непосредственно определяемые из экспериментально снятых термограмм:

$$b_1 = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad b_0 = \frac{\alpha}{\lambda} (\ln(a) - \beta). \quad (3.116)$$

В результате выражения для определения ТФС исследуемых материалов будут иметь вид:

$$\lambda = \frac{\alpha}{b_1}, \quad a = \exp\left[\frac{b_0}{b_1} + \beta\right]. \quad (3.117)$$

Такая структура модели нестационарного процесса теплопереноса от линейного импульсного источника тепла, действующего на теплоизолированной поверхности полуграниченного тела, предполагает выделение на термограммах, как указывалось ранее, трех участков. Модель позволяет реализовать измерение ТФС исследуемого материала на основе аналитической зависимости для второго участка (см. (3.116), (3.117)).

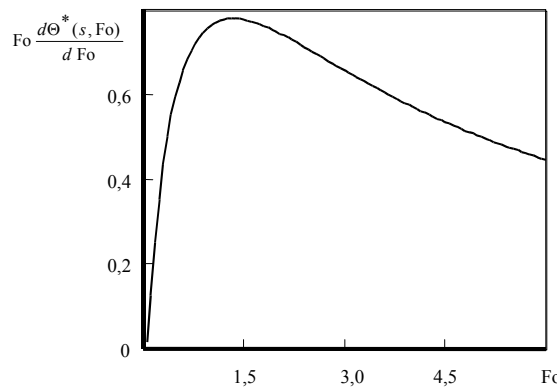
Для того, чтобы гарантировать определение ТФС с заданной точностью, в предлагаемом способе назначают период подачи импульсов, исходя из следующего.

Для определения коэффициента теплопроводности используется коэффициент  $b_1$ , непосредственно определяемый из термограммы, который представляет собой величину прямо пропорциональную значению  $p(s)$ , которая в свою очередь есть максимум кривой (рис. 3.19)

$$\frac{d\Theta^*(s, \ln[Fo])}{d(\ln[Fo])} = Fo \frac{d\Theta^*(s, Fo)}{d Fo} = \exp\left[-\frac{1}{4Fo}\right] - \exp\left[-\frac{s^2}{4Fo}\right],$$

и соответствует значению  $Fo^*$ . Поэтому для точек, лежащих правее и левее  $Fo^*$ , погрешность  $\delta$  рассчитывается как

$$\delta = 1 - \frac{\exp\left[-\frac{1}{4Fo}\right] - \exp\left[-\frac{s^2}{4Fo}\right]}{\frac{2}{s} \frac{1}{s^2-1} - s \frac{2s^2}{s^2-1}}. \quad (3.118)$$



**Рис. 3.19.** Зависимость  $Fo \frac{d\Theta^*(s, Fo)}{d Fo} = f(Fo)$

Решив это уравнение относительно  $Fo$ , получим два значения –  $Fo_1$ , лежащее левее  $Fo^*$ , и  $Fo_2$ , лежащее правее  $Fo^*$ . На основе  $Fo_1$  и  $Fo_2$  назначается частота подачи импульсов

$$\Delta\tau = \frac{\tau_2 - \tau_1}{k}, \quad \tau_1 = \frac{Fo_1 r_1^2}{a_{\max}}, \quad \tau_2 = \frac{Fo_2 r_1^2}{a_{\max}}, \quad (3.119)$$

где  $a_{\max}$  – максимальное значение из диапазона определения коэффициента температуропроводности;  $k$  – целое положительное число, большее пяти.

Так как для расчета коэффициента  $b_1$  используются точки, лежащие между  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , то реальная погрешность определения ТФС будет меньше величины  $\delta$ .

По результатам анализа точности измерения ТФС разработанным методом можно сделать следующие выводы.

1. Расчет случайной составляющей погрешности определения ТФС следует проводить на основе формул (3.19) – (3.22).



2. Нижняя граница определения ТФС определяется тепловыми свойствами материала подложки ИЗ. Условия, когда тепловыми потерями в материал подложки ИЗ можно пренебречь, имеют вид (3.69), (3.98).

3. Теплоемкости нагревателя и термодатчиков, а также термические сопротивления должны быть таковыми, чтобы выполнялись условия (3.40), (3.104). В этом случае данными факторами в расчетной области термограммы можно пренебречь.

4. Конечность размеров нагревателя не влияет на точность определения ТФС в случае, если постоянные прибора определяются на основе градуировочных экспериментов.

5. С целью фиксирования интервала времени, в течение которого исследуемый объект можно считать полуограниченным, чтобы гарантировать определение ТФС с заданной точностью, частота подачи импульсов  $\Delta t$  назначается по условиям (3.119).

#### 4. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЛОСКОГО КРУГЛОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

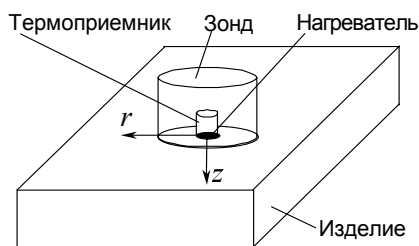
Рассмотрим математическую модель нестационарного процесса теплопереноса от плоского источника тепла в виде круга для измерительной схемы с одним термодатчиком, расположенным в центре нагревателя.

##### 4.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ТЕПЛОПЕРЕНОСА ОТ ПЛОСКОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА В ВИДЕ КРУГА ДЛЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СХЕМЫ С ОДНИМ ТЕРМОПРИЕМНИКОМ

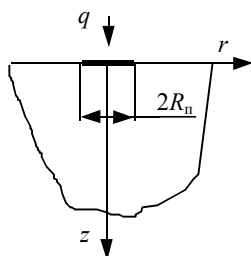
Метод измерения ТФС основан на физической модели, представленной на рис. 4.1. Тепловое воздействие на исследуемое тело с равномерным начальным температурным распределением осуществляется с помощью нагревателя постоянной мощности, выполненного в виде круга радиусом  $R_n$ .

Проведем анализ данной системы. Для этого рассмотрим модель нестационарного теплопереноса от плоского источника тепла постоянной мощности в виде круга. Получим выражение, определяющее развитие температурного поля от круглого ограниченного плоского нагревателя в полупространстве (рис. 4.2). Воспользуемся методом источников [7, 10]. Известно, что температурное поле от мгновенного точечного источника тепла, действующего в неограниченной среде, будет определяться следующим выражением [10]:

$$T_m(x, y, z, \tau) = \frac{Q}{c\rho(2\sqrt{\pi a \tau})^3} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}{4a\tau}\right];$$



**Рис. 4.1. Схема тепловой системы для метода с круглым нагревателем ( $r, z$  – пространственные координаты)**



**Рис. 4.2.**

где  $Q$  – количество тепла;  $x, y, z$  – координаты точки тела;  $\tau$  – время;  $x_1, y_1, z_1$  – координаты точки действия мгновенного источника тепла;  $c\rho$  – объемная теплоемкость;  $a$  – коэффициент температуропроводности.

В цилиндрических координатах с учетом того, что  $z_1 = 0$  и тело полуограниченное, это выражение записывается следующим образом:

$$T_M(r, \varphi, z, \tau) = \frac{2Q}{c_p (2\sqrt{\pi a \tau})^3} \exp \left[ -\frac{r^2 + r_1^2 - 2r_1 r \cos(\varphi - \varphi_1) + z^2}{4a\tau} \right], \quad (4.1)$$

где  $r, \varphi$  – координаты точки тела;  $r_1, \varphi_1$  – координаты точки действия мгновенного источника тепла.

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕПЛА ОТ ПЛОСКОГО НАГРЕВАТЕЛЯ В ВИДЕ КРУГА РАДИУСОМ  $R_n$ , СОЗДАЮЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ТЕЛА ТЕПЛОВОЙ ПОТОК  $Q$ , МОЖНО НАЙТИ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ФУНКЦИИ (4.1), ПЕРЕЙДЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО К ЭЛЕМЕНТАРНОМУ ИСТОЧНИКУ:**

$$dT(r, \varphi, z, \tau) = \frac{2q}{c_p [2\sqrt{\pi a(\tau-u)}]^3} \exp \left[ -\frac{r^2 + r_1^2 - 2r_1 r \cos(\varphi - \varphi_1) + z^2}{4a(\tau-u)} \right] r_1 d\varphi_1 dr_1 du,$$

где  $u$  – параметр интегрирования.

Проинтегрировав это выражение, получим формулу, определяющую закон распространения тепла от круглого нагревателя:

$$T(r, \varphi, z, \tau) = \frac{2q}{c_p (2\sqrt{\pi a})^3} \times \int_0^\tau \int_0^{R_n} \int_0^{2\pi} \frac{\exp \left[ -\frac{r^2 + r_1^2 - 2r_1 r \cos(\varphi - \varphi_1) + z^2}{4a(\tau-u)} \right]}{(\tau-u)^{3/2}} r_1 d\varphi_1 dr_1 du.$$

Выполнив замену переменных и с учетом того, что [106]

$$\int_0^{2\pi} \exp[x \cos(\varphi - \varphi_1)] d\varphi_1 = I_0(x),$$

можем записать

$$T(r, z, \tau) = \frac{2q2\pi}{c_p (2\sqrt{\pi a})^3} \int_0^\tau \int_0^{R_n} \frac{\exp \left[ -\frac{r^2 + r_1^2 + z^2}{4au} \right]}{u^{3/2}} I_0 \left[ \frac{r_1 r}{2au} \right] r_1 dr_1 du, \quad (4.2)$$

где  $I_0[x]$  – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Для точек, лежащих на оси  $z$  ( $r = 0$ ), будем иметь

$$T(0, z, \tau) = \frac{2q2\pi}{c_p (2\sqrt{\pi a})^3} \int_0^\tau \int_0^{R_n} \frac{\exp \left[ -\frac{r_1^2 + z^2}{4au} \right]}{u^{3/2}} r_1 dr_1 du.$$

С учетом того, что

$$\int_0^{R_n} r_1 \exp \left[ -\frac{r_1^2}{4au} \right] dr_1 = 2au \left( 1 - \exp \left[ -\frac{R_n^2}{4au} \right] \right),$$

можем записать

$$T(0, z, \tau) = \frac{2q2\pi2a}{c_p (2\sqrt{\pi a})^3} \int_0^\tau \frac{\left( 1 - \exp \left[ -\frac{R_n^2}{4au} \right] \right) \exp \left[ -\frac{z^2}{4au} \right]}{u^{1/2}} du.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^x \frac{\exp \left[ -\frac{k^2}{x} \right]}{x^{1/2}} dx = \left. \begin{array}{l} y = \frac{k}{x^{1/2}} \\ x = \frac{k^2}{y^2} \\ dx = -2k^2 \frac{dy}{y^3} \\ 0 < x < X \\ \frac{k}{\sqrt{X}} < y < \infty \end{array} \right| = 2k \int_{\frac{k}{\sqrt{X}}}^{\infty} \frac{\exp[-y^2]}{y^2} dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \begin{array}{l} u = \exp[-y^2] \\ dv = \frac{dy}{y^2} \\ du = -2y \exp[-y^2] \\ v = -\frac{1}{y} \end{array} \right] = -2k \frac{\exp[-y^2]}{y} \Big|_{\frac{k}{\sqrt{X}}}^{\infty} - 4k \int_{\frac{k}{\sqrt{X}}}^{\infty} \exp[-y^2] dy = \\
&= 2\sqrt{X} \exp\left[-\frac{k^2}{X}\right] - 2\sqrt{\pi k} \operatorname{erfc}\left[\frac{k}{\sqrt{X}}\right] = 2\sqrt{\pi X} \operatorname{ierfc}\left[\frac{k}{\sqrt{X}}\right].
\end{aligned}$$

С учетом последнего выражения можем окончательно записать формулу, определяющую закономерности распространения тепла от круглого плоского нагревателя в полупространстве по оси  $z$  [7, 100], т.е.

$$T(0, z, \tau) = \frac{2q\sqrt{a\tau}}{\lambda} \left( \operatorname{ierfc}\left[\frac{z}{2\sqrt{a\tau}}\right] - \operatorname{ierfc}\left[\frac{\sqrt{R_n^2 + z^2}}{2\sqrt{a\tau}}\right] \right). \quad (4.3)$$

Температура центра нагревателя ( $r = 0, z = 0$ ) будет определяться выражением

$$T(0, 0, \tau) = \frac{2q\sqrt{a\tau}}{\lambda} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \operatorname{ierfc}\left[\frac{R_n}{2\sqrt{a\tau}}\right] \right). \quad (4.4)$$

Рассмотрим поведение данной функции при больших и малых значениях  $\tau$ . При малых  $\tau$  величина  $\operatorname{ierfc}\left[\frac{R_n}{2\sqrt{a\tau}}\right] \ll \frac{1}{\sqrt{\pi}}$  и ею можно пренебречь. С учетом того, что  $\varepsilon = \frac{\lambda}{\sqrt{a}}$  ( $\varepsilon$  – тепловая активность материала), при малых значениях  $\tau$  выражение (4.4) принимает вид

$$T(0, 0, \tau) \approx \frac{2q\sqrt{\tau}}{\varepsilon\sqrt{\pi}}. \quad (4.5)$$

Для анализа выражения (4.4) при больших  $\tau$  представим его в виде

$$T(0, 0, \tau) = \frac{qR_n}{\lambda} \left( \frac{2\sqrt{a\tau}}{R_n\sqrt{\pi}} \left( 1 - \exp\left[-\frac{R_n^2}{4a\tau}\right] \right) + \operatorname{erfc}\left[\frac{R_n}{2\sqrt{a\tau}}\right] \right). \quad (4.6)$$

Тогда в области больших  $\tau$  имеет место

$$T(0, 0, \tau) \approx \frac{qR_n}{\lambda} \left( 1 - \frac{R_n}{2\sqrt{\pi a\tau}} \right). \quad (4.7)$$

Известно [7], что зависимости средней по нагревателю температуры  $S$  при малых и больших  $\tau$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
S(\tau) &\approx \frac{2q\sqrt{\tau}}{\varepsilon\sqrt{\pi}}; \\
S(\tau) &\approx \frac{2qR_n}{\lambda} \left( \frac{4}{3\pi} - \frac{R_n}{4\sqrt{\pi a\tau}} \right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим закономерности развития тепловых процессов в плоском (рис. 4.3) и в сферическом (рис. 4.4) полупространствах.

В случае плоского полупространства (рис. 4.3) температура ограничивающей поверхности ( $x = 0$ ) при действии источника тепла постоянной мощности  $q_{\text{пл}}$  будет определяться выражением [10]

$$T_{\text{пл}}(0, \tau) = \frac{2q_{\text{пл}}\sqrt{\tau}}{\varepsilon\sqrt{\pi}}. \quad (4.8)$$

В случае сферического полупространства (рис. 4.4) температура поверхности ( $r = R$ ), где действует источник тепла постоянной мощности, определяется формулой [7, 21]

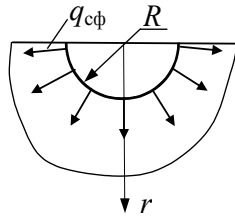
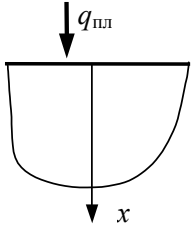
$$T_{\text{сф}}(R, \tau) = \frac{q_{\text{сф}}R}{\lambda} \left( 1 - \exp\left[-\frac{a\tau}{R^2}\right] \operatorname{erfc}\left[\sqrt{\frac{a\tau}{R^2}}\right] \right). \quad (4.9)$$

При больших  $\tau$  это выражение имеет вид

$$T_{\text{сф}}(R, \tau) \approx \frac{q_{\text{сф}} R}{\lambda} \left( 1 - \frac{R}{\sqrt{\pi a \tau}} \right). \quad (4.10)$$

Сравнив выражения (4.5), (4.8) и (4.7), (4.10), можно сделать следующие выводы:

- 1) при малых значениях  $\tau$  развитие теплового процесса (на начальной стадии) от ограниченного плоского нагревателя будет аналогично развитию теплового процесса в плоском полупространстве;
- 2) при больших значениях  $\tau$  развитие теплового процесса от плоского источника тепла будет аналогично процессу, протекающему в сферическом полупространстве.



**Рис. 4.3. Плоское полупространство**

**Рис. 4.4. Сферическое полупространство**

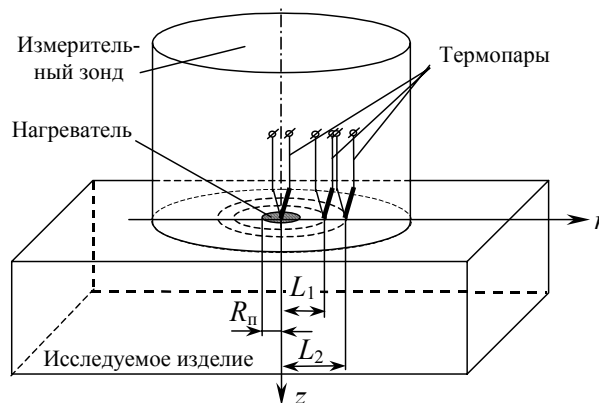
В реальном эксперименте на тепловой процесс будут оказывать влияние не только ТФС исследуемого материала, но и некоторые другие факторы. Наиболее важными из них являются: теплоотдача в материал зонда, теплоемкость нагревателя и термические сопротивления. Для получения расчетных выражений при определении ТФС исследуемых материалов с учетом указанных факторов воспользуемся приведенной выше аналогией развития тепловых процессов. Для учета теплоемкости нагревателя и теплоотдачи в материал измерительного зонда на начальной стадии развития теплового процесса будем рассматривать задачу о распространении тепла в плоском полупространстве, а при больших значениях  $\tau$  будем считать, что нагреватель представляет собой полусферу.

С целью максимального использования экспериментальных данных усложним измерительную схему метода, для чего избыточную температуру исследуемого изделия будем контролировать в центре нагревателя и на расстояниях  $L_1$  и  $L_2$  от центра.

#### 4.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ТЕПЛОПЕРЕНОСА ОТ ПЛОСКОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА В ВИДЕ КРУГА ДЛЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СХЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ ТЕРМОПРИЕМНИКАМИ

В методе используется физическая модель, схема которой представлена на рис. 4.5.

Тепловое воздействие на исследуемое тело с равномерным начальным распределением температуры осуществляется с помощью нагревателя постоянной мощности, выполненного в виде диска радиусом  $R_n$ , встроенного в измерительный зонд (ИЗ). Начальное температурное



**Рис. 4.5. Измерительная схема метода**

распределение контролируется несколькими термопарами одновременно (например, тремя, как на рис. 4.5). В ходе проведения эксперимента фиксируется избыточная температура исследуемого изделия (об-

разца)  $T$  в центре нагревателя и на расстояниях  $L_1$  и  $L_2$  от центра согласно измерительной схеме, представленной на рис. 4.5.

В общем случае на каждой термограмме можно выделить несколько участков, соответствующих различным состояниям температурного поля исследуемой системы. Так, для термограммы, зафиксированной центральной термопарой, характерны семь участков (рис. 4.6).

Первому (I) участку термограммы (состояние  $g_1$ , рис. 4.7) соответствует одномерное температурное поле (можно считать, что тепло распространяется только вдоль оси  $z$ , рис. 4.5). Тепловые потоки, поступающие в исследуемое изделие и зонд, изменяются во времени, так как нагреватель обладает теплоемкостью, часть теплового потока тратится на нагрев проводов и присутствует термическое сопротивление между нагревателем и образцом:

$$\nabla^2 T \approx \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \approx 0 \right), \quad q_0 = \text{var}, \quad q_0 + q_3 \neq q,$$

где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа [7, 10, 100];  $q_0, q_3$  – тепловые потоки, поступающие в исследуемое изделие и зонд соответственно.

Второму (II) участку термограммы (состояние  $g_2$ , рис. 4.7) отвечает одномерное температурное поле в образце. Процесс вышел на стадию регуляризации. Тепловые потоки, поступающие в образец и зонд, практически становятся постоянными, т.е.

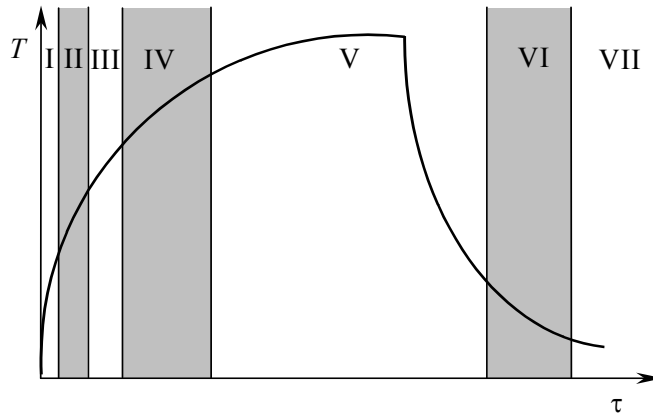


Рис. 4.6. Термограмма с выделенными рабочими участками

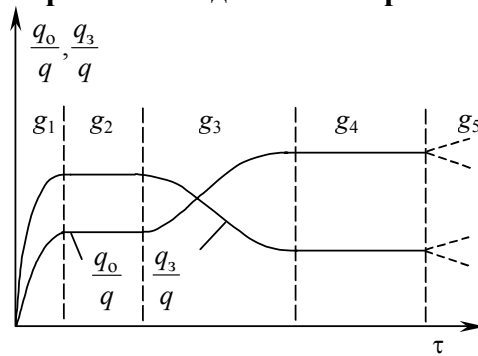


РИС. 4.7. ИЗМЕНЕНИЕ ПЕРЕМЕННОЙ СОСТОЯНИЯ В ПРОЦЕССЕ ЭКСПЕРИМЕНТА НА СТАДИИ НАГРЕВА ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЙ:

$$\varepsilon < \varepsilon', \quad \lambda > \lambda'$$

$$q_0 = \text{const}, \quad q_0 + q_3 \approx q, \quad \left( \frac{q_0}{q_3} \approx \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right),$$

где  $\varepsilon, \varepsilon'$  – тепловые активности исследуемого материала и материала подложки зонда.

Третьему (III) участку термограммы (состояние  $g_3$ ) соответствует двухмерное температурное поле в образце, поскольку нельзя пренебречь распространением тепла в радиальном направлении (вдоль оси  $r$ ). Тепловые потоки, поступающие в образец и зонд, снова становятся переменными. Для  $g_3$

$$\nabla^2 T \approx \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_0 = \text{var}, \quad q_3 = \text{var}.$$

Четвертому (IV) участку термограммы соответствует тепловой процесс, который вышел на стадию регуляризации. Тепловой поток  $q_0$  становится практически постоянным. Для  $g_4$  имеет место

$$q_0 = \text{const}, \quad q_0 + q_3 \approx q, \quad \left( \frac{q_0}{q_3} \approx \frac{\lambda'}{\lambda} \right),$$

здесь  $\lambda, \lambda'$  – теплопроводности исследуемого материала и материала подложки зонда.

Пятому (V) участку термограммы (стадия нагрева) соответствует тепловой процесс, в котором нарушаются условия неограниченности образца или зонда при нагревании. Тепловой поток  $q_0$  опять становится переменным, т.е. в состоянии  $g_5$

$$q_0 = \text{var}, \quad q_3 = \text{var}.$$

После отключения можно выделить шестой соответствующий на стадию регуляризации, процесс изменяется.

Участки термограммы определить значения ТФС аналитических функций, температурно-временных

Рассмотрим процесс полуограниченных (рис. 4.8) от плоского мощности нулевой идеальном тепловом Вне круга в плоскости тел ( $z = 0, r > R_n$ ) существует тонкая идеальная теплоизоляция.

В начальный момент времени, когда удельные тепловые потоки  $q_1$  и  $q_2$  зависят от соотношений тепловых активностей рассматриваемой системы тел и слабо зависят от времени, расчетную формулу получил В.П. Козлов в работе [100]. Данная формула имеет вид

$$\varepsilon_1 = \frac{2q\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi} T(\tau)} - \varepsilon'.$$

Для больших времен решение В.П. Козлова для двумерной нестационарной стадии эксперимента имеет сложный вид и его затруднительно использовать в методе НК ТФС.

Расчетные уравнения, описывающие термограмму на рабочих участках, в разрабатываемом методе найдены на основе решений краевых задач.

#### 4.2.1. Математическая модель распределения тепла в плоском полупространстве

Начальная стадия развития теплового процесса, как показали наши исследования и данные работы [100], характеризуется одномерным температурным полем в плоском полупространстве.

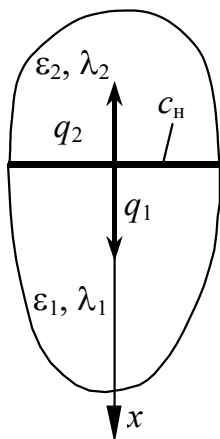


Рис. 4.9. Тепловая схема



РИС. 4.8. ТЕПЛОВАЯ СХЕМА СИСТЕМЫ С ПЛОСКИМ НАГРЕВАТЕЛЕМ

нагревателя, на стадии остывания, (VI) участок термограммы (рис. 4.6), тепловому процессу, который вышел и седьмой (VII) участок, где тепловой

II, IV и VI – рабочие, так как возможно в зависимости от параметров описывающих термограмму на данных интервалах.

распространения тепла в двух твердых телах с различными ТФС круглого нагревателя постоянной теплоемкости. Тела находятся в контакте в области  $0 \leq r \leq R_n, z = 0$ . соприкосновения полуограниченных

С целью учета теплоемкости нагревателя на начальной стадии теплового процесса решим следующую краевую задачу.

*Постановка задачи.* Даны два полуограниченных тела при температуре  $T(x, 0) = 0$ . В плоскости соприкосновения двух тел постоянно действует источник тепла с плотностью теплового потока  $q = q_1 + q_2$ , имеющий теплоемкость  $c_n$  (рис. 4.9).

Требуется найти распределение температурного поля в данной системе в любой момент времени.

В математической форме задача записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 T_1(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad \tau > 0; \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad x < 0, \quad \tau > 0; \quad (4.12)$$

- начальные условия:  $T_1(x, 0) \Big|_{x \geq 0} = T_2(x, 0) \Big|_{x \leq 0} = 0$ ; (4.13)

- граничные условия:  $T_1(+\infty, \tau) = T_2(-\infty, \tau) = 0$ ; (4.14)

$$T_1(0, \tau) = T_2(0, \tau); \quad (4.15)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(+0, \tau)}{\partial x} = q_1 - c_H \frac{\partial T_1(+0, \tau)}{\partial \tau}; \quad -\lambda_2 \frac{\partial T_2(-0, \tau)}{\partial x} = q_2 - c_H \frac{\partial T_2(-0, \tau)}{\partial \tau}. \quad (4.16)$$

Применив преобразование Лапласа к уравнениям (4.11) и (4.12), с учетом (4.13), получим

$$pT_{1L}(x, p) = a_1 \frac{d^2 T_{1L}(x, p)}{dx^2}, \quad x > 0, \quad pT_{2L}(x, p) = a_2 \frac{d^2 T_{2L}(x, p)}{dx^2}, \quad x < 0,$$

где  $T_L(x, p)$  – изображение функции  $T(x, \tau)$  в области преобразования Лапласа,  $p$  – комплексное переменное.

Решения последних дифференциальных уравнений имеют вид:

$$T_{1L}(x, p) = A \exp\left[\sqrt{\frac{p}{a_1}} x\right] + B \exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_1}} x\right], \quad x > 0.$$

$$T_{2L}(x, p) = C \exp\left[\sqrt{\frac{p}{a_2}} x\right] + D \exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_2}} x\right], \quad x < 0.$$

Граничные условия (4.14), (4.15) и (4.16) в области изображения:

$$T_{1L}(+\infty, p) = T_{2L}(-\infty, p) = 0;$$

$$T_{1L}(0, p) = T_{2L}(0, p);$$

$$-\lambda_1 \frac{dT_{1L}(+0, p)}{dx} - \lambda_2 \frac{dT_{2L}(-0, p)}{dx} = \frac{q}{p} - c_H p T_{1L}(+0, p) - c_H p T_{2L}(-0, p).$$

С учетом условий  $A = C = 0, B = D$

$$B = \frac{q}{p(2c_H p + \varepsilon_1 \sqrt{p} + \varepsilon_2 \sqrt{p})}.$$

В результате получим решение задачи для первого тела, преобразованное по Лапласу

$$T_{1L}(x, p) = \frac{q}{2c_H} \frac{\exp\left[-\frac{x}{\sqrt{a_1}} \sqrt{p}\right]}{p^{3/2} \left(\sqrt{p} + \frac{\varepsilon_1}{2c_H} + \frac{\varepsilon_2}{2c_H}\right)}, \quad x > 0.$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, получим выражение

$$T_1(x, \tau) = \frac{2q\sqrt{\tau}}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \operatorname{ierfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{a_1}\tau}\right] - \frac{2qc_H}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{a_1}\tau}\right] + \frac{2qc_H}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \exp\left[\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)x}{2c_H\sqrt{a_1}} + \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{4c_H^2} \tau\right] \operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{a_1}\tau} + \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2c_H} \sqrt{\tau}\right], \quad x > 0.$$

Для поверхностного слоя ( $x = 0$ )

$$T_1(0, \tau) = \frac{2q\sqrt{\tau}}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sqrt{\pi}} - \frac{2qc_H}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} + \frac{2qc_H}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \exp\left[\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{4c_H^2} \tau\right] \operatorname{erfc}\left[\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2c_H} \sqrt{\tau}\right].$$

Данное выражение, в области больших значений  $\frac{\varepsilon}{c_H} \sqrt{\tau}$ , отвечающее одномерному температурному полю в стадии регуляризации, с учетом  $c_H$  и теплоотдачи в материал зонда для поверхностного слоя ( $x = 0$ ) преобразуется к виду

$$T_1(0, \tau) = \frac{2q\sqrt{\tau}}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sqrt{\pi}} - \frac{2qc_H}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}. \quad (4.17)$$

## 4.2.2. Математические модели распределения тепла в сферическом полупространстве

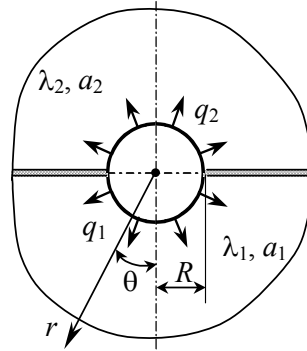
Известно [21], что распределение температурного поля в исследуемом теле от плоского круглого источника тепла постоянной мощности радиуса  $R_n$  (рис. 4.5, 4.8) при  $\tau \gg 0$  близко к распределению температурного поля в сферическом полупространстве со сферической полостью радиуса  $R$  (поверхностный сферический нагреватель), через которую осуществляется заданное тепловое воздействие с тем же тепловым потоком.

### 4.2.2.1. Стадия нагрева

*Постановка задачи.* Два полуограниченных тела (рис. 4.10) с различными ТФС находятся в идеальном тепловом контакте с поверхностным сферическим источником тепла постоянной мощности радиуса  $R$  и плотностью теплового потока  $q^* = q_1 + q_2$  при температуре  $T(r, \theta, 0) = 0$ . Вне сферы, в плоскости соприкосновения двух тел, существует тонкая идеальная теплоизоляция. Математически данная задача записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T_1(r, \theta, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \left( \frac{\partial^2 T_1(r, \theta, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_1(r, \theta, \tau)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T_1(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \right) \right),$$

$$r > R, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \tau > 0; \quad (4.18)$$



**Рис. 4.10. Тепловая схема системы с поверхностным сферическим нагревателем**

$$\frac{\partial T_2(r, \theta, \tau)}{\partial \tau} = a_2 \left( \frac{\partial^2 T_2(r, \theta, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_2(r, \theta, \tau)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T_2(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \right) \right),$$

$$r > R, \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi, \tau > 0; \quad (4.19)$$

$$T_1(r, \theta, 0) \Big|_{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}} = 0, \quad T_2(r, \theta, 0) \Big|_{\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi} = 0;$$

$$T_1(\infty, \theta, \tau) \Big|_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}} = T_2(\infty, \theta, \tau) \Big|_{\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi} = 0,$$

$$T_1(R, \theta, \tau) \Big|_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}} = T_2(R, \theta, \tau) \Big|_{\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi},$$

$$\frac{\partial T_1(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta = \frac{\pi}{2} \\ r > R \\ \tau > 0}} = \frac{\partial T_2(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta = \frac{\pi}{2} \\ r > R \\ \tau > 0}} = 0, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial T_1(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta = 0 \\ r > R \\ \tau > 0}} = \frac{\partial T_2(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta = \pi \\ r > R \\ \tau > 0}} = 0,$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(R, \theta, \tau)}{\partial r} \Big|_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}} = q_1, \quad -\lambda_2 \frac{\partial T_2(R, \theta, \tau)}{\partial r} \Big|_{\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi} = q_2, \quad \tau > 0.$$



Процесс теплопереноса в исследуемой системе близок к процессу в системе коаксиальных сфер (по аналогии с коаксиальными цилиндрами). Поэтому градиент температуры в каждом из рассматриваемых полуограниченных тел не зависит от координаты  $\theta$ . С учетом условия (4.20) при соотношении тепловых потоков  $2q^* = q$  [7, 100] получаем задачу, эквивалентную приведенной выше. Уравнения (4.18) и (4.19) с соответствующими начальными и граничными условиями запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial T_1(r, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \left( \frac{\partial^2 T_1(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_1(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad r > R, \quad \tau > 0, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}; \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial T_2(r, \tau)}{\partial \tau} = a_2 \left( \frac{\partial^2 T_2(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_2(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad r > R, \quad \tau > 0, \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi; \quad (4.22)$$

$$T_1(r, 0) \Big|_{\substack{r \geq R \\ 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}}} = 0, \quad T_2(r, 0) \Big|_{\substack{r \geq R \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi}} = 0; \quad (4.23)$$

$$T_1(\infty, \tau) \Big|_{\substack{\tau > 0 \\ 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}}} = T_2(\infty, \tau) \Big|_{\substack{\tau > 0 \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi}} = 0; \quad (4.24)$$

$$T_1(R, \tau) \Big|_{\substack{\tau > 0 \\ 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}}} = T_2(R, \tau) \Big|_{\substack{\tau > 0 \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi}}; \quad (4.25)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(R, \tau)}{\partial r} \Big|_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}-0} = q_1, \quad -\lambda_2 \frac{\partial T_2(R, \tau)}{\partial r} \Big|_{\frac{\pi}{2}+0 < \theta \leq \pi} = q_2, \quad \tau > 0. \quad (4.26)$$

Представим уравнения (4.21) и (4.22) в виде:

$$\frac{\partial [r T_1(r, \theta, \tau)]}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 [r T_1(r, \theta, \tau)]}{\partial r^2}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}; \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial [r T_2(r, \theta, \tau)]}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 [r T_2(r, \theta, \tau)]}{\partial r^2}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \quad (4.28)$$

Применим преобразование Лапласа к дифференциальным уравнениям (4.27) и (4.28):

$$pr T_{1L}(r, \theta, p) = a_1 \frac{d^2 [r T_{1L}(r, \theta, p)]}{dr^2}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2};$$

$$pr T_{2L}(r, \theta, p) = a_2 \frac{d^2 [r T_{2L}(r, \theta, p)]}{dr^2}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \quad (4.29)$$

Решения дифференциальных уравнений (4.29) имеют вид:

$$T_{1L}(r, \theta, p) = \frac{A}{r} \exp \left[ -\sqrt{\frac{p}{a_1}} r \right] + \frac{B}{r} \exp \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} r \right], \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}; \quad (4.30)$$

$$T_{2L}(r, \theta, p) = \frac{C}{r} \exp \left[ -\sqrt{\frac{p}{a_2}} r \right] + \frac{D}{r} \exp \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} r \right], \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \quad (4.31)$$

Граничные условия (4.24), (4.25), (4.26) в области изображения:

$$T_{1L}(\infty, p) \Big|_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}} = T_{2L}(\infty, p) \Big|_{\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi} = 0; \quad (4.32)$$

$$T_{1L}(R, p) \Big|_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}} = T_{2L}(R, p) \Big|_{\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi}; \quad (4.33)$$

$$-\lambda_1 \frac{dT_{1L}(R, p)}{dr} \Big|_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}-0} = \frac{q_1}{p}, \quad -\lambda_2 \frac{dT_{2L}(R, p)}{dr} \Big|_{\frac{\pi}{2}+0 < \theta \leq \pi} = \frac{q_2}{p}. \quad (4.34)$$

Из условия (4.32) следует, что  $B = D = 0$ , так как при  $r \rightarrow \infty$  температурный градиент стремится к нулю, а температура тела не может быть бесконечно большой.

Постоянную  $A$  определим из граничного условия (4.34):

$$\lambda_1 \frac{A}{R^2} \exp \left[ -\sqrt{\frac{p}{a_1}} R \right] \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} R + 1 \right] + \lambda_2 \frac{C}{R^2} \exp \left[ -\sqrt{\frac{p}{a_2}} R \right] \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} R + 1 \right] = \frac{q}{p}. \quad (4.35)$$

Из условия (4.33) имеем

$$A \exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_1}} R\right] = C \exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_2}} R\right],$$

откуда

$$C = A \exp\left[R\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} - \sqrt{\frac{p}{a_1}}\right)\right]. \quad (4.36)$$

Подставляя решение (4.36) в уравнение (4.35), получим

$$A = \frac{qR^2}{p \exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_1}} R\right] \left(\lambda_1 \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} R + 1\right) + \lambda_2 \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} R + 1\right)\right)}.$$

Следовательно, уравнение (4.30) примет вид

$$T_{1L}(r, p) = \frac{qR \exp\left[-(r-R)\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right]}{rp(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\sqrt{p} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\right)}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (4.37)$$

Применив обратное преобразование Лапласа к выражению (4.37), получим

$$T_1(r, \tau) = \frac{qR^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)r} \left( \operatorname{erfc}\left[\frac{r-R}{2\sqrt{a_1}\tau}\right] - \exp\left[\frac{r-R}{\sqrt{a_1}} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{R^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \tau\right] \times \operatorname{erfc}\left[\frac{r-R}{2\sqrt{a_1}\tau} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \sqrt{\tau}\right] \right), \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Используя разложение функции  $\operatorname{erfc}(x)$  в степенной ряд при больших значениях  $\tau$ , запишем

$$T_1(r, \tau) = \frac{qR^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)r} \left( 1 - \left( \frac{(r-R)(\lambda_1 + \lambda_2)\varepsilon_1}{R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\lambda_1} + 1 \right) \frac{R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)\sqrt{\pi\sqrt{\tau}}} \right), \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad (4.38)$$

где  $\lambda_1, \varepsilon_1, \lambda_2, \varepsilon_2$  – соответственно, теплопроводности и тепловые активности первого и второго тел (рис. 4.5).

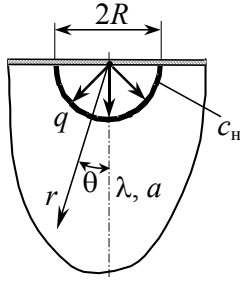
Преобразуем формулу (4.38) к виду

$$T_1(r, \tau) = \left( \frac{qR^2(r-R)}{\sqrt{\pi}\sqrt{a_1}r(\lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{qR^3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\sqrt{\pi}r(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \right) \frac{1}{\sqrt{\tau}} + \frac{qR^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)r}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (4.39)$$

#### 4.2.2.2. Стадия остывания

*Постановка задачи.* Тепловая система представляет собой полуограниченное тело (рис. 4.11), находящееся при температуре  $T(r, \theta, 0) = 0$ . На полусферической поверхности тела действует источник тепла постоянной мощности радиуса  $R$  с плотностью теплового потока  $q$  и теплоемкостью  $c_H$ . Тепловой источник действует задаваемый интервал времени. Затем источник тепла прекращает свое действие и система остывает. Необходимо найти распределение температурного поля в данной системе в любой момент времени после отключения источника тепла.

Считаем, что конечное распределение температур, после окончания действия источника тепла, будет близко к стационарному.



**Рис. 4.11 Тепловая схема системы с поверхностным полусферическим**

соотношения [10]:  $\lim_{p \rightarrow 0} (pT_L(r, p)) = \frac{qR^2}{\lambda r}$ .

В математическом виде задача записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T(r, \theta, \tau)}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T(r, \theta, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T(r, \theta, \tau)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T_1(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \right) \right),$$

$$r > R, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \tau > 0; \quad (4.41)$$

$$T(r, \theta, 0) \Big|_{\substack{r \geq R \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} = f(r); \quad (4.42)$$

$$T(\infty, \theta, \tau) \Big|_{\substack{\tau > 0 \\ 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}}} = 0; \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial T(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta = \frac{\pi}{2} \\ r > R \\ \tau > 0}} = 0, \quad \frac{\partial T(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta = 0 \\ r > R \\ \tau > 0}} = 0; \quad (4.44)$$

$$\lambda \frac{\partial T(R, \theta, \tau)}{\partial r} \Big|_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}} = c_H \frac{\partial T(R, \theta, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}}, \quad \tau > 0, \quad (4.45)$$

где  $f(r)$  – функция начального распределения температуры в полуограниченном теле;  $f(r) = \frac{qR^2}{\lambda r}$ .

В предположении, что градиент температуры в рассматриваемом полуограниченном теле не зависит от координаты  $\theta$ , и с учетом условия (4.44) при соотношении тепловых потоков  $2q^* = q$  [100] получаем задачу, эквивалентную приведенной выше. Уравнение (4.41) с соответствующими начальными и граничными условиями запишется

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad r > R, \tau > 0, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (4.46)$$

Запишем уравнение (4.46) в виде

$$\frac{\partial [rT(r, \tau)]}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 [rT(r, \tau)]}{\partial r^2}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (4.47)$$

В области преобразования Лапласа уравнение (4.47), начальные и граничные условия запишутся следующим образом:

$$prT_L(r, p) - \frac{qR^2}{\lambda} = a \frac{d^2 [rT_L(r, p)]}{dr^2}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}; \quad (4.48)$$

$$T_L(r, 0) \Big|_{\substack{r \geq R \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} = \frac{qR^2}{\lambda r}; \quad (4.49)$$

$$T_L(\infty, p) \Big|_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}} = 0; \quad (4.50)$$

Решение задачи о распределении температур в сферическом полупространстве при действии источника тепла постоянной мощности с теплоемкостью  $c_H$  приведено в [49]. Это решение в области преобразования Лапласа имеет вид

$$T_L(r, p) = \frac{qR \exp \left[ -(r-R) \sqrt{\frac{p}{a}} \right]}{c_H r p \left( p + \frac{\varepsilon}{c_H} \sqrt{p} + \frac{\lambda}{Rc_H} \right)}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (4.40)$$

Стационарное распределение температур найдем из предельно-

$$\lambda \left. \frac{dT_L(R, p)}{dr} \right|_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} - 0} = c_H \left( pT_L(R, p) - \frac{qR}{\lambda} \right). \quad (4.51)$$

Решение дифференциального уравнения (4.48), с учетом (4.49), имеет вид

$$rT_L(r, p) - \frac{qR^2}{\lambda p} = A \exp \left[ -\sqrt{\frac{p}{a}} r \right] + B \exp \left[ \sqrt{\frac{p}{a}} r \right], \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (4.52)$$

Из условия (4.50) следует, что  $B = 0$ , так как при  $r \rightarrow \infty$  температурный градиент стремится к нулю, а температура тела не может быть бесконечно большой. С учетом этого, выражение (4.52) приобретает вид

$$T_L(r, p) = \frac{A}{r} \exp \left[ -\sqrt{\frac{p}{a}} r \right] + \frac{qR^2}{\lambda p r}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (4.53)$$

Постоянную  $A$  найдем из условия (4.51):

$$-\frac{A}{R^2} \exp \left[ -\sqrt{\frac{p}{a}} R \right] \left( \sqrt{\frac{p}{a}} R + 1 \right) - \frac{q}{\lambda p} = c_H \left( p \frac{A}{R} \exp \left[ -\sqrt{\frac{p}{a}} R \right] + \frac{pqR}{\lambda p} - \frac{qR}{\lambda} \right),$$

откуда

$$A = -\frac{qR}{p \left( c_H p + \lambda \sqrt{\frac{p}{a}} + \frac{\lambda}{R} \right) \exp \left[ -\sqrt{\frac{p}{a}} R \right]}. \quad (4.54)$$

Подставив выражение (4.54) в уравнение (4.53), получаем решение дифференциального уравнения (4.48):

$$T_L(r, p) = \frac{qR^2}{\lambda p r} - \frac{qR \exp \left[ -(r-R) \sqrt{\frac{p}{a}} \right]}{c_H r p \left( p + \frac{\varepsilon \sqrt{p}}{c_H} + \frac{\lambda}{R c_H} \right)}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, при  $r = R$ , получим

$$T(R, \tau) = -\frac{q \exp[\phi^2 \tau] \operatorname{erfc}[-\phi \sqrt{\tau}]}{c_H (\phi - \psi) \phi} - \frac{q \exp[\psi^2 \tau] \operatorname{erfc}[-\psi \sqrt{\tau}]}{c_H (\psi - \phi) \psi}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2},$$

где  $\phi \psi = \frac{\lambda}{R c_H}$ ;  $\phi + \psi = -\frac{\varepsilon}{c_H}$ .

Используя разложение функции  $\operatorname{erfc}(x)$  в степенной ряд при больших значениях  $\tau$

$$T(R, \tau) = \frac{\varepsilon q R^2}{\lambda^2 \sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\tau}}. \quad (4.55)$$

Анализируя выражение (4.55), можно сделать вывод о том, что при больших значениях  $\tau$  теплоемкостью нагревателя можно пренебречь.

Решение задачи о распределении тепла в сферическом полупространстве в общем виде для  $r > R$  затруднительно. Для нахождения решения упростим задачу, исключив из рассмотрения теплоемкость нагревателя, так как при больших значениях  $\tau$  на стадии остывания ее влиянием можно пренебречь.

Задачу о распределении тепла в сферическом полупространстве от действия источника тепла постоянной мощности на стадии остывания без учета теплоемкости нагревателя в математическом виде запишем следующим образом:

$$\frac{\partial T(r, \theta, \tau)}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T(r, \theta, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T(r, \theta, \tau)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T_1(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \right) \right), \quad (4.56)$$

$$r > R, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \tau > 0;$$

$$T(r, \theta, 0) \Big|_{\substack{r \geq R \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} = \frac{qR^2}{\lambda r}; \quad (4.57)$$

$$T(\infty, \theta, \tau) \Big|_{\substack{\tau > 0 \\ 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}}} = 0, \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial T(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta = \frac{\pi}{2} - 0 \\ r > R \\ \tau > 0}} = 0, \quad \frac{\partial T(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta = 0 \\ r > R \\ \tau > 0}} = 0; \quad (4.59)$$

$$\lambda \frac{\partial T(R, \theta, \tau)}{\partial r} \Big|_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} - 0} = 0, \quad \tau > 0. \quad (4.60)$$

Уравнение (4.56) представим в виде

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (4.61)$$

Решая данную задачу аналогично предыдущей, запишем решение уравнения (4.61) в области преобразования Лапласа:

$$T_L(r, p) = \frac{qR^2}{\lambda p r} - \frac{qR \exp \left[ -(r-R) \sqrt{\frac{p}{a}} \right]}{\lambda r p \left( \frac{\sqrt{p}}{a} + \frac{1}{R} \right)}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, получим решение задачи о распределении тепла в сферическом полупространстве от действия источника тепла постоянной мощности на стадии остывания без учета теплоемкости нагревателя:

$$T(r, \tau) = \frac{qR^2 \left( 1 - \operatorname{erfc} \left[ \frac{1}{2} \frac{r-R}{\sqrt{\tau} \sqrt{a}} \right] + \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{r-R}{\sqrt{\tau} \sqrt{a}} + \frac{a\tau}{R^2} \right] \operatorname{erfc} \left[ \frac{1}{2} \frac{r-R}{\sqrt{\tau} \sqrt{a}} + \frac{\sqrt{\tau} \sqrt{a}}{R} \right] \right)}{\lambda r}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Воспользовавшись асимптотическим разложением функции  $\operatorname{erfc}(x)$  в степенной ряд при больших значениях  $\tau$  и упростив полученное выражение, получим

$$T(r, \tau) = \frac{\varepsilon q R^2}{\lambda^2 \sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\tau}}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (4.62)$$

Проанализировав выражение (4.62), можно сделать вывод о том, что температурное поле от источника тепла постоянной мощности на стадии остывания при больших значениях  $\tau$ , в случае  $r > R$ , существенно не зависит от пространственной координаты  $r$ .

#### 4.2.2.3. Распределение тепла в сферическом полупространстве для двух полуограниченных тел на стадии остывания

Расчетное уравнение, описывающее термограмму на VI участке вне зоны структурного превращения, получено на основе решения краевой задачи, которая формулируется следующим образом.

Тепловая система представляет собой два полуограниченных тела (рис. 4.10) с различными ТФС, на сферической поверхности которых действует источник тепла постоянной мощности. Тепловой источник действует определенный интервал времени, затем отключается и система остывает.

Конечное распределение температур, после окончания действия источника тепла, будет близко к стационарному.

Стационарное распределение температур найдем из предельного соотношения [10]

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p T_{1L}(r, p)) = \frac{qR^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)r},$$

где  $T_{1L}$  – решение задачи на стадии нагрева в области преобразования Лапласа (4.37).

Математически задача записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T_1(r, \theta, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \left( \frac{\partial^2 T_1(r, \theta, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_1(r, \theta, \tau)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T_1(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \right) \right), \quad (4.63)$$

$$r > R, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \tau > 0;$$

$$\frac{\partial T_2(r, \theta, \tau)}{\partial \tau} = a_2 \left( \frac{\partial^2 T_2(r, \theta, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_2(r, \theta, \tau)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T_2(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \right) \right), \quad (4.64)$$

$$r > R, \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi, \tau > 0;$$

$$T_1(r, \theta, 0) \Big|_{\substack{r \geq R \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} = f(r), \quad T_2(r, \theta, 0) \Big|_{\substack{r \geq R \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi}} = f(r); \quad (4.65)$$

$$T_1(\infty, \theta, \tau) \Big|_{\substack{\tau > 0 \\ 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}}} = T_2(\infty, \theta, \tau) \Big|_{\substack{\tau > 0 \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi}} = 0; \quad (4.66)$$

$$T_1(R, \theta, \tau) \Big|_{\substack{\tau > 0 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} = T_2(R, \theta, \tau) \Big|_{\substack{\tau > 0 \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi}}; \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial T_1(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta = \frac{\pi}{2} - 0 \\ r > R \\ \tau > 0}} = \frac{\partial T_2(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta = \frac{\pi}{2} + 0 \\ r > R \\ \tau > 0}} = 0, \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial T_1(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta = 0 \\ r > R \\ \tau > 0}} = \frac{\partial T_2(r, \theta, \tau)}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta = \pi \\ r > R \\ \tau > 0}} = 0;$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(R, \theta, \tau)}{\partial r} \Big|_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} - 0} = 0, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2(R, \theta, \tau)}{\partial r} \Big|_{\frac{\pi}{2} + 0 < \theta \leq \pi} = 0, \quad \tau > 0, \quad (4.69)$$

где  $f(r)$  – функция начального распределения температуры в полуограниченном теле;  $f(r) = \frac{qR^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)r}$ .

По аналогии с решением задачи на стадии нагрева запишем уравнения (4.63) и (4.64) в виде:

$$\frac{\partial T_1(r, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \left( \frac{\partial^2 T_1(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_1(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad r > R, \tau > 0, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}; \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial T_2(r, \tau)}{\partial \tau} = a_2 \left( \frac{\partial^2 T_2(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_2(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad r > R, \tau > 0, \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \quad (4.71)$$

Решения дифференциальных уравнений (4.70) и (4.71) в области преобразования Лапласа имеют вид:

$$rT_{1L}(r, p) - \frac{qR^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)p} = A \exp \left[ -\sqrt{\frac{p}{a_1}} r \right] + B \exp \left[ \sqrt{\frac{p}{a_1}} r \right], \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}; \quad (4.72)$$

$$rT_{2L}(r, p) - \frac{qR^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)p} = C \exp \left[ -\sqrt{\frac{p}{a_2}} r \right] + D \exp \left[ \sqrt{\frac{p}{a_2}} r \right], \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \quad (4.73)$$

Граничные условия для изображения можно записать в виде:

$$T_{1L}(\infty, p) \Big|_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}} = T_{2L}(\infty, p) \Big|_{\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi} = 0; \quad (4.74)$$

$$T_{1L}(R, p) \Big|_{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}} = T_{2L}(R, p) \Big|_{\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi}; \quad (4.75)$$

$$\lambda_1 \frac{dT_{1L}(R, p)}{dr} \Big|_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} - 0} = 0, \quad \lambda_2 \frac{dT_{2L}(R, p)}{dr} \Big|_{\frac{\pi}{2} + 0 < \theta \leq \pi} = 0. \quad (4.76)$$

Из условия (4.74) следует, что  $B = D = 0$ .

Постоянную  $A$  определим из граничного условия (4.76):

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \frac{A}{R^2} \exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_1}} R\right] \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} R + 1\right) + \frac{\lambda_1 q}{(\lambda_1 + \lambda_2) p} = \\ & = -\lambda_2 \frac{C}{R^2} \exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_2}} R\right] \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} R + 1\right) - \frac{\lambda_2 q}{(\lambda_1 + \lambda_2) p}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Из условия (4.75) имеем

$$A \exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_1}} R\right] = C \exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_2}} R\right],$$

тогда

$$C = A \exp\left[R \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} - \sqrt{\frac{p}{a_1}}\right)\right]. \quad (4.78)$$

Подставляя выражение (4.78) в уравнение (4.77), получим

$$A = -\frac{qR^2}{p \exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_1}} R\right] \left(\lambda_1 \left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} R + 1\right) + \lambda_2 \left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} R + 1\right)\right)}.$$

Следовательно, решение (4.72) примет вид

$$T_{1L}(r, p) = \frac{qR^2}{rp(\lambda_1 + \lambda_2)} - \frac{qR \exp\left[-(r-R)\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right]}{rp(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\sqrt{p} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\right)}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Перейдя от изображения к оригиналу и воспользовавшись разложением функции  $\operatorname{erfc}(x)$  в ряд при больших значениях  $\tau$  для первого тела, получим:

$$T_1(r, \tau) = \frac{qR^3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{r\sqrt{\pi}(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \left(\frac{(r-R)(\lambda_1 + \lambda_2)}{\sqrt{a_1} R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + 1\right) \frac{1}{\sqrt{\tau}}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}; \quad (4.79)$$

$$T_1(R, \tau) = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)qR^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\tau}}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (4.80)$$

Полученные решения (4.22) и (4.79) описывают термограммы на рабочих участках и используются в методе неразрушающего теплофизического контроля.

### 4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛЕЙ ПЛОСКОГО И СФЕРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВ РЕАЛЬНЫМ ТЕПЛОВЫМ ПРОЦЕССАМ

#### 4.3.1. Модель плоского полупространства

Выражение (4.3), определяющее развитие температурного поля от круглого ограниченного плоского нагревателя в полупространстве (рис. 4.2), имеет весьма сложный вид и малоприспособно для использования при реализации метода НК. Известно, что распределение температурного поля от плоского круглого источника тепла постоянной мощности радиуса  $R_n$  при малых значениях  $\tau$  близко к распределению температурного поля в плоском полупространстве. Для получения математической модели, описывающей процесс распространения тепла в исследуемой системе, модель с плоским круглым нагревателем постоянной мощности радиусом  $R_n$  заменена на модель с бесконечным плоским нагревателем, что позволило получить простое расчетное соотношение, описывающее термограмму на рабочем участке.

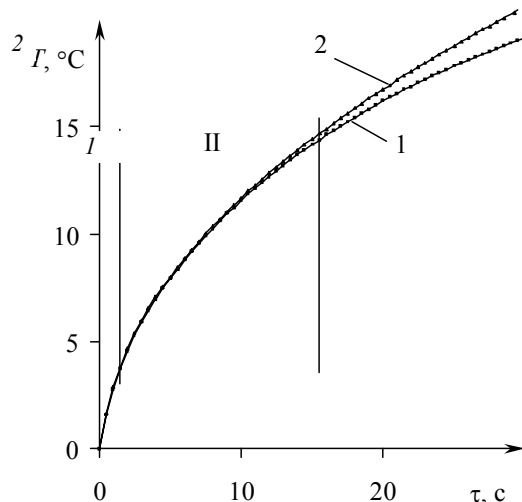
Для определения условий адекватности моделей воспользуемся численным моделированием температурных полей методом конечных элементов с помощью пакета ELCUT [286].

Уравнение, описывающее изменение избыточной температуры в центре плоского круглого источника тепла постоянной мощности, при действии этого источника в системе двух полуограниченных тел, полученное по модели плоского полупространства, имеет вид (4.17):

$$T(0, \tau) = \frac{2q\sqrt{\tau}}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sqrt{\pi}} - \frac{2qc_n}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}.$$

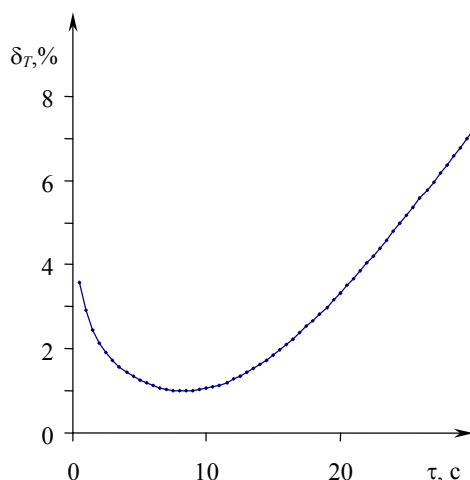
По зависимости (4.17) и с использованием пакета ELCUT проведены расчеты и построены термограммы, представленные на рис. 4.12, при следующих условиях:  $q = 5000 \text{ Вт/м}^2$ ;  $R_{\text{п}} = 0,004 \text{ м}$ ;  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 743 \text{ Вт}\cdot\text{с}^{0,5}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,25 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ ;  $\rho_1 = \rho_2 = 2200 \text{ кг/м}^3$ .

Зависимость относительной погрешности  $\delta_T = \frac{2(T_1 - T_2)}{T_1 + T_2} 100\%$  от времени  $\tau$  представлена на рис. 4.13. Погрешность  $\delta_T$  обусловлена различием математических моделей распределения тепла от круглого и бесконечного плоского источников тепла. На рабочем участке термограммы относительная погрешность не превышает значения  $\delta_T = 2\%$ .



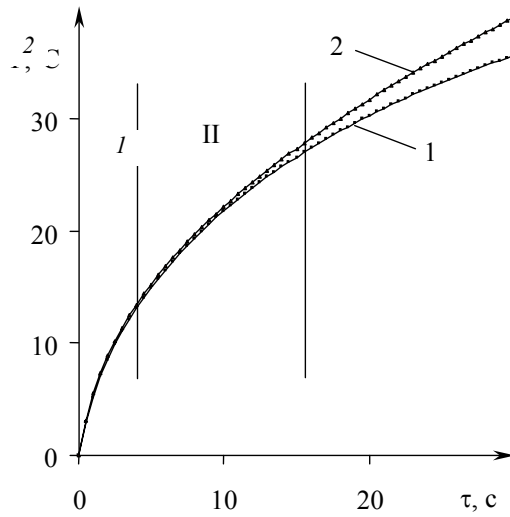
**Рис. 4.12. Термограммы, построенные для системы двух полуограниченных тел с одинаковыми ТФС без учета теплоемкости нагревателя:**

1 – круглый источник тепла, расчеты выполнены с использованием пакета ELCUT; 2 – бесконечный плоский нагреватель, расчеты выполнены по зависимости (4.17)



**Рис. 4.13. Зависимость  $\delta_T = f(\tau)$**





**Рис. 4.14. Термограммы, построенные для системы двух полуограниченных тел с различными ТФС без учета теплоемкости нагревателя:**

1 – круглый источник тепла, расчеты выполнены с использованием пакета ELCUT; 2 – бесконечный плоский нагреватель, расчеты выполнены по зависимости (4.17)

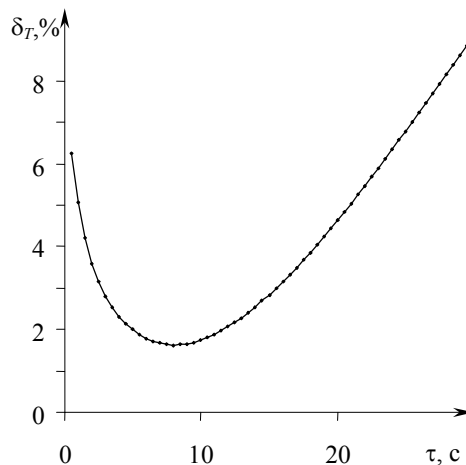
Для случая, когда контактирующие полуограниченные тела имеют разные ТФС, проведены аналогичные действия. Расчеты выполнены при следующих условиях:  $q = 5000 \text{ Вт/м}^2$ ;  $R_{\text{п}} = 0,004 \text{ м}$ ;  $c_1 = 1005 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$ ;  $\rho_1 = 2200 \text{ кг/м}^3$ ;  $\lambda_1 = 0,25 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ ;  $\varepsilon_1 = 743,47 \text{ Вт}\cdot\text{с}^{0,5}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$ ;  $c_2 = 1270 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$ ;  $\rho_2 = 50 \text{ кг/м}^3$ ;  $\lambda_2 = 0,028 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ ;  $\varepsilon_2 = 42,17 \text{ Вт}\cdot\text{с}^{0,5}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$ .

Относительная погрешность  $\delta_T$  (рис. 4.15) на рабочем участке не превышает значения  $\delta_T = 3 \%$ .

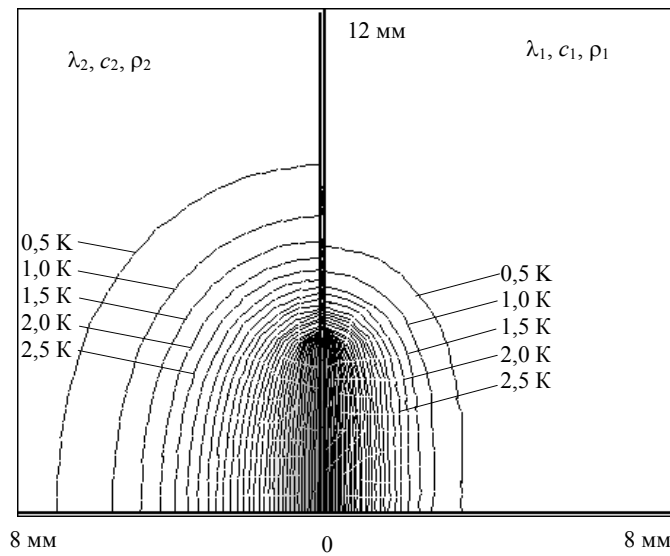
Анализируя графики, представленные на рис. 4.13 и 4.15, можно сделать вывод о том, что несовпадение рассматриваемых моделей минимально при равных значениях коэффициентов тепловых активностей материалов подложки зонда и исследуемого изделия.

Таким образом, данные, представленные на рис. 4.13 и 4.15, позволяют рекомендовать применение расчетной зависимости (4.17) на рабочем участке термограммы в методе НК ТФС.

Визуализация температурных полей в системе зонд–исследуемое тело при малых значениях  $\tau$  представлена на рис. 4.16 – 4.18. Температурные поля построены с помощью пакета ELCUT [286].

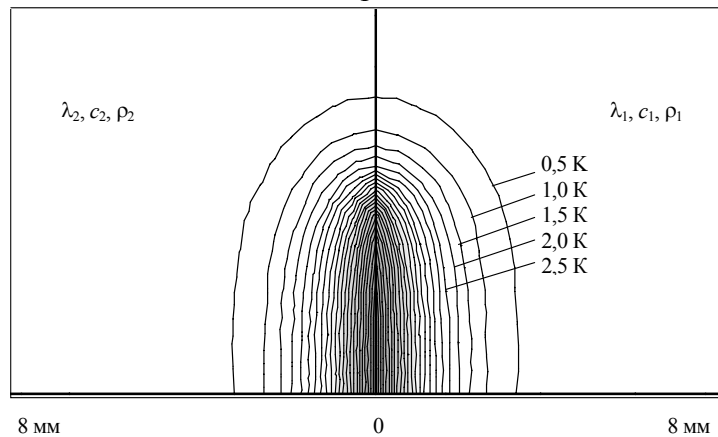


**Рис. 4.15. Зависимость  $\delta_T = f(\tau)$**



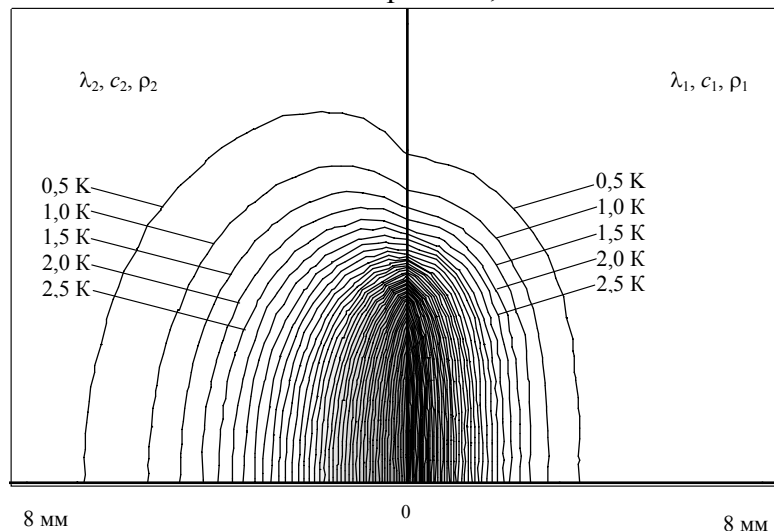
**Рис. 4.16. Распределение температурного поля ( $T$ ) от плоского круглого нагревателя постоянной мощности в системе двух полуограниченных тел при идеальной теплоизоляции между ними при следующих условиях:**

$\tau = 10$  с;  $R = 0,004$  м;  $q = 5000$  Вт/м<sup>2</sup>;  $\lambda_1 = 0,25$  Вт/м·К;  $c_1 = 1005$  Дж/кг·К;  $\rho_1 = 2200$  кг/м<sup>3</sup>;  $\lambda_2 = 0,028$  Вт/м·К;  $c_2 = 1270$  Дж/кг·К;  $\rho_2 = 50$  кг/м<sup>3</sup>; шаг изотерм = 0,5 К



**Рис. 4.17. Распределение температурного поля ( $T$ ) от плоского круглого нагревателя постоянной мощности в системе двух полуограниченных тел при идеальном тепловом контакте между ними при следующих условиях:**

$\tau = 10$  с;  $R = 0,004$  м;  $q = 5000$  Вт/м<sup>2</sup>;  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,25$  Вт/м·К;  $c_1 = c_2 = 1005$  Дж/кг·К;  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 743,47$  Вт·с<sup>0,5</sup>·м<sup>-2</sup>·К<sup>-1</sup>;  $\rho_1 = \rho_2 = 2200$  кг/м<sup>3</sup>; шаг изотерм = 0,5 К



**Рис. 4.18. Распределение температурного поля ( $T$ ) от плоского круглого нагревателя постоянной мощности в системе двух полуограниченных тел при идеальном тепловом контакте между ними**

при следующих условиях:  $\tau = 10$  с;  $R = 0,004$  м;  $q = 5000$  Вт/м<sup>2</sup>;  $\lambda_1 = 0,25$  Вт/м·К;  $c_1 = 1005$  Дж/кг·К;  $\rho_1 = 2200$  кг/м<sup>3</sup>;  $\lambda_2 = 0,028$  Вт/м·К;  $c_2 = 1270$  Дж/кг·К;  $\rho_2 = 50$  кг/м<sup>3</sup>; шаг изотерм = 0,5 К

#### 4.3.2. Модель сферического полупространства

Для получения математической модели, описывающей процесс распространения тепла в исследуемой системе, плоский круглый нагреватель постоянной мощности заменен эквивалентным ему поверхностным сферическим нагревателем, что позволило получить простые расчетные соотношения, описывающие термограмму на рабочих участках.

Получены расчетные выражения (4.39) и (4.79), в которые входит параметр  $R$ , представляющий собой эквивалентный радиус поверхностного сферического нагревателя, создающего в исследуемой системе температурное поле, близкое к температурному полю от плоского круглого источника тепла радиуса  $R_n$ .

Для определения условий адекватности модели сферического полупространства реальному тепловому процессу необходимо найти такое соотношение радиусов  $R_n$  и  $R$ , при котором температурные поля, создаваемые круглым плоским и сферическим поверхностным нагревателями, будут идентичными.

Нагревателем в единицу времени генерируется суммарное количество теплоты  $Q$ . Плотность теплового потока, поступающего в образец и зонд от плоского круглого источника тепла постоянной мощности –  $q = \frac{Q}{S_n}$ , где  $S_n = \pi R_n^2$  – площадь поверхности нагревателя [100]. Плотность теплового потока от поверхностного сферического источника тепла –  $q^* = \frac{Q}{S}$ , где  $S = 4\pi R^2$  – площадь поверхности сферического нагревателя. При условии равенства величин плотностей тепловых потоков от круглого плоского и поверхностного сферического источников тепла ( $q = q^*$ ), соотношение радиусов нагревателей примет вид

$$R = \frac{R_n}{2}. \quad (4.81)$$

Воспользуемся данным соотношением радиусов для сравнения расчетного соотношения, полученного при реализации модели распространения тепла в сферическом полупространстве, с решением краевой задачи нестационарной теплопроводности для системы двух полуограниченных тел при наличии в плоскости их контакта круглого источника тепла постоянной мощности, полученным В.П. Козловым [100].

Также воспользуемся численным моделированием двумерных полей методом конечных элементов с помощью пакета ELCUT [286].

Закон изменения избыточной температуры в центре плоского круглого источника тепла постоянной мощности, при действии этого источника в системе двух полуограниченных тел (рис. 4.8) с одинаковыми ТФС [100], имеет вид

$$T = \frac{q\sqrt{\tau}}{\varepsilon} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \text{ierfc} \left[ \frac{R_n}{2\sqrt{a\tau}} \right] \right). \quad (4.82)$$

Решение, полученное для поверхностного сферического источника тепла на стадии нагрева при  $r = R$ ,

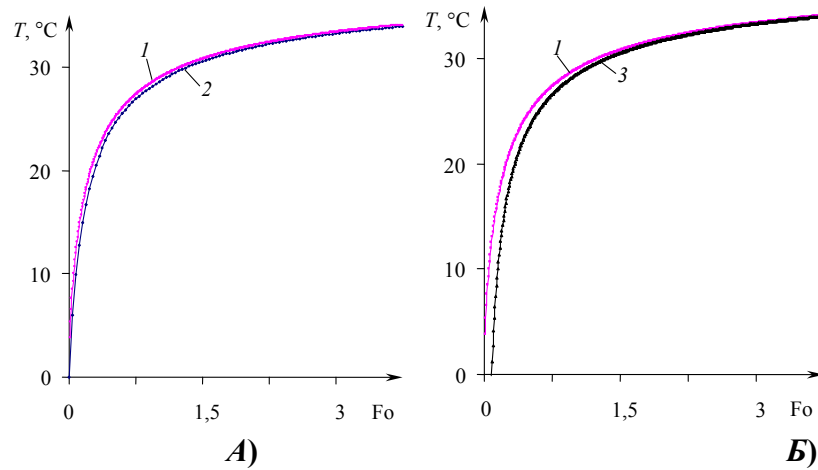
$$T(R, \tau) = \frac{2q^* R}{(\lambda_1 + \lambda_2)} - \frac{2q^* R^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\sqrt{\pi} (\lambda_1 + \lambda_2)^2} \frac{1}{\sqrt{\tau}}. \quad (4.83)$$

В критериальной форме с учетом условия (4.81), решения (4.82) и (4.83) запишутся следующим образом:

$$T = \frac{qR_n\sqrt{Fo}}{\lambda} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \text{ierfc} \left[ \frac{1}{2\sqrt{Fo}} \right] \right); \quad (4.84)$$

$$T(Fo) = \frac{q^* R_n}{(\lambda_1 + \lambda_2)} - \frac{q^* R_n (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sqrt{a_1}}{2\sqrt{\pi} (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \sqrt{Fo}}. \quad (4.85)$$

По зависимостям (4.84), (4.85) и с использованием пакета ELCUT проведены расчеты и построены термограммы, представленные на рис. 4.19, при следующих условиях:  $q = q^* = 5000$  Вт/м<sup>2</sup>;  $R_n = 0,004$  м;  $a_1 = 0,113 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 743,47$  Вт·с<sup>0,5</sup>·м<sup>-2</sup>·К<sup>-1</sup>;  $R = 0,002$  м;  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0,25$  Вт/м·К.



**Рис. 4.19. Термограммы, построенные для системы теплового контакта двух полуограниченных тел с одинаковыми ТФС:**

1 – круглый источник тепла, расчеты выполнены по зависимости (4.84), (а, б);  
 2 – круглый источник тепла, расчеты выполнены с использованием пакета ELCUT, (а); 3 – сферический  
 поверхностный нагреватель,  
 расчеты выполнены по зависимости (4.85), (б)

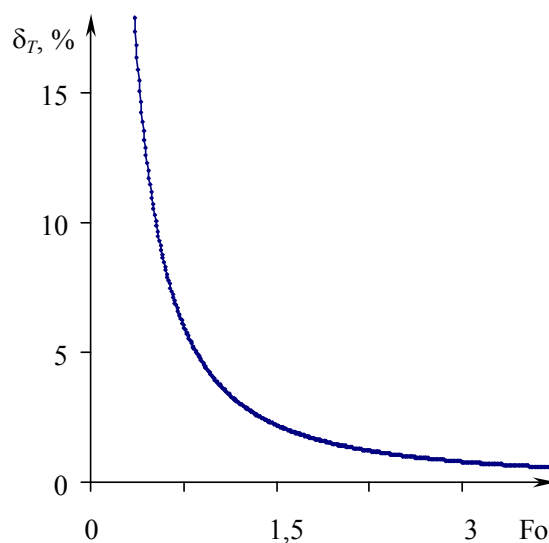
Термограммы, построенные с использованием модели круглого источника тепла по формуле (4.82) и с помощью пакета ELCUT, отличаются менее чем на 1 %.

Зависимость относительной погрешности  $\delta_T = \frac{T_1 - T_3}{T_1} 100\%$  от безразмерного числа  $Fo = a\tau / R_n^2$ , обусловленной различием математических моделей распределения тепла от плоского круглого и сферического источников тепла, представлена на рис. 4.20. При значениях  $Fo > 2$  относительная погрешность  $\delta_T$  не превышает значения  $\delta_T = 1\%$ .

Для случая, когда контактирующие полуограниченные тела имеют разные ТФС, проведем численные расчеты по модели распределения тепла от плоского круглого нагревателя, пользуясь пакетом ELCUT. Для модели распределения тепла от сферического нагревателя воспользуемся формулами (4.39) и (4.85).

Запишем решение (4.39) с учетом условия (4.81) в безразмерном (критериальном) виде. Определим общепринятые критерии [10]:

$$Fo = \frac{a_1\tau}{R_n^2}; \quad K_\varepsilon^{-1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}; \quad K_\lambda^{-1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$



**Рис. 4.20. Зависимость  $\delta_T = f(Fo)$**

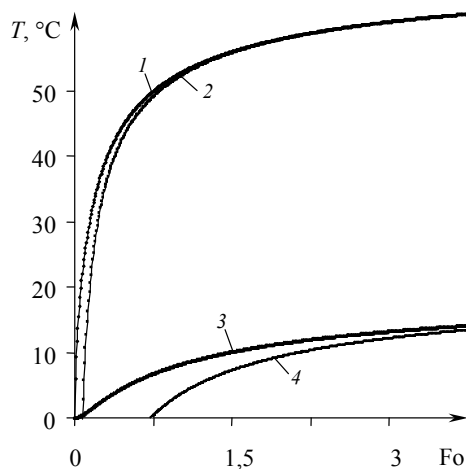
Введем критерий  $K_r = \frac{r}{R_{\Pi}}$ , определяющий относительное расстояние произвольной точки исследуемого тела от начала координат

$$T(K_r, Fo) = \frac{q^* R_{\Pi}}{2\lambda_1 \sqrt{\pi(1+K_{\lambda}^{-1})} \sqrt{Fo}} \left( \frac{1}{2K_r} - 1 - \frac{(1+K_{\varepsilon}^{-1})}{2K_r(1+K_{\lambda}^{-1})} \right) + \frac{q^* R_{\Pi}}{2K_r \lambda_1 (1+K_{\lambda}^{-1})}. \quad (4.86)$$

С использованием формул (4.85), (4.86) и пакета ELCUT проведены расчеты и построены термограммы, представленные на рис. 4.21. Расчеты выполнены при следующих условиях:  $q^* = 5000 \text{ Вт/м}^2$ ;  $R_{\Pi} = 0,004 \text{ м}$ ;  $a_1 = 0,113^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\varepsilon_1 = 743,47 \text{ Вт}\cdot\text{с}^{0,5}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$ ;  $\lambda_1 = 0,25 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ ;  $K_{\lambda} = 0,112$ ;  $K_{\varepsilon} = 0,057$ .

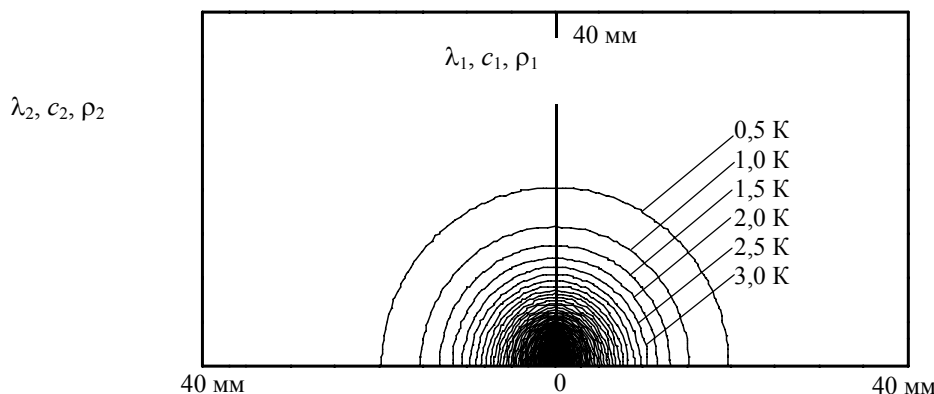
Таким образом, определение условий адекватности математической модели сферического полупространства реальному тепловому процессу от плоского круглого источника тепла позволило рекомендовать применение расчетных зависимостей (4.39) и (4.79) на рабочих участках термограммы в методе НК ТФС материалов и изделий.

Визуализация температурных полей в системе зонд–изделие при больших значениях  $\tau$  представлена на рис. 4.22 – 4.25. Температурные поля построены с помощью пакета ELCUT [286].



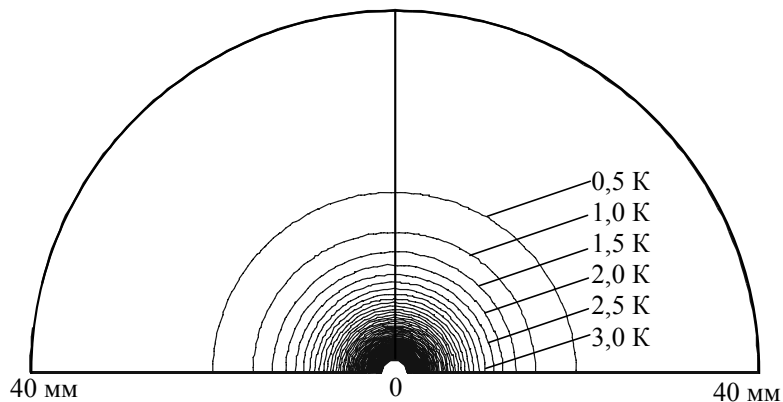
**Рис. 4.21. Термограммы, построенные для системы теплового контакта двух полуограниченных тел с различными ТФС:**

- 1 – круглый источник тепла (ELCUT),  $r = 0$ ;
- 2 – сферический поверхностный нагреватель (4.85),  $r = R$ ;
- 3 – круглый источник тепла,  $K_r = 1,5$  (ELCUT);
- 4 – сферический поверхностный нагреватель,  $K_r = 1,5$  (4.86)



**Рис. 4.22. Распределение температурного поля ( $T$ ) от плоского круглого нагревателя постоянной мощности в системе двух полуограниченных тел при идеальном тепловом контакте между ними при следующих условиях:**

- $\tau = 500 \text{ с}$ ;  $q = 5000 \text{ Вт/м}^2$ ;  $R_{\Pi} = 0,004 \text{ м}$ ;  $a_1 = a_2 = 0,113^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ;
- $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 743,47 \text{ Вт}\cdot\text{с}^{0,5}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,25 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ ;  $c_1 = c_2 = 1005 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$ ;
- $\rho_1 = \rho_2 = 2200 \text{ кг/м}^3$ ; шаг изотерм – 0,5 К

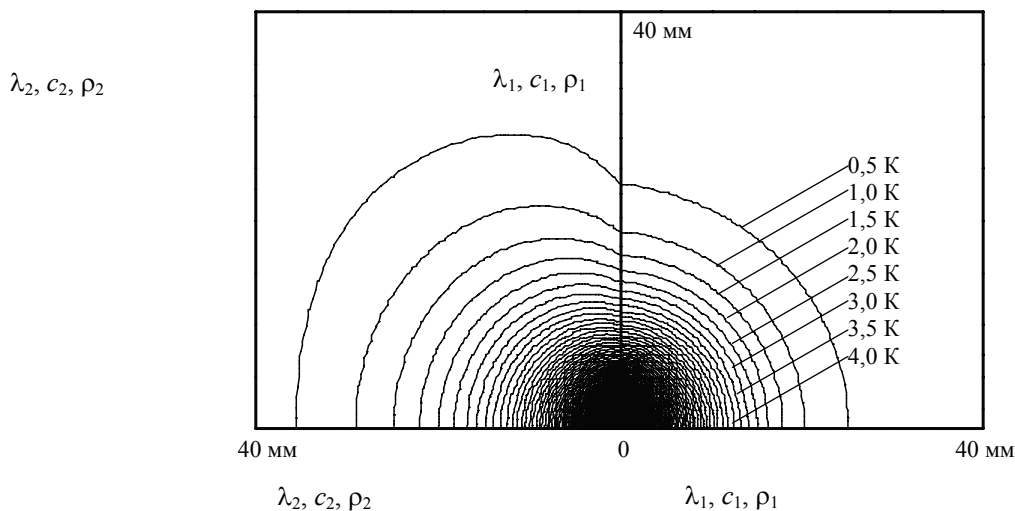


**Рис. 4.23. Распределение температурного поля ( $T$ ) от поверхностного сферического нагревателя постоянной мощности в системе двух полуограниченных тел при идеальном тепловом контакте между ними при следующих условиях:**

$$\tau = 500 \text{ с}; q^* = 5000 \text{ Вт/м}^2; R = 0,002 \text{ м}; a_1 = a_2 = 0,113^{-6} \text{ м}^2/\text{с};$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 743,47 \text{ Вт} \cdot \text{с}^{0,5} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}; \lambda_1 = \lambda_2 = 0,25 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}; c_1 = c_2 = 1005 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К};$$

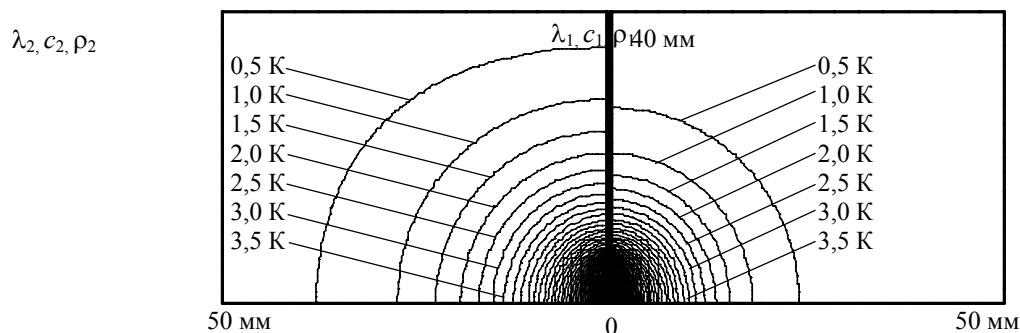
$$\rho_1 = \rho_2 = 2200 \text{ кг/м}^3; \text{ шаг изотерм} - 0,5 \text{ К}$$



**Рис. 4.24. Распределение температурного поля ( $T$ ) от плоского круглого нагревателя постоянной мощности в системе двух полуограниченных тел**

**при идеальном тепловом контакте между ними при следующих условиях:**

$$\tau = 500 \text{ с}; \lambda_1 = 0,25 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}; c_1 = 1005 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}; \rho_1 = 2200 \text{ кг/м}^3; R_{\text{п}} = 0,004 \text{ м};$$

$$q = 5000 \text{ Вт/м}^2; \lambda_2 = 0,028 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}; c_2 = 1270 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}; \rho_2 = 50 \text{ кг/м}^3$$


**Рис. 4.25. Распределение температурного поля ( $T$ ) от плоского круглого нагревателя постоянной мощности в системе двух полуограниченных тел**

при идеальной теплоизоляции между ними при следующих условиях:

$$\tau = 500 \text{ с}; \lambda_1 = 0,25 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}; c_1 = 1005 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}; \rho_1 = 2200 \text{ кг/м}^3; R_{\text{п}} = 0,004 \text{ м};$$

$$q = 5000 \text{ Вт/м}^2; \lambda_2 = 0,028 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}; c_2 = 1270 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}; \rho_2 = 50 \text{ кг/м}^3$$

**5. РАСЧЕТНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ  
ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ  
МЕТОДОМ, ИСПОЛЬЗУЮЩИМ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЙ ЗОНД  
С ПЛОСКИМ КРУГЛЫМ НАГРЕВАТЕЛЕМ  
ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ**

**5.1. РАСЧЕТНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ  
ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ  
НА СТАДИИ НАГРЕВА МЕТОДОМ,  
ИСПОЛЬЗУЮЩИМ ОДИН ТЕРМОПРИЕМНИК**

Основными расчетными соотношениями являются выражения (4.17) и (4.39), согласно которым для определения ТФС необходимо знать следующие величины: мощность на единицу площади нагревателя  $q$ , радиус нагревателя  $R_{\text{п}}$ , поправки на теплопроводность  $\lambda'_{\text{IV}}$  и тепловую активность  $\varepsilon'_{\text{II}}$  и  $\varepsilon'_{\text{IV}}$  измерительного зонда. Определить последние можно двумя способами.

Первый способ предполагает определение поправок, исходя из физического смысла величин. Однако, это связано с определенными трудностями по расчету  $q$  и  $R_{\text{п}}$  (форма нагревателя не является абсолютно круглой, размеры его небольшие), а также величин  $\lambda'_{\text{IV}}$  и  $\varepsilon'_{\text{II}}$ ,  $\varepsilon'_{\text{IV}}$  (в тепловом отношении термодатчик может не являться малым, ТФС материала подложки измерительного зонда известны приближенно). Кроме того, при получении расчетного соотношения (4.39) круглый плоский нагреватель был заменен эквивалентным ему поверхностным сферическим нагревателем, т.е. в выражение (4.39) входят не собственно значения величин  $q$  и  $R_{\text{п}}$ , а эквивалентные им величины, соответствующие поверхностному сферическому нагревателю.

Второй способ предполагает определение постоянных прибора с помощью проведения градуировочных экспериментов на образцах с известными ТФС. Для данного метода достаточно двух таких образцовых мер.

Для расчета ТФС по экспериментальным данным выражения (4.17) и (4.39) преобразуем к виду:

$$T(t') = d_1 t' + d_0; \quad (5.1)$$

$$T(t'') = b_1 t'' + b_0, \quad (5.2)$$

где  $d_1 = \frac{A_1}{(\varepsilon + \varepsilon'_{\text{II}})}$ ,  $d_0 = -\frac{B_1}{(\varepsilon + \varepsilon'_{\text{II}})^2}$ ,  $b_1 = -\frac{B_2^2(\varepsilon + \varepsilon'_{\text{IV}})}{A_2(\lambda + \lambda'_{\text{IV}})^2}$ ,  $b_0 = \frac{B_2}{(\lambda + \lambda'_{\text{IV}})}$  – параметры моделей, описывающих термограмму на II и IV участках;

$A_1 = \frac{2q}{\sqrt{\pi}}$ ,  $B_1 = 2qc_{\text{п}}$ ,  $A_2 = q\sqrt{\pi}$ ,  $B_2 = qR_{\text{п}}$  – постоянные прибора, определяемые

конструктивными особенностями применяемого устройства и режимами опыта;  $t' = \sqrt{\tau}$ ,  $t'' = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$ .

Значения коэффициентов  $d_1$ ,  $d_0$ ,  $b_1$ ,  $b_0$  определяются по термограммам, а значения  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $\varepsilon'_{\text{II}}$ ,  $\varepsilon'_{\text{IV}}$ ,  $\lambda'_{\text{IV}}$  – из градуировочных экспериментов. Выражения для вычисления  $\varepsilon$  и постоянных прибора на II участке термограммы имеют вид:

$$A_1 = \frac{d_{11}d_{12}}{d_{12} - d_{11}}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2); \quad (5.3)$$

$$\varepsilon'_{\text{II}} = \frac{\varepsilon_1 d_{11} - \varepsilon_2 d_{12}}{d_{12} - d_{11}}; \quad (5.4)$$

$$\varepsilon = \frac{A_1}{d_1} - \varepsilon'_{\text{II}}; \quad (5.5)$$

здесь  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  – тепловые активности исследуемого материала и образцовых мер;  $d_1$ ,  $d_{11}$ ,  $d_{12}$  – коэффициенты, определенные из термограмм, снятых на исследуемом материале и на образцовых мерах, согласно уравнению (5.1);  $A_1$ ,  $\varepsilon'_{\text{II}}$  – постоянные прибора.

Выражения для вычисления  $\varepsilon$ ,  $\lambda$  и постоянных прибора на IV участке термограммы имеют вид:

$$A_2 = \frac{b_{02}^2 b_{01}^2}{b_{12} b_{01}^2 - b_{11} b_{02}^2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2); \quad (5.6)$$

$$\varepsilon'_{IV} = \frac{\varepsilon_1 b_{01}^2 b_{12} - \varepsilon_2 b_{02}^2 b_{11}}{b_{02}^2 b_{11} - b_{01}^2 b_{12}}; \quad (5.7)$$

$$\varepsilon = -\frac{b_1}{b_0^2} A_2 - \varepsilon'_{IV}; \quad (5.8)$$

$$B_2 = \frac{b_{01} b_{02}}{b_{02} - b_{01}} (\lambda_1 - \lambda_2); \quad (5.9)$$

$$\lambda'_{IV} = \frac{\lambda_1 b_{01} - \lambda_2 b_{02}}{b_{02} - b_{01}}; \quad (5.10)$$

$$\lambda = \frac{B_2}{b_0} - \lambda'_{IV}. \quad (5.11)$$

где  $\lambda$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности исследуемого материала и образцовых мер;  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_{01}$ ,  $b_{02}$ ,  $b_{11}$ ,  $b_{12}$  – коэффициенты, определенные из термограмм, снятых на исследуемом материале и на образцовых мерах, согласно уравнению (5.2);  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $\varepsilon'_{IV}$ ,  $\lambda'_{IV}$  – константы прибора.

Теперь можно записать основные операции по определению ТФС в виде следующей последовательности действий.

1) градуировка прибора:

- фиксирование термограммы на первом образце с известными ТФС;
- определение рабочих участков термограммы (II и IV);
- расчет по ним коэффициентов  $d_{11}$ ,  $b_{01}$ ,  $b_{11}$ ;
- снятие термограммы на втором образце с известными ТФС;
- определение рабочих участков термограммы (II и IV);
- расчет по ним коэффициентов  $d_{12}$ ,  $b_{02}$ ,  $b_{12}$ ;
- расчет постоянных;

2) определение ТФС исследуемого материала:

- фиксирование термограммы на исследуемом образце;
- определение рабочих участков термограммы (II и IV);
- расчет по ним коэффициентов  $d_1$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ;
- расчет ТФС материала.

## 5.2. РАСЧЕТНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПО МОДЕЛИ СФЕРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ДЛЯ СХЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ ТЕРМОПРИЕМНИКАМИ

### 5.2.1. Определение теплофизических свойств по модели сферического полупространства на стадии нагрева

Преобразуем выражение (4.39) к виду

$$T(r, \tau) = b_1 t + b_0, \quad (5.12)$$

где  $t = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$ ;  $b_0 = \frac{qR^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)r}$ ;  $b_1 = -\left( \frac{qR^2(r-R)}{\sqrt{\pi}\sqrt{a_1}r(\lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{qR^3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\sqrt{\pi}r(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \right)$ .

В координатах  $T$ ,  $1/\sqrt{\tau}$  формула (4.39) линеаризуется, т.е. описывается линейным законом.

Обозначим:

$$\frac{q\sqrt{\pi}R}{r} = A; \quad \frac{qR^2}{r} = B; \quad \frac{(r-R)}{\sqrt{\pi}} = C; \quad \lambda_2 = \lambda'_{IV}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon'_{IV}; \quad \lambda_1 = \lambda; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon;$$



$A, B, C, \lambda'_{IV}, \varepsilon'_{IV}$  – постоянные прибора, определяемые конструктивными особенностями устройства и режимами опыта;  $\lambda, \varepsilon$  – коэффициенты теплопроводности и тепловой активности исследуемого тела.

Учитывая, что  $a = \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}$

$$b_1 = - \left( \frac{CB\varepsilon}{(\lambda + \lambda')\lambda} + \frac{B^2(\varepsilon + \varepsilon'_{IV})}{A(\lambda + \lambda'_{IV})^2} \right); \quad (5.13)$$

$$b_0 = \frac{B}{\lambda + \lambda'_{IV}}. \quad (5.14)$$

Значения коэффициентов  $b_0$  и  $b_1$  определяются из термограмм. Значения постоянных прибора находят из градуировочных экспериментов. Выражение для вычисления коэффициента теплопроводности  $\lambda$  по модели сферического полупространства на стадии нагрева в случае  $r > R$  найдем из формулы (5.14):

$$\lambda = \frac{B}{b_0} - \lambda'_{IV}. \quad (5.15)$$

Для поверхностного слоя при  $r = R$  выражения (5.13), (5.14) принимают вид:

$$b_0 = \frac{B}{\lambda + \lambda'}, \quad b_1 = - \frac{B^2(\varepsilon + \varepsilon'_{IV})}{A(\lambda + \lambda'_{IV})^2}, \quad (5.16)$$

где  $A = q\sqrt{\pi}$ ,  $B = qR$ .

Выражения для вычисления  $\varepsilon, \lambda$  и постоянных прибора по модели сферического полупространства на стадии нагрева при  $r = R$  следующие:

$$\varepsilon = \frac{b_1}{b_0^2} A - \varepsilon'_{IV}, \quad \lambda = \frac{B}{b_0} - \lambda'_{IV},$$

$$A = \frac{b_{02}^2 b_{01}^2}{b_{12} b_{01}^2 - b_{11} b_{02}^2} (\varepsilon_{01} - \varepsilon_{02}), \quad \varepsilon'_{IV} = \frac{\varepsilon_{01} b_{01}^2 b_{12} - \varepsilon_{02} b_{02}^2 b_{11}}{b_{02}^2 b_{11} - b_{01}^2 b_{12}}, \quad (5.17)$$

$$B = \frac{b_{01} b_{02}}{b_{02} - b_{01}} (\lambda_{01} - \lambda_{02}), \quad \lambda'_{IV} = \frac{\lambda_{01} b_{01} - \lambda_{02} b_{02}}{b_{02} - b_{01}};$$

здесь  $\varepsilon, \varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}$  – тепловые активности исследуемого материала и образцовых мер;  $\lambda, \lambda_{01}, \lambda_{02}$  – коэффициенты теплопроводности исследуемого материала и образцовых мер;  $b_{01}, b_{02}, b_{11}, b_{12}$  – коэффициенты, определенные из термограмм, снятых на образцовых мерах;  $A, B, \varepsilon'_{IV}, \lambda'_{IV}$  – постоянные прибора.

Анализируя выражение (5.15), можно сделать вывод о том, что величину  $\lambda$  можно найти при любом значении  $r$  (в центре нагревателя и на расстоянии  $r$  от него). Из выражений (5.17) следует, что в центре нагревателя ( $r = R$ ) можно найти значения  $\varepsilon$  и  $\lambda$ .

## 5.2.2. Определение теплофизического комплекса $\mu$ по модели сферического полупространства на стадии остывания

Преобразуем выражение (4.80) к виду

$$T(R, \tau) = ht, \quad (5.18)$$

где  $t = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$ ,  $h = \frac{\varepsilon + \varepsilon'_{VI}}{(\lambda + \lambda'_{VI})^2} \frac{qR^2}{\sqrt{\pi}}$ .

Обозначим  $\frac{qR^2}{\sqrt{\pi}} = D$  – постоянная прибора;  $\frac{\varepsilon + \varepsilon'_{VI}}{(\lambda + \lambda'_{VI})^2} = \mu$  – теплофизический комплекс. Тогда  $h = D\mu$ .

Значение коэффициента  $h$  определяется из термограммы. Значения постоянных прибора  $D, \varepsilon'_{VI}, \lambda'_{VI}$  находят из градуировочного эксперимента. Выражения для вычисления комплекса  $\frac{\varepsilon + \varepsilon'_{VI}}{(\lambda + \lambda'_{VI})^2}$  и постоянной прибора  $D$  при  $r = R$ :

$$\frac{\varepsilon}{\lambda^2} = \frac{h}{D}, \quad D = \frac{h\lambda_1^2}{\varepsilon_1}, \quad (5.19)$$

где  $\lambda_1, \varepsilon_1$  – коэффициенты теплопроводности и тепловой активности образцовой меры.

Зависимости для вычисления комплекса  $\frac{\varepsilon + \varepsilon'_{VI}}{(\lambda + \lambda'_{VI})^2}$  и постоянной прибора в случае  $r > R$  аналогичны выражениям (5.19).

### 5.3. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПО МОДЕЛЯМ ПЛОСКОГО И СФЕРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВ В МЕТОДЕ С НЕСКОЛЬКИМИ ТЕРМОПРИЕМНИКАМИ

Основные операции по определению ТФС по моделям плоского и сферических полупространств следующие:

1) градуировка прибора: снятие термограмм на двух образцах с известными ТФС, определение рабочих участков термограмм, расчет постоянных прибора;

2) снятие термограмм на исследуемом изделии: определение рабочих участков термограмм. Расчет значений коэффициентов  $d_0, d_1, b_0, b_1, h$ ; расчет значений ТФС по II, IV, VI рабочим участкам.

Коэффициенты тепловой активности  $\varepsilon$ , теплопроводности  $\lambda$ , температуропроводности  $a$ , объемную теплоемкость  $c_p$ , комплекс  $\frac{\varepsilon}{\lambda^2}$  находят по следующим формулам:

$$\varepsilon_{II} = \frac{A_1}{d_1} - \varepsilon'_{II}, \quad \varepsilon_{IV} = \frac{b_1}{b_0^2} A - \varepsilon'_{IV}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_{II} + \varepsilon_{IV}}{2},$$

$$\lambda_{IV,n} = \frac{B_n}{b_{0,n}} - \lambda'_{IV,n}, \quad \lambda = \frac{\sum_{n=1}^n \lambda_{IV,n}}{n}, \quad (5.20)$$

$$c_p = \frac{\varepsilon^2}{\lambda}, \quad a = \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2};$$

здесь  $\varepsilon_{II}, \varepsilon_{IV}$  – коэффициенты тепловой активности, найденные по II и IV участкам термограммы, снятой центральной термопарой, соответственно;  $\varepsilon'_{II}, \varepsilon'_{IV}, A_1, A$  – постоянные прибора на II и IV участках термограммы соответственно;  $\lambda_{IV,n}$  – коэффициент теплопроводности, найденный по модели сферического полупространства на стадии нагрева для  $n$ -ой термопары, где  $n$  – порядковый номер термопары, считая от центра измерительного зонда;  $B_n, b_{0,n}$  – постоянные прибора для  $n$ -ой термопары.

В качестве проверки корректности проведения эксперимента находят разницу между теплофизическим комплексом  $\frac{\varepsilon + \varepsilon'_{VI}}{(\lambda + \lambda'_{VI})^2}$ , определенным по VI-ому участку термограммы, и отношением  $\frac{\varepsilon}{\lambda^2}$ , где  $\varepsilon$  и  $\lambda$  определяют по формулам (5.20). Эксперимент признается корректным, если разница менее 10 %.

## 5.4. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТФС

### 5.4.1. Случайные погрешности

Проведем оценку случайных погрешностей определения ТФС материалов. Для этого запишем уравнения, связывающие погрешность определения параметров моделей с погрешностью определения ТФС. Применяв основные результаты теории погрешности измерения физических величин [111, 113 – 122], получим следующие выражения.

Для II-го участка термограммы, снятой термопарой, расположенной в центре нагревателя:

$$\Delta\varepsilon = \sqrt{(\delta^2 A_1 + \delta^2 d_1) \left( \frac{A_1}{d_1} \right)^2 + \Delta^2 \varepsilon'}; \quad (5.21)$$

$$\delta A_1 = \sqrt{\delta^2 d_{11} + \delta^2 d_{12} + \frac{\Delta^2 \varepsilon_1 + \Delta^2 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} + \frac{\Delta^2 d_{12} + \Delta^2 d_{11}}{(d_{12} - d_{11})^2}}; \quad (5.22)$$

$$\delta\varepsilon' = \sqrt{\frac{(\delta^2\varepsilon_1 + \delta^2d_{11})(d_{11}\varepsilon_1)^2 + (\delta^2\varepsilon_2 + \delta^2d_{12})(d_{12}\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_1d_{11} - \varepsilon_2d_{12})^2} + \frac{\Delta^2d_{12} + \Delta^2d_{11}}{(d_{12} - d_{11})^2}}. \quad (5.23)$$

В формулах (5.21) – (5.23) и далее для второго участка  $\varepsilon' = \varepsilon_{II}$ .

Для IV-го участка термограммы, снятой термопарой, расположенной в центре нагревателя

$$\Delta\varepsilon = \sqrt{(\delta^2b_1 + 4\delta^2b_0 + \delta^2A_2)\left(\frac{A_2b_1}{b_0^2}\right)^2} + \Delta^2\varepsilon'; \quad (5.24)$$

$$\delta A_2 = \sqrt{4(\delta^2b_{01} + \delta^2b_{02}) + \frac{\Delta^2\varepsilon_1 + \Delta^2\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} + \frac{(4\delta^2b_{01} + \delta^2b_{12})(b_{12}b_{01}^2)^2 + (4\delta^2b_{02} + \delta^2b_{11})(b_{11}b_{02}^2)^2}{(b_{12}b_{01}^2 - b_{11}b_{02}^2)^2}}; \quad (5.25)$$

$$\delta\varepsilon' = \sqrt{\frac{(\delta^2\varepsilon_1 + 4\delta^2b_{01} + \delta^2b_{12})(\varepsilon_1b_{01}^2b_{12})^2}{(\varepsilon_1b_{01}^2b_{12} - \varepsilon_2b_{02}^2b_{11})^2} + \frac{(\delta^2\varepsilon_2 + 4\delta^2b_{02} + \delta^2b_{11})(\varepsilon_2b_{02}^2b_{11})^2}{(\varepsilon_1b_{01}^2b_{12} - \varepsilon_2b_{02}^2b_{11})^2} + \frac{(4\delta^2b_{01} + \delta^2b_{12})(b_{02}^2b_{11})^2 + (4\delta^2b_{02} + \delta^2b_{11})(b_{01}^2b_{12})^2}{(b_{02}^2b_{11} - b_{01}^2b_{12})^2}}. \quad (5.26)$$

$$\Delta\lambda = \sqrt{(\delta^2B_2 + \delta^2b_0)\left(\frac{B_2}{b_0}\right)^2} + \Delta^2\lambda', \quad (5.27)$$

$$\delta B_2 = \sqrt{\delta^2b_{01} + \delta^2b_{02} + \frac{\Delta^2b_{02} + \Delta^2b_{01}}{(b_{02} - b_{01})^2} + \frac{\Delta^2\lambda_1 + \Delta^2\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}}, \quad (5.28)$$

$$\delta\lambda' = \sqrt{\frac{(\delta^2\lambda_1 + \delta^2b_{01})(b_{01}\lambda_1)^2 + (\delta^2\lambda_2 + \delta^2b_{02})(b_{02}\lambda_2)^2}{(\lambda_1b_{01} - \lambda_2b_{02})^2} + \frac{\Delta^2b_{02} + \Delta^2b_{01}}{(b_{02} - b_{01})^2}}. \quad (5.29)$$

В формулах (5.24) – (5.29) и далее для четвертого участка  $\varepsilon' = \varepsilon'_{IV}$ ,  $\lambda' = \lambda'_{IV}$ .

Сравнив формулы (5.21), (5.22), (5.23) с формулами (5.24) – (5.29), можем видеть, что структура погрешности определения ТФС по II и IV участкам термограмм аналогична. Поэтому результаты анализа влияния различных факторов на погрешность определения ТФС по II и IV участкам термограммы будут также аналогичны.

Проведем анализ того, как будут влиять на погрешность измерения тепловой активности по II участку термограммы погрешности величин, необходимых для расчета тепловой активности, а именно: погрешность определения коэффициента  $d_1$  ( $\Delta d_1$ ); погрешность расчета констант прибора  $A_1$ ,  $\varepsilon_{II}'$  ( $\Delta A_1$ ,  $\Delta\varepsilon_{II}'$ ) (погрешность градуировки), которые в свою очередь будут складываться из погрешности определения коэффициентов  $d_{11}$ ,  $d_{12}$  ( $\Delta d_{11}$ ,  $\Delta d_{12}$ ) и неточности информации о значениях  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  ( $\delta\varepsilon_1$ ,  $\delta\varepsilon_2$ ) образцовых мер.

Рассмотрим влияние погрешности  $\Delta d_1$  на определение  $\varepsilon$ . Примем  $\delta A_1 = 0$  и  $\Delta\varepsilon' = 0$ . Тогда из выражения (5.21) с учетом формулы (5.5) следует

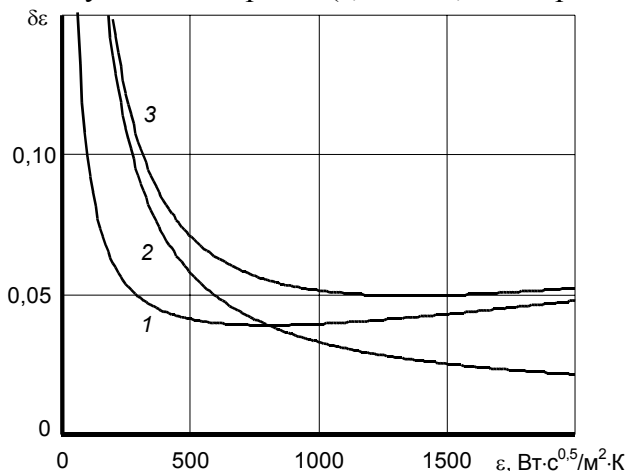
$$\delta\varepsilon = \frac{\Delta d_1}{A_1} \frac{(\varepsilon + \varepsilon_{II}')^2}{\varepsilon}. \quad (5.30)$$

Анализ данного выражения показывает, что погрешность определения  $\varepsilon$  можно снизить:

- во-первых, за счет уменьшения  $\Delta d_1$ , путем уменьшения интервала  $\Delta t$  между измерениями температуры  $T$  (для расчета коэффициента  $d_1$  используется метод наименьших квадратов и  $d_1$  будет определен тем точнее, чем больше точек экспериментальной кривой будет использоваться);
- во-вторых, за счет увеличения мощности на нагревателе (в разумных пределах), так как  $A_1 \sim q_1$ ;
- в-третьих, из выражения (5.30) видно, что относительная погрешность определения  $\varepsilon$  ( $\delta\varepsilon$ ) зависит от значения  $\varepsilon$ . Минимум  $\delta\varepsilon$  будет соответствовать  $\varepsilon = \varepsilon_{II}'$ , а увеличение  $\delta\varepsilon$  при  $\varepsilon < \varepsilon_{II}'$  будет значительно больше, чем при  $\varepsilon > \varepsilon_{II}'$  (рис. 5.1, кривая I).

Это объясняется тем, что при нагревании часть тепла пойдет на нагрев исследуемого материала, а часть тепла – на нагрев материала подложки зонда. Причем, чем больше тепловая активность подложки измерительного зонда по сравнению с тепловой активностью исследуемого материала, тем больше теп-

ла пойдет на нагрев зонда и тем больше именно тепловые свойства зонда будут определять ход термограммы ( $\epsilon'_{II}$  – суть тепловая активность материала зонда) и, соответственно, тем менее точным окажется расчет тепловой активности исследуемого материала. С другой стороны, чем больше выделяется тепла на единицу площади нагревателя (величина  $A_1$ , как указывалось выше, пропорциональна мощности на единицу площади нагревателя), тем быстрее будет расти температура нагревателя и тем "ярче" будут выражены на термограмме ТФС исследуемого материала (а, заодно, и материала подложки зонда).



**Рис. 5.1. Зависимость  $\delta\epsilon = f(\epsilon)$  для II участка термограммы:**

1 – с учетом  $\Delta d_1$  по формуле (5.30);

2 – с учетом градуировки по формуле (5.31); 3 – общая, по формуле (5.21)

Для анализа погрешности градуировки, связанной с неточностью информации о ТФС образцовых мер, будем считать, что в выражениях (5.21), (5.22), (5.23) –  $\Delta d_{11} = 0$ ,  $\Delta d_{12} = 0$ ,  $\Delta d_1 = 0$ . Тогда из формулы (5.23) с учетом (5.5) имеем

$$\delta\epsilon' = \frac{\sqrt{\Delta^2\epsilon_1(\epsilon_2 + \epsilon')^2 + \Delta^2\epsilon_2(\epsilon_1 + \epsilon')^2}}{\epsilon'|\epsilon_1 - \epsilon_2|},$$

а из выражения (5.22)

$$\delta A_1 = \frac{\sqrt{\Delta^2\epsilon_1 + \Delta^2\epsilon_2}}{|\epsilon_1 - \epsilon_2|}.$$

Подставив  $\delta A_1$  в формулу (5.21), получим

$$\Delta\epsilon = \frac{\sqrt{(\Delta^2\epsilon_1 + \Delta^2\epsilon_2) (\epsilon + \epsilon')^2 + \Delta^2\epsilon_1(\epsilon_2 + \epsilon')^2 + \Delta^2\epsilon_2(\epsilon_1 + \epsilon')^2}}{|\epsilon_1 - \epsilon_2|}. \quad (5.31)$$

Будем считать, что  $\delta\epsilon_1 \approx \delta\epsilon_2$  и  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ , тогда  $\Delta\epsilon_1 < \Delta\epsilon_2$ . После упрощений имеет место неравенство

$$\frac{\Delta\epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \left( \frac{\epsilon_1 + \epsilon'}{\epsilon} \right) < \delta\epsilon < \frac{\Delta\epsilon_2}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \left( \sqrt{2} + \frac{(2 + \sqrt{2})\epsilon'}{\epsilon} + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon} \right). \quad (5.32)$$

Проанализировав неравенство (5.32) (рис. 5.1, кривая 2) и сравнив его с равенством (5.21) (рис. 5.1, кривая 3), можно сделать следующие выводы (на рис. 5.2 и 5.3 представлены аналогичные графики распределения погрешности измерения в зависимости от диапазона изменения ТФС для IV участка термограммы).

1. Для увеличения точности измерений необходимо выбирать образцовые меры, как можно более отличающиеся друг от друга по ТФС.

2. Образцы не должны обладать слишком большими  $\epsilon$  и  $\lambda$ .

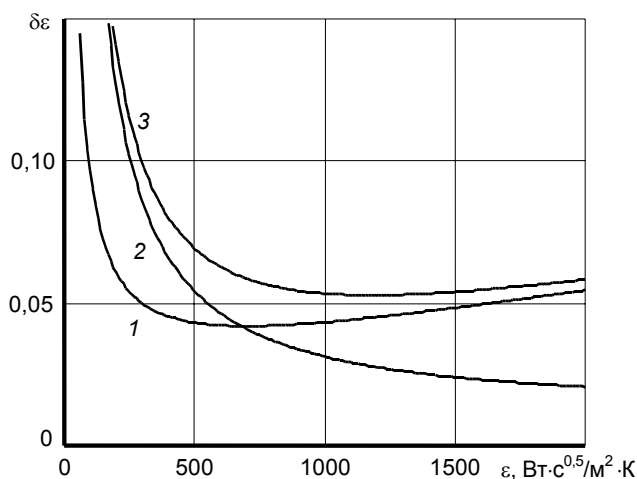
3. Желательно выбирать образцовые меры такими, чтобы значения их ТФС перекрывали требуемый диапазон измерения ТФС исследуемых материалов.

4. Относительная погрешность возрастает с уменьшением  $\epsilon$  и  $\lambda$ .

5. Погрешность, связанную с неточностью информации о ТФС образцовых мер, уменьшить за счет изменения режимов опыта нельзя. Погрешность полностью определяется выбором образцовых мер ТФС.

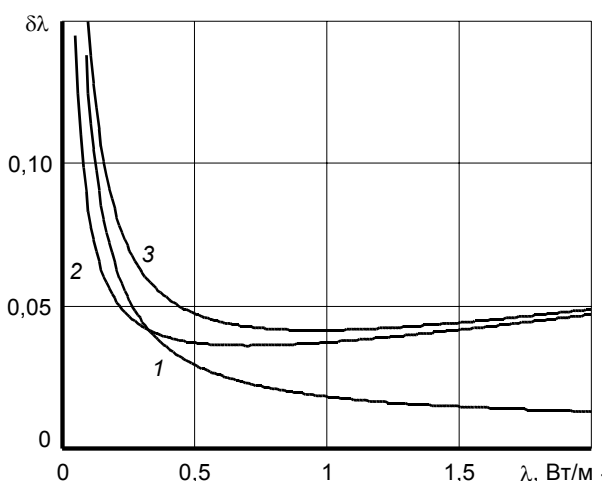
6. Наименьшая погрешность определения ТФС будет у материалов с близкими или большими  $\lambda$  и  $\epsilon$ , чем у материала подложки зонда, (для увеличения диапазона надежного определения  $\epsilon$  и  $\lambda$ , необходимо

провести меры по уменьшению  $\varepsilon'_{II}$  и  $\varepsilon'_{IV}$ ,  $\lambda'_{IV}$ , путем применения в качестве подложки зонда материала с низкой тепловой активностью и теплопроводностью).



**Рис. 5.2. Зависимость  $\delta\varepsilon = f(\varepsilon)$  для IV участка термограммы:**

1 – с учетом  $\Delta b_1$  и  $\Delta b_0$ ; 2 – с учетом градуировки; 3 – общая



**Рис. 5.3. Зависимость  $\delta\lambda = f(\lambda)$  для IV участка термограммы:**

1 – с учетом  $\Delta b_0$ ; 2 – с учетом градуировки; 3 – общая

#### 5.4.2. Систематические погрешности

Ранее рассматривалась случайная составляющая погрешности определения ТФС. Представляет интерес рассмотреть вопросы влияния на точность измерения систематической погрешности, вызванной неточностью математической модели. Частично этот вопрос рассматривался при получении расчетных зависимостей в главе 4. Было показано, что теплоемкостью нагревателя в расчетах по IV участку термограммы можно пренебречь. В расчетах по II участку термограммы теплоемкость нагревателя учитывалась введением коэффициента  $d_0$ , напрямую зависящего от теплоемкости нагревателя. Кроме того, алгоритм определения ТФС построен таким образом, что учитывает те точки термограммы, где реально выполняются расчетные зависимости (5.1), (5.2). Так же, как указывалось выше, частично неадекватность математической модели реальному эксперименту учитывалась тем, что константы прибора определяются на основе градуировочных экспериментов, а не на основе расчета, исходя из их физического смысла.

Рассмотрим влияние термических сопротивлений на результат расчета коэффициента теплопроводности  $\lambda$  по IV участку термограммы.

Коэффициент теплопроводности  $\lambda$  исследуемого материала определяется на основе коэффициента  $b_0$ , который по своему физическому смыслу соответствует измеряемой температуре при стационарном предельном распределении температуры в системе из двух полуограниченных, находящихся в контакте тел. Для этого решим следующую задачу.

Два полуограниченных тела 1 и 2 при температуре  $T(r, 0) = 0$  находятся в контакте (см. рис. 5.4).

Соприкасающиеся поверхности тел теплоизолированы. В области контакта действует поверхностный сферический источник тепла мощностью  $-q_0$  и радиусом  $-R$ . Между нагревателем и телами существуют термические сопротивления  $R_{T_1}$  и  $R_{T_2}$ . Следует найти стационарное распределение температуры в данной системе. В математической форме эта задача формулируется следующим образом:

$$\frac{d\left[r^2 \frac{dT_1(r)}{dr}\right]}{dr} = 0, \quad (r > R); \quad \frac{d\left[r^2 \frac{dT_2(r)}{dr}\right]}{dr} = 0, \quad (r > R); \quad (5.33)$$

$$T_1(R) = T_0 - q_1 R_{T_1}; \quad T_2(R) = T_0 - q_2 R_{T_2}; \quad (5.34)$$

$$q_1 + q_2 = q_0; \quad (5.35)$$

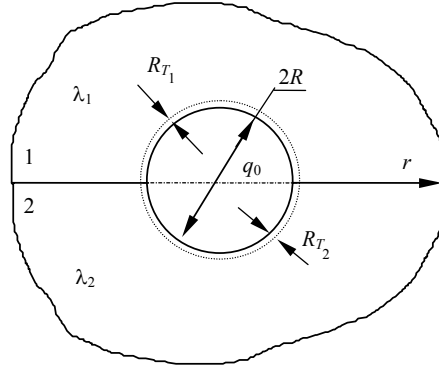


Рис. 5.4. Тепловая схема

$$\frac{dT_1(\infty)}{dr} = \frac{dT_2(\infty)}{dr} = T_1(\infty) = T_2(\infty) = 0; \quad (5.36)$$

$$\frac{dT_1(R)}{dr} = -\frac{q_1}{\lambda_1}; \quad \frac{dT_2(R)}{dr} = -\frac{q_2}{\lambda_2}, \quad (5.37)$$

где  $T_1(r)$ ,  $T_2(r)$  – распределение температуры в телах 1 и 2, соответственно;  $T_0$  – температура нагревателя;  $r$  – координата;  $q_0$  – мощность, выделяющаяся на единицу площади нагревателя;  $q_1$ ,  $q_2$  – тепловые потоки, поступающие в тела 1 и 2, соответственно;  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности 1 и 2 тел, соответственно;  $R_{T_1}$ ,  $R_{T_2}$  – термические сопротивления между первым телом и нагревателем и между вторым телом и нагревателем, соответственно.

Решив дифференциальные уравнения (5.33), будем иметь

$$r^2 \frac{dT_1(r)}{dr} = C_1; \quad r^2 \frac{dT_2(r)}{dr} = C_2, \quad (5.38)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  – константы, определяемые из условий (5.37), т.е.

$$C_1 = -\frac{q_1 R^2}{\lambda_1}; \quad C_2 = -\frac{q_2 R^2}{\lambda_2}. \quad (5.39)$$

Проинтегрировав дифференциальные уравнения (5.38), получим

$$T_1(r) = -\frac{C_1}{r} + D_1 \quad \text{и} \quad T_2(r) = -\frac{C_2}{r} + D_2, \quad (5.40)$$

где константы  $C_1$ ,  $C_2$  определяются из выражений (5.39), а константы  $D_1$ ,  $D_2$  находят из условия (5.36):

$$D_1 = D_2 = 0. \quad (5.41)$$

Используя формулы (5.39), (5.41), получим выражения для стационарного распределения температурного поля в рассматриваемой системе:

$$T_1(r) = \frac{q_1 R^2}{\lambda_1 r}; \quad T_2(r) = \frac{q_2 R^2}{\lambda_2 r}. \quad (5.42)$$

В формулы (5.42) входят значения тепловых потоков  $q_1, q_2$ , поступающих в первое и второе тела от нагревателя. Для их определения воспользуемся уравнениями (5.34), (5.35), предварительно записав выражения для температуры первого и второго тел, соответствующие координате  $r = R$ ,

$$T_1(R) = \frac{q_1 R}{\lambda_1}; \quad T_2(R) = \frac{q_2 R}{\lambda_2}. \quad (5.43)$$

С учетом условий (5.34) запишем

$$\frac{q_1 R}{\lambda_1} = T_0 - q_1 R_{T_1}; \quad \frac{q_2 R}{\lambda_2} = T_0 - q_2 R_{T_2} \quad (5.44)$$

и затем, используя условие (5.35), получаем выражения для определения  $q_1, q_2$ :

$$q_1 = \frac{q_0 (R + R_{T_2} \lambda_2) \lambda_1}{R(\lambda_1 + \lambda_2) + (R_{T_1} + R_{T_2}) \lambda_1 \lambda_2}; \quad q_2 = \frac{q_0 (R + R_{T_1} \lambda_1) \lambda_2}{R(\lambda_1 + \lambda_2) + (R_{T_1} + R_{T_2}) \lambda_1 \lambda_2}. \quad (5.45)$$

Температурные поля в исследуемой системе и температура нагревателя  $T_0$  будут определяться выражениями:

$$T_1(r) = \frac{q_0 R^2 (R + R_{T_2} \lambda_2)}{(R(\lambda_1 + \lambda_2) + (R_{T_1} + R_{T_2}) \lambda_1 \lambda_2) r}; \quad (5.46)$$

$$T_2(r) = \frac{q_0 R^2 (R + R_{T_1} \lambda_1)}{(R(\lambda_1 + \lambda_2) + (R_{T_1} + R_{T_2}) \lambda_1 \lambda_2) r}; \quad (5.47)$$

$$T_0 = \frac{q_0 (R(1 + \lambda_1 R_{T_1}) + R_{T_1} R_{T_2} \lambda_1 \lambda_2)}{R(\lambda_1 + \lambda_2) + (R_{T_1} + R_{T_2}) \lambda_1 \lambda_2}. \quad (5.48)$$

Примем, что  $T_1(r)$  – температурное поле материала подложки измерительного зонда;  $T_2(r)$  – температурное поле исследуемого материала;  $R_{T_1}$  – термическое сопротивление между нагревателем и чувствительным элементом термоприемника;  $R_{T_2}$  – термическое сопротивление между нагревателем и исследуемым материалом. Тогда величина  $T_1(R)$  будет соответствовать определяемому из термограммы согласно уравнению (5.1) коэффициенту  $b_0$ , а искомой величиной будет коэффициент теплопроводности исследуемого материала, т.е. второго тела –  $\lambda_2$ .

Выражение для величины  $T_1(R)$ , определяемой из термограммы, имеет вид

$$T_1(R) = \frac{q_0 R}{\lambda_1 + \frac{(R + R_{T_1} \lambda_1)}{R_{T_2}} \frac{\lambda_2}{\frac{R}{R_{T_2}} + \lambda_2}}. \quad (5.49)$$

Проведем анализ уравнения (5.49), отметив предварительно, что величина  $T_1(R)$  реально определяется с некоторой погрешностью. Рассмотрим два предельных случая.

1. Теплопроводность исследуемого материала мала, т.е. коэффициент  $\lambda_2 \rightarrow 0$ . Тогда из (5.49) следует, что

$$T_1(R) = \frac{q_0 R}{\lambda_1}. \quad (5.50)$$

Как видно из выражения (5.50) в этом случае температура  $T_1(R)$  будет определяться теплопроводностью материала зонда  $\lambda_1$  и не будет зависеть от теплопроводности исследуемого материала.

2. Теплопроводность исследуемого материала велика, т.е. коэффициент  $\lambda_2 \rightarrow \infty$ . Тогда из выражения (5.49) имеем

$$T_1(R) = \frac{q_0 R}{\lambda_1 + \frac{(R + R_{T_1} \lambda_1)}{R_{T_2}}}. \quad (5.51)$$

В этом случае температура  $T_1(R)$  также не зависит от теплопроводности исследуемого материала  $\lambda_2$ , а определяется теплопроводностью материала подложки зонда  $\lambda_1$  и термическими сопротивлениями  $R_{T_1}$ ,  $R_{T_2}$ .

Для дальнейшего анализа перепишем выражение (5.49) в виде

$$T_1(R) = \frac{q_0 R}{\lambda_1 + \frac{R + R_{T_1} \lambda_1}{R + R_{T_2} \lambda_2} \lambda_2}. \quad (5.52)$$

Будем считать, что выполняется условие

$$R \gg R_{T_2} \lambda_2. \quad (5.53)$$

Тогда, можем записать, что

$$T_1(R) = \frac{\frac{q_0 R^2}{R + R_{T_1} \lambda_1}}{\frac{\lambda_1 R}{R + R_{T_1} \lambda_1} + \lambda_2}. \quad (5.54)$$

Введем обозначения:

$$C_q = \frac{q_0 R^2}{R + R_{T_1} \lambda_1}; \quad (5.55)$$

$$C_{\lambda'} = \frac{\lambda_1 R}{R + R_{T_1} \lambda_1}. \quad (5.56)$$

Тогда, формулу для расчета коэффициента теплопроводности  $\lambda_2$  можно записать в виде

$$\lambda_2 = \frac{C_q}{T_1(R)} - C_{\lambda'}. \quad (5.57)$$

Отметим, что если выполняется дополнительное условие  $R \gg R_{T_1} \lambda_1$ , то выражение (5.57) будет полностью идентично формуле (5.11) и  $C_q = B_2 = q_0 R$ ,  $C_{\lambda'} = \lambda'_{IV}$ .

Однако для разработанного метода определения ТФС, в котором константы прибора  $B_2$ ,  $\lambda'_{IV}$  определяются на основе градуировочных опытов, необходимости введения поправки на термическое сопротивление между нагревателем и чувствительным элементом термоприемника нет, так как формула (5.57) аналогична по форме зависимости (5.11). (Практически это означает, что при градуировке определяются не  $B_2$ ,  $\lambda'_{IV}$ , а  $C_q$ ,  $C_{\lambda'}$ ). Это также подтверждает то, что расчет констант прибора на основе градуировочных опытов позволяет снизить влияние систематической погрешности, вызванной неадекватностью математической модели.

Рассмотрим подробнее условие (5.53). Термическое сопротивление  $R_{T_2}$  можно записать в виде

$$R_{T_2} = \frac{h_T}{\lambda_T}, \quad (5.58)$$

где  $h_T$  – толщина прослойки между нагревателем и исследуемым материалом;  $\lambda_T$  – коэффициент теплопроводности материала прослойки.

Тогда условие (5.53) принимает вид

$$\frac{h_T \lambda_2}{R \lambda_T} \ll 1. \quad (5.59)$$

Фактически, по условию (5.59) определяется верхняя граница надежного определения коэффициентов теплопроводности исследуемых материалов. Для увеличения верхней границы, как следует из условия (5.59), необходимо увеличивать теплопроводность прослойки между нагревателем и исследуемым материалом (например, используя различные высокопроводящие смазки), а также за счет увеличения радиуса нагревателя  $R$ .



Хотелось бы отметить, что, имея формулу, в которой учитываются термические сопротивления, можно построить методику определения  $\lambda$  материалов с их учетом. Однако от этого следует отказаться по следующим причинам.

Во-первых, если термическое сопротивление между нагревателем и чувствительным элементом термоприемника можно считать постоянной величиной, то термическое сопротивление между нагревателем и исследуемым материалом будет сильно зависеть от качества обработки поверхности последнего (и от материала к материалу будет меняться).

Во-вторых, как следует из вышеприведенного анализа, термическое сопротивление между материалом и нагревателем будет существенно сказываться на результатах обработки эксперимента только для материалов с высокой теплопроводностью (см. (5.51)). Причем, если теплопроводность исследуемого материала превысит некоторую величину, которую можно приблизительно оценить из условия (5.59), то будет практически невозможно рассчитать ее значение (см. (5.51)).

Сделаем еще одно дополнительное замечание. Вышеприведенный анализ проводился на основе расчетных зависимостей для температурных полей в стационарном состоянии. Очевидно, что в этом состоянии влияние ТФС исследуемого материала на экспериментальную термограмму максимально (так как будет максимальный прогрев образца). Отсюда можно сделать вывод, что условие (5.59) будет не только условием для верхней границы диапазона надежного определения  $\lambda$  по четвертому участку термограммы, но также и условием для надежного определения  $\varepsilon$  по второму и четвертому участкам термограммы.

По результатам анализа точности измерения ТФС разработанным методом, можно сделать следующие выводы.

1. Оценку случайных составляющих погрешностей определения ТФС для отдельного эксперимента следует проводить по формулам (5.21) – (5.29).

2. Нижняя граница определения ТФС определяется, прежде всего, ТФС материала подложки измерительного зонда. Чем выше  $\lambda'$ ,  $\varepsilon'$ , тем выше нижняя граница определения ТФС.

3. Верхняя граница определения ТФС определяется термическим сопротивлением между исследуемым материалом и нагревателем. Чем больше это термическое сопротивление, тем ниже верхняя граница определения ТФС.

## 6. ТЕХНИЧЕСКОЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, РЕАЛИЗУЮЩЕЙ МНОГОМОДЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

### 6.1. СОСТАВ И ПРИНЦИП ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Модульная структура современных программно-технических средств в сочетании с принципами открытых вычислительных систем [132] позволила создать измерительно-вычислительную систему (ИВС) для оперативного неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов, изделий, образцов [49, 50, 158, 163, 172, 173, 191, 202, 206 – 212, 217, 225, 229 – 232].

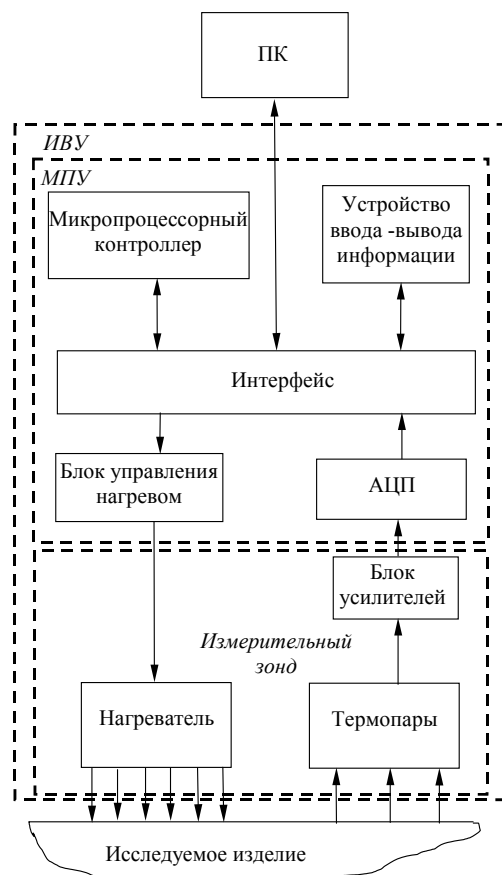
ИВС реализована в виде комплекса (рис. 6.1) и включает в себя сменные измерительные зонды, микропроцессорное устройство (МПУ), персональный компьютер (ПК), периферийные устройства.

Микропроцессорное устройство фирмы ZILA Elektronik GmbH (Германия) – Zila 1000 реализовано на базе 16-битного микроконтроллера P80CL580 с тактовой частотой 11 МГц фирмы "Texas Instruments" [133, 134, 217]. В состав Zila 1000 входят: аналого-цифровой преобразователь (АЦП) на 16 каналов, устройства ввода-вывода информации, память, набор аналоговых, цифровых и релейных портов, блок питания и управления нагревом и т.д. Периферийные устройства ИВС включают: средства вывода информации, внешние накопители и т.д.

Для реализации методов в составе ИВС использовались измерительные зонды, конструкции которых приведены на рис. 6.2 – 6.4.

Измерительный зонд, использующий линейный нагреватель, представлен на рис. 6.2. Зонд состоит из двух основных узлов: измерительной ячейки 1 и корпуса 2. Измерительная ячейка, в свою очередь,

состоит из основания 3, разъема 4. С контактной стороны измерительной ячейки на поверхности теплоизолятора 5 размещены микротермопары, сваренные встык. Две из них – измерительные 6 соединены между собой последовательно-согласно и две – дифференциальные 7 (также соединены последовательно-согласно). Линейный нихромовый нагреватель 8 изготовлен в виде узкой полосы. Измерительные термопары расположены симметрично относительно линейного нагревателя на расстоянии 2 мм от него, а дифференциальные – на расстоянии 15 мм. Выводы термопар и нагревателя проходят через специальные отверстия и распаяны на коммутационную плату 9. Пары микротермопар 6 и 7 соединены последовательно-встречно и подключены к входу усилителя



**Рис. 6.1. Структурная схема ИВС**

постоянного тока 10, размещенного в измерительной ячейке. На крышке 11 измерительной ячейки расположен разъем 4, предназначенный для коммутации сенсора с микропроцессорным управляющим устройством. Между измерительной ячейкой и крышкой 12 корпуса расположена пружина 13.

При измерениях ТФС измерительный зонд устанавливают контактной стороной на поверхность исследуемого материала. Одинаковое усилие прижима измерительной ячейки к поверхности исследуемого материала обеспечивается благодаря наличию пружины 13, что обуславливает равенство контактных тепловых сопротивлений при каждом измерении.



После выравнивания температуры исследуемого материала и измерительной ячейки зонда через линейный нагреватель в течение некоторого времени протекают импульсы тока, что обеспечивает нагрев исследуемого материала.

Разностная ЭДС, полученная на зажимах микротермопар 6 и 7, усиливается усилителем 10 и регистрируется микропроцессорным управляющим устройством.

На рис. 6.3 приведена конструкция измерительного зонда с круглым плоским нагревателем, имеющего аналогичную конструкцию. При использовании круглого нагревателя возможна замена термопары полупроводниковым датчиком температуры. В этом случае, отпадает необходимость в использовании усилителя 10. Нагрев исследуемого материала осуществляется путем подачи на круглый нагреватель постоянного тока.

На рис. 6.4 изображен измерительный зонд (ИЗ), снабженный тремя термопарами и использующий нагреватель в виде диска. ИЗ состоит из двух основных узлов: измерительной ячейки 1 и корпуса 2. Измерительная ячейка, в свою очередь, состоит из основания 3, разъема 4. Диаметр основания зонда равен

50 мм. На контактной стороне измерительной ячейки на поверхности теплоизолятора 5 размещены нагреватель 8 и измерительные микротермопары 6, 7 и 10. Термопара 6 заделана в нагреватель, термопары 7 и 10 сварены встык. Термопары расположены: 6 – в центре нагревателя; 7 и 10 – на расстояниях 9 и 7 мм от центра. Выводы термопар и нагревателя проходят через специальные отверстия и распаяны на коммутационную плату 9. Термопары подключены к входам усилителей постоянного тока. На крышке 11 измерительной ячейки расположен разъем 4, предназначенный для коммутации сенсора с МПУ. Между измерительной ячейкой и крышкой 12 корпуса расположена пружина 13.

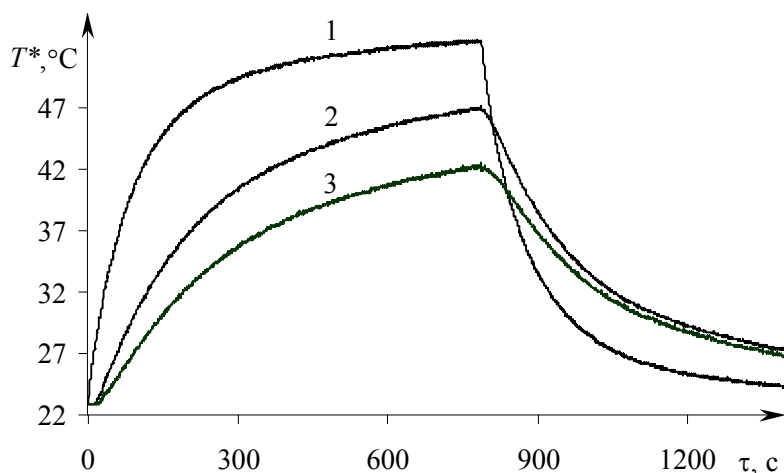
При измерениях зонд устанавливается контактной стороной на поверхность исследуемого материала. Одинаковое усилие прижима измерительной ячейки к поверхности исследуемого материала обеспечивается благодаря наличию пружины 13, что обуславливает равенство контактных тепловых сопротивлений при каждом измерении. ЭДС, полученные на зажимах микротермопар 6, 7 и 10, усиливаются усилителями и регистрируются МПУ. Такая конструкция ИЗ обеспечивает создание теплового воздействия на исследуемое изделие, фиксирование температуры в заданных точках измерения и усиление полученного аналогового сигнала.

Составные части ИВС объединены между собой системным программно-аппаратным интерфейсом. Возможно функционирование ИВС в производственных (без персонального компьютера) и лабораторных условиях.

Принцип работы ИВС состоит в следующем. Сигнал с измерительного зонда поступает на аналого-цифровой преобразователь (АЦП) МПУ ZILA-1000 и затем на микропроцессор, где обрабатывается по определенной программе. Используя последовательный интерфейс, МПУ подключается к персональному компьютеру, в котором находится программа-редактор и терминальная программа. В процессе проведения эксперимента снимаются термограммы, т.е. зависимости избыточной температуры  $T$  (или температуры изделия  $T^*$ ) от времени  $\tau$ ,  $\tau \in [\tau_0, \tau_k]$ ; здесь  $\tau_0$ ,  $\tau_k$  – начало и конец временного интервала измерения. Конструкцией и программным обеспечением ИВС предусмотрена возможность снимать термограммы как на стадии нагрева, так и на стадии остывания после отключения нагревателя.

В качестве примера на рис. 6.5 представлены экспериментальные термограммы, снятые на изделии из политетрафторэтилена (ПТФЭ) при следующих условиях: начальная температура опыта  $T_n = 22,9$  °С; радиус нагревателя  $R_n = 4$  мм; мощность на нагревателе  $W = 0,6$  Вт; шаг измерения температуры  $\Delta\tau = 0,5$  с; материал подложки зонда – рипор; толщина подложки – 20 мм.

Общий вид ИВС представлен на рис. 6.6.



**Рис. 6.5. Термограммы для ПТФЭ, зафиксированные:**  
1 – в центре зонда; 2, 3 – на расстояниях 7 и 9 мм от центра



Рис. 6.6. Общий вид ИВС

## 6.2. АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАБОЧИХ УЧАСТКОВ ТЕРМОГРАММ И ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ

Одной из основных операций, необходимых для определения ТФС, в методах с круглым и линейным нагревателями является операция определения рабочих участков экспериментальных термограмм. Второй необходимой операцией является определение коэффициентов уравнений (3.14), (5.1), (5.2), (5.12), (5.18). Так как эти уравнения представляют собой линейные зависимости относительно переменных  $t_{\text{л}}$ ,  $t''$ ,  $t'$  и при расчете ТФС используются не отдельные точки, а целые участки термограмм, то для определения коэффициентов, входящих в указанные уравнения, наиболее эффективен метод наименьших квадратов [111].

Остановимся на вопросе определения границ рабочих участков термограмм. Границы участков можно определить, основываясь на выражениях, из которых были получены расчетные формулы (3.13), (4.17) и (4.39), (4.79), (4.80), т.е. необходимо записать выражения для границ участков в критериальной форме. Однако в этом случае в эти критериальные уравнения будут входить как сами искомые теплофизические свойства, так и характеристики зонда, нагревателя, термических сопротивлений и др.

В разработанных алгоритмах для определения границ рабочих участков термограмм использовали:

1) свойства функций (3.14), (5.1), (5.2), (5.12), (5.18), согласно которым на термограммах в координатах  $T = f(t')$ ,  $T = f(t'')$  (для круглого плоского нагревателя) и  $T = f(t_{\text{л}})$  (для линейного нагревателя) рабочим участкам соответствуют прямолинейные отрезки;

2) качественную информацию, полученную при анализе выражений, на основе которых были получены расчетные соотношения (3.13), (4.17), (4.39), (4.79), (4.80), т.е. рабочим участкам термограмм будут соответствовать плоские вершины кривых  $\frac{dT}{dt'} = f(t')$ ,  $-\frac{dT}{dt''} = f(t'')$ ,  $\frac{dT}{dt_{\text{л}}} = f(t_{\text{л}})$ .

При этом учитывается, что в реальном эксперименте температура измеряется с некоторой случайной погрешностью  $\Delta T_{\text{сл}}$ .

Считая, что не менее  $k$  точек принадлежат рабочему участку термограммы, а всего на термограмме  $n$  точек, рассмотрим последовательно отрезки термограмм с номерами точек  $1 \dots k$ ;  $2 \dots k+1$ ;  $\dots$ ;  $n-k+1 \dots n$ . Обозначим каждый из отрезков индексом  $i$  ( $i = k \dots n$ ), для каждого из этих отрезков построим уравнения линейных зависимостей:

$$\hat{T}_i = \alpha_{1i}x + \alpha_{0i}, \quad i = k, k+1, \dots, n. \quad (6.1)$$

Если определяется второй участок термограммы для системы с круглым нагревателем, то  $x = t'$ ; если четвертый или шестой участок, то  $x = t''$ . Если же определяется рабочий участок термограммы для системы с линейным нагревателем, то  $x = t_{\text{л}}$ . Используем формулы [111]:

$$\beta_{1i} = \frac{\sum_{j=i-k+1}^i T_j (x_j - \bar{x}_i)}{\sum_{j=i-k+1}^i (x_j - \bar{x}_i)^2}; \quad (6.2)$$

$$\beta_{0i} = \bar{T}_i - \beta_{1i} \bar{x}_i; \quad (6.3)$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{k} \sum_{j=i-k+1}^i x_j; \quad (6.4)$$

$$\bar{T}_i = \frac{1}{k} \sum_{j=i-k+1}^i T_j, \quad (6.5)$$

где  $T_j, x_j$  – значения функции и аргумента в точках с номером  $j$  для  $i$  отрезка,  $\beta_{0i}, \beta_{1i}$  – оценка коэффициентов  $\alpha_{0i}, \alpha_{1i}$  уравнения (6.1).

Рассмотрим зависимость  $\beta_{1i}$  от  $\bar{x}_i$ , на графике которой (см. рис. 6.7, 6.8, 6.9) наблюдается плоская вершина, соответствующая рабочему участку термограммы. Найти одну из точек этой плоской вершины не представляет труда. Следующим шагом определения границ рабочих участков является вопрос – сколько точек лежит на этом участке? Чем больше точек, тем точнее будут определены коэффициенты уравнений (3.14), (5.1), (5.2), (5.12), (5.18). Будем считать, что остатки  $E_j = T_j - (\beta_{1i} x_{1j} + \beta_0)$ , вследствие отклонения зависимости  $T_j = f(x_j)$  от линейной, становятся коррелированы с  $x_j$ , т.е. зависимы от  $x_j$ . В качестве критерия используется критерий сериальной корреляции Дарбина-Ватсона [111], предполагающий вычисление статистики  $D$  для серии из  $k$  измерений:

$$D = \frac{\sum_{j=i-k+1}^i (E_j - E_{j-1})^2}{\sum_{j=i-k+1}^i E_j^2}, \quad (6.6)$$

где  $E_j$  – остаток в момент  $j$ , а  $(E_j - E_{j-1})$  – правая последовательная разность.

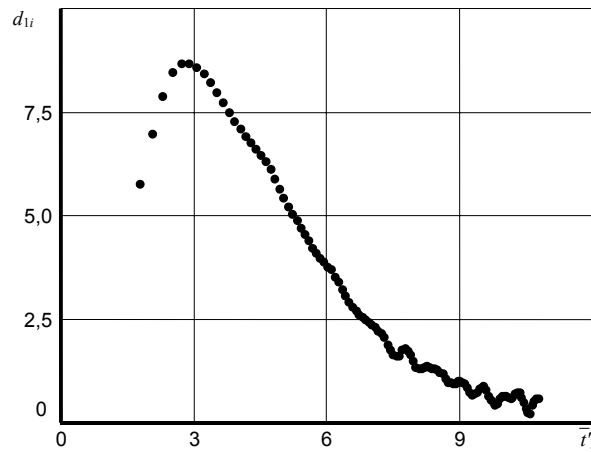


Рис. 6.7. Зависимость  $d_{1i} = f(\bar{t}'_i)$

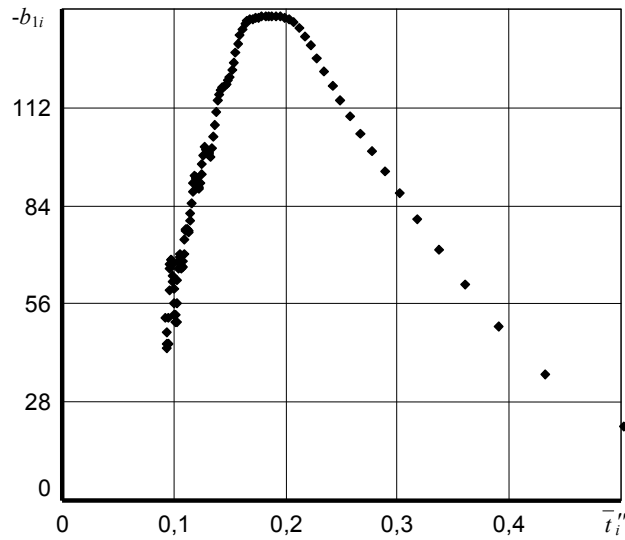


Рис. 6.8. Зависимость  $-b_{1i} = f(\bar{t}_i'')$

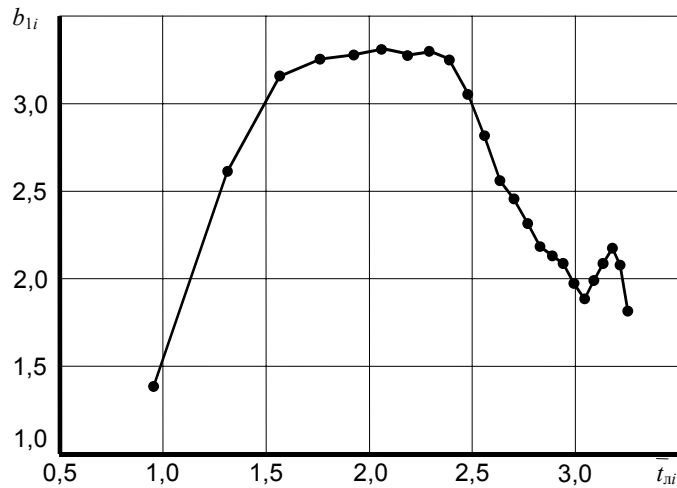


Рис. 6.9. Зависимость  $b_{1i} = f(\bar{t}_{1i})$

На рис. 6.10 представлены распределение  $D$  и области, в которых гипотеза о серийной корреляции принимается или отвергается.

Как указывалось выше, у нас уже имеется участок из  $k$  точек, принадлежащий рабочему участку термограммы. Увеличивая влево и вправо этот участок, определяем на основе выражений (6.2) – (6.5) коэффициенты  $\beta_0$  и  $\beta_1$  и на основе, вычисленной по формуле (6.6) статистики  $D$ , делаем вывод о том, коррелированы ли остатки.

Как только критерий Дарбина-Ватсона дает отрицательный результат (остатки имеют корреляцию), заканчиваем процедуру увеличения участка и считаем, что нашли все точки, принадлежащие рабочему участку термограммы. Затем по формулам (6.2) – (6.5) оцениваем параметры моделей (3.14), (5.1), (5.2), (5.12), (5.18) (в этом случае  $k$  будет количеством точек, попавших на рабочий участок, а  $i$  – номером последней из точек, индекс  $i$  при  $\beta_0, \beta_1, \bar{x}, \bar{T}$  опускаем).

При использовании зонда с несколькими термоприемниками в методе с круглым плоским нагревателем постоянной мощности для выделения рабочих участков термограмм на стадиях нагрева и охлаждения достаточно ограничиться исследованием кривых  $d_{1i} = f(T_s)$ ,  $b_{1i} = f(T_s)$  и  $h_i = f(T_s)$ .

Примеры определения рабочих участков термограмм по графикам зависимостей  $b_{1i} = f(T_s)$ ,  $b_{0i} = f(T_s)$ ,  $h_i = f(T_s)$  представлены на рис. 6.11, 6.12.

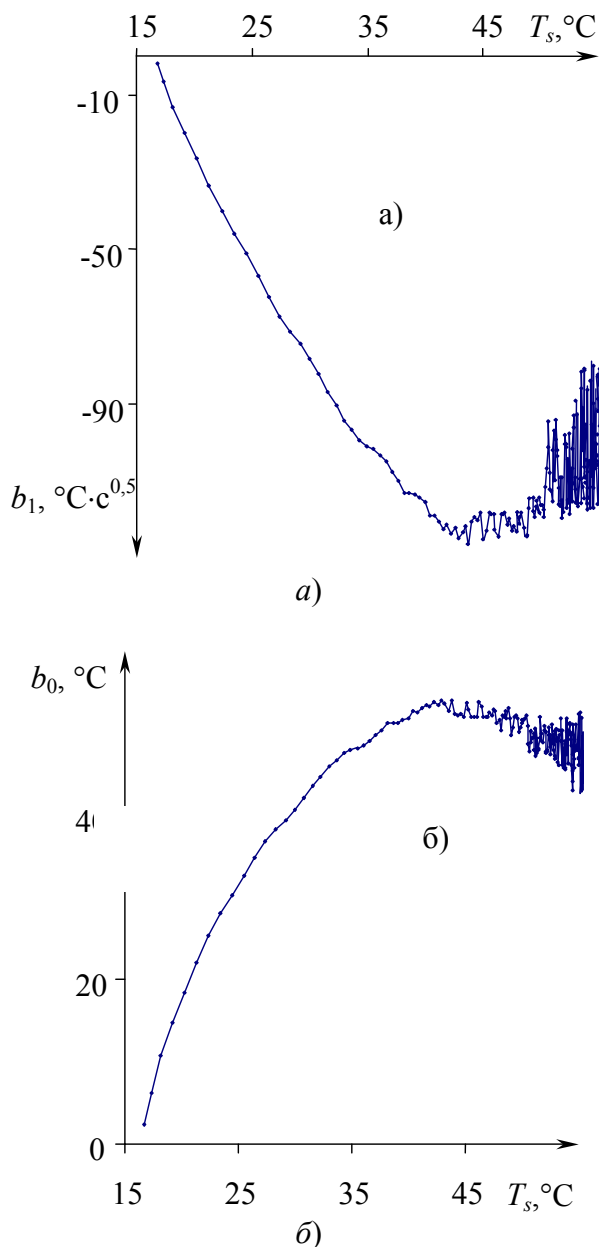
На рис. 6.11 представлены графики зависимостей  $b_{1i} = f(T_s)$  и  $b_{0i} = f(T_s)$ , построенные по термограмме, снятой при следующих условиях: начальная температура опыта  $T_n = 16,7$  °С; радиус нагревателя



$R_n = 2,5$  мм; мощность на нагревателе  $W = 1,9$  Вт; шаг измерения температуры  $\Delta\tau = 0,5$  с; толщина исследуемого изделия  $H_n = 20$  мм; исследуемое изделие – пластина из ПТФЭ.



**Рис. 6.10. Распределение статистики  $D$**



**Рис. 6.11. Зависимости:**

$$a - b_{1i} = f(T_s); \quad \bar{b} - b_{0i} = f(T_s)$$

На рис. 6.12 представлен график зависимости  $h_i = f(T_s)$ , построенной по термограмме, снятой в центре зонда при следующих условиях:  $T_n = 22,1$  °С;  $R_n = 4$  мм;  $W = 0,7$  Вт;  $\Delta\tau = 0,5$  с;  $H_n = 15$  мм; температура отключения нагревателя –  $50,6$  °С; материал изделия – ПТФЭ.

На рис. 6.13 и 6.14 представлены рабочие участки термограмм, снятых на ПТФЭ как на стадии нагрева (рис. 6.13), так и на стадии остывания (рис. 6.14), при следующих условиях:  $T_n = 22,1$  °С;

$R_{\text{п}} = 4 \text{ мм}$ ;  $W = 0,7 \text{ Вт}$ ;  $\Delta\tau = 0,5 \text{ с}$ ;  $H_{\text{и}} = 15 \text{ мм}$ .

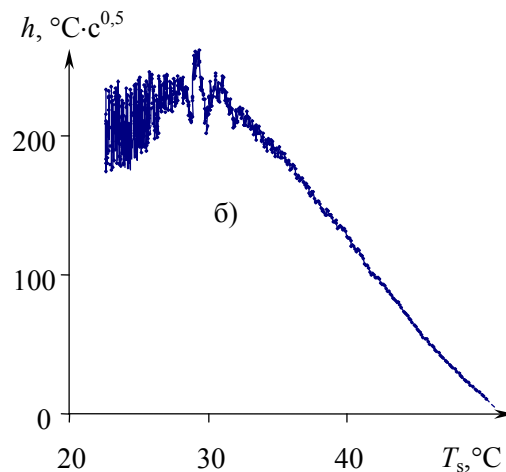
Рассматривая зависимости, представленные на рис. 6.11 и 6.12, с достаточной степенью точности выделяют рабочий участок, как плоскую вершину на зависимостях  $b_{1i} = f(T_s)$ ,  $b_{0i} = f(T_s)$ ,  $h_i = f(T_s)$  (рис. 6.11 и 6.12) или прямолинейный отрезок термограммы, построенной в координатах  $T^*$ ,  $t = \tau^{-0.5}$  (рис. 6.13 и 6.14).

Так как модели (3.14), (5.1), (5.2), (5.12), (5.18) являются линейными, то можно получить погрешности определения их параметров согласно формулам [111]:

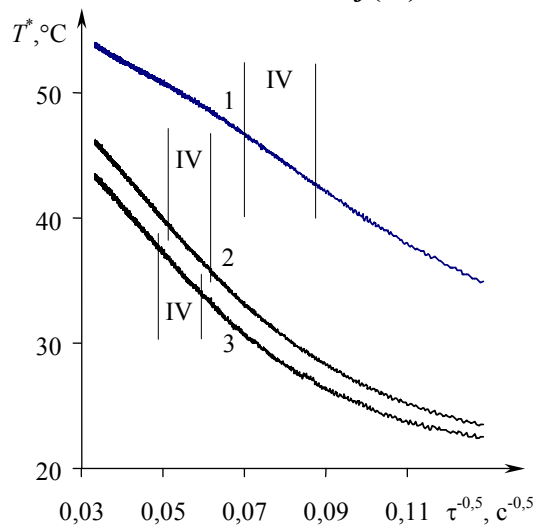
$$\Delta\beta_0 = t_{1-\alpha/2, k-2} s_{\beta_0}; \quad (6.7)$$

$$\Delta\beta_1 = t_{1-\alpha/2, k-2} s_{\beta_1}; \quad (6.8)$$

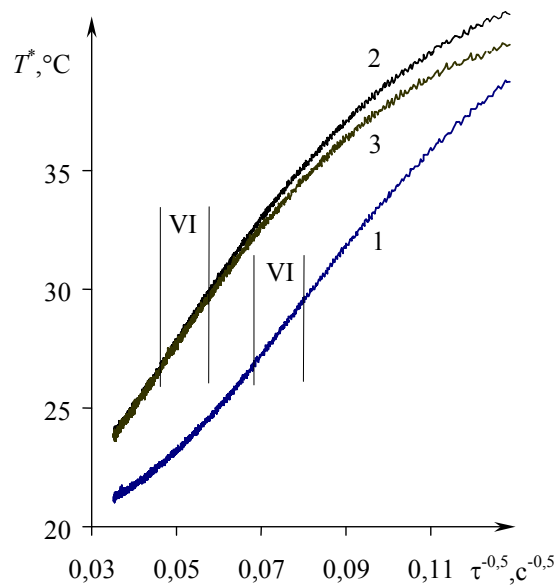
$$s_{\beta_1}^2 = \frac{s_T^2}{\sum_{j=i-k+1}^i (x_j - \bar{x})^2}; \quad (6.9)$$



**Рис. 6.12. Зависимость  $h_i = f(T_s)$  для ПТФЭ**



**Рис. 6.13. Термограммы для ПТФЭ, построенные в координатах  $T^*$ ,  $t$ , с выделенными рабочими участками. Стадия нагрева: 1 – в центре зонда; 2, 3 – на расстояниях 7 и 9 мм от центра**



**Рис. 6.14. Термограммы для ПТФЭ, построенные в координатах  $T^*$ ,  $t$ , с выделенными рабочими участками. Стадия остывания:**  
**1** – в центре зонда; **2, 3** – на расстояниях 7 и 9 мм от центра

$$s_{\beta_0}^2 = s_T^2 \left( \frac{1}{k} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{j=i-k+1}^i (x_j - \bar{x})^2} \right); \quad (6.10)$$

$$s_T^2 = \frac{1}{k-2} \left\{ \sum_{j=i-k+1}^i (T_j - \bar{T})^2 - \frac{\left[ \sum_{j=i-k+1}^i T_j (x_j - \bar{x}) \right]^2}{\sum_{j=i-k+1}^i (x_j - \bar{x})^2} \right\}, \quad (6.11)$$

где  $t$  – распределение Стьюдента;  $(1 - \alpha)$  – доверительная вероятность;  $(k - 2)$  – число степеней свободы.

Примеры определения рабочих участков термограмм по графикам зависимостей  $d_1 = f(T_s)$  представлены в прил. П1.

### 6.3. АЛГОРИТМЫ КОНТРОЛЯ ЗА ХОДОМ ЭКСПЕРИМЕНТА И ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Как видно из рис. 3.7, 4.6, часть измерительной информации после окончания IV, VI участков термограммы для метода с плоским круглым нагревателем и II участка для метода с линейным нагревателем не может быть использована. Поэтому с целью сокращения длительности эксперимента был предложен критерий, по величине которого можно отключить нагреватель.

В качестве примера на рис. 6.15 и 6.16 приведены схемы алгоритмов контроля за ходом эксперимента и обработки измерительной информации при использовании измерительных зондов с круглым (рис. 6.15) и линейным (рис. 6.16) нагревателями и с одним термоприемником. Рассматривается стадия нагрева. Основные операции при контроле ТФС выделены на схемах укрупненными блоками А, В, С, D.

**Блок А** соответствует процессу термостатирования, причем за ходом термостатирования ведется контроль. Это необходимо, чтобы исключить погрешность, связанную с неравномерностью начального температурного распределения в измерительном зонде и исследуемом изделии. По окончании термостатирования включается нагреватель и фиксируется температурно-временная зависимость в заданных точках системы.

Ядром МПУ является 16-битный микроконтроллер P80CL580 с тактовой частотой 11 МГц. Память микроконтроллера разбита на три части:

1) оперативное запоминающее устройство (ОЗУ), предназначенное для записи программ контроля при проведении отладки алгоритмов определения ТФС материалов и контроля температурно-

временных параметров структурных превращений в полимерах, хранения экспериментальных данных и переменных;

2) перепрограммируемое постоянное запоминающее устройство (ППЗУ), в которое записывается откорректированная и окончательно проверенная программа;

3) постоянное запоминающее устройство (ПЗУ) с операционной системой контроллера, под управлением которой осуществляется работа микропроцессорного устройства.

В состав МПУ также входят: 12-битный аналого-цифровой преобразователь (АЦП) на 16 каналов, имеющий защиту от входных перегрузок, жидкокристаллический индикатор (4×20), клавишная клавиатура (4×4), блок управления нагревом, последовательный интерфейс RS 232 для связи с ПК, параллельный интерфейс Centronics.

В качестве ПК используется IBM-совместимый компьютер.

Принцип работы ИВС состоит в следующем. Сигналы с ИЗ поступают на АЦП МПУ и затем на микропроцессор, где обрабатываются по определенной программе. В процессе проведения эксперимента регистрируются термограммы, т.е. зависимости избыточной температуры  $T$  (или температуры изделия  $T^*$ ) от времени. Конструкцией и программным обеспечением ИВС предусмотрены возможности фиксировать термограммы как на стадии нагрева, так и на стадии остывания.

Программная часть ИВС классифицируется на системное, прикладное и технологическое (вспомогательное) обеспечения.

Системное программное обеспечение (ПО) осуществляет управление работой ИВС и представлено комплексом программ.

1. Программа Dani 52. Загружается в ПК, входящий в состав ИВС. Программа выполняет функции редактора текстов программ для устройства Zila-1000, их синтаксической проверки, преобразования и загрузки в ОЗУ микроконтроллера. Терминальный модуль программы Dani 52 обеспечивает взаимодействие пользователя с микропроцессорным устройством, позволяя управлять его работой и отображать результаты при выполнении загруженной программы.

2. Операционная система и интерпретатор Zila-Basic записаны в ПЗУ. Под управлением операционной системы осуществляется работа микропроцессорного устройства. Интерпретатор Zila-Basic (модифицированный Intel-Basic) производит последовательную обработку и выполнение инструкций программы, загруженной в ОЗУ или записанной в ППЗУ. Кроме стандартных операторов, функций и ключевых слов, составляющих ядро языка программирования Basic, интерпретатор Zila-Basic предоставляет разработчику дополнительный набор команд и переменных для управления специализированными системными устройствами (таймером, аналоговыми, цифровыми, релейными портами, устройствами ввода-вывода, памятью и т.д.).

3. Внешние коммуникационные программы функционируют в ПК и служат для организации обмена данными между ПК и МПУ, расширяя возможности программной оболочки Dani 52. К числу таких программ относится модуль Nurer Terminal из дистрибутивного комплекса Windows 95/98, обеспечивающий настройку параметров соединения ПК и ИВС посредством последовательного интерфейса, передачу управляющих команд в МПУ, прием результатов измерений в виде большого массива данных и запись полученной информации на диск.

Для реализации алгоритмов контроля разработан комплекс программ для МПУ и ПК, составляющих прикладное ПО ИВС, которое представляется совокупностью программных модулей определенного функционального назначения [133, 134, 229 – 232].

1. Интерфейсная программная часть формирует многоуровневое меню, обеспечивающее удобное и эффективное взаимодействие оператора с ИВС, включая выбор различных режимов работы, а также управляет другими модулями прикладного ПО.

2. Программные модули измерения тепловой информации обеспечивают снятие термограмм нагрева, а также фиксирование начального распределения температуры в исследуемом теле.

3. Модуль проведения градуировки.

4. Программные модули расчета текущих значений ТФС (коэффициентов теплопроводности, температуропроводности, теплоемкости, тепловой активности) и соответствующих значений температуры изделия, времени, параметров моделей, а также дисперсий параметров моделей.

5. Модули выделения рабочих участков термограмм.

6. Модуль контроля за ходом эксперимента обеспечивает возможности отключения нагревателя при достижении во времени нужного участка термограммы, фиксирования термограммы при остывании после отключения нагревателя, завершения эксперимента после окончания рабочего участка термограммы на стадии остывания.

7. Модули статистической обработки экспериментальных данных [304, 305]. Например, модуль определения закона распределения текущих значений ТФС и параметров аналитических моделей на рабочих участках термограмм и модуль с программой для доказательства неслучайности некоторых наблюдений на экспериментальных кривых зависимостей ТФС от температуры в случае проявления структурных переходов в полимерах.

8. Модуль оценки скоростей нагрева, применение которого обязательно при контроле структурных превращений (как фазовых, так и релаксационных) в полимерных материалах.

9. Модуль численного моделирования полей методом конечных элементов с помощью пакета ELCUT [286].

10. Модуль взаимодействия МПУ с ПК осуществляет передачу сигналов (результатов измерений и команд управления) между ними.

11. Модуль ввода-вывода позволяет выполнять ввод исходных данных с клавиатуры МПУ или ПК, а также вывод на дисплей результатов измерения тепловой информации.

Вспомогательное ПО состоит из программ тестирования, организации обработки и хранения измерительной информации на ПК. В ходе проектирования ИВС, включая разработку ее аппаратных средств, математического, алгоритмического и программного обеспечений, были использованы современные пакеты программ Microsoft Excel, Maple, Advanced Grapher, Borland Delphi, SPSS for Windows, что позволило проводить эффективный и детальный анализ системы на всех этапах ее создания.

## 6.6. КОРРЕКЦИЯ ТЕРМОГРАММ С УЧЕТОМ НЕСТАБИЛЬНОСТИ МОЩНОСТИ, ВЫДЕЛЯЮЩЕЙСЯ НА НАГРЕВАТЕЛЕ

В случае, когда источник питания не позволяет добиться постоянной мощности на нагревателе (например, мощность меняется на 10...15 % от среднего значения), то могут возникнуть значительные погрешности при определении ТФС (если в основу метода положен нагрев с постоянной мощностью). Для того, чтобы исключить нестабильность источника питания, необходимо иметь дополнительную информацию – закон изменения мощности на нагревателе  $w = w(\tau)$ . Кроме того в процессе измерения фиксируют  $T = T(\tau)$  – температуру в заданной точке системы (собственно, термограмма). Поэтому представляет интерес задача корректировки исходных термограмм с целью исключения влияния изменения во времени мощности на нагревателе (т.е., приведение термограмм к некоторой одной мощности). Все расчетные зависимости получены из условия  $q = \text{const}$ , что, очевидно, равносильно условию  $w = \text{const}$ .

*Задача.* Пусть в процессе опыта регистрируется  $T(\tau)$  – зависимость температуры нагревателя от времени и  $w(\tau)$  – зависимость мощности, выделяющейся на нагревателе, от времени. Требуется определить температуру  $\tilde{T}(\tau)$ , соответствующую постоянной мощности нагревателя  $w = 1$  Вт.

В соответствии с теоремой Дюамеля [10]

$$T(\tau) = w(0)\tilde{T}(\tau) + \int_0^{\tau} w'(\tau-u)\tilde{T}(u)du. \quad (6.13)$$

Перепишем выражение (6.13) в виде

$$\tilde{T}(\tau) = \frac{T(\tau)}{w(0)} + \left(-\frac{1}{w(0)}\right) \int_0^{\tau} w'(\tau-u)\tilde{T}(u)du. \quad (6.14)$$

Это интегральное уравнение Вольтера второго рода [106], решением которого, записанного в виде

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^s K(s, t) \varphi(t) dt,$$

является ряд

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \varphi_1(s)\lambda + \varphi_2(s)\lambda^2 \dots, \quad (6.15)$$

где  $f(s)$  – заданная функция;  $K(s, t)$  – заданная функция (ядро интегрального уравнения);  $\varphi(s)$  – искомая функция;  $\lambda$  – произвольное число,

$$\varphi_0(s) = f(s), \quad \varphi_n(s) = \int_a^s K(s, t) \varphi_{n-1}(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Для корректировки термограмм решение (6.15) малоприспособно по следующим причинам: мы имеем не непрерывные функции, а значения функций в дискретных точках; значения функций известны нам с определенной точностью.

Поэтому для корректировки термограмм воспользуемся другим подходом для решения уравнения (6.13). В качестве критерия того, насколько хорош алгоритм корректировки термограмм, возьмем воспроизводимость скорректированных термограмм.

Из всех вариантов была выбрана следующая схема. Перепишем, предварительно, выражение (6.13) в виде

$$T(\tau) = \int_0^\tau w(\tau - u) \tilde{T}'(u) du. \quad (6.16)$$

Решение этого интегрального уравнения (тождественного уравнению (6.14)) будем искать в классе кусочно-непрерывных функций. Заменяем в уравнении (6.16) непрерывные функции значениями функций в дискретных точках, производные – конечными разностями, а дифференциал – приращением аргумента по формулам

$$du \approx \Delta\tau, \quad w(\tau) \approx \frac{w_{n-(i-1)} + w_{n-i}}{2}; \quad \tilde{T}'(\tau) \approx \frac{\tilde{T}_i - \tilde{T}_{i-1}}{\Delta\tau} \quad (i = 1 \dots n).$$

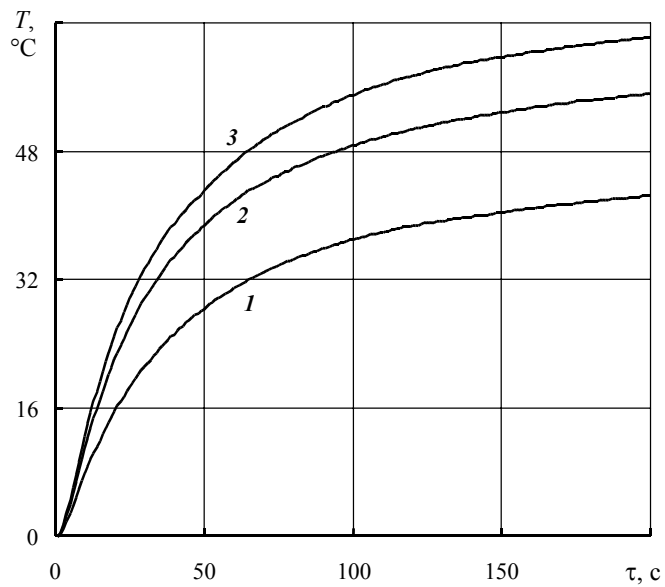
Интеграл заменяем конечной суммой, т.е.

$$T_n = \sum_{i=1}^n \frac{w_{n-i+1} + w_{n-i}}{2} (\tilde{T}_i - \tilde{T}_{i-1}).$$

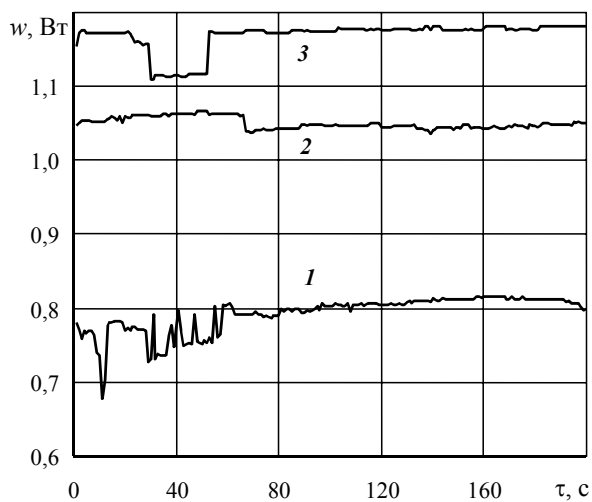
Далее можно записать

$$\tilde{T}_n = \frac{2T_n - \sum_{i=1}^{n-1} (w_{n-i+1} + w_{n-i}) (\tilde{T}_i - \tilde{T}_{i-1}) + \tilde{T}_{n-1} (w_1 + w_0)}{(w_1 + w_0)}. \quad (6.17)$$

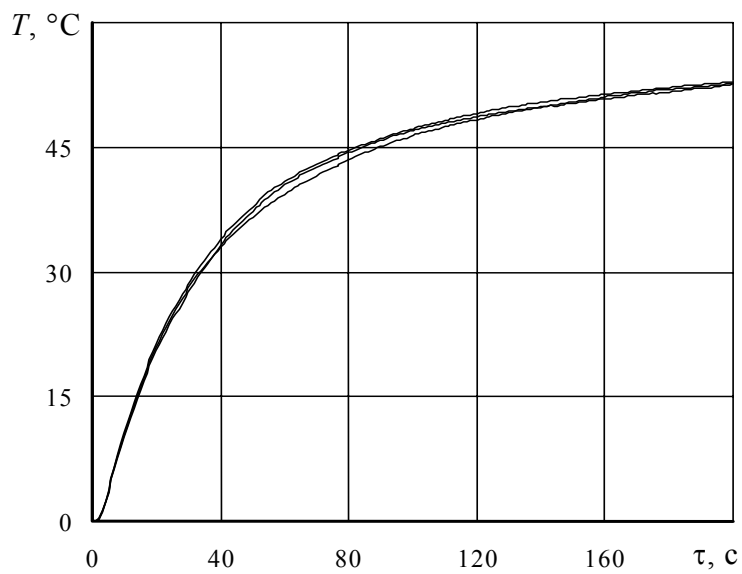
На рис. 6.20 представлены исходные термограммы (при использовании измерительного зонда с круглым плоским нагревателем), снятые на одном и том же образце. На рис. 6.21 показаны зависимости мощности на нагревателе от времени (кривые 1, 2, 3 рис. 6.20 сняты при мощностях 1, 2, 3 рис. 6.21). На рис. 6.22 показаны скорректированные по формуле (6.17) термограммы. Как видно из представленных данных, формула (6.17) дает хорошие результаты и ее можно использовать для корректировки термограмм, снятых на материалах, не претерпевающих структурных превращений в ходе эксперимента.



**Рис. 6.20. Исходные термограммы**



**Рис. 6.21. Мощность на нагревателе в зависимости от времени**



**Рис. 6.22. Скорректированные термограммы**

## 6.7. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

### 6.7.1. Определение принадлежности текущих значений ТФС на рабочих участках температурных зависимостей (вне зоны структурных превращений) нормальному распределению

Известно, что при нагревании полимеров и композиционных материалов на их основе часто наблюдаются регистрируемые методами дифференциальной сканирующей калориметрии (ДСК) тепловые эффекты [137, 138, 141]. Так, на кривых ДСК, представляющих собой зависимости теплоемкости от температуры ( $c = f(T)$ ), для частично кристаллических полимеров нередко можно наблюдать присутствие двух и более эндотермических пиков. В работе [141] названы некоторые причины этой множественности эндотермических пиков, среди которых: реорганизация метастабильных кристаллов из сложенных цепей (КСЦ); рекристаллизация КСЦ; фазовые переходы в твердых полимерах, предшествующие плавлению; присутствие в полимере кристаллов разного строения; плавление и изотропия жидкокристаллических полимеров; присутствие кристаллов двух и более преимущественных размеров; образование новых (вторичных) кристаллов вследствие низкотемпературного отжига ("холодной кристаллизации"); плавление исходных и дефектных кристаллов в облученных полимерах; проявление меж- и внутримолекулярной стадии плавления в высокоориентированном полимере и др.

У многих полимеров множественность эндотермических пиков определяется проявлением в них при  $T < T_{пл}$  твердофазных переходов из одной кристаллографической модификации в другую. Это является причиной эндотермических пиков на кривых ДСК, например, у поливинилиденфторида, полипропилена, политетрафторэтилена, транс-1,4-полибутадиена, поли-*n*-ксилилена, полибутена-1, полиамидов и др.

Тепловые эффекты наблюдаются и при нагревании застеклованных полимеров до температуры размягчения, т.е., релаксационные переходы в полимерах ( $\alpha$ -переход стеклования и даже  $\beta$ -переход [141]) так же проявляются на кривых ДСК.

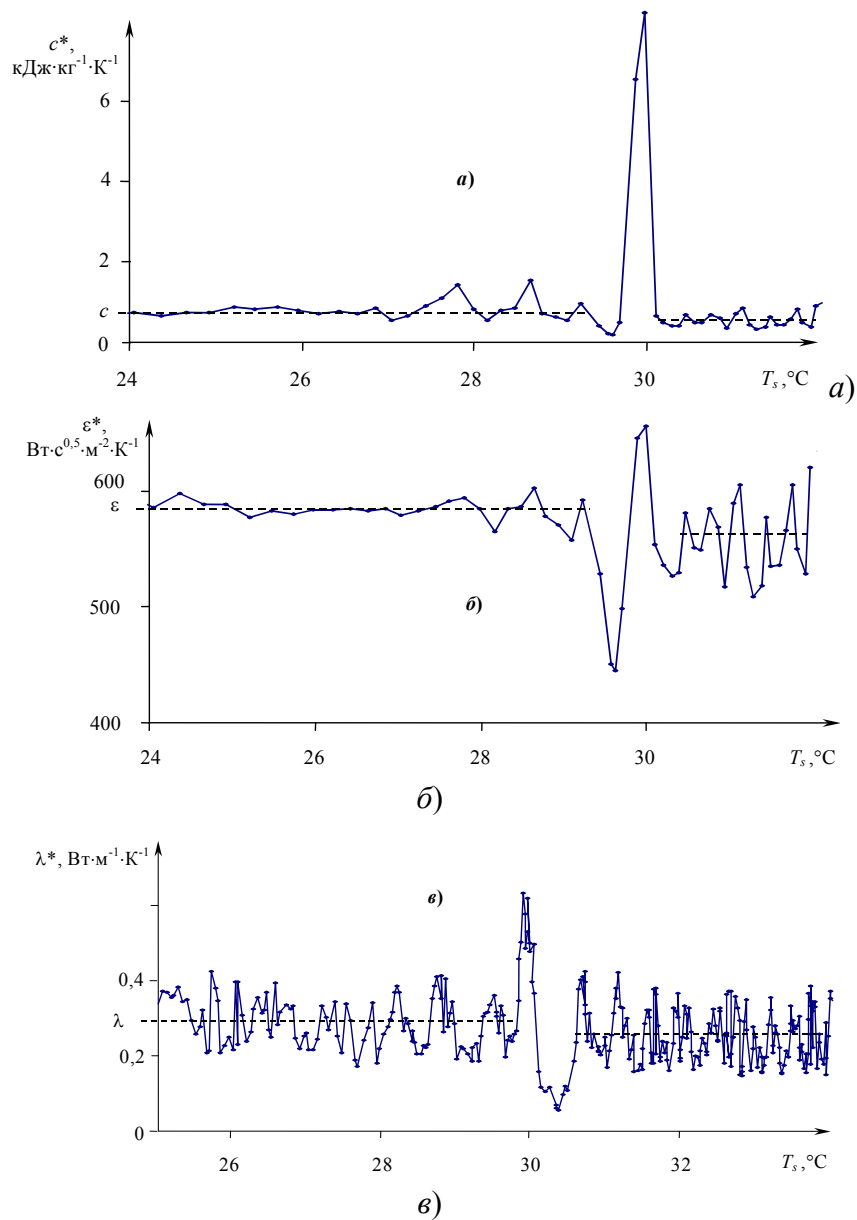
При обработке данных по предлагаемому методу [50, 65, 159–163, 183, 184, 187, 202, 205, 208–224] можно увидеть, что на рабочих участках термограмм отдельные экспериментальные точки обращают на себя внимание значительными отклонениями от остальных текущих значений (рис. 6.23). Данные значения параметров (например,  $\varepsilon$ ,  $\lambda$ ,  $a$  или  $c_p$ ) могут быть промахами или неслучайными значениями, объясняемыми структурными превращениями в полимерах.

Для установления однородности ряда наблюдений необходимо определить, какому распределению принадлежат текущие значения, например, тепловой активности  $\varepsilon^*$  на рабочих участках зависимостей  $\varepsilon^* = f(T_s)$  (вне зоны структурных превращений) (рис. 6.24 – 6.26).

В качестве способа оценки близости распределения выборки экспериментальных данных объемом  $n$  к принятой аналитической модели закона распределения используются критерии согласия [306 – 310, 312].

При числе наблюдений  $n > 50$  для идентификации закона распределения наиболее часто используются критерии согласия Пирсона (критерий  $\chi^2$ ) и критерий Колмогорова. При  $50 > n > 15$  применяется составной критерий ( $d$ -критерий), приведенный в ГОСТ 8.207–76. При  $n < 15$  принадлежность экспериментального распределения к теоретическому не проверяется [306].





**Рис. 6.23. Иллюстрации аномалий  $c^*$ ,  $\varepsilon^*$ ,  $\lambda^*$  на кривых  $c^* = f(T_s)$ ,  $\varepsilon^* = f(T_s)$ ,  $\lambda^* = f(T_s)$**

На рис. 6.24 – 6.26 представлены термограммы, зарегистрированные центральной термопарой на изделиях из ПТФЭ при следующих условиях: радиус нагревателя  $R = 4 \cdot 10^{-3}$  м; мощность на нагревателе  $W = 0,64$  Вт; временной шаг измерения температуры  $\Delta\tau = 0,5$  с; материал подложки измерительного зонда – рипор; толщина подложки –  $20 \cdot 10^{-3}$  м; толщина исследуемого изделия из ПТФЭ –  $25 \cdot 10^{-3}$  м. Начальные температуры опытов: 20; 20,4; 21,4 °С. Зависимости  $\varepsilon^* = f(T_s)$  построены в соответствии с разработанным методом по модели плоского полупространства [50]. Рабочим участкам термограмм соответствуют температурные интервалы:  $T_1^* = 28 \dots 32$  °С;  $T_2^* = 29 \dots 33$  °С;  $T_3^* = 28 \dots 32$  °С. Статистические ряды данных по трем опытам для рабочих участков термограмм сведены в табл. 6.1 – 6.3 ( $\varepsilon_i^*$  – текущие значения тепловой активности;  $\varepsilon_{(i)}^*$  – сортированные значения тепловой активности, расположенные в порядке возрастания).

С целью выбора теоретического распределения по статистическому ряду, когда его вид не известен, использовалась система кривых Пирсона [307].

Для применения данной системы определяют нормированные показатели асимметрии ( $\beta_1$ ) и остроты ( $\beta_2$ ):

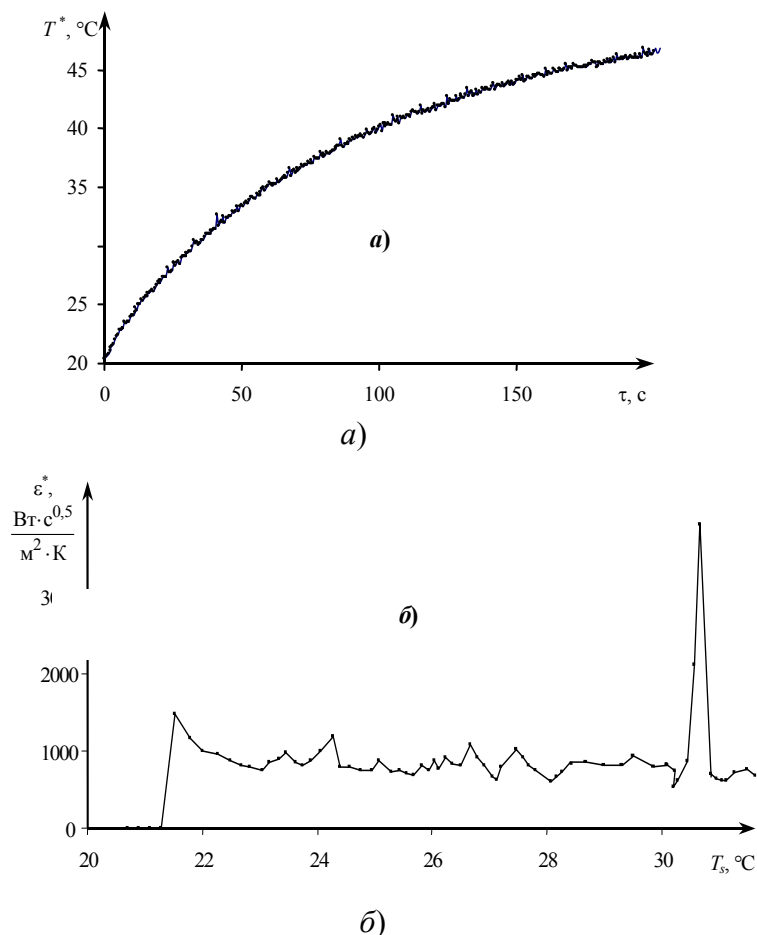
$$\sqrt{\beta_1} = \mu_3 / (\mu_2)^{3/2}; \quad \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2,$$

где  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ ,  $\mu_4$  – второй, третий, четвертый центральные моменты случайной величины соответственно.

Так как значения  $\beta_1$  и  $\beta_2$  не известны, находят их выборочные оценки  $\beta_1^*$  и  $\beta_2^*$ , для чего определяют статистические моменты  $\mu_2^*$ ,  $\mu_3^*$ ,  $\mu_4^*$  по формулам:

$$\mu_2^* = \frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^* - \bar{\varepsilon}^*)^2}{n-1}; \quad \mu_3^* = \frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^* - \bar{\varepsilon}^*)^3}{n};$$

$$\mu_4^* = \frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^* - \bar{\varepsilon}^*)^4}{n}.$$



**Рис. 6.24. Термограмма (а), зарегистрированная центральной термопарой, и зависимость  $\varepsilon^* = f(T_s)$  для ПТФЭ (б)  $T_H = 20,4^\circ\text{C}$**

Результаты для данных табл. 6.1:

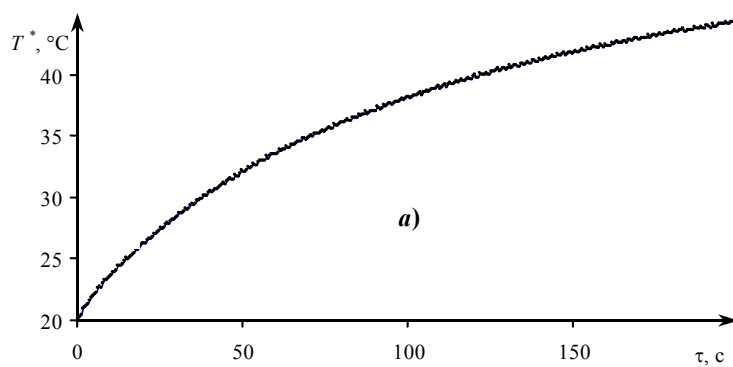
$$\mu_2^* = 14057,86; \quad \mu_3^* = 1098930,1; \quad \mu_4^* = 621440845,1.$$

Определив  $\beta_1^* = 0,43$  и  $\beta_2^* = 3,14$  и, используя графики, представленные, например, в работе [307, с. 61], устанавливают распределение, наиболее подходящее для выравнивания статистического ряда. Величину  $\bar{\varepsilon}^*$  (среднее значение тепловой активности ряда  $\varepsilon_i^*$ ) вычисляют без учета экстремальных значений (т.е. с учетом "цензурирования" выборки).

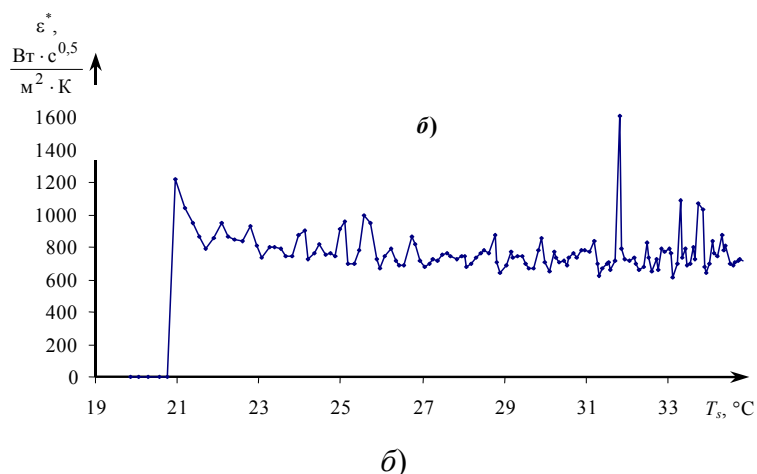
Таблица 6.1

№	$\varepsilon_i^*$	$\varepsilon_{(i)}^*$	№	$\varepsilon_i^*$	$\varepsilon_{(i)}^*$
1	831,7	536,0	30	852,7	718,7
2	689,2	545,8	31	808,3	721,7

3	718,7	549,2	32	698,7	726,5
4	671,8	571,8	33	693,7	726,6
5	661,4	576,0	34	645,1	730,2
6	772,1	577,2	35	627,8	740,2
7	726,6	596,3	36	618,6	758,6
8	841,0	603,6	37	726,5	762,9
9	730,2	613,7	38	762,9	764,1
10	875,8	616,0	39	683,7	772,1
11	803,9	618,6	40	827,9	774,5
12	774,5	626,3	41	703,1	774,6
13	1045,7	627,8	42	536,0	784,2
14	869,9	639,7	43	549,2	803,9
15	774,6	640,9	44	576,0	808,3
16	640,9	645,1	45	712,4	824,5
17	596,3	647,7	46	616,0	827,9
18	764,1	661,4	47	1043,5	831,7
19	977,0	671,8	48	712,1	840,7
20	882,9	683,7	49	647,7	841,0
21	784,2	689,2	50	571,8	852,7
22	721,7	693,7	51	603,6	869,9
23	577,2	694,4	52	613,7	875,8
24	639,7	698,7	53	840,7	882,9
25	694,4	703,1	54	962,6	962,6
26	824,5	709,1	55	758,6	977,0
27	740,2	712,1	56	709,1	1043,5
28	545,8	712,4	57	713,9	1045,7
29	626,3	713,9			



a)



**Рис. 6.25. Термограмма (а), зарегистрированная центральной термопарой, и зависимость  $\varepsilon^* = f(T_s)$  для ПТФЭ (б).  $T_n = 20^\circ\text{C}$**

выборки). Для примера 1 (рис. 6.24, табл. 6.1) наиболее подходит нормальное распределение. Однако при применении этого метода необходимо учитывать два ограничения:

1)  $\beta_1^*$  и  $\beta_2^*$  являются лишь оценками для  $\beta_1$  и  $\beta_2$  и подвержены колебаниям от выборки к выборке, поэтому необходимо осторожно пользоваться методом при малом числе наблюдений, например меньше 200;

2) в общем случае форма распределения не определяется однозначно его нормированными показателями асимметрии  $\beta_1$  и островершинности  $\beta_2$ .

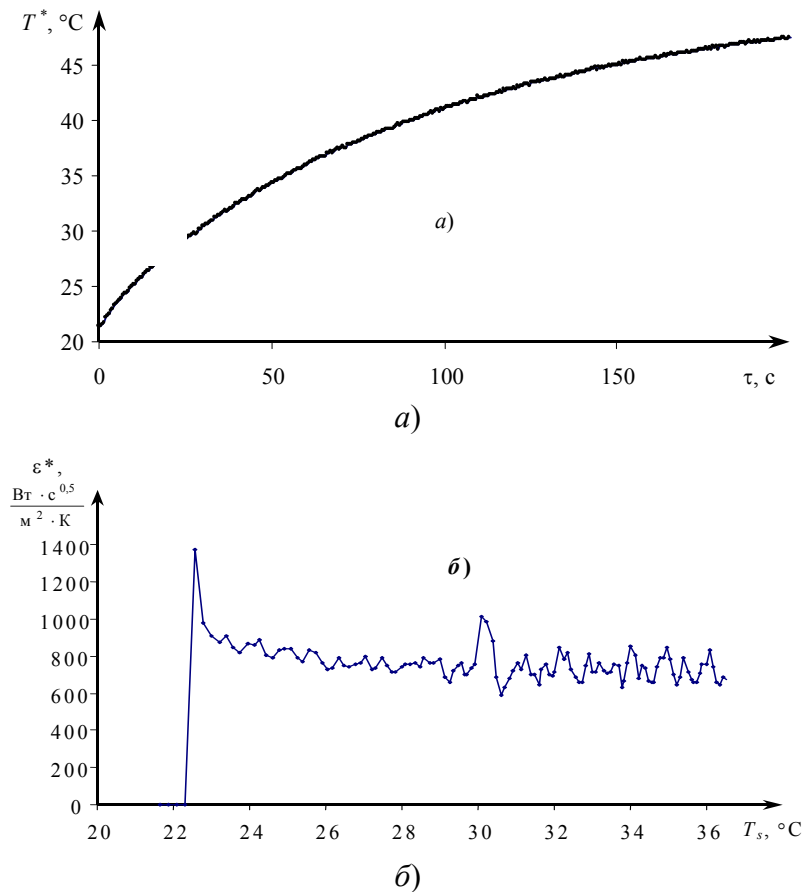
Таблица 6.2

№	$\varepsilon_i^*$	$\varepsilon_{(i)}^*$	№	$\varepsilon_i^*$	$\varepsilon_{(i)}^*$
1	793,9	620,0	19	698,9	697,2
2	715,8	644,0	20	736,0	698,9
3	687,2	652,8	21	766,2	698,9
4	692,0	653,5	22	781,2	699,4
5	861,2	656,6	23	758,8	700,8
6	815,4	657,4	24	870,0	703,1
7	714,1	657,9	25	703,1	705,3
8	674,5	665,4	26	644,0	708,1
9	695,1	667,0	27	691,0	709,2
10	721,2	668,3	28	772,1	714,1
11	717,4	674,5	29	735,5	715,8
12	754,0	680,7	30	748,5	717,2
13	767,1	681,8	31	745,6	717,4
14	748,7	687,2	32	699,4	719,2

15	729,9	690,0	33	668,3	720,7
16	740,7	691,0	34	665,4	721,2
17	746,0	692,0	35	783,1	721,8
18	680,7	695,1	36	859,4	724,9

*Продолжение табл. 6.2*

№	$\varepsilon_i^*$	$\varepsilon_{(i)}^*$	№	$\varepsilon_i^*$	$\varepsilon_{(i)}^*$
37	709,2	726,1	56	657,4	771,5
38	653,5	729,9	57	717,2	772,1
39	772,9	733,8	58	726,1	772,9
40	733,8	734,0	59	787,7	774,3
41	708,1	735,5	60	721,8	776,9
42	720,7	736,0	61	719,2	781,2
43	690,0	736,2	62	736,2	783,1
44	734,0	738,0	63	700,8	785,9
45	759,3	739,1	64	657,9	786,5
46	738,0	740,7	65	681,8	787,7
47	776,9	745,6	66	829,2	790,1
48	785,9	746,0	67	739,1	793,9
49	771,5	748,5	68	652,8	815,4
50	834,8	748,7	69	724,9	829,2
51	697,2	754,0	70	656,6	834,8
52	620,0	758,8	71	790,1	859,4
53	667,0	759,3	72	774,3	861,2
54	698,9	766,2	73	786,5	870,0
55	705,3	767,1			



**Рис. 6.26. Термограмма (а), зарегистрированная центральной термопарой, и зависимость  $\varepsilon^* = f(T_s)$  для ПТФЭ (б).  $T_{н} = 21,4\text{ }^{\circ}\text{C}$**

Отметим, что между теоретической кривой (как бы хорошо подобрана она не была) и статистическим распределением неизбежны некоторые расхождения. Возникает вопрос: объясняются ли эти расхождения только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они являются существенными и связаны с тем, что подобранная кривая плохо выравнивает данное статистическое распределение. Для ответа на этот вопрос были использованы критерии согласия.

Таблица 6.3

№	$\varepsilon_i^*$	$\varepsilon_{(i)}^*$	№	$\varepsilon_i^*$	$\varepsilon_{(i)}^*$
1	757,95	590,63	21	590,63	682,82
2	759,78	628,58	22	628,58	685,29
3	760,94	632,37	23	682,82	686,22
4	744,61	642,53	24	720,13	687,04
5	788,69	645,00	25	761,98	688,86
6	761,99	648,45	26	728,35	690,62
7	764,55	657,71	27	802,48	691,82
8	783,75	658,05	28	704,63	699,01
9	685,29	658,30	29	702,28	699,01

10	658,30	658,86	30	642,53	699,67
11	723,62	661,00	31	729,96	700,31
12	752,65	661,97	32	760,02	702,28
13	764,08	662,96	33	699,67	703,50
14	699,01	663,09	34	691,82	704,63
15	700,31	663,29	35	713,85	708,34
16	739,40	663,83	36	847,55	711,62
17	757,50	665,05	37	785,46	713,44
18	785,00	672,22	38	816,05	713,47
19	777,00	672,31	39	727,17	713,85
20	690,62	680,66	40	686,22	715,70

Продолжение табл. 6.3

№	$\varepsilon_i^*$	$\varepsilon_{(i)}^*$	№	$\varepsilon_i^*$	$\varepsilon_{(i)}^*$
41	663,09	717,04	61	665,05	756,46
42	661,00	717,21	62	658,05	757,50
43	751,34	720,13	63	661,97	757,95
44	813,10	723,45	64	739,68	758,07
45	715,70	723,62	65	792,21	759,78
46	713,44	725,27	66	789,91	760,02
47	761,59	727,17	67	845,27	760,94
48	725,27	728,35	68	786,83	761,59
49	708,34	729,96	69	699,01	761,98
50	713,47	732,34	70	648,45	761,99
51	753,50	737,32	71	688,86	764,08
52	752,13	739,40	72	791,78	764,55
53	632,37	739,68	73	717,21	765,13
54	663,29	743,28	74	672,22	777,00
55	765,13	744,61	75	658,86	783,75
56	853,94	747,91	76	657,71	785,00
57	808,76	751,34	77	711,62	785,46
58	680,66	752,13	78	758,07	786,83

59	747,91	752,65	79	756,46	788,69
60	737,32	753,50	80	836,43	789,91

Продолжение табл. 6.3

№	$\varepsilon_i^*$	$\varepsilon_{(i)}^*$	№	$\varepsilon_i^*$	$\varepsilon_{(i)}^*$
81	743,28	791,78	88	723,45	817,54
82	662,96	792,21	89	732,34	836,43
83	645,00	799,67	90	703,50	845,27
84	687,04	802,48	91	817,54	847,55
85	672,31	808,76	92	849,56	849,56
86	717,04	813,10	93	799,67	853,94
87	663,83	816,05			

Изучение ряда случайных величин начинают с группировки статистического материала, т.е. с разбиения интервала значений случайных величин  $\varepsilon_i^*$  на  $k$  частичных интервалов равной длины и подсчета частот попадания значений случайной величины  $\varepsilon_i^*$  в частичные интервалы [313]. Число интервалов  $k$  выбрано в зависимости от числа наблюдений  $n$  согласно рекомендациям ВНИИМ [313]. При  $n = 40 \dots 100$  назначают  $k = 7 \dots 9$ .

Длину частичного интервала определяют по формуле

$$h = \frac{\varepsilon_{\max}^* - \varepsilon_{\min}^*}{k}.$$

Для данных  $\varepsilon_i^*$  (табл. 6.1):  $h = 72,8$ .

За начало первого интервала принята величина, равная  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^* - \frac{h}{2} = 499,6$ . Шкала интервалов и группировка исходных статистических данных по табл. 6.1 сведены в табл. 6.4. В результате получен статистический ряд распределения частот ( $n = \sum m_i$ ), интервальный статистический ряд распределения частностей ( $\sum \frac{m_i}{n} = 1$ ).

Таблица 6.4

Интервалы значений случайных величин $\varepsilon^*$	Частота $m_i$	Частности $P_i^* = \frac{m_i}{n}$	Оценка средней плотности распределения $p_i^* = \frac{m_i}{nh}$	Накопленные частности $F^*(\varepsilon^*)$
[499,63...572,43[	3	0,053	0,000723	0,053
[572,53...645,23[	12	0,211	0,002892	0,263
[645,23...718,03[	14	0,246	0,003374	0,509
[718,03...790,83[	13	0,228	0,003133	0,737



[790,83...863,63[	8	0,140	0,001928	0,878
[863,63...936,43[	3	0,053	0,000723	0,930
[936,43...1009,23[	2	0,035	0,000482	0,965
[1009,23...1082,03]	2	0,035	0,000482	1
$\Sigma$	57	1,000		

Разделив частность на длину интервала, получены значения  $p_i^* = \frac{P_i^*}{h} = \frac{m_i}{nh}$ , являющиеся оценками средней плотности распределения в интервалах  $h$  (табл. 6.4).

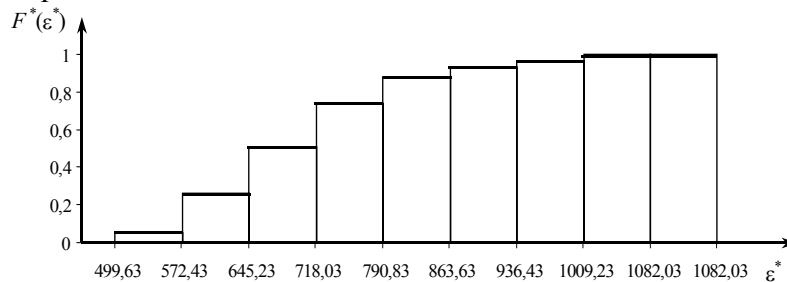
Значения эмпирической функции распределения  $F^*(x) = F^*(\varepsilon^*)$  по данным табл. 6.1:

$$F^*(x) = F^*(\varepsilon^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varepsilon^* \leq 499,63 \\ 0,0523, & \text{если } 499,63 < \varepsilon^* \leq 572,43 \\ 0,2632, & \text{если } 572,43 < \varepsilon^* \leq 645,23 \\ 0,5088, & \text{если } 645,23 < \varepsilon^* \leq 718,03 \\ 0,7368, & \text{если } 718,03 < \varepsilon^* \leq 790,83 \\ 0,8772, & \text{если } 790,83 < \varepsilon^* \leq 863,63 \\ 0,9298, & \text{если } 863,63 < \varepsilon^* \leq 936,43 \\ 0,9649, & \text{если } 936,43 < \varepsilon^* \leq 1009,23 \\ 1,0000, & \text{если } 1009,23 < \varepsilon^* \leq 1082,03 \\ 1,0000, & \text{если } \varepsilon^* > 1082,03 \end{cases}$$

График эмпирической функции изображен на рис. 6.27.

Гистограмма статистического распределения представлена на рис. 6.28.

Моменты порядка  $k$  представлены в табл. 6.5.



**Рис. 6.27.** График эмпирической функции по данным табл. 6.1

**Числовые характеристики выборки.** Среднее арифметическое выборки:

$$\bar{\varepsilon}^* = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \varepsilon_j^*}{n} = 728,11.$$

Выборочные дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент асимметрии, коэффициент эксцесса, коэффициент вариации:

$$S_{\varepsilon^*}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (\varepsilon_j^* - \bar{\varepsilon}^*)^2 m_i}{n} = 14109,53 ; \quad S_{\varepsilon^*} = \sqrt{S_{\varepsilon^*}^2} = 118,78 ;$$

$$\beta_1 = \frac{\sum_{j=1}^n (\varepsilon_j^* - \bar{\varepsilon}^*)^3 m_i}{nS_{\varepsilon^*}^3} = 0,77; \quad \gamma_2 = \frac{\sum_{j=1}^n (\varepsilon_j^* - \bar{\varepsilon}^*)^4 m_i}{nS_{\varepsilon^*}^4} - 3 = 0,32;$$

$$\bar{V} = \frac{S_{\varepsilon^*}}{\bar{\varepsilon}^*} \cdot 100 \% = 16,31 \% .$$

В качестве приближенного критерия для предварительной оценки закона распределения использованы выборочные коэффициенты асимметрии  $\beta_1$  и эксцесса  $\gamma_2$ , а также их средние квадратические отклонения:

$$S_{\beta_1} = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}} = 0,31; \quad S_{\gamma_2} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}} = 0,59 .$$

Эмпирическая функция считается согласующейся с гипотетической при условии, что выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса отличаются по абсолютной величине от своих математических ожиданий ( $M(\beta_1)$  и  $M(\gamma_2)$ ) не более чем на утроенные средние квадратические отклонения. Таким образом, если  $|\beta_1 - M(\beta_1)| < 3S_{\beta_1}$  и  $|\gamma_2 - M(\gamma_2)| < 3S_{\gamma_2}$ , то считается, что нулевая гипотеза согласуется с экспериментальными данными. Если хотя бы одно из этих неравенств не выполняется, то выдвинутая нулевая гипотеза отклоняется.

Под нулевой гипотезой подразумевается предположение, которое выдвинуто в отличие от конкурирующей (альтернативной) гипотезы, противоречащей нулевой. В данном примере нулевой гипотезой является предположение, что текущие значения  $\varepsilon_i^*$  вне зоны структурных превращений принадлежат нормальному закону.

Для нормального распределения математические ожидания выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса равны нулю. Поэтому гипотеза нормальности принимается, если  $|\beta_1| < 3S_{\beta_1}$  и  $|\gamma_2| < 3S_{\gamma_2}$ .

Из приведенных расчетов видно, что выборочные коэффициенты асимметрии  $\beta_1$  и эксцесса  $\gamma_2$  отличаются от нуля не более чем на утроенные средние квадратические отклонения их определения, что соответствует нормальному распределению. Гистограмма статистического распределения (рис. 6.28) для данных табл. 6.1 напоминает нормальную кривую (кривую Гаусса).

Проверка гипотезы о нормальном распределении случайной величины  $\varepsilon_i^*$  осуществлена с помощью критерия согласия Пирсона. Для этого интервалы значений нормируют, т.е. выражают их в единицах среднего квадратического отклонения  $S$ :  $u_i = (\varepsilon_i^* - \bar{\varepsilon}^*)/S$ . Наименьшее значение  $u_i$  полагают равным  $-\infty$ , наибольшее –  $+\infty$ . Если в некоторые интервалы попадает меньше пяти наблюдений, то такие интервалы объединяют с соседними. Далее вычисляют вероятности попадания  $p_i$  случайных величин  $\varepsilon_i^*$  в эти интервалы:

$$p_i = P(\varepsilon_n^* < \varepsilon_i^* < \varepsilon_k^*) = \frac{1}{2}(\Phi(u_k) - \Phi(u_n)),$$

где  $\Phi(u_k)$  и  $\Phi(u_n)$  – интегралы вероятностей или функции Лапласа

$$\Phi(u_{n,k}) = \Phi(u_i) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{u_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

$\varepsilon_n^*$ ,  $\varepsilon_k^*$  – значения  $\varepsilon_i^*$ , соответствующие началу и концу интервала.

Теоретические (модельные) частоты нормального распределения  $n_{\text{теор}} = np_i$ .

Наблюдаемое значение критерия Пирсона

$$\chi_{\text{набл}}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Число степеней свободы  $\psi = k - r - 1$ . Задаваясь уровнем значимости  $q = 1 - \alpha$ , найдены значения  $\chi_{\psi; 1-\alpha}^2$  и  $\chi_{\psi; 1-\frac{q}{2}}^2$ . Если  $\chi_{\psi; 1-\frac{q}{2}}^2 < \chi_{\text{набл}}^2 \leq \chi_{\psi; 1-q}^2$ , то распределение результатов наблюдений считают нормальным.

Результаты вычислений, необходимых для определения наблюдаемого значения выборочной статистики  $\chi_{\text{набл}}^2$  по данным табл. 6.1, приведены в табл. 6.6.

В результате вычислений получено  $\chi_{\text{набл}}^2 = 1,51$ . По таблице квантилей  $\chi^2$ -распределения по уровню значимости  $q = 0,10$  и числу степеней свободы  $\psi = k - r - 1 = 7 - 2 - 1 = 4$  критические значения:  $\chi_{4; 0,05}^2 = 0,71$  и  $\chi_{4; 0,95}^2 = 9,488$ . Так как  $0,71 < 1,51 \leq 9,488$ , то гипотеза о нормальности распределения текущих значений тепловой активности  $\varepsilon_i^*$  принимается.

Гипотезу нормального распределения текущих значений тепловой активности на рабочих участках термограмм проверили с помощью  $\lambda$ -критерия Колмогорова [309]. С этой целью для каждого значения  $\varepsilon_i^*$  определили модуль разности между эмпирической и модельной функциями распределения  $|F^*(\varepsilon_i^*) - F(\varepsilon_i^*)|$  и вычислили наблюдаемое значение выборочной статистики Колмогорова:

$$\lambda_{\text{набл}} = D\sqrt{n} = \max |F^*(\varepsilon_i^*) - F(\varepsilon_i^*)| \sqrt{n}.$$

Наблюдаемое значение  $\lambda$  сравнили с критическим значением, определяемым по уровню значимости  $q = 0,05$  [280]. Если  $\lambda_{\text{набл}} \leq \lambda_{0,05}$ , то считается, что гипотеза нормального распределения исследуемой случайной величины согласуется с экспериментальными данными, если  $\lambda_{\text{набл}} > \lambda_{0,05}$  – не согласуется.

Все вспомогательные расчеты, необходимые для вычисления выборочной статистики  $\lambda_{\text{набл}} = D\sqrt{n}$  по данным табл. 6.1, сведены в табл. 6.7, где  $m_{\text{н.э.ч}}$  – накопленные эмпирические частоты;  $p_{\text{н.в}}$  – накопленные вероятности.

Наблюдаемое значение  $\lambda$  – критерия Колмогорова:  $\lambda_{\text{набл}} = D\sqrt{n} = 0,0424\sqrt{57} = 0,3201$ . Уровень значимости  $q = 0,05$ .

По таблицам квантилей распределения Колмогорова [309] при уровне значимости  $q = 0,05$  найдено критическое значение  $\lambda_{0,05} = 1,358$ . Так как  $\lambda_{\text{набл}} = 0,3201 < \lambda_{0,05} = 1,358$ , то нет оснований для отклонения гипотезы о нормальном распределении статистического ряда.

**Свойства результатов измерений.** Точечные оценки параметров нормального распределения:

$$\hat{a} = \bar{\varepsilon}^* = \frac{\sum_{j=1}^n m_j \varepsilon_j^*}{n} = 728,11; \quad \hat{\sigma} = S_{\varepsilon^*} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (\varepsilon_j^* - \bar{\varepsilon}^*)^2 m_j}{n}} = 118,78.$$

Плотность вероятности предполагаемого нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{118,78\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-728,11)^2}{28217,38}\right).$$

Функция распределения предполагаемого нормального распределения

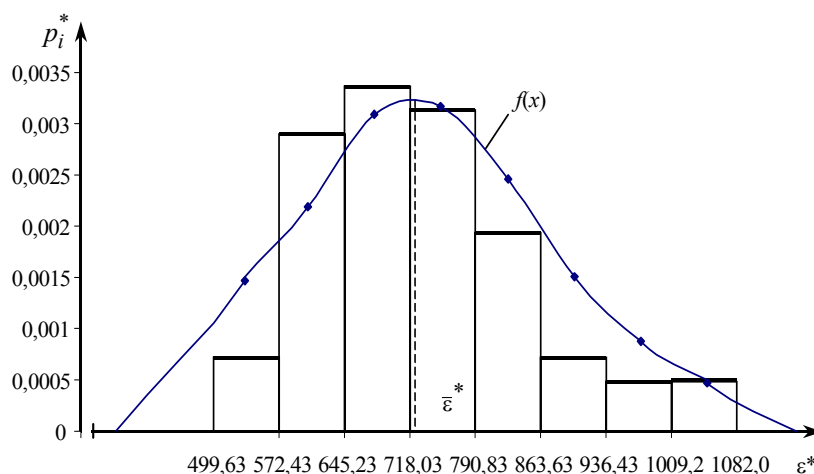
$$F(x) = \frac{1}{118,78\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(x-728,11)^2}{28217,38}\right) dx.$$

Используя нормированную функцию Лапласа  $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ , функция нормального распределения принимает вид

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x-728,11}{118,78}\right).$$

Нормальная кривая представлена на рис. 6.28. Сравнение гистограммы и нормальной кривой наглядно показывает, что нормальная кривая хорошо сглаживает гистограмму относительных частот.

Применение системы кривых Пирсона для выбора теоретического распределения по статистическим рядам, представленным в табл. 6.2 и 6.3, а также предварительные оценки выбранных распределений, проверка гипотез о нормальном распределении величин  $\varepsilon_i^*$  с помощью критериев согласия Пирсона и Колмогорова приведены в работах [304, 305].



**Рис. 6.28. Кривая нормального распределения по данным табл. 6.1**  
6.7.2. Использование критериев однородности для доказательства неслучайности некоторого наблюдения

Зависимости  $\varepsilon^* = f(T_s)$ ,  $\lambda^* = f(T_s)$ ,  $c^* = f(T_s)$ , построенные для термограмм, снятых на политетрафторэтилене (ПТФЭ), представлены на рис. 6.23 – 6.26.

Анализируя экспериментальные данные, можно увидеть, что отдельные точки обращают на себя внимание значительными отклонениями от остальных. При этом сама "значительность" отклонения весьма субъективна, в связи с чем был проведен анализ рядов наблюдений статистическим путем. Исходили из нормального распределения значений  $c_i^*$ ,  $\lambda_i^*$ ,  $\varepsilon_i^*$  на рабочих участках термограмм вне зоны структурного превращения. Каждое значительное отклонение соответствовало нарушению этого распределения, изменению его параметров, иными словами, нарушению однородности ряда наблюдений.

Доказательства неслучайности некоторого наблюдения проводили исследуя кривые зависимостей  $\varepsilon^* = f(T_s)$  для ПТФЭ, зафиксированные в девяти опытах (табл. 6.8).

В самой общей статистической форме задача об однородности наблюдений была сформулирована следующим образом: совместимы ли (на уровне значимости  $q$ ) элементы выборки  $\varepsilon_1^*$ ,  $\varepsilon_2^*$ ,  $\varepsilon_3^*$ ,  $\varepsilon_4^*$ , ...,  $\varepsilon_n^*$  с гипотезой о том, что все они извлечены из одной и той же генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение [308].

Для решения этой задачи существует ряд методов. Если сомнение вызывает большое число элементов, то их можно выделить в отдельную выборку и сравнить средние и дисперсии получившихся двух выборок; иногда такое разбиение приводит к образованию нескольких самостоятельных выборок [308]. Если же сомнительными являются только один или два элемента, то задача об однородности наблюдений решается с помощью специальных критериев [314]. Пользуясь определенными статистическими критериями, пытаются подтвердить или опровергнуть выдвинутую гипотезу. Чаще всего используют следующие критерии:  $t$ -критерий, критерий "трех сигм", критерий Романовского, критерий Шарлье, вариационный критерий Диксона, критерий Граббса и Шовенэ и др. [306].

Априори мы знаем, что в исследуемом полимерном теле происходит твердофазное полиморфное превращение, которое на анализируемых зависимостях ( $\varepsilon^* = f(T_s)$ ) проявляется в виде аномалий на узком

температурном интервале. Характер распределения случайной величины на рабочем участке вне зоны структурного превращения соответствует нормальному.

На рис. 6.23 – 6.26 полиморфное твердофазное превращение в ПТФЭ зафиксировано при следующих температурах: для данных опытов № 1 и № 2 при 30,5 °С; для данных опыта № 3 – при 30 °С.

Для доказательства неслучайности этих наблюдений был использован  $\tau$ -критерий [314], который называют максимальным относительным отклонением. Величина  $\tau$ -критерия имеет специальное распределение, которое зависит только от объема выборки  $n$ . С помощью  $\tau$ -распределения можно получить критерий совместимости крайнего элемента с остальными.

В табл. 6.8 представлены результаты девяти опытов, снятых на ПТФЭ при следующих условиях: радиус нагревателя  $R = 4 \cdot 10^{-3}$  м; мощность на нагревателе  $W = 0,64$  Вт; временной шаг измерения температуры  $\Delta\tau = 0,5$  с. В эту же таблицу сведены значения температурных интервалов, соответствующих рабочим участкам термограмм. Например, для первого опыта  $T^* = 28 \dots 32$  °С и т.д. Всего же в таблице 315 значений тепловой активности  $\varepsilon_i^*$ .

Итак, должна быть проверена гипотеза  $H$  о том, что все наблюдения  $\varepsilon_i^*$  взяты из нормальных распределений с одинаковыми параметрами.

Против альтернативной гипотезы  $H_1$ : при наблюдении, которое дало значение  $\varepsilon_i^*$ , соответствующее твердофазному превращению (т.е. самое большое), средняя величина распределения, или его дисперсия, или оба эти параметра были больше, чем при остальных наблюдениях.

Значения  $\varepsilon_i^*$  и  $(\varepsilon_i^* - \bar{\varepsilon}^*)^2$ , определенные на рабочих участках термограмм для ПТФЭ в девяти опытах, сведены в табл. 6.8.

Условия опытов:  $R = 4 \cdot 10^{-3}$  м;  $W = 0,64$  Вт;  $\Delta\tau = 0,5$  с;  $dT/d\tau_{30} = 6$  °С/мин.

Для проверки гипотезы  $H$  по сравнению с альтернативной гипотезой  $H_1$  можно использовать некоторые из следующих характеристик:

а) если известно стандартное отклонение одного измерения  $\varepsilon_i^*$ , то применяют критерии:

$$\frac{\varepsilon_{(n)}^* - \bar{\varepsilon}^*}{S_{\varepsilon_i}^*}, \quad \frac{\varepsilon_{(n)}^* - \bar{\varepsilon}_{(n-1)}^*}{S_{\varepsilon_i}^*},$$

б) если неизвестно стандартное отклонение, то первый критерий можно заменить критерием

$$\frac{\varepsilon_{(n)}^* - \bar{\varepsilon}^*}{S_0},$$

где знаменатель  $S_0 = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^* - \bar{\varepsilon}^*)^2 \right\}^{1/2}$  является оценкой стандартного отклонения, подсчитанной из той же выборки, что и числитель, или

$$\frac{\varepsilon_{(n)}^* - \bar{\varepsilon}^*}{S_{ov}},$$

где  $S_{ov}$  – является оценкой  $S_{\varepsilon_i}^*$ , основанной на  $\nu$  степенях свободы и независимой от числителя критерия, т.е. подсчитанной из другой выборки

$$S_{ov}^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu+1} (\varepsilon_i' - \bar{\varepsilon}')^2.$$

Итак, имея девять вариантов опытов с 36 измерениями каждый, в табл. 6.8 были сведены значения цензурированной выборки  $\varepsilon_i^*$  (без  $\varepsilon_{(n)}^*$ , где  $\varepsilon_{(n)}^*$  – максимальное значение  $\varepsilon_i^*$  из 36).

При определении значений  $\frac{\varepsilon_{(n)}^* - \bar{\varepsilon}^*}{S_{\varepsilon_i}^*}$ , для выборок, представленных во втором, четвертом и шестом столбцах табл. 6.8, рассчитана величина  $S_{ov}$ , которая является несмещенной оценкой  $S_{\varepsilon_i}^*$ , основанной на  $\nu$  степенях свободы. Количество вариантов –  $r$ , количество замеров –  $n$ .

Для табл. 6.8:  $r = 9$ ,  $n = 35$ ,  $\nu = (n-1)r = 306$ .

$$S_{ov}^2 = S_{\varepsilon_i}^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{v+1} (\varepsilon_i' - \bar{\varepsilon}')^2 ;$$

$$S_{\varepsilon_i}^2 = \frac{1}{r(n-1)} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (\varepsilon_{ij}^* - \bar{\varepsilon}^*)^2 = 3992,049;$$

тогда  $S_{\varepsilon_i}^* = 63,18$  .

Для опыта № 1 (второй столбец табл. 6.8):  $\frac{\varepsilon_{(n)}^* - \bar{\varepsilon}^*}{S_{\varepsilon_i}^*} = 47,1$  ;

где  $\varepsilon_{(n)}^* = 3680,7$ ;  $\bar{\varepsilon}^* = 704,9$  .

Для опыта № 2 (четвертый столбец табл. 6.8):  $\frac{\varepsilon_{(n)}^* - \bar{\varepsilon}^*}{S_{\varepsilon_i}^*} = 10,24$  ;

где  $\varepsilon_{(n)}^* = 1376,2$ ;  $\bar{\varepsilon}^* = 729,1$  .

Для опыта № 3 (шестой столбец табл. 6.8):  $\frac{\varepsilon_{(n)}^* - \bar{\varepsilon}^*}{S_{\varepsilon_i}^*} = 4,7$  ;

где  $\varepsilon_{(n)}^* = 1023,5$ ;  $\bar{\varepsilon}^* = 726,3$  .

При отклонениях численности выборки ( $n = 35$ ) от табличных значений, использовали приближенную формулу для критического значения  $\tau_1$  [314].

Для критерия  $\frac{\varepsilon_{(n)}^* - \bar{\varepsilon}^*}{S_{\varepsilon_i}^*}$  приближенное критическое значение

$$\tau_1(q, n, v) \approx u_{1-q/n} \left( 1 + \frac{3}{v} \right) \sqrt{\frac{n-1}{n}} .$$

Данная аппроксимация справедлива для  $q < 0,10$ .

$$\tau_1(q, n, v) \approx \tau_1(0,05; 35; 306) \approx 3,08 ,$$

Где  $u_{1-q/n} = u_{1-0,05/35} = u_{0,9986}$  .

По таблице квантилей нормального распределения

$$u_{0,9986} = 3,09 .$$

Сравнив полученные значения  $\frac{\varepsilon_{(n)}^* - \bar{\varepsilon}^*}{S_{\varepsilon_i}^*}$  с критическим значением  $\tau_1$  при 5-процентном уровне зна-

чимости, имеем:

- 1) для первого опыта:  $47,1 > 3,08$ ;
- 2) для второго опыта:  $10,24 > 3,08$ ;
- 3) для третьего опыта:  $4,7 > 3,08$ .

Следовательно, отклонения значений  $\varepsilon_{(n)}^*$  от  $\varepsilon_i^*$  в выборках опытов № 1 – 3 являются существенными и сами значения  $\varepsilon_{(n)}^*$  для опытов 1 – 3 нет оснований считать случайными.

Критерий  $\frac{\varepsilon_{(n)}^* - \varepsilon_{(n-1)}^*}{S_{\varepsilon_i}^*} > \tau_4(q, n)$ , где  $n = 35$ ,  $q = 0,05$  .

Для второго столбца табл. 6.8:  $\frac{\varepsilon_{(n)}^* - \varepsilon_{(n-1)}^*}{S_{\varepsilon_i}^*} = 46,75$  .

Для четвертого столбца табл. 6.8:  $\frac{\varepsilon_{(n)}^* - \varepsilon_{(n-1)}^*}{S_{\varepsilon_i}^*} = 9,5$  .

Для шестого столбца табл. 6.8:  $\frac{\varepsilon_{(n)}^* - \varepsilon_{(n-1)}^*}{S_{\varepsilon_i}^*} = 3,7$  .

Критическое значение при 5-процентном уровне значимости  $\tau_4(0,05; 35) = 1,15$ .



Наблюдаемые значения критерия для данных второго, четвертого и шестого столбцов табл. 6.8 больше, чем критические значения. Следовательно, значения тепловой активности  $\varepsilon_{(n)}^*$  для этих опытов неслучайны.

Критерий "трех сигм" применяется для результатов измерений, распределенных по нормальному закону. По этому критерию считается, что результат, возникающий с вероятностью  $q \leq 0,003$ , маловероятен, и его можно считать промахом, если  $|\bar{\varepsilon}^* - \varepsilon_{(n)}^*| > 3S_{\varepsilon_i}^*$ , где  $S_{\varepsilon_i}^*$  – оценка средних квадратических отклонений измерений. Величины  $\bar{\varepsilon}^*$  и  $S_{\varepsilon_i}^*$  вычисляются без учета экстремальных значений  $\varepsilon_{(n)}^*$ . Данный критерий надежен при числе измерений  $n \geq 20 \dots 50$ .

Это правило обычно считается слишком жестким, поэтому рекомендуется назначать границу цензурирования в зависимости от объема выборки: при  $6 < n \leq 100$  она равна  $4S_{\varepsilon_i}^*$ ; при  $100 < n \leq 1000$  –  $4,5S_{\varepsilon_i}^*$ ; при  $1000 < n \leq 10000$  –  $5S_{\varepsilon_i}^*$ . Данное правило также применимо только для нормального закона.

В табл. 6.9 значения  $S_{\varepsilon_i}^*$  выбраны по данным табл. 6.8.

По результатам табл. 6.9 можно сделать вывод, что значения  $\varepsilon_{(n)}^*$  для 1 – 3 опытов не принадлежат к результатам, распределенным по нормальному закону.

Таблица 6.9

Варианты опытов	$ \bar{\varepsilon}^* - \varepsilon_{(n)}^* $	Оценка среднего квадратического отклонения, $4S_{\varepsilon_i}^*$
1	$ 704,9 - 3681,7  = 2976,8$	$4 \cdot 118,78 = 475,12$
2	$ 729,1 - 1376  = 646,9$	$4 \cdot 54,71 = 218,84$
3	$ 726,3 - 1023,5  = 297,2$	$4 \cdot 57,43 = 229,72$

Статистическая обработка результатов неразрушающего контроля ТФС полимеров позволяет надежно установить, является ли каждое значительное отклонение нарушением нормального распределения, т.е. неслучайным наблюдением. Проявление значительных отклонений на всех трех термограммах в различное время, но при близких температурах, возможно является проявлением твердофазного перехода в кристаллической фазе полимера или же – релаксационного перехода. Дифференцировать релаксационные и твердофазные переходы возможно по данным (например, трех) термограмм, зафиксированных при различных скоростях изменения температуры (с ростом скорости изменения температуры релаксационные переходы перемещаются в сторону больших температур, чего не происходит с фазовыми переходами).

## 7. НЕРАЗРУШАЮЩИЙ КОНТРОЛЬ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ И ИЗДЕЛИЙ

### 7.1. ОБЪЕКТЫ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

В качестве объектов исследования были выбраны следующие материалы: 1) образцы выпускаемого промышленностью политетрафторэтилена блочного (ГОСТ 10007-80), поставляемого в виде стержней диаметром 45 мм и в виде плит (290×290 мм) толщиной 2...60 мм; 2) коксонаполненный политетрафто-

этилен Ф4К20 (ТУ 6-05-1412–76); 3) блочный полиамид марки Капролон В (ТУ 6-14-29–96); 4) поликапроамид (ПА-6) (ТУ 6-06-309–70); 5) ПММА марки СО-95 (ГОСТ 10667–74).

Исследовали также ТФС серии композиционных материалов строительного назначения на основе гипсового вяжущего, наполнителя из кожевенных отходов в виде стружки и полимерных дисперсий АК-215 или АБВ-16. Однородная структура материалов и изделий достигалась за счет измельчения кожевенных отходов и последующей их обработки полимерной дисперсией, а также технологическими условиями формования плит из композитов [156]. Применяли дисперсии АБВ-16 (ТУ-6-01-1204–79) и АК-215 (ТУ-6-01-1141–83), представляющие собой сополимеры бутилакрилата, винилацетата и метакриловой кислоты в водной среде. В качестве вяжущего использовали гипс марки Г10 [177, 178, 188, 196].

Определяли также ТФС абразивных шлифовальных кругов различных марок (25А12ПСМ16К5А, 25А25ПСМ16К5А и др.), импрегнированных полимерной дисперсией в различных концентрациях [186, 198, 210].

**Политетрафторэтилен (ПТФЭ)** является продуктом полимеризации тетрафторэтилена, химическая формула –  $(C_2F_4)_n$ . ПТФЭ относится к классу термопластичных смол, его физическое состояние обратимо изменяется при изменении температуры. Известно, что при температурах ниже  $T = 19,6$  °С элементарная ячейка кристалла ПТФЭ состоит из 13 групп  $CF_2$ , выше  $T = 19,6$  °С – из 15 групп  $CF_2$ . При  $T = 19,6$  °С триклиническая упаковка ПТФЭ переходит в менее упорядоченную гексагональную, что сопровождается увеличением объема образца (например, при степени кристалличности 68 % – на 0,74 %). При  $T = 30$  °С имеет место второй переход кристаллической структуры, изменение объема образца при этом составляет 0,08 %. Теплоты переходов составляют соответственно:  $4,0 \pm 0,5$  кДж/кг и  $1,2 \pm 0,3$  кДж/кг [140]. Испытывали образцы из ПТФЭ со степенями кристалличности 56, 60 и 85,2 %.

ПТФЭ при температурах свыше 40 °С имеет очень стабильные теплофизические свойства [137, 138] и, следовательно, может быть использован для выявления возможностей новых методов термического анализа и при исследованиях надежности работы вновь создаваемых ИВС теплофизического контроля.

**В коксонаполненном политетрафторэтилене марки Ф4К20** происходят твердофазные полиморфные превращения при 19,6 и 30 °С. Переходы в кристаллической фазе материала Ф4К20 сопровождаются поглощением тепла и изменениями ТФС в узких температурно-временных интервалах.

Кроме того, у ПТФЭ и Ф4К20 наряду с твердофазными полиморфными превращениями проявляются релаксационные переходы [278, 279].

Свойства ПТФЭ и Ф4К20 приведены в табл. 7.1.

### 7.1. Свойства ПТФЭ, Ф4К20 и Капролона В

Наименование показателя	ПТФЭ ГОСТ 10007–80	Ф4К20 ТУ 6-05- 1412–76	Капролон В ТУ 6-14-29– 96
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	2120...2200	2050...2170	1150...1160
Температура плавления кристаллов, °С	327	327	220...260
Температура стеклования аморфных участков, °С	–120	–120	–
Теплостойкость по Вика, °С	110	145...160	190...210

Удельная теплоемкость, Дж/кг·К	1004	710	–
Коэффициент теплопроводности, Вт/м·К	0,23...0,3	0,23...0,3	0,3...0,3 9

Продолжение табл. 7.1

Наименование показателя	ПТФЭ ГОСТ 10007–80	Ф4К20 ТУ 6-05- 1412–76	Капролон В ТУ-6-14- 29–96
Коэффициент линейного расширения $\times 10^{-5}$ , °С <sup>-1</sup>	8...25	11...18	6,6...9, 8
Рабочая температура, °С	– 269 ... 26 0	–60...250	– 60...15 0
Твердость по Бринеллю, МПа	29,4...39, 2	49...53,8	100...1 05

**Поликапроамид и Капролон В**, как все однородные полиамиды (не сополимеры), являются аморфно-кристаллическими полимерами. Соотношение кристаллической и аморфной фаз в полиамидах зависит от условий переработки, режима термообработки, от содержания влаги и специальных добавок, способствующих кристаллизации. Степень кристалличности полиамидов изменяется 40 до 80 %. **Капролон В** представляет собой высокомолекулярный продукт анионной полимеризации  $\epsilon$ -капролактама в присутствии щелочных катализаторов и различных активаторов [137, 138]. Твердофазное превращение в Капролоне В происходит при температуре 25 °С [279]. Считается, что в кристаллической фазе полимера гексагональная решетка переходит в моноклинную [138].

**Поликапроамид** представляет собой продукт гидролитической полимеризации  $\epsilon$ -капролактама в присутствии различных катализаторов [137]. Применяется для изготовления изделий методом литья под давлением. Поликапроамид удовлетворяет следующим требованиям: плотность – 1130 кг/м<sup>3</sup>; температура плавления – 210...218 °С; коэффициент теплопроводности – 0,283 Вт/м·К; удельная теплоемкость – 1885 Дж/кг·К [137, 138].

**Полиметилметакрилат (ПММА)** марки СО–95 применяли в виде образцов цилиндрической формы, выточенных из листа толщиной 24 мм. Температура размягчения материала не менее 95 °С.

Релаксационные переходы в ПММА и поликапроамиде сведены в табл. 7.2.

В качестве образцовых мер ТФС использовали ПММА (ГОСТ 17622–72) и кварцевое стекло марки КВ (ГОСТ 15130–86). Подложка зонда была изготовлена из рипора. Толщина подложки  $H_{\text{п}} = 20$  мм. Рипор – пенополиуретан, который получают на основе смеси А-6ТН, трихлоротилфосфата и полиизоцианата [137].

Теплофизические свойства образцовых мер и материала подложки зонда приведены в табл. 7.3.

В приложении П2 приведены результаты ДТА образцов из полимерных материалов ПТФЭ и Ф4К20. Исследование проводили на дериватографе системы Паулик-Эрдеи фирмы "МОМ" (Венгрия).

Твердофазный полиморфный переход в ПТФЭ и Ф4К20 зарегистрирован на кривых ДТА при температуре 20 °С. Твердофазный переход при 30 °С на кривых ДТА при данных условиях проведения экспериментов не проявился.

### 7.2. Релаксационные переходы в ПММА и поликапроамиде [278 – 279]

Переход	Температуры переходов в ПММА, определенные различными методами, К					
	по скорости звука	по механической прочности			$\nu = 10^2$ Гц	$\nu = 0,055 \dots 0,074$ Гц
		$\nu_{\text{экв}} = 0,03 \dots 0,25$ Гц	$\nu = 1,24$ Гц	$\nu = 0,01 \dots 1$ Гц		
$\gamma$	–	100	–	100	166	93...134
$\mu$	–	137	178	–	–	156
$\gamma_1$	198	177	–	–	238	176
$\mu'$	–	233	–	–	–	233
$\gamma_2$	–	253	–	253	255	246
$\gamma_3$	277	268	–	–	–	268
$\gamma_4$	345	293	305	–	370	291
$\beta$	368	333	–	–	–	323
$\alpha$	390	363	–	–	–	–
$\alpha_1$	–	387	–	–	–	–
$\lambda_1$	–	433	–	–	–	–
$\lambda_2$	–	493	–	–	–	–

Продолжение табл. 7.2

Переход	Температуры переходов в ПММА, определенные различными методами, К				
	по электрической прочности $\nu_{\text{экв}} = 0,02$ Гц	по диэлектрическим потерям $\nu = 1$ кГц	по термограмме ТСП		По ИКС $\nu = 2$ К/мин
			$\nu - 1$ К/мин	$\nu - 2$ К/мин	
$\gamma$	–	–	–	–	–
$\mu$	–	–	173	–	–
$\gamma_1$	–	–	–	–	–
$\mu'$	–	–	–	–	–
$\gamma_2$	–	–	223	–	–
$\gamma_3$	–	–	–	–	–
$\gamma_4$	300	–	–	–	–
$\beta$	333	353	–	333	333
$\alpha$	363	393	363	363	363

$\alpha_1$	387	–	393	393	393
$\lambda_1$	–	–	–	443	–
$\lambda_2$	–	–	–	–	–

Переходы	ТЕМПЕРАТУРЫ ПЕРЕХОДОВ в поликапроамиде, °С ( $\nu = 1$ Гц)	Переходы	Температуры переходов в поликапроамиде, °С ( $\nu = 1$ Гц)
1	2	3	4
$\beta$	–161	$\alpha_1$	27
$\beta_1$	–132	$\alpha_2$	64
$\beta_2$	–100	$\beta_k$	156
$\mu_n$	–88	$\lambda_1$	180
$\pi$	–66	$\lambda_2$	302
$\alpha$	5 ( $T_c = -41$ °С)	$\lambda_3$	412

Примечания: ТСР – ток термостимулированного разряда; ИКС – инфракрасная спектрометрия;  $T_c$  – температура стеклования.

### 7.3. Теплофизические свойства образцовых мер

Показатель	Стекло КВ	ПММ А	Ри- пор
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	2210	1180	50
Коэффициент теплопроводности $\lambda$ , Вт/м·К	1,337	0,195	0,028
Удельная теплоемкость $c$ , Дж/кг·К	722,6	1349	–
Коэффициент температуропроводности $a \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	0,830	–	0,461

Примечание. Значения  $\lambda$  и  $\epsilon$  для ПММА и стекла марки КВ приведены при температуре 20 °С.

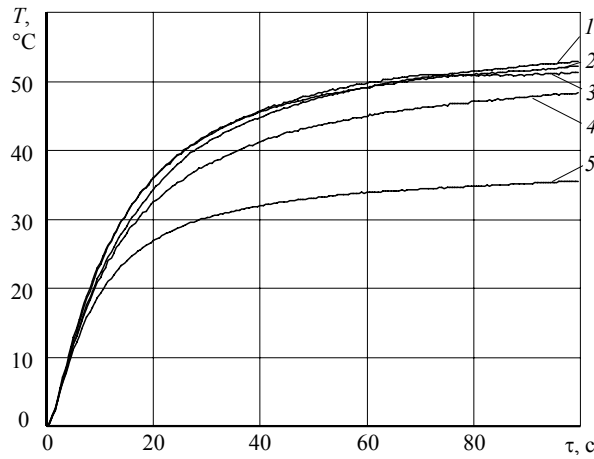
### 7.2. НЕРАЗРУШАЮЩИЙ КОНТРОЛЬ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ, ИСПОЛЬЗУЮЩИМ ЗОНД С КРУГЛЫМ ПЛОСКИМ НАГРЕВАТЕЛЕМ ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ

Режимы работы ИВС определялись условиями проведения эксперимента и характеристиками исследуемого изделия. Временной интервал измерения температур  $\Delta t$  во всех экспериментах составлял 0,5 с. Использовали ИЗ с нагревателями постоянной мощности, выполненными в виде тонких дисков радиусами 2,5 и 4 мм [50, 165, 172, 173, 184, 187].

В табл. 7.4 представлены экспериментальные данные, полученные при помощи ИВС, снабженной измерительным зондом с круглым плоским нагревателем постоянной мощности и одним термоприем-

ником. Режим работы ИВС: мощность на нагревателе 0,85 Вт, время измерения 100 с, временной интервал между измерениями 0,5 с, радиус нагревателя 2,5 мм. Термограммы, снятые на указанных материалах, представлены на рис. 7.1. Значения ТФС, определенные при помощи ИВС, даны в табл. 7.4, в которой также представлены справочные данные ( $\lambda_{\text{спр}}$ ,  $\varepsilon_{\text{спр}}$ ) и данные, полученные на тех же образцах при помощи теплофизического прибора ИТ-3 ( $\lambda_{\text{ИТ-3}}$ ), использующего стационарный метод определения теплопроводности.

На рис. 7.2 приведены рабочие участки термограмм, по которым определялись ТФС. При градуировке ИВС в качестве образцовых мер использовали: ПММА и стекло КВ.



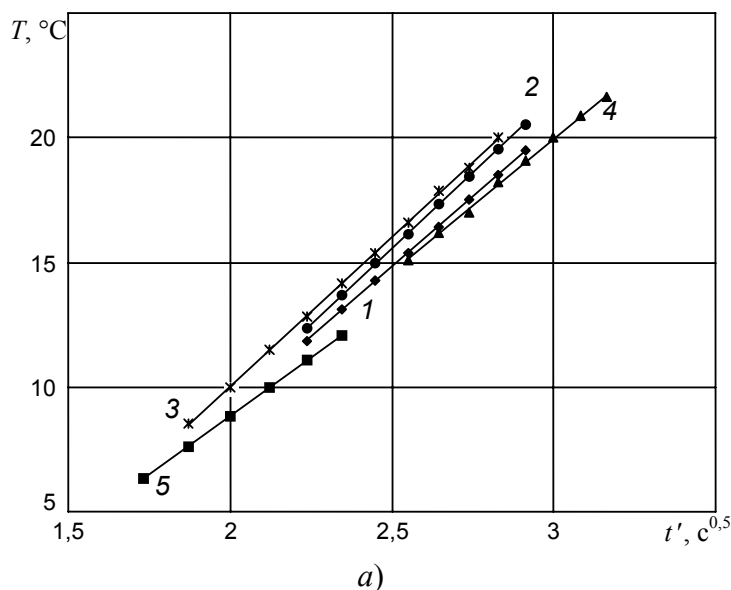
**Рис. 7.1. Термограммы для исследуемых материалов:**  
 1 – ПММА; 2 – Ф4К20; 3 – ПТФЭ; 4 – Капролон В; 5 – стекло КВ

**В ТАБЛ. 7.5 ПРИВЕДЕНЫ РЕЗУЛЬТАТЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТФС АБРАЗИВНОГО ШЛИФОВАЛЬНОГО ИНСТРУМЕНТА – КРУГА МАРКИ 25А12ПСМ16К5А, ИМПРЕГНИРОВАННОГО ПОЛИМЕРНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ЭМУКРИЛ М [174, 176], В РАЗЛИЧНЫХ КОНЦЕНТРАЦИЯХ ( $C_{II}$ ). В ТАБЛ. 7.6 ПРЕДСТАВЛЕНЫ РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ ПРИ ИМПРЕГНИРОВАНИИ ШЛИФОВАЛЬНОГО КРУГА МАРКИ 25А25ПСМ16К5А. ИЗМЕРЕНИЯ ПРОВОДИЛИСЬ НА ИВС, СНАБЖЕННОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫМ ЗОНДОМ С КРУГЛЫМ ПЛОСКИМ НАГРЕВАТЕЛЕМ. ПРИ ГРАДУИРОВКЕ ИВС В КАЧЕСТВЕ ОБРАЗЦОВЫХ МЕР ИСПОЛЬЗОВАЛИ: ПММА И СТЕКЛО КВ.**

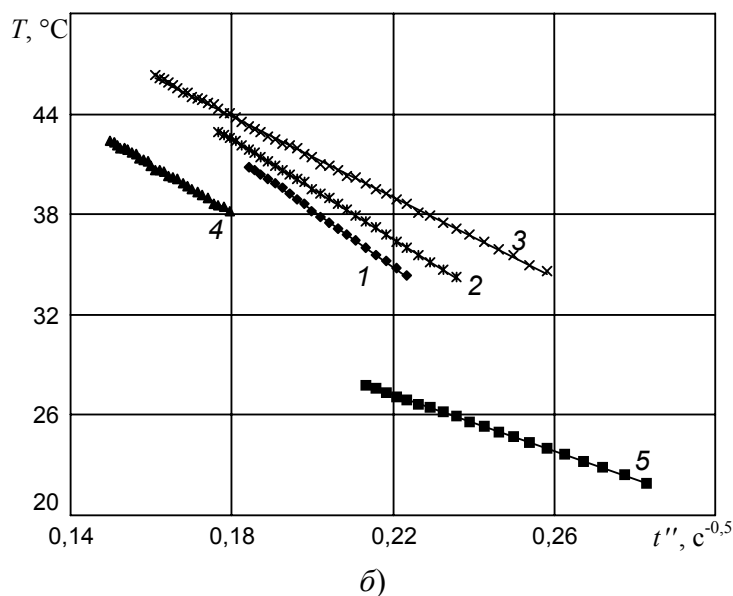
**НА РИС. 7.3 ПРИВЕДЕНЫ ЗАВИСИМОСТИ ТФС АБРАЗИВНЫХ КРУГОВ (25А12ПСМ16К5А И 25А25ПСМ16К5А) ОТ КОНЦЕНТРАЦИИ ( $C_{II}$ ) ДИСПЕРСИИ ЭМУКРИЛ М В НИХ ПОСЛЕ ИМПРЕГНИРОВАНИЯ И СУШКИ.**

С целью экспериментальной проверки работоспособности метода и ИВС, реализующей метод, проведены измерения ТФС ПТФЭ на стадиях нагрева и остывания.

В табл. 7.8 приведены результаты определения ТФС ПТФЭ в десяти опытах по трем термограммам, снятым при помощи ИВС, снабженной измерительным зондом с круглым плоским нагревателем постоянной мощности, на стадии нагрева при следующих условиях: радиус нагревателя 4 мм; мощность на нагревателе 1,01 Вт; временной шаг измерения температуры 0,5 с; начальная температура экспериментов изменялась в диапазоне 14...20 °С. Для определения ТФС использовали образец в виде диска из ПТФЭ со степенью кристалличности 60 %. Геометрические размеры образца: диаметр – 100 мм; толщина – 25 мм.



a)



**Рис. 7.2. Рабочие участки термограмм рис. 7.1:**  
а – II участки; б – IV участки

Таблица 7.5

$C_{и},$ % масс.	Теплофизические свойства			
	$\epsilon_{II},$ $\frac{Вт \cdot с^{0,5}}{м^2 \cdot К}$	$\epsilon_{IV},$ $\frac{Вт \cdot с^{0,5}}{м^2 \cdot К}$	$\epsilon,$ $\frac{Вт \cdot с^{0,5}}{м^2 \cdot К}$	$\lambda,$ $\frac{Вт}{м \cdot К}$
0	778	814	796	0,869
5,6	1040	1080	1060	0,990
10,0	1282	1361	1322	1,233
11,9	1471	1515	1493	1,341
13,8	1606	1676	1641	1,494

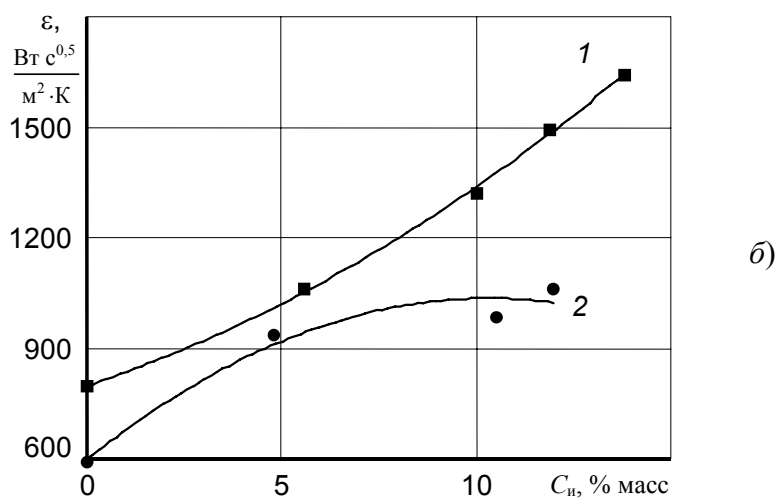
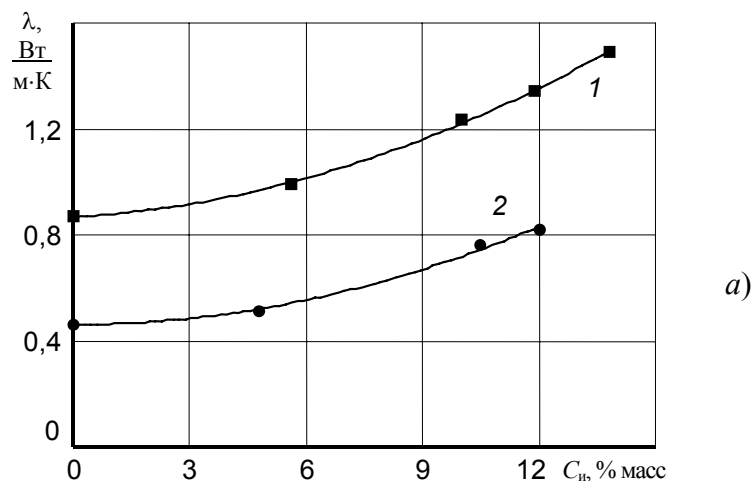
Таблица 7.6

$C_{и},$ % масс.	Теплофизические свойства			
	$\epsilon_{II},$ $\frac{Вт \cdot с^{0,5}}{м^2 \cdot К}$	$\epsilon_{IV},$ $\frac{Вт \cdot с^{0,5}}{м^2 \cdot К}$	$\epsilon,$ $\frac{Вт \cdot с^{0,5}}{м^2 \cdot К}$	$\lambda,$ $\frac{Вт}{м \cdot К}$
0	598	582	590	0,463
4,8	907	961	934	0,513
10,5	960	1005	983	0,762
12,0	1060	1063	1061	0,819

В табл. 7.9 приведены результаты определения теплофизического комплекса  $\mu$  изделия из ПТФЭ по термограммам, снятым при помощи ИВС на стадии остывания. Условия проведения экспериментов те же.



Сравнение полученных результатов со справочными данными показало, что относительные погрешности определения  $\varepsilon$  и  $\lambda$  на стадии нагрева не превышают 6 %.



**Рис. 7.3. Зависимость теплопроводности (а) и тепловой активности (б) от концентрации дисперсии Эмукрил М в абразивных кругах:**  
 1 – марки 25А12ПСМ16К5А; 2 – 25А25ПСМ16К5А

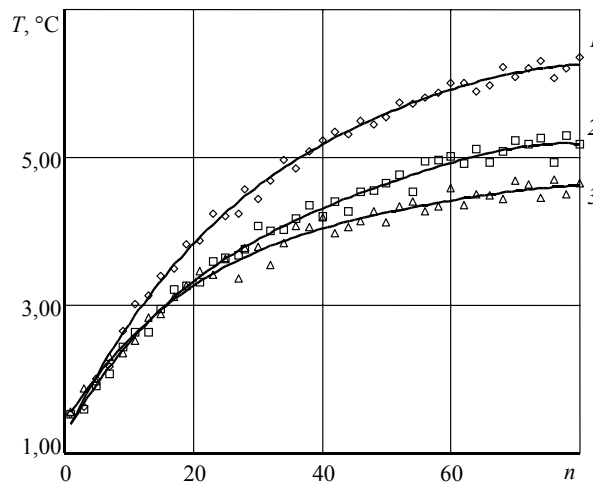




### 7.3. НЕРАЗРУШАЮЩИЙ КОНТРОЛЬ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ, ИСПОЛЬЗУЮЩИМ ЗОНД С ЛИНЕЙНЫМ ИМПУЛЬСНЫМ НАГРЕВАТЕЛЕМ

ИВС с линейным импульсным нагревателем использовалась при экспериментах на материалах: ПММА, ПТФЭ, Капролон В (рис. 7.4, табл. 7.9) при следующих режимных параметрах:  $\Delta t = 3$  с (период подачи импульсов),  $\tau_0 = 2$  с (длительность импульса),  $W_0 = 3,5$  Вт/м (мощность на нагревателе),  $n = 80$  (количество импульсов). Градуировку ИВС проводили на ПММА. Результаты определения ТФС представлены в табл. 7.9 [65, 219, 220, 226].

Составы композитов для получения плит декоративно-акустического назначения представлены в табл. 7.10.



**Рис. 7.4. Термограммы:**  
1 – ПММА; 2 – ПТФЭ; 3 – Капролон В

Таблица 7.9

Материал	$\lambda$ , Вт/м·К	$a \cdot 10^7$ , м <sup>2</sup> /с	$\lambda_{ИТ-3}$ , Вт/м·К	$\lambda_{ср}$ , Вт/м·К	$a_{ср} \cdot 10^7$ , м <sup>2</sup> /с
ПММА	0,185	1,1	–	0,195	1,02
ПТФЭ	0,27	0,424	0,26	0,23...0,3 0	–
Капро- лон В	0,34	0,729	0,38	0,31...0,4 2	–

Таблица 7.10

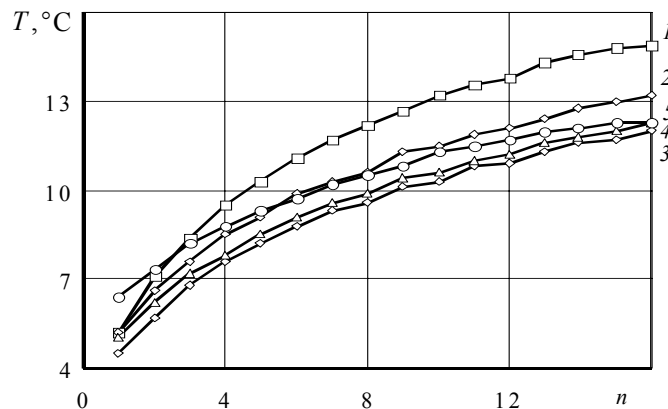
№ об- разца	Наполнитель, % масс	Гипс, % масс	Вода, % масс	Дисперсия, % масс
1	20	30	50	0
2	20	30	47	3
3	20	30	45	5
4	20	30	40	10
5	20	30	35	15
6	0	65	30	5

7	15	50	30	5
8	20	45	30	5
9	25	40	30	5

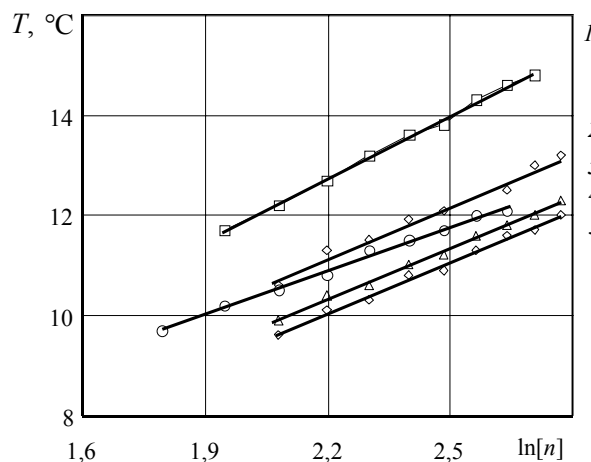
Теплофизические измерения проводили при следующих режимах работы ИВС с линейным импульсным нагревателем:  $\Delta t = 5$  с (период подачи импульсов),  $\tau_0 = 0,4$  с (длительность импульса),  $q_0 = 5,5 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-1}$  (мощность на нагревателе),  $n = 17$  (количество импульсов). Градуировку ИВС проводили на ПММА.

На рис. 7.5 представлены некоторые термограммы, снятые на образцах изделий – плит строительного назначения (1д – 5д, табл. 7.11).

На рис. 7.6 приведены рабочие участки термограмм в координатах  $T = f(\ln(n))$ , которые используются для определения ТФС.



**Рис. 7.5.** Термограммы, снятые на строительных материалах (кривые 1 – 5 соответствуют образцам 1д – 5д)



**Рис. 7.6.** Рабочие участки термограмм (образцы 1д – 5д)

Таблица 7.11

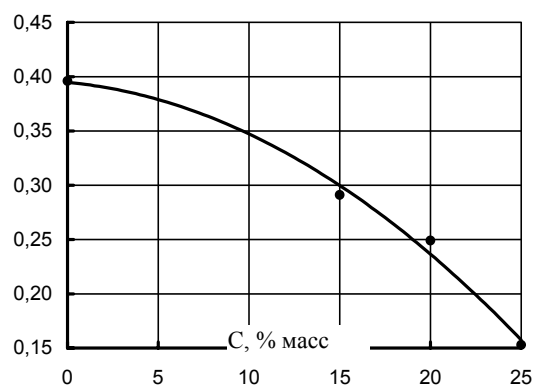
№	$\lambda_{\text{ср}}, \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	$a_{\text{ср}}\cdot 10^7, \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$	$\lambda_{\text{ИТ-3}}, \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	$\epsilon, \frac{\text{Вт}\cdot\text{с}^{0,5}}{\text{м}^2\cdot\text{К}}$	$c_p\cdot 10^{-6}, \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3\cdot\text{К}}$
1Г	0,144	2,61	0,145	282	0,552
3Г	0,165	2,42	0,169	335	0,682
5Г	0,179	2,09	0,214	392	0,856
7Г	0,320	1,44	0,321	843	2,222
8Г	0,231	1,89	0,256	531	1,222

1д	0,145	3,25	0,133	254	0,446
2д	0,170	2,55	0,189	337	0,667
3д	0,170	2,26	0,166	358	0,752
4д	0,170	2,11	0,201	370	0,806
5д	0,192	2,49	0,187	385	0,951
6д	0,396	1,14	0,422	1173	3,470
7д	0,291	1,38	0,364	783	2,110
8д	0,249	2,07	0,252	547	1,200
9д	0,153	2,54	0,158	304	0,602

В табл. 7.11 представлены результаты определения ТФС композитов и приведены значения коэффициентов теплопроводности этих же образцов, измеренные стационарным методом на приборе, серийно выпускаемом промышленностью – ИТ-3 ( $\lambda_{ИТ-3}$ ). В качестве полимерной дисперсии использовали: серия образцов г – дисперсию АБВ, серия образцов д – дисперсию АК.

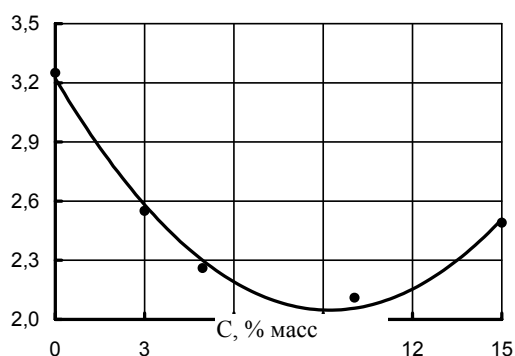
На рис. 7.7 – 7.9 представлены значения коэффициентов теплопроводности и температуропроводности образцов изделий (плит декоративно-акустического назначения) в зависимости от состава композита.

$\lambda$ , Вт/м · К



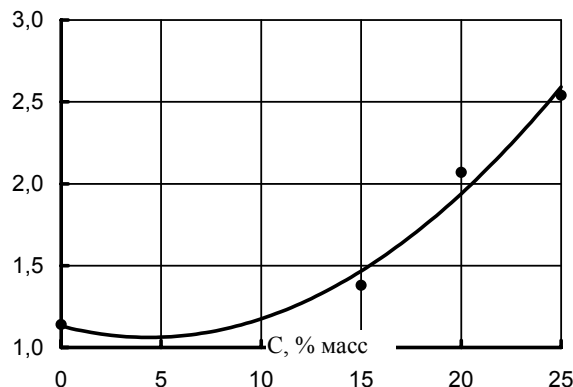
**Рис. 7.7. Зависимость коэффициента теплопроводности от содержания кожевенного наполнителя в композите (образцы бд – 9д). Содержание дисперсии АК - 5 % масс**

$a \cdot 10^7$ , м<sup>2</sup>/с



**Рис. 7.8. Зависимость коэффициента температуропроводности от содержания дисперсии АК в композите (образцы 1д – 5д). Содержание наполнителя – 20 % масс**

$a \cdot 10^7, \text{ м}^2/\text{с}$



**Рис. 7.9. Зависимость коэффициента температуропроводности от содержания кожевенного наполнителя в композите (образцы бд – 9д). Содержание дисперсии АК – 5% масс**

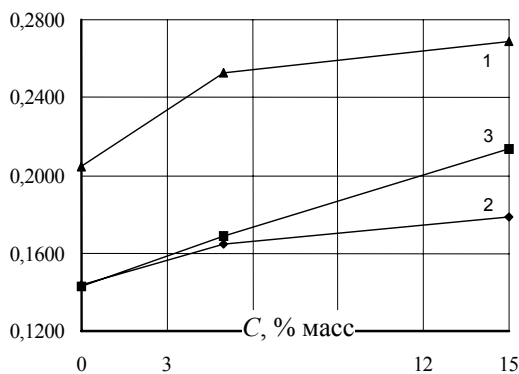
На рис. 7.10 – 7.12 представлены результаты оценки ТФС материалов строительного назначения на основе кожевенного наполнителя, гипсового вяжущего, воды, полимерных дисперсий АК-215, АБВ-1б, полученные различными методами.

Кривые 1, 2 получены в результате обработки термограмм, снятых на ИВС с линейным импульсным нагревателем. Кривые 1 – результаты обработки по методу, базирующемуся на уравнении (3.2) и изложенному в работах [50, 53, 89, 92]. Кривые 2 – результаты обработки тех же термограмм, но с использованием разработанного авторами метода. Кривые 3 получены по результатам испытаний тех же образцов на промышленно выпускаемом теплофизическом приборе ИТ-3, использующем для определения коэффициента теплопроводности стационарный метод.

Как видно из рис. 7.10 данные, полученные по разработанному методу, хорошо согласуются с результатами, полученными на приборе ИТ-3. Ход кривых 2 и 3 на рис. 7.10 свидетельствует о том, что в отличие от кривой 1, здесь практически отсутствует систематическая составляющая погрешности измерения.

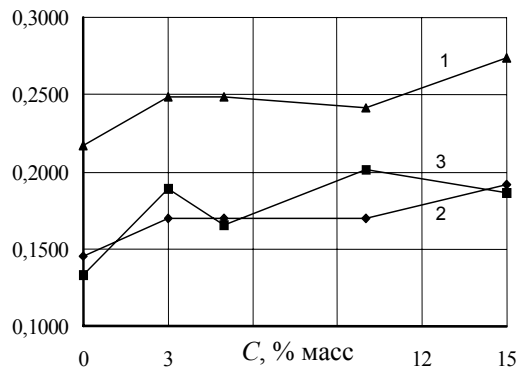
На рис. 7.12 показан разброс экспериментальных данных относительно их средних значений. Как видно из рис. 7.12, разработанный метод позволяет также значительно снизить случайную погрешность за счет использования большего количества экспериментальных точек по сравнению с методом, основанным на определении ТФС по отдельным точкам термограммы (кривая 1).

$\lambda, \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$



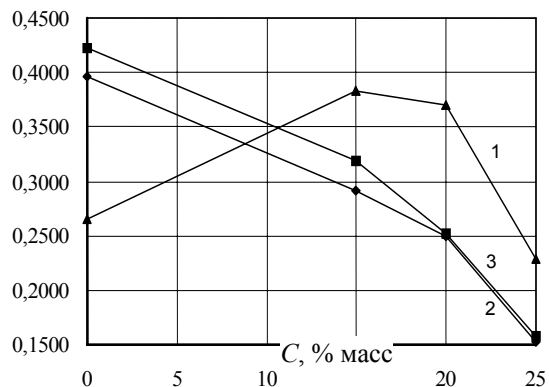
а)

$\lambda, \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$



б)

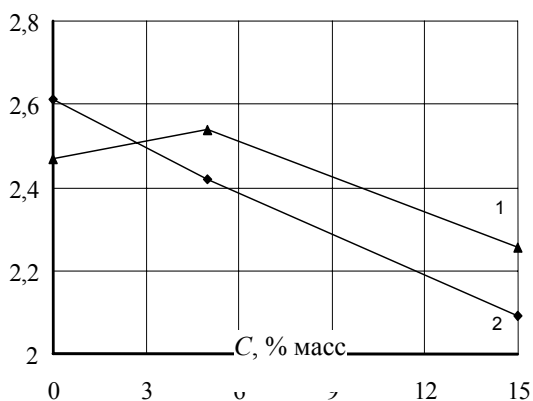
$\lambda$ , Вт/(м·К)



б)

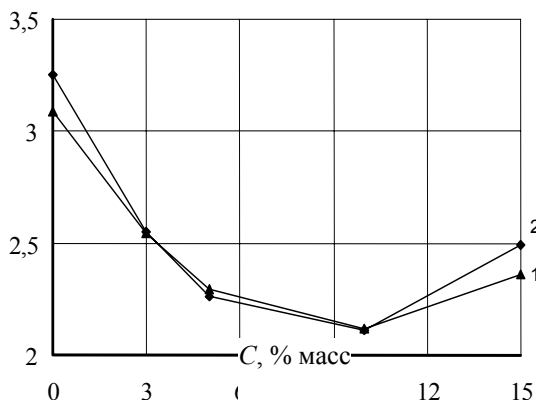
**Рис. 7.10.** Зависимость коэффициента теплопроводности  $\lambda$  от содержания дисперсии АК (а), дисперсии АБВ (б) и кожевнного наполнителя (в) в составе материала

$a \cdot 10^7$ , м<sup>2</sup>/с



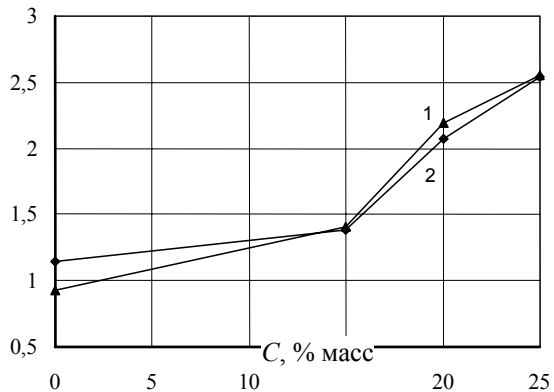
а)

$a \cdot 10^7$ , м<sup>2</sup>/с



б)

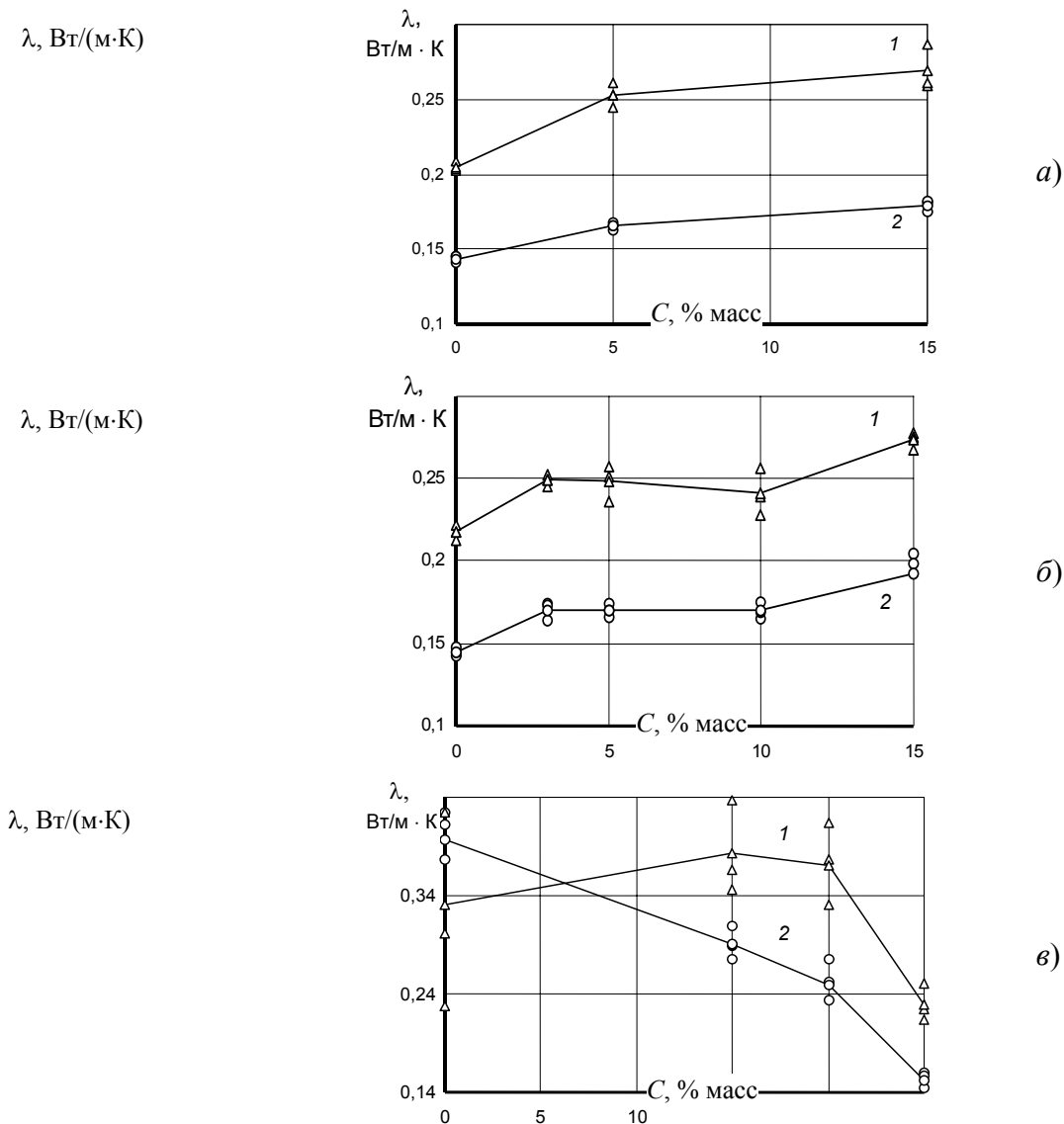
$a \cdot 10^7$ , м<sup>2</sup>/с



в)

**Рис. 7.11.** Зависимость коэффициента температуропроводности  $a$  от содержания дисперсии АК (а), дисперсии АБВ (б) и кожевнного наполнителя (в) в составе материала





**Рис. 7.12. Зависимости коэффициента теплопроводности  $\lambda$  от содержания дисперсии АК (а), дисперсии АВВ (б) и кожаненного наполнителя (в) в составе материала**

В табл. 7.13 и на рис. 7.13 приведены результаты экспериментов по определению ТФС некоторых полимерных материалов. Измерения проводили на ИВС с измерительным зондом, использующим линейный импульсный нагреватель, при следующем режиме работы: мощность на нагревателе  $W = 3,125$  Вт, период подачи импульсов  $\Delta\tau = 5,6$  с, длительность импульсов  $\tau_0 = 0,2$  с. Градуировку осуществляли по ПММА.

В табл. 7.14 представлены:

- ТФС материалов, рассчитанные по методу, разработанному авторами ( $\lambda_m, a_m$ );
- теплопроводность тех же образцов, измеренная на теплофизическом приборе ИТ-3 ( $\lambda_{ИТ-3}$ );
- результаты определения ТФС по методу, базирующемуся на уравнении (3.2) и изложенному в работах [50, 53, 89, 92] ( $\lambda_T, a_T$ ).

В этой же таблице представлены результаты, полученные после статистической обработки результатов экспериментов:

- среднеарифметические значения ТФС,
- абсолютные погрешности среднеарифметических значений ТФС, рассчитываемые по формуле [111]

$$\Delta x = t_{\alpha, n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{\text{ср}} - x_i)^2}{n(n-1)}},$$

где  $x$  – соответствующее теплофизическое свойство;  $x_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  – среднее значение соответствующего теплофизического свойства из  $n$  измеренных значений  $x_i$  из выборки  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $n$  – количество опытов;  $t_{\alpha, n}$  – коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности  $\alpha$  и  $n$  степенях свободы. Величину  $\alpha$  принимали равной 0,95.

На рис. 7.13 представлены данные, полученные при обработке термограмм, снятых на образцах из Капролона В:

- значения коэффициентов теплопроводности, а также величины абсолютных погрешностей для каждого отдельного эксперимента;
- среднеарифметические значения коэффициентов теплопроводности, а также величины абсолютных погрешностей определения среднеарифметических значений;
- коэффициенты теплопроводности тех же образцов, измеренные на приборе ИТ-3, а также величины абсолютных погрешностей в соответствии с паспортными данными на прибор ИТ-3.

Из табл. 7.14 и рис. 7.13 видно, что:

1) для исследованных материалов при заданных режимах работы ИВС практически вся погрешность определения ТФС по разработанному методу, в сравнении со справочными данными и данными, полученными на приборе ИТ-3 (для исследованных образцов материалов), объясняется случайной составляющей. Это справедливо как для отдельных измерений (см. рис. 7.13), так и для среднеарифметических значений ТФС;

### 7.12. Результаты обработки термограмм, снятых при помощи измерительного зонда с линейным импульсным нагревателем на материалах строительного назначения

Постоянные прибора:  $\alpha = 5,92 \cdot 10^2$ ,  $\beta = -14,459$

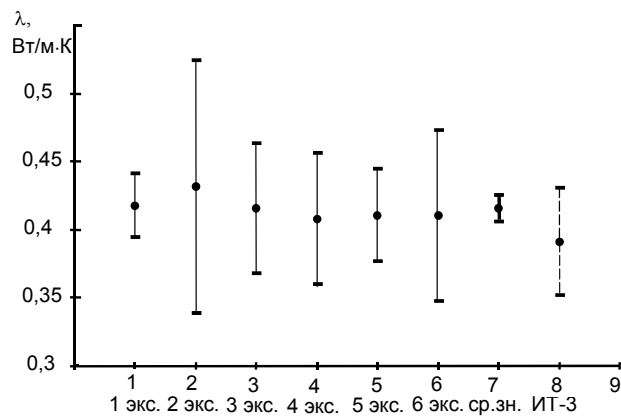
№	$b_1$	$-b_0$	$\lambda,$	$a \cdot 10^7$	$\lambda_{cp},$	$a_{cp} \cdot 10^7$	$\varepsilon,$	$c_p \cdot 10^{-6}$	
			$\frac{Вт}{м \cdot К}$	$М^2/с$	$\frac{Вт}{м \cdot К}$	$М^2/с$		$\frac{Вт \cdot с^{0,5}}{м^2 \cdot К}$	$\frac{Дж}{м^3 \cdot К}$
1Г	0,407	0,286	0,145	2,60	0,144	2,61	282	0,552	
	8	8	2	2,56					
	0,420	0,302	0,140	2,68					
	5	3	8						
3Г	0,402	0,271	0,144	2,52	0,165	2,42	335	0,682	
	7	3	7						2,30
	0,364	0,301	0,162						2,43
	1	4	6						
5Г	0,358	0,276	0,165	2,37	0,179	2,09	392	0,856	
	5	5	2						1,96
	0,326	0,259	0,181						1,93
	7	9	3						
7Г	0,338	0,334	0,175	1,38	0,320	1,44	843	2,222	
	1	2	2						1,30
	0,326	0,326	0,181						1,64
	0	7	7						
	0,182	0,243	0,325	1,38	0,320	1,44	843	2,222	
	1	6	2						1,30
	0,198	0,276	0,299						1,64
	0	6	1	1,38	0,320	1,44	843	2,222	
	0,176	0,204	0,336						1,64

	1	9	3					
8Г	0,257	0,278	0,230	1,78	0,231	1,89	531	1,222
	1	1	3	2,10				
	0,264	0,242	0,223	1,79				
	8	6	6					
	0,248	0,266	0,238					
	0	8	8					
1Д	0,414	0,228	0,142	3,03	0,145	3,25	254	0,446
	6	7	8	3,41				
	0,410	0,177	0,144	3,32				
	7	7	2					
	0,399	0,183	0,148					
	9	1	1					
2Д	0,340	0,276	0,173	2,33	0,170	2,55	337	0,667
	5	8	9	2,64				
	0,341	0,235	0,173	2,68				
	4	6	5					
	0,361	0,244	0,163					
	9	0	6					
3Д	0,340	0,314	0,174	2,08	0,170	2,26	358	0,752
	1	7	1	2,27				
	0,356	0,299	0,165	2,42				
	9	4	9					
	0,347	0,269	0,170					
	6	8	4					
4Д	0,337	0,320	0,175	2,03	0,170	2,11	370	0,806
	5	6	5	2,24				
	0,359	0,305	0,164	2,05				
	6	9	7					
	0,350	0,330	0,168					
	7	7	9					

Продолжение табл. 7.12

№	$b_1$	$-b_0$	$\lambda,$	$a \cdot 10^7$	$\lambda_{\text{ср}},$	$a_{\text{ср}} \cdot 10^7$	$\varepsilon,$	$c_p \cdot 10^{-6}$	
			$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$\text{М}^2/\text{с}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$\text{М}^2/\text{с}$	$\frac{\text{Вт} \cdot \text{с}^{0,5}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$	$\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}$	
5Д	0,289	0,172	0,204	2,95	0,192	2,49	385	0,951	
	7		4						2,02
	0,298		0,198						
	9		1						
	0,339	4	0,174						
	5		4						
6Д	0,143	0,214	0,412	1,18	0,396	1,14	1173	347	
	6	6	4	1,12					
	0,157	0,242	0,377	1,16					
	1	2	0	1,08					
	0,139	0,211	0,423						
	7	1	9						
	0,159	0,251	0,372						
	2	7	0						

7д	0,191	0,247	0,309	1,44	0,291	1,38	783	2,11
	4	8	4	1,40				
	0,215	0,284	0,275	1,29				
	2	1	2					
	0,204	0,287	0,289					
	5	6	6					
8д	0,253	0,272	0,233	1,80	0,249	2,07	547	1,20
	8	4	3	2,17				
	0,214	0,189	0,276	2,33				
	5	3	1	1,97				
	0,234	0,190	0,252					
	2	9	7					
	0,252	0,247	0,234					
	4	7	6					
9д	0,371	0,347	0,159	2,06	0,153	2,54	304	0,602
	5	8	4	2,94				
	0,377	0,218	0,156	2,74				
	4	6	9	2,40				
	0,410	0,267	0,144					
	4	0	3					
0,391	0,306	0,151						
	7	9	2					



**Рис. 7.13. Результаты обработки термограмм, снятых на образцах из Капролона В**