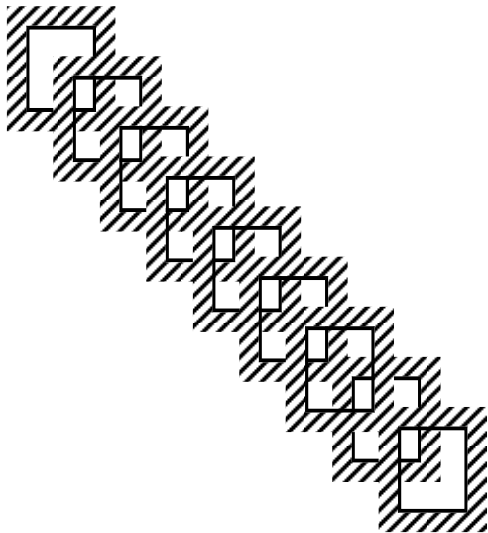


С.В. ПЕРШИНА

**СОПРОТИВЛЕНИЕ
МАТЕРИАЛОВ**



◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ◆

ББК Ж121я73-5
УДК 624.04(075)
П27

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент
С.М. Ведущев

Першина С.В.
П27 Сопротивление материалов: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. 160 с.

Даны основные положения первой части курса "Сопротивление материалов" (растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб), примеры решения типовых задач и тесты для текущего контроля знаний студентов.

Предназначено для студентов 2 курса специальностей 311300, 311900 всех форм обучения.

ББК Ж121я73-5
УДК 624.04(075)

ISBN 5-8265-0409-9

© Першина С.В. 2005
© Тамбовский государственный
технический университет
(ТГТУ), 2005
Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Тамбовский государственный технический университет"

С.В. ПЕРШИНА

**СОПРОТИВЛЕНИЕ
МАТЕРИАЛОВ**

Учебное пособие



Тамбов
◆ Издательство ТГТУ ◆
2005

Учебное издание

ПЕРШИНА Снежана Владимировна

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова
Компьютерное макетирование М.А. Филатовой

Подписано к печати 23.06.2005
Формат 60 × 84/16. Гарнитура Times. Бумага офсетная. Печать офсетная
Объем: 9,3 усл. печ. л.; 9,5 уч.-изд. л.
Тираж 150 экз. С. 461^М

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

Сопротивление материалов – это наука о том, как реагируют элементы конструкций (механизмов, машин, сооружений) на воздействие нагрузок и как обеспечить их соответствие своему назначению и работоспособность.

В сопротивлении материалов рассматриваются вопросы расчета отдельных элементов конструкций и вопросы расчета некоторых простейших конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

В отличие от теоретической механики, в которой все тела рассматриваются как абсолютно твердые, в сопротивлении материалов учитывается, что элементы конструкций при действии внешних сил изменяют свою форму и размеры, т.е. деформируются.

В сопротивлении материалов широко применяются методы теоретической механики (в первую очередь статики) и математического анализа, а также используются данные из разделов физики, в которых изучаются свойства различных материалов.

Сопротивление материалов является экспериментально-теоретической наукой, так как она широко использует опытные данные и теоретические исследования.

1 Основные понятия

1.1 РАСЧЕТНАЯ СХЕМА. НАГРУЗКИ

Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, носит название расчетной схемы. С геометрической точки зрения все объекты рассматривают как комбинацию брусьев (стержней), оболочек и массивных тел.

Элемент конструкции, длина которого значительно больше его поперечных размеров, называется *брусом*.

Элемент конструкции, длина и ширина которого значительно больше его толщины, называется *оболочкой*.

Элемент конструкции, все размеры которого соизмеримы, называется *массивным телом*.

Нагрузки, действующие на конструкцию, являются по отношению к ней *внешними силами*. Эти силы приложены к тому или иному элементу конструкции по некоторым участкам его поверхности или распределены по его объему.

При составлении расчетных схем нагрузку, приложенную к участку, размеры которого значительно меньше размеров объекта, заменяют *сосредоточенной силой* P , Н/м.

Пара сил, приложенная к объекту, рассматривается как *сосредоточенный момент* m , Нм.

Нагрузки, приложенные к участкам, размеры которых соизмеримы с размерами объекта, считаются *распределенными по длине* – q , Н/м.

К внешним силам, действующим на элементы конструкции, кроме нагрузок – активных сил – относятся также реакции связей – реактивные силы.

Нагрузки различаются не только по способу их приложения (распределенные и сосредоточенные), но также по длительности действия (постоянные и временные) и характеру воздействия на конструкцию (статические и динамические).

1.2 ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Под внутренними силами (или внутренними усилиями) в сопротивлении материалов обычно понимают силы взаимодействия между отдельными элементами сооружения или между отдельными частями элемента, возникающие под действием внешних сил.

Рассмотрим общий прием определения внутренних усилий, называемый методом сечений. Пусть дан брус, который под действием внешних нагрузок находится в равновесии. Рассечем его плоскостью совпадающей с поперечным сечением стержня и рассмотрим левую отсеченную часть. Поскольку весь брус находился в равновесии, любая из отсеченных частей также должна находиться в равновесии. Это

возможно лишь в том случае, когда в поперечном сечении возникают внутренние усилия, уравновешивающие внешние нагрузки. В общем случае могут возникнуть шесть внутренних усилий: продольная сила N ; поперечные силы Q_x и Q_y ; крутящий момент M_z ; изгибающие моменты M_x и M_y . (см. рис. 1.1).

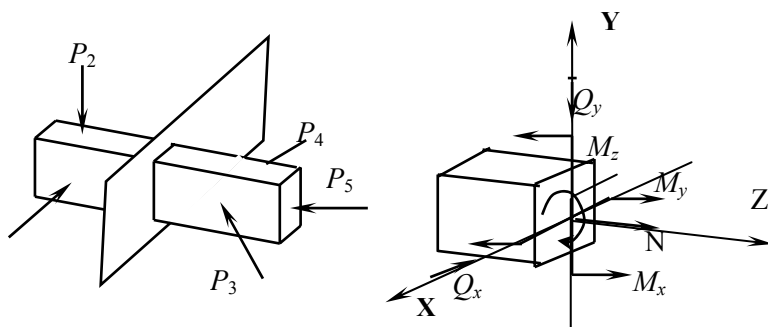


Рис. 1.1

Внутренние усилия в каком-либо поперечном сечении определяют по внешним силам. Численные значения внутренних усилий определяются с помощью шести уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0; \\ \sum M_z = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_x = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

1.3 НАПРЯЖЕНИЯ

Сосредоточенные внутренние силы и моменты, характеризующие взаимодействие между отдельными частями элемента, являются лишь статическим эквивалентом внутренних сил, распределенных по площади сечения.

Интенсивность касательных сил в рассматриваемой точке сечения называется касательным напряжением и обозначается τ , а интенсивность нормальных сил – нормальным напряжением и обозначается σ . Напряжения τ и σ – выражаются формулами

$$\tau = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} (\Delta T / \Delta F); \quad \sigma = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} (\Delta N / \Delta F). \quad (1.2)$$

Напряжения выражаются в ньютонах на квадратный метр (Н/м^2) или паскалях (Па), мегапаскалях (МПа).

Нормальное и касательное напряжения являются составляющими полного напряжения p в рассматриваемой точке. Очевидно, что $p = (\tau^2 + \sigma^2)^{0,5}$.

Нормальное напряжение в данной точке по определенному сечению характеризует интенсивность сил отрыва или сжатия частиц элемента конструкций, расположенных по обе стороны этого сечения, а касательное напряжение – интенсивность сил, сдвигающих эти частицы в плоскости рассматриваемого сечения. Совокупность напряжений, действующих по различным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, представляет собой напряженное состояние в этой точке.

1.4 ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ НАУКИ О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

В сопротивлении материалов используется ряд предпосылок (допущений), упрощающих расчеты. Основные предпосылки в сопротивлении материалов следующие:

- 1 Материал конструкции является однородным и сплошным, т.е. его свойства не зависят от формы и размеров тела и одинаковы во всех его точках.
- 2 Материал конструкции изотропен, т.е. свойства его по всем направлениям одинаковы.

3 Материал конструкции обладает свойством идеальной упругости, т.е. способностью полностью восстанавливать первоначальную форму и размеры тела после устранения причин, вызвавших его деформацию.

4 Деформации материала конструкции в каждой его точке прямо пропорциональны напряжениям в этой точке. Данная предпосылка, впервые сформулированная Р. Гуком (1660), называется законом Гука.

Закон Гука справедлив для большинства материалов, но для каждого из них лишь при напряжениях, не превышающих некоторого значения (предела пропорциональности). Этот закон используется при решении большинства задач сопротивления материалов.

5 Деформации конструкции предполагаются настолько малыми, что можно не учитывать их влияние на взаимное расположение нагрузок и на расстояния от нагрузок до любых точек конструкции.

6 Результат воздействия на конструкцию системы нагрузок равен сумме результатов воздействия каждой нагрузки в отдельности (принцип независимости действия сил). Его часто называют также принципом наложения или принципом суперпозиции.

Принцип независимости действия сил представлен на рис. 1.2.

7 Поперечные сечения бруса, плоские до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и при действии нагрузки.

Эта предпосылка называется гипотезой плоских сечений или гипотезой Бернулли.

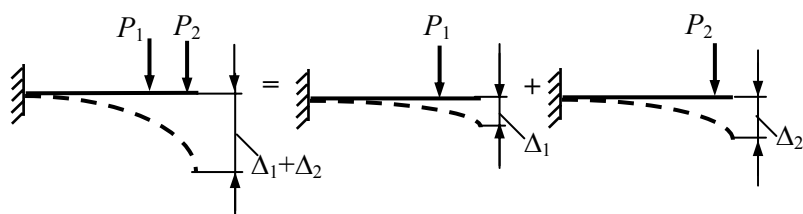


Рис. 1.2

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

- 1 В чем состоит задача расчета на прочность? на жесткость? на устойчивость?
- 2 Что называется брусом, оболочкой, пластинкой, массивным телом?
- 3 Что называется осью бруса?
- 4 Что представляет расчетная схема сооружения и чем она отличается от действительного сооружения?
- 5 По каким признакам и как классифицируются нагрузки?
- 6 Что представляет собой интенсивность распределенной нагрузки?
- 7 В каких единицах выражаются сосредоточенные силы и моменты, а также интенсивности распределенных силовых нагрузок?
- 8 Что представляют собой внутренние силы?
- 9 Какие внутренние усилия могут возникать в поперечных сечениях брусьев и какие виды деформаций с ними связаны?
- 10 В чем сущность метода сечений?
- 11 Какие основные предпосылки положены в основу науки о сопротивлении материалов?
- 12 В чем состоит принцип независимости действия сил?
- 13 В чем заключается гипотеза плоских сечений?

2 Растяжение и сжатие

2.1 ПРОДОЛЬНАЯ СИЛА

Центральным растяжением (сжатием) называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса (стержня) возникает только продольная (нормальная) сила. Считается, что внутренняя продольная сила действует вдоль оси стержня, перпендикулярно к его поперечным сечениям. Численные значения продольных сил N определяют по участкам, используя метод сечений, составляя уравнения равновесия суммы проекций на ось бруса z всех сил, действующих на отсеченную часть.

Растягивающие продольные силы принято считать положительными, а сжимающие – отрицательными.

Рассмотрим (рис. 2.1, а) прямой брус постоянной толщины, закрепленный одним концом и нагруженный на другом конце силой P , направленной вдоль его оси. Под действием закрепления и внешней силы P брус растягивается (деформируется). При этом в закреплении возникает некоторое усилие, благодаря которому верхний край бруса остается неподвижным. Это усилие называют *реакцией* закрепления на внешнюю нагрузку. Заменяем влияние закрепления на стержень эквивалентно действующей силой. Эта сила равна реакции закрепления R (рис. 2.1, б)

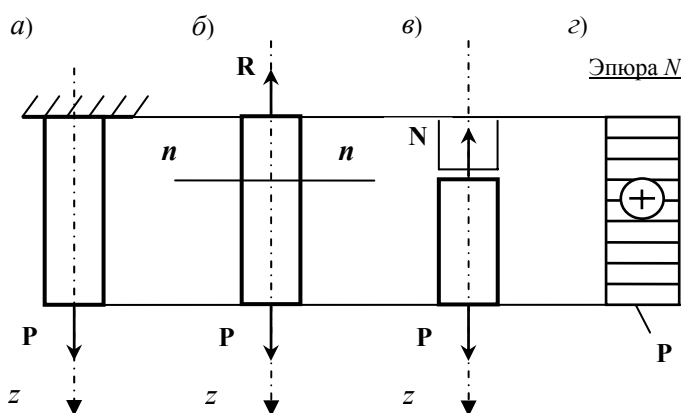


Рис. 2.1

Под действием двух внешних воздействий – известной силы P и неизвестной пока реакции R – брус находится в равновесии. Уравнение равновесия бруса

$$\sum Z = 0; \quad -R + P = 0 \quad \text{или} \quad R = P. \quad (2.1)$$

При построении уравнений общего равновесия механики принято следующее правило знаков: проекция усилия на ось положительна, если ее направление совпадает с выбранным направлением этой оси, проекция отрицательна, если направлена в противоположную сторону.

Мысленно разрежем стержень на две части по интересующему нас сечению $n-n$ (рис. 2.1, б). Влияние на нижнюю часть верхней части представим действием на нижнюю часть в ее верхнем торце $n-n$ нормальной силы N . Уравнение равновесия нижней отсеченной части бруса

$$\sum Z = 0; \quad -N + P = 0 \quad \text{или} \quad N = P. \quad (2.2)$$

На рис. 2.1, з показан график изменения продольной силы вдоль оси бруса. *График, показывающий изменение продольных сил по длине оси бруса, называется эпюрой продольных сил (эпюрой N).*

Пример 2.1. Построить эпюру внутренних нормальных сил, возникающих под действием трех внешних сил: $P_1 = 5 \text{ Н}$, $P_2 = 8 \text{ Н}$, $P_3 = 7 \text{ Н}$ (см. рис. 2.2, а).

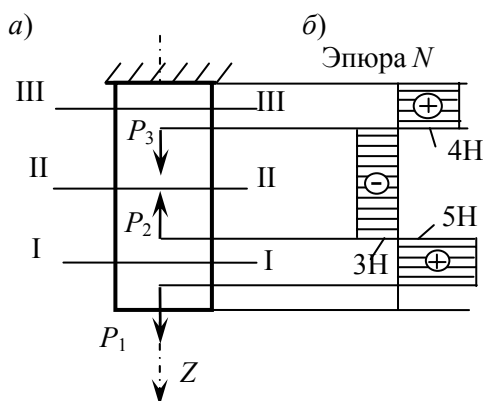


Рис. 2.2

Используя метод сечений, определим значения внутренней силы в характерных поперечных сечениях бруса.

Уравнение равновесия нижней отсеченной части бруса сечение I–I:

$$\sum Z = 0; \quad -N + P_1 = 0 \quad \text{или} \quad N = P_1 = 5 \text{ Н};$$

сечение II–II:

$$\sum Z = 0; \quad -N + P_1 - P_2 = 0 \quad \text{или} \quad N = P_1 - P_2 = -3 \text{ Н};$$

сечение III–III:

$$\sum Z = 0; \quad -N + P_1 - P_2 + P_3 = 0 \quad \text{или} \quad N = P_1 - P_2 + P_3 = 4 \text{ Н}.$$

Строим эпюру нормальных сил (см. рис. 2.2, б).

2.2 НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ БРУСА

Продольная сила N, возникающая в поперечном сечении бруса, представляет собой равнодействующую внутренних нормальных сил, распределенных по площади поперечного сечения, и связана с возникающими в этом сечении нормальными напряжениями зависимостью

$$N = \int_F \sigma dF; \quad (2.3)$$

здесь σ – нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения, принадлежащей элементарной площадке dF ; F – площадь поперечного сечения бруса.

Произведение $\sigma dF = dN$ представляет собой элементарную внутреннюю силу, приходящуюся на площадку dF .

Значение продольной силы N в каждом частном случае легко можно определить при помощи метода сечений. Для нахождения напряжений в каждой точке поперечного сечения бруса надо знать закон распределения по этому сечению.

Проведем на боковой поверхности бруса до его нагружения линии, перпендикулярные к оси бруса (рис. 2.3).

Каждую такую линию можно рассматривать как след плоскости поперечного сечения бруса. При нагружении бруса осевой силой P эти линии, как показывает опыт, остаются прямыми и параллельными между собой (их положения после нагружения бруса показаны на рис. 2.3, б). Это позволяет считать, что поперечные сечения бруса, плоские до его нагружения, остаются плоскими и при действии нагрузки. Такой опыт подтверждает гипотезу плоских сечений (гипотезу Бернулли).

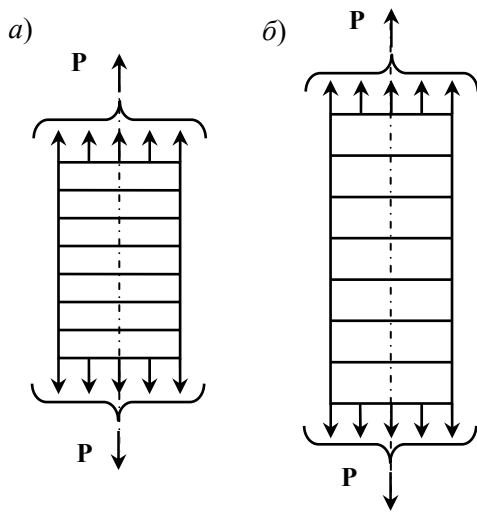


Рис. 2.3

Согласно гипотезе плоских сечений, все продольные волокна бруса растягиваются одинаково, значит, их растягивают одинаковые по величине силы $\sigma dF = dN$, следовательно, во всех точках поперечного сечения нормальное напряжение σ имеет постоянное значение. Выведем из-под знака интеграла в формуле (2.3) постоянное значение σ и окончательно получим

$$N = \int_F \sigma dF = \sigma F, \quad (2.4)$$

откуда

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (2.5)$$

В поперечных сечениях бруса при центральном растяжении или сжатии возникают равномерно распределенные нормальные напряжения, равные отношению продольной силы к площади поперечного сечения.

Для наглядного изображения изменения нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня (по его длине) строится *эпюра нормальных напряжений*. Осью этой эпюры является отрезок прямой, равный длине стержня и параллельный его оси. При стержне постоянного сечения эпюра нормальных напряжений имеет такой же вид, как и эпюра продольных сил (она отличается от нее лишь принятым масштабом). При стержне же переменного сечения вид этих двух эпюр различен; в частности, для стержня со ступенчатым законом изменения поперечных сечений эпюра нормальных напряжений имеет скачки не только в сечениях, в которых приложены сосредоточенные осевые нагрузки (где имеет скачки эпюра продольных сил), но и в местах изменения размеров поперечных сечений. Построение эпюры распределения нормальных напряжений по длине стержня рассмотрено в примере 2.1.

2.3 ПРОДОЛЬНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим прямой брус постоянного сечения длиной l , заделанный одним концом и нагруженный на другом конце растягивающей силой P . Под действием силы P брус удлиняется на некоторую величину Δl , которая называется полным (или абсолютным) удлинением (абсолютной продольной деформацией).

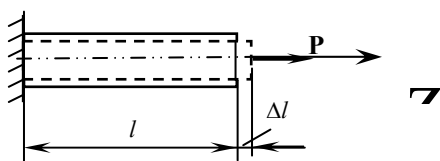


Рис. 2.4

В любых точках рассматриваемого бруса имеется одинаковое напряженное состояние и, следовательно, линейные деформации для всех его точек одинаковы. Поэтому значение ε можно определить как отношение абсолютного удлинения Δl к первоначальной длине бруса l , т.е. $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$.

Брусья из различных материалов удлиняются различно. Для случаев, когда напряжения в бруссе не превышают предела пропорциональности, опытом установлена зависимость

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}, \quad (2.6)$$

где N – продольная сила в поперечных сечениях бруса; F – площадь поперечного сечения бруса; E – коэффициент, зависящий от физических свойств материала.

Учитывая, что нормальное напряжение в поперечном сечении бруса $\sigma = N/F$, получаем

$$\varepsilon = \sigma/E, \quad (2.7)$$

откуда

$$\sigma = \varepsilon E. \quad (2.8)$$

Абсолютное удлинение бруса выражается формулой

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EF}. \quad (2.9)$$

Более общей является следующая формулировка закона Гука: относительная продольная деформация прямо пропорциональна нормальному напряжению. В такой формулировке закон Гука используется не только при изучении растяжения и сжатия брусьев, но и в других разделах курса.

Величина E называется модулем упругости первого рода. Это физическая постоянная материала, характеризующая его жесткость. Чем больше значение E , тем меньше при прочих равных условиях продольная деформация. Модуль упругости выражается в тех же единицах, что и напряжение, т.е. в паскалях (Па).

Произведение EF называется жесткостью поперечного сечения бруса при растяжении и сжатии.

Кроме продольной деформации при действии на брус сжимающей или растягивающей силы наблюдается также поперечная деформация. При сжатии бруса поперечные размеры его увеличиваются, а при растяжении – уменьшаются. Если поперечный размер бруса до приложения к нему сжимающих сил P обозначить b , а после приложения этих сил $b - \Delta b$, то величина Δb будет обозначать абсолютную поперечную деформацию бруса.

Отношение $\varepsilon' = \Delta b/b$ является относительной поперечной деформацией.

Опыт показывает, что при напряжениях, не превышающих предела упругости, относительная поперечная деформация прямо пропорциональна относительной продольной деформации, но имеет обратный знак

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon. \quad (2.10)$$

Коэффициент пропорциональности μ зависит от материала бруса. Он называется коэффициентом поперечной деформации (или коэффициентом Пуассона) и представляет собой отношение относительной поперечной деформации к продольной, взятое по абсолютной величине, т.е. коэффициент Пуассона наряду с модулем упругости E характеризует упругие свойства материала.

Коэффициент Пуассона определяется экспериментально. Для различных материалов он имеет значения от нуля (для пробки) до величины, близкой к 0,50 (для резины и парафина). Для стали коэффициент Пуассона равен 0,25...0,30; для ряда других металлов (чугуна, цинка, бронзы, меди) он имеет значения от 0,23 до 0,36.

Определение величины поперечного сечения стержня выполняется на основании условия прочности

$$\sigma_{\max} = N/F \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

2.4 ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ БРУСЬЕВ

Определим продольное перемещение δ_a точки a оси бруса, растянутого силой P (рис. 2.5).

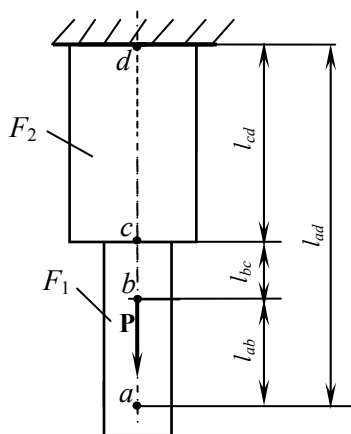


Рис. 2.5

Оно равно абсолютной деформации части бруса ad , заключенной между заделкой и сечением, проведенным через точку a , т.е. продольная деформация бруса определяется по формуле $\Delta l = \frac{Nl}{EF}$. Эта формула применима, лишь когда в пределах всего участка длиной l продольные силы N и жесткости EF поперечных сечений бруса постоянны. В рассматриваемом случае на участке ab продольная сила N равна нулю (собственный вес бруса не учитываем), а на участке bd она равна P ; кроме того, площадь поперечного сечения бруса на участке ac отличается от площади сечения на участке cd . Поэтому продольную деформацию участка ad следует определять как сумму продольных деформаций трех участков ab , bc и cd , для каждого из которых значения N и EF постоянны по всей его длине:

$$\Delta l_{ad} = \Delta l_{ab} + \Delta l_{bc} + \Delta l_{cd}.$$

Продольные силы на рассматриваемых участках бруса

$$N_{ab} = 0; \quad N_{bc} = N_{cd} = P.$$

Следовательно,

$$\Delta l_{ab} = 0; \quad \Delta l_{bc} = \frac{Pl_{bc}}{EF_1}; \quad \Delta l_{cd} = \frac{Pl_{cd}}{EF_2};$$

$$\delta_a = \Delta l_{ad} = \frac{P}{E} \left(\frac{l_{bc}}{F_1} + \frac{l_{cd}}{F_2} \right).$$

Аналогично можно определить перемещения δ любых точек оси бруса, а по их значениям построить эпюру *продольных перемещений* (эпюру δ), т.е. график, изображающий изменение этих перемещений по длине оси бруса.

2.5 ДИАГРАММЫ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

Механические характеристики материалов (т.е. величины, характеризующие их прочность, пластичность и т.д., а также модуль упругости и коэффициент Пуассона) определяются путем испытаний специальных образцов, изготовленных из исследуемого материала. Наиболее распространенными являются статические испытания на растяжение. Для некоторых строительных материалов (камня, цемента, бетона и т.д.) основными являются испытания на сжатие. Испытания проводятся на специальных машинах различных типов.

В процессе испытания специальное устройство автоматически вычерчивает график, изображающий

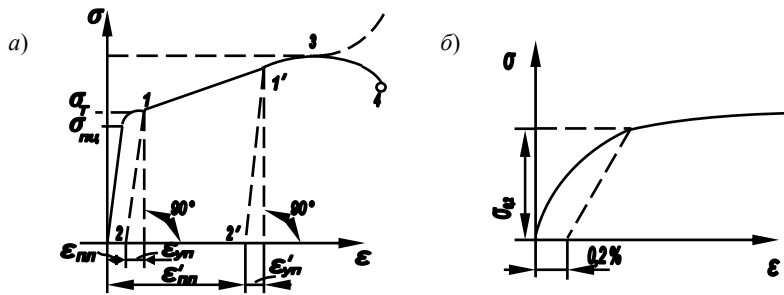


Рис. 2.6

зависимость между нормальным напряжением в поперечных сечениях стержня и относительной деформацией (рис. 2.6).

Для пластичных материалов по диаграммам определяют пределы пропорциональности и пластичности (рис. 2.6, а).

Некоторые пластичные материалы, например дюралюмин (рис. 2.6, б), не имеют на диаграмме растяжения площадки текучести. Для таких материалов вводится понятие условного предела текучести, в качестве которого принимается напряжение, соответствующее остаточной деформации 0,2 %.

При сжатии образец из и площадь его сечения увеличиваются также напряжения. Таким образом, пластичной стали, лишено при растяжении и сжатии для практически одинаковы.

Весьма хрупким материалом серого литейного чугуна разрыве не превышает 0,015 %, в превышает 20 %. Деформации не следуют закону Гука, а потому получаются криволинейными; однако участки диаграмм, соответствующие малым напряжениям, лишь незначительно отличаются от прямой (рис. 2.7).

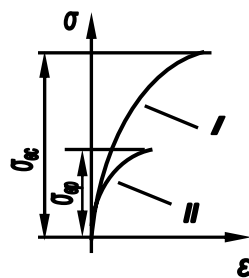


Рис. 2.7

пластичного материала расплющивается, увеличивается, в связи, с чем сжимающие силы и условные понятие предела прочности при сжатии физического смысла. Пределы текучести одной и той же пластичной стали

является чугун. Для образцов из обычного относительное остаточное удлинение при то время как для стали марки Ст3 оно чугуна очень малы. Они с самого начала диаграммы его растяжения и сжатия

Некоторые материалы обладают различными свойствами в различных направлениях. Такие материалы называются анизотропными. Анизотропным материалом является, например, сосна, сопротивляемость которой существенно зависит от направления силы по отношению к направлению волокон. Сопротивление сосны вдоль волокон значительно больше, чем поперек волокон, а деформация меньше.

2.6 ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Внешние силы, деформируя элемент конструкции, совершают работу на создаваемых ими перемещениях и тратят при этом энергию. Деформируемый элемент в это время накапливает (аккумулирует) потенциальную энергию. За счет накапливаемой энергии деформации внутри элемента работают внутренние силы, сопротивляясь внешним. При снятии нагрузки эти внутренние силы восстанавливают первоначальную форму элемента, окончательно расходуя накопленную элементом потенциальную энергию деформации. Показательным примером упругого элемента, накопившего потенциальную энергию за счет его деформирования внешними силами, является сжатая стальная пружина. Работа внешних сил A , мед-

ленно возраставших и продеформировавших твердый элемент, численно равна накопившейся при этом элементом потенциальной энергии деформации U ($U = A$).

Рассмотрим нагружение бруса силой P (рис. 2.6, а), величина которой медленно увеличивается от нуля до своего конечного значения. Такое нагружение называется *статическим*. Сила P вызывает продольную деформацию бруса, в результате чего сечение бруса, в котором она приложена, смещается. При этом сила P совершает работу.

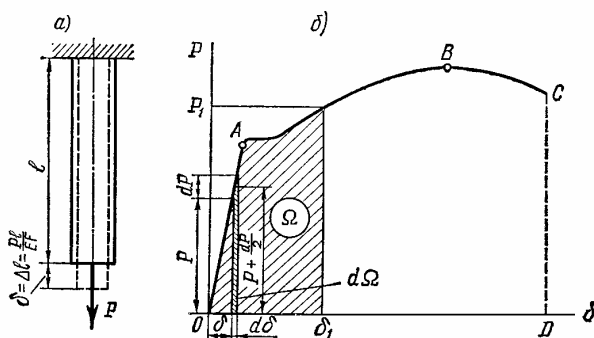


Рис. 2.6

Построим диаграмму растяжения бруса силой P . По оси ординат отложим величины силы P , а по оси абсцисс – соответствующие им перемещения δ нижнего конца бруса (рис. 2.6, б).

Обозначим t момент времени, которому соответствуют некоторые значения силы P и перемещения δ . В последующий бесконечно малый промежуток времени dt сила P получит приращение dP , а нижний конец бруса опустится на $d\delta$. Составим выражение работы силы P на перемещение $d\delta$, отбрасывая при этом бесконечно малые величины второго порядка малости:

$$dA = Pd\delta.$$

Работа dA равна (с учетом масштабов, в которых отложены значения P и δ) площади (рис. 2.6, б). Полную величину работы A при изменении $d\Omega$ силы P от нуля до P_1 получим интегрированием последнего выражения:

$$A = \int_{P=0}^{P=P_1} dA = \int_{p=0}^{P=P_1} Pd\delta = \int_{p=0}^{P=P_1} d\Omega = \Omega. \quad (2.11)$$

Если напряжения в брус при действии силы P не превышают предела пропорциональности, то величина Ω представляет собой площадь треугольника, имеющего высоту P и основание δ , которое по закону Гука определяется выражением

$$\delta = \Delta l = \frac{Pl}{EF}.$$

В этом случае работу можно определить по формуле

$$A = \Omega = \frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 l}{2EF}. \quad (2.12)$$

Исключим из формулы (2.8) силу P с помощью следующих зависимостей:

$$P = \frac{\delta EF}{l} \quad \text{и} \quad P = \sigma F;$$

тогда получим другие выражения работы:

$$A = \frac{\delta^2 EF}{2l}; \quad A = \frac{\sigma^2 Fl}{2E}. \quad (2.13)$$

Наличие в знаменателях формул (2.12) и (2.13) множителя 2 объясняется тем, что в эти формулы входят конечные значения P , δ или σ , в то время как в действительности они изменялись от нуля до этих значений.

2.7 ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

Основной задачей расчета конструкции является обеспечение ее прочности в условиях эксплуатации.

Прочность конструкции, выполненной из хрупкого металла, считается обеспеченной, если во всех поперечных сечениях всех ее элементов фактические напряжения меньше предела прочности материала.

Поэтому необходимо, чтобы наибольшие напряжения, полученные в результате расчета конструкции (*расчетные напряжения*), не превышали некоторой величины, меньшей предела прочности, называемой *допускаемым напряжением*. Значение допускаемого напряжения устанавливается путем деления предела прочности на величину, большую единицы, называемую *коэффициентом запаса*. В соответствии с изложенным *условие прочности* конструкции, выполненной из хрупкого материала, выражается в виде

$$\sigma_p \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_c \leq [\sigma_c], \quad (2.14)$$

где σ_p и σ_c – наибольшие расчетные растягивающие и сжимающие напряжения в конструкции; $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$ – допускаемые напряжения при растяжении и сжатии соответственно. (В случае, когда решающими для прочности конструкции являются не нормальные, а касательные напряжения, условие прочности имеет вид $\tau \leq [\tau]$.)

Допускаемые напряжения $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$ зависят от пределов прочности материала на растяжение $\sigma_{вр}$ и сжатие $\sigma_{вс}$ и определяются выражениями

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{вр}}{[n_B]}; \quad [\sigma_c] = \frac{\sigma_{вс}}{[n_B]}, \quad (2.15)$$

где $[n_B]$ – нормативный (требуемый) коэффициент запаса прочности по отношению к пределу прочности.

В формулы (2.14) и (2.15) подставляются абсолютные значения напряжений $[\sigma_c]$, σ_c и $\sigma_{вс}$.

Для конструкций из пластичных материалов (у которых пределы прочности на растяжение и сжатие одинаковы) используется условие прочности

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (2.16)$$

где σ – наибольшее по абсолютной величине сжимающее или растягивающее расчетное напряжение в конструкции.

Допускаемое напряжение $[\sigma]$ для пластичных материалов определяется по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{[n_m]}, \quad (2.17)$$

где $[n_m]$ – нормативный (требуемый) коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести.

Расчет прочности, выполняемый с использованием условий прочности (2.14) или (2.16), называется *расчетом по допускаемым напряжениям*. Нагрузка, при которой наибольшие напряжения в конструкции равны допускаемым напряжениям, называется *допускаемой*.

При расчете конструкций на прочность встречаются три вида задач, различающихся формой использования условий прочности:

- а) проверка напряжений (проверочный расчет);
- б) подбор сечений (проектный расчет);
- в) определение грузоподъемности (определение допускаемой нагрузки).

При проверке напряжений площади поперечных сечений F и продольные силы N известны и расчет заключается в вычислении расчетных (фактических) напряжений σ в характерных сечениях элементов. Полученное при этом наибольшее напряжение сравнивают затем с допускаемым:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (2.18)$$

При подборе сечений определяют требуемые площади $[F]$ поперечных сечений элемента (по известным продольным силам N и допускаемому напряжению $[\sigma]$). Принимаемые площади сечений F должны удовлетворять условию прочности, выраженному в виде

$$F \geq [F] = \frac{N}{[\sigma]}. \quad (2.19)$$

При определении грузоподъемности по известным значениям F и допускаемому напряжению $[\sigma]$ вычисляют допускаемые величины $[N]$ продольных сил: $[N] = F[\sigma]$. По полученным значениям $[N]$ затем определяются допускаемые величины внешних нагрузок $[P]$.

Для этого случая условие прочности имеет вид

$$P \leq [P]. \quad (2.20)$$

Величины нормативных коэффициентов запаса прочности устанавливаются нормами. Они зависят от класса конструкции (капитальная, временная и т.п.), намечаемого срока ее эксплуатации, нагрузки (статическая, циклическая и т.п.), возможной неоднородности изготовления материалов (например, бетона), от вида деформации (растяжение, сжатие, изгиб и т.д.) и других факторов. В ряде случаев приходится снижать коэффициент запаса в целях уменьшения веса конструкции, а иногда увеличивать коэффициент запаса – при необходимости учитывать износ трущихся частей машин, коррозию и загнивание материала.

Величины нормативных коэффициентов запаса для различных материалов, сооружений и нагрузок имеют в большинстве случаев значения: $[n_b] - 2,5 \dots 5$ и $[n_m] - 1,5 \dots 2,5$.

Под проверкой жесткости элемента конструкции, находящегося в состоянии чистого растяжения – сжатия, понимается поиск ответа на вопрос: достаточны ли значения жесткостных характеристик элемента (модуля упругости материала E и площади поперечного сечения F), чтобы максимальное из всех значений перемещений точек элемента, вызванных внешними силами, u_{\max} не превысило некоторого заданного предельного значения $[u]$. Считается, что при нарушении неравенства $u_{\max} \leq [u]$ конструкция переходит в предельное состояние.

2.8 СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Наиболее важным этапом расчета статически неопределимых систем является составление дополнительных (к уравнениям равновесия) уравнений перемещений. Способы их составления рассмотрим на примерах решения различных задач расчета статически неопределимых систем.

Рассмотрим стержень, защемленный (заделанный) обоими концами и нагруженный силой P (рис. 2.7).

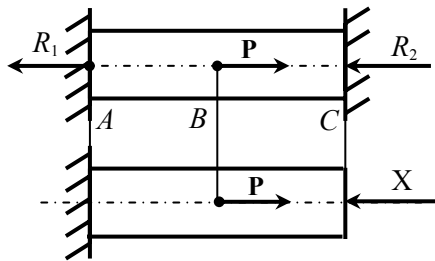


Рис. 2.7

Под действием силы P в заделках возникают реакции R_1 и R_2 , требуется определить эти силы.

Для данного случая статика позволяет составить только одно уравнение равновесия

$$\sum Z = -R_1 - R_2 + P = 0.$$

Следовательно, для определения двух неизвестных R_1 и R_2 необходимо составить дополнительно одно уравнение. Поэтому рассматриваемый стержень является один раз статически неопределимым. Для составления дополнительного уравнения отбросим правую заделку и заменим ее влияние на стержень неизвестной силой X . Под действием силы P деформируется левый участок AB , а участок BC перемещается вправо. В действительности правый конец стержня, будучи заделанным, не получает перемещения. Следовательно, перемещение его вправо, вызванное силой P , должно быть равно 0, т.е. перемещение точки C $\delta_C = 0$. Перемещение точки C складывается из деформаций участков $AB - \Delta_{AB}$ и $BC - \Delta_{BC}$. Для расчета этих деформаций, определим внутренние усилия на участках также как в предыдущем примере:

$$N_1 = -X; \quad N_2 = -X + P.$$

$$\delta_C = \Delta_{AB} + \Delta_{BC} = \frac{N_1 l_{AB}}{EF} + \frac{N_2 l_{BC}}{EF} = -\frac{X l_{AB}}{EF} + \frac{(-X + P) l_{BC}}{EF} = 0.$$

После определения силы X , построение эпюры продольных сил и расчет на прочность производится, как в случае статически определимой задачи.

Рассмотрим теперь систему, состоящую из абсолютно жесткого бруса AD , опертого на шарнирную опору и прикрепленного к двум стержням AA_1 и CC_1 с помощью шарниров (рис. 2.8).

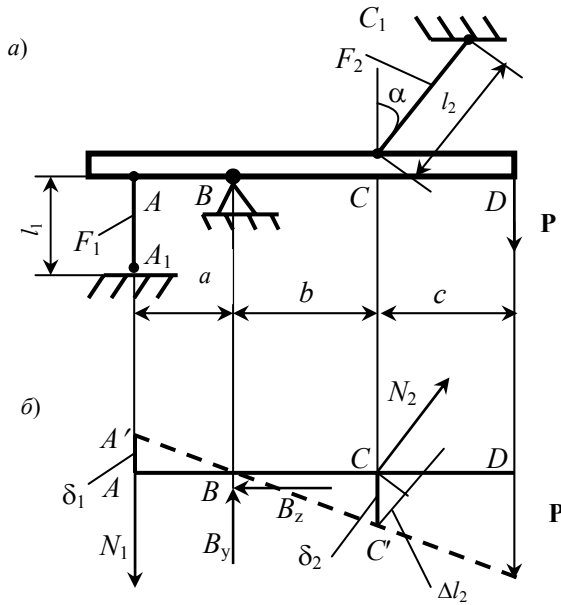


Рис. 2.8

Реакции N_1 и N_2 стержней AA_1 и CC_1 направлены вдоль осей этих стержней. Реакция опоры B имеет горизонтальную составляющую B_z и вертикальную составляющую B_y , так как эта опора препятствует горизонтальному и вертикальному перемещениям точки B бруса.

Таким образом, всего имеется четыре неизвестные реакции, а уравнений равновесия для плоской системы сил можно составить всего три. Следовательно, данная система один раз статически неопределима и для ее решения требуется составить одно дополнительное уравнение.

Для решения задачи необходимо определить реакции N_1 и N_2 стержней AA_1 и CC_1 , а в определении реакций B_z и B_y нет необходимости. Поэтому достаточно из трех возможных уравнений равновесия использовать одно, в которое не входили бы реакции B_z и B_y . Таким является уравнение в виде суммы моментов всех сил относительно шарнира B :

$$\sum M_B = -N_1 a - N_2 b \cos \alpha + P(a + b) = 0.$$

Для составления дополнительного уравнения рассмотрим деформацию системы. На рис. 2.8, б штриховой линией показана ось бруса после деформации системы. Эта ось остается прямолинейной, так как брус является абсолютно жестким и, следовательно, не деформируется, а может лишь повернуться вокруг точки B . Шарниры A и C после деформации переходят в положения A' и C' соответственно, т.е. перемещаются по вертикали на величины δ_1 и δ_2 . Из подобия треугольников $AA'B$ и $CC'B$ находим

$$\delta_1 / \delta_2 = a / b.$$

Выразим удлинение Δl_1 стержня AA_1 и удлинение Δl_2 стержня CC_1 через перемещения δ_1 и δ_2 . Для этого спроецируем перемещения δ_1 и δ_2 на направления стержней: $\Delta l_1 = \delta_1$; $\Delta l_2 = \delta_2 \cos \alpha$, откуда $\Delta l_1 / \Delta l_2 = \delta_1 / (\delta_2 \cos \alpha)$ или $\Delta l_1 / \Delta l_2 = a / (b \cdot \cos \alpha)$.

По закону Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}$$

и, следовательно,

$$\frac{N_1 l_1 F_2}{N_2 l_2 F_1} = \frac{a}{b \cos \alpha}.$$

Решив это уравнение совместно с уравнением равновесия, найдем значения продольных сил N_1 и N_2 , выраженные через нагрузку Q . Разделив силы N_1 и N_2 на площади поперечных сечений F_1 и F_2 соответственно, определим нормальные напряжения σ_1 и σ_2 в стальных стержнях. Приравняв затем большее из этих напряжений допускаемому напряжению $[\sigma]$, найдем значение Q , равное величине допускаемой нагрузки $[Q]$.

При увеличении нагрузки Q сверх значения $[Q]$ напряжения в обоих стержнях сначала увеличиваются прямо пропорционально нагрузке. Если, например, $\sigma_1 > \sigma_2$ и, следовательно, значение $[Q]$ найдено из условия $\sigma_1 = [\sigma]$, то при увеличении нагрузки до некоторой величины $Q > [Q]$ напряжения σ_1 в первом стержне достигают предела текучести σ_T . При этом напряжения σ_2 во втором стержне остаются меньше σ_T .

В процессе дальнейшего увеличения нагрузки напряжения в первом стержне остаются постоянными, равными пределу текучести, а во втором – возрастают, пока также не становятся равными σ_T . Это состояние системы называется *предельным*, соответствующим исчерпанию ее грузоподъемности; дальнейшее, даже незначительное увеличение нагрузки связано с весьма большими деформациями системы. Величину Q , вызывающую предельное состояние, обозначают $Q_{пр}$ и называют *предельной нагрузкой*.

Для определения значения $Q_{пр}$ составим уравнение равновесия в виде суммы моментов (относительно шарнира B) всех сил, действующих на жесткий брус в предельном состоянии, когда $Q = Q_{пр}$, $N_1 = \sigma_T F_1$ и $N_2 = \sigma_T F_2$:

$$\sum M_B = -\sigma_T F_1 a - \sigma_T F_2 b \cos \alpha + Q_{пр} (b + c) = 0,$$

откуда

$$Q_{пр} = \frac{\sigma_T (F_1 a + F_2 b \cos \alpha)}{b + c}.$$

Разделив $Q_{пр}$ на нормативный коэффициент запаса несущей способности $[n]$, получим величину предельно допускаемой нагрузки:

$$[Q]_{пр} = \frac{Q_{пр}}{[n]}. \quad (2.21)$$

Если значение $[n]$ в формуле (2.17) принять равным значению $[n_T] = \sigma_T / [\sigma]$, так как $[\sigma] = \sigma_T / [n_T]$, то величина предельно допускаемой нагрузки $[Q_{пр}]$ будет больше величины допускаемой нагрузки $[Q]$, полученной расчетом по допускаемым напряжениям.

Рассмотрим теперь два примера определения температурных напряжений, возникающих в результате изменения температуры элементов конструкции.

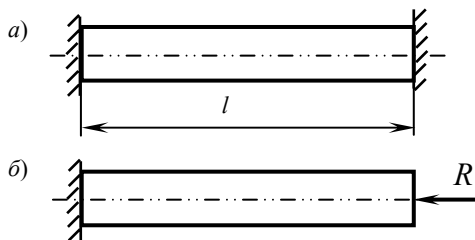


Рис. 2.9

Пусть стержень (рис. 2.9, а) при некоторой температуре t_0° заделан обоими концами в неподатливые стены. Затем температура повысилась до t_1° , так что изменение температуры составило $\Delta t^\circ = t_1^\circ - t_0^\circ$. Если бы один конец стержня был свободен, то в результате нагрева длина стержня увеличилась бы и напряжения в стержне не возникли.

Но так как стены не дают стержню удлиниться, то он испытывает сжатие и в нем возникают продольные силы и напряжения. Отсутствие удлинения вызывает в данном случае возникновение напряжений. Рассматриваемая задача один раз статически неопределима, так как при двух неизвестных силах (реакциях стен) можно составить всего одно уравнение равновесия – в виде суммы проекций всех сил

на горизонтальную ось.

Отбросим одну из заделок, например правую, и заменим ее действие на стержень силой R (рис. 2.9, б). Если бы этой силы не было, то стержень в результате нагрева удлинился бы на величину

$$\Delta l_t = \alpha l \Delta t^\circ, \quad (2.22)$$

где α – коэффициент линейного расширения материала стержня.

В действительности же стержень не удлиняется. Следовательно, сила R , сжимающая стержень, уменьшает его длину на величину Δl_R , равную величине Δl_t . Таким образом,

$$\Delta l_R = \Delta l_t. \quad (2.23)$$

По закону Гука

$$\Delta l_R = \frac{Rl}{EF}.$$

Следовательно, на основании равенств (2.22) и (2.23)

$$\alpha l \Delta t^\circ = \frac{Rl}{EF},$$

откуда

$$R = EF\alpha\Delta t^\circ.$$

Возникающие в поперечных сечениях стержня нормальные сжимающие напряжения определяются из выражения

$$\sigma = \frac{R}{F} = E\alpha\Delta t^\circ. \quad (2.24)$$

Далее, на основании условия прочности при растяжении (сжатии) определяем площади поперечных сечений F_1 и F_2 стержней AA_1 и CC_1 .

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие случаи деформации бруса называются центральным растяжением (сжатием)?
2. Как вычисляется значение продольной силы в произвольном поперечном сечении бруса?
3. Что представляет собой эпюра продольных сил и как она строится?
4. Как распределены нормальные напряжения в поперечных сечениях центрально-растянутого или центрально-сжатого бруса и чему они равны?
5. Как строится график (эпюра), показывающий изменение (по длине оси бруса) нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса?
6. Что называется полной (абсолютной) продольной деформацией? Что представляет собой относительная продольная деформация?
7. Что называется модулем упругости E ? Как влияет величина E на деформации бруса?
8. Как формулируется закон Гука?
9. Что происходит с поперечными размерами бруса при его растяжении или сжатии?
10. Какие системы называются статически неопределимыми?
11. Что представляют собой дополнительные уравнения?
12. Что называется степенью статической неопределимости системы?

3.1 ВИДЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Взаимодействие между частями элемента конструкции можно охарактеризовать величинами нормальных и касательных напряжений в каждой точке элемента. Эти величины зависят от направления сечения, проведенного через данную точку.

Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по всем площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, называется *напряженным состоянием* в этой точке.

При расчетах на прочность необходимо устанавливать напряженные состояния в опасных точках конструкции.

Если через рассматриваемую точку тела нельзя провести ни одной площадки, в которой касательные и нормальные напряжения были бы равны нулю, то в этой точке имеется *пространственное (трехосное) напряженное состояние*. Если в одной (и только в одной) площадке, проходящей через рассматриваемую точку тела, касательные и нормальные напряжения равны нулю, то в этой точке имеется *плоское (двухосное) напряженное состояние*. Если касательные и нормальные напряжения равны нулю в двух площадках, проходящих через рассматриваемую точку тела, то в этой точке имеется *линейное (одноосное) напряженное состояние*; в таком случае касательные и нормальные напряжения равны нулю и во всех площадках, проходящих через линию пересечения указанных двух площадок.

Плоское и линейное напряженные состояния являются частными случаями пространственного напряженного состояния.

В окрестности любой точки тела всегда можно выделить элементарный параллелепипед так, чтобы по всем его граням касательные напряжения были равны нулю (рис. 3.1).

Длины ребер элементарного параллелепипеда бесконечно малы, а поэтому напряжения на его гранях, параллельных друг другу, одинаковы и равны напряжениям в параллельной им площадке, проходящей через рассматриваемую точку тела. При пространственном напряженном состоянии нормальные напряжения

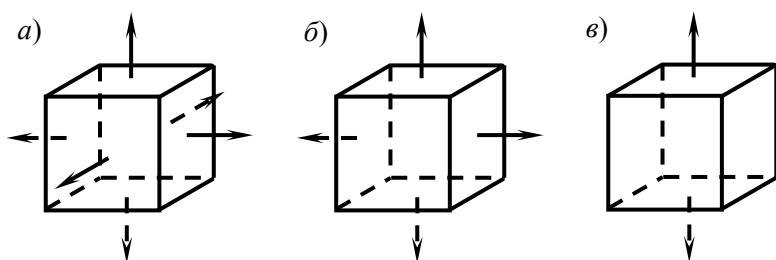


Рис. 3.1

по всем граням элементарного параллелепипеда, показанного на рис. 3.1, *а*, не равны нулю; при плоском напряженном состоянии нормальные напряжения по одной паре параллельных друг другу граней равны нулю (рис. 3.1, *б*), а при линейном – по двум парам таких граней (рис. 3.1, *в*).

Величины напряжений в разных площадках, проходящих через данную точку тела, находятся между собой в определенных зависимостях. Эти зависимости устанавливаются в настоящей главе. Они ис-

пользуются при решении многих задач сопротивления материалов – в первую очередь при расчетах на прочность в случаях сложного сопротивления.

3.2 ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

При плоском напряженном состоянии в одной из площадок, проходящих через рассматриваемую точку, касательные и нормальные напряжения равны нулю. Совместим эту площадку с плоскостью чертежа и выделим из тела в окрестности этой точки бесконечно малую (элементарную) треугольную призму, боковые грани которой перпендикулярны к плоскости чертежа, а высота (в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа) равна dz ; основания призмы представляют собой прямоугольные треугольнички abc (рис. 3.2, *a*).

Приложим к выделенной призме те же напряжения, которые действовали на нее до выделения ее из тела. В связи с тем, что все размеры выделенной призмы бесконечно малы, касательные и нормальные напряжения по ее боковым граням можно считать распределенными равномерно и равными напряжениям в площадках, проходящих параллельно ее граням.

Выберем систему координат, совместив оси x и y (в плоскости чертежа) с гранями ac и ab призмы (рис. 3.2, *a*). Обозначим σ_x и τ_x напряжения, параллельные оси x , а σ_y и τ_y – оси y .

Нормальные напряжения по боковой грани призмы, наклоненной под углом α к грани, по которой действуют напряжения σ_x , обозначим σ_α , а касательные напряжения по этой грани τ_α . По основаниям призмы, параллельным плоскости чертежа, касательные и нормальные напряжения при плоском напряженном состоянии равны нулю.

Примем следующее правило знаков. Растягивающее нормальное напряжение положительно, а сжимающее – отрицательно. Касательное напряжение по боковой грани призмы положительно, если изображающий его вектор стремится вращать призму по часовой стрелке относительно любой точки, лежащей на внутренней нормали к этой грани. Угол α положителен, если грань ab призмы (по которой действует напряжение σ_x) для со-

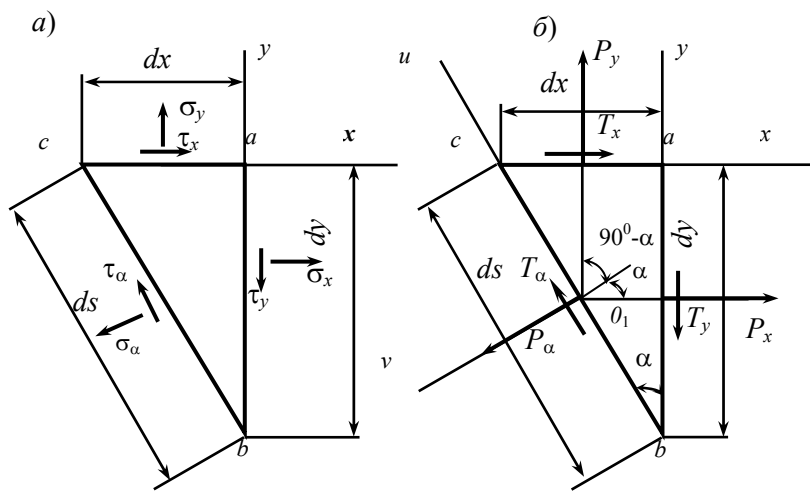


Рис. 3.2

вращения с гранью cb (по которой действует напряжение σ_α) поворачивается на этот угол против часовой стрелки. На рис. 3.2, *a* все напряжения, а также угол α положительны.

Умножив каждое из напряжений на площадь грани, по которой оно действует, получим систему сосредоточенных сил P_x , P_y , P_α , T_x , T_y и T_α , приложенных в центрах тяжести соответствующих граней (рис. 3.2, *b*):

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \sigma_x dy dz; & P_y &= \sigma_y dx dz; & P_\alpha &= \sigma_\alpha ds dz; \\ T_x &= \tau_x dy dz; & T_y &= \tau_y dx dz; & T_\alpha &= \tau_\alpha ds dz. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Эти силы должны удовлетворять всем уравнениям равновесия, так как призма, выделенная из тела, на-

ходится в равновесии. Составим следующие уравнения равновесия:

$$\sum V = P_\alpha - (P_x + T_x)\cos\alpha - (P_y - T_y)\cos(90^\circ - \alpha) = 0; \quad (3.2)$$

$$\sum U = T_\alpha - (P_x + T_x)\sin\alpha + (P_y - T_y)\sin(90^\circ - \alpha) = 0; \quad (3.3)$$

$$\sum M_{O_1} = T_y(dx/2) + T_x(dy/2) = 0. \quad (3.4)$$

В уравнение (3.4) силы P_x , P_y , P_α , T_α не входят, так как линии их действия проходят через точку O_1 (начало системы координат uv).

Подставив в уравнение (3.4) выражения T_x и T_y из равенств (3.1.), получим

$$\sum M_{O_1} = \tau_y dy dz (dx/2) + \tau_x dx dz (dy/2) = 0,$$

откуда

$$\tau_y = -\tau_x. \quad (3.5)$$

Следовательно, касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по абсолютной величине и обратны по знаку. Эта связь между τ_x и τ_y называется законом парности касательных напряжений.

Из закона парности касательных напряжений следует, что в двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения направлены либо к линии пересечения этих площадок (рис. 3.3, а), либо от нее (рис. 3.3, б).

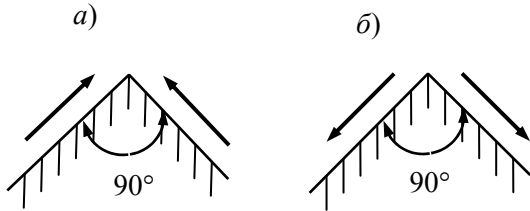


Рис. 3.3

Подставим в уравнения (3.2) и (3.3) выражения сил из равенств (3.1):

$$\sum V = \sigma_\alpha ds dz - (\sigma_x dy + \tau_x dx) dz \cos\alpha - (\sigma_y dx - \tau_y dy) dz \sin\alpha = 0;$$

$$\sum U = \tau_\alpha ds dz - (\sigma_x dy + \tau_x dx) dz \sin\alpha - (\sigma_y dx - \tau_y dy) dz \cos\alpha = 0.$$

Сократим эти уравнения на $ds dz$, учитывая при этом, что (см. рис. 3.2, а):

$$(dx/ds) = \sin\alpha; \quad (dy/ds) = \cos\alpha;$$

$$\sigma_\alpha - (\sigma_x \cos\alpha + \tau_x \sin\alpha) \cos\alpha - (\sigma_y \sin\alpha - \tau_y \cos\alpha) \sin\alpha = 0.$$

$$\tau_\alpha - (\sigma_x \cos\alpha + \tau_x \sin\alpha) \sin\alpha + (\sigma_y \sin\alpha - \tau_y \cos\alpha) \cos\alpha = 0.$$

Теперь заменим τ_y на $-\tau_x$ [см. формулу (3.5)]:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha; \quad (3.6)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_x \cos 2\alpha. \quad (3.7)$$

Формулы (3.6) и (3.7) позволяют определять значения нормальных и касательных напряжений в любых площадках, проходящих через данную точку, если известны напряжения σ_x , σ_y и $\tau_x = -\tau_y$ в любых двух проходящих через нее взаимно перпендикулярных площадках.

Определим по формуле (3.6) сумму нормальных напряжений в двух взаимно перпендикулярных площадках, для одной из которых угол α равен α_1 , а для другой $\alpha_1 + 90^\circ$

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha_1} + \sigma_{\alpha_1+90^\circ} &= [\sigma_x \cos^2 \alpha_1 + \sigma_y \sin^2 \alpha_1 + \tau_x \sin 2\alpha_1] + \\ &+ [\sigma_x \cos^2(\alpha_1 + 90^\circ) + \sigma_y \sin^2(\alpha_1 + 90^\circ) + \tau_x \sin 2(\alpha_1 + 90^\circ)] = \\ &= (\sigma_x + \sigma_y)(\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1) = \sigma_x + \sigma_y,\end{aligned}$$

т.е.

$$\sigma_{\alpha_1} + \sigma_{\alpha_2} = \sigma_x + \sigma_y = \text{const}, \quad (3.8)$$

т.е. сумма величин нормальных напряжений в двух взаимно перпендикулярных площадках есть величина постоянная. Следовательно, если в одной из таких площадок нормальные напряжения имеют максимальное значение, то в другой они имеют минимальное значение.

3.3 ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ГЛАВНЫЕ ПЛОЩАДКИ

При расчете инженерных конструкций нет необходимости определять напряжения во всех площадках, проходящих через данную точку; достаточно знать экстремальные (т.е. максимальные и минимальные) их значения.

Максимальные и минимальные нормальные напряжения называются *главными напряжениями*, а площадки, по которым они действуют, – *главными площадками*.

Для определения величины главных напряжений и положений главных площадок приравняем нулю первую производную напряжения σ_α по углу α [см. формулу (3.6)]:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -\sigma_x 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_y 2 \sin \alpha \cos \alpha + \tau_x 2 \cos 2\alpha$$

или

$$\left(\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha_0 + 2\tau_x \cos 2\alpha_0 = 0. \quad (3.9)$$

Здесь α_0 – углы наклона главных площадок к площадке, в которой действует напряжение σ_x (см. рис. 3.2). Сравнивая последнее выражение с формулой (3.7), устанавливаем, что

$$\left(\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -2\tau_{\alpha_0} = 0.$$

Следовательно, по главным площадкам касательные напряжения равны нулю. Поэтому *главными площадками можно называть площадки, по которым касательные напряжения равны нулю*.

Решим уравнение (3.9) относительно угла α_0 :

$$\text{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (3.10)$$

или на основании (3.5)

$$\text{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_y}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (3.11)$$

Формула (3.10) или (3.11) дает значения углов α_0 , определяющие две взаимно перпендикулярные площадки. Следовательно, обе *главные площадки взаимно перпендикулярны*. Для определения их положений площадки, в которых действуют напряжения σ_x и σ_y , следует повернуть на угол α_0 против часовой стрелки (при $\alpha_0 > 0$) или по часовой стрелке (при $\alpha_0 < 0$).

При любом значении $\text{tg} 2\alpha_0$, полученном по формуле (3.10) или (3.11), можно установить соответствующую величину угла $2\alpha_0$, находящуюся в интервале от -90° до $+90^\circ$, и, следовательно, значение α_0 от -45° до $+45^\circ$. Поэтому поворот площадок всегда можно произвести на угол, не больший 45° .

По одной из главных площадок действует максимальное напряжение σ_{\max} , а по другой – минимальное напряжение σ_{\min} . При решении конкретной числовой задачи для определения величин σ_{\max} и σ_{\min} значения углов α_0 можно подставить в формулу (3.6). Решим эту же задачу в общем виде.

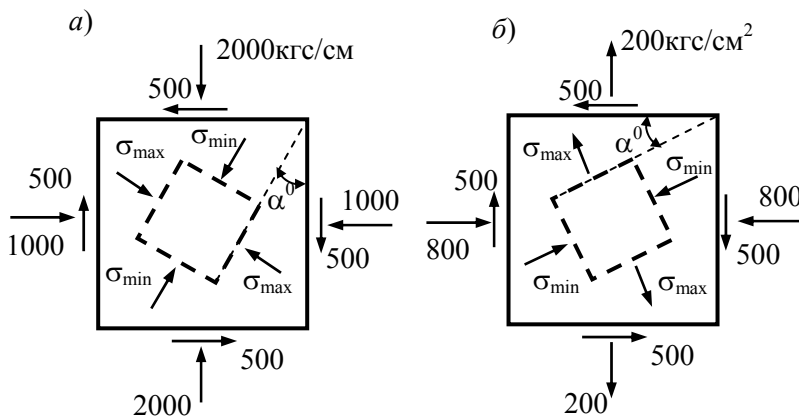
По формулам тригонометрии, используя выражение (3.10) и подставив полученные выражения в формулу (3.6), после простых преобразований получим выражения экстремальных нормальных напряжений:

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}. \quad (3.12)$$

Для определения положения главной площадки с напряжением σ_{\max} можно выполнить следующее: площадку с большим (в алгебраическом смысле) нормальным напряжением повернуть на угол α_0 (по абсолютной величине не больший 45°) в направлении, в котором вектор касательного напряжения, действующего по этой же площадке, стремится вращать элементарный параллелепипед относительно его центра.

После определения положения главной площадки с напряжением σ_{\max} легко находится перпендикулярная к ней вторая главная площадка с напряжением σ_{\min} . Такой прием позволяет приближенно определять положения главных площадок, не вычисляя значения α_0 , а используя то обстоятельство, что угол α_0 всегда можно взять по абсолютной величине не больший 45° . Примеры такого приближенного определения даны на рис. 3.4, а, б.

Рис. 3.4



3.4 ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Определим площадки, по которым касательные напряжения имеют экстремальные (максимальные и минимальные) значения; такие площадки условимся называть *площадками сдвига*. Для этого приравняем нулю первую производную $d\tau_\alpha/d\alpha$. На основании формулы (3.7)

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + 2\tau_x \sin 2\alpha,$$

или

$$\left(\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_1} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha_1 + 2\tau_x \sin 2\alpha_1,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_x}. \quad (3.13)$$

Здесь α_1 – угол наклона площадки сдвига к площадке, по которой действует напряжение σ_x . Если угол α_1 положителен, то площадку, по которой действует напряжение σ_x для совмещения с площадкой, по которой действует экстремальное касательное напряжение, надо повернуть на этот угол против часовой стрелки.

Формула (3.13) дает значения углов α_1 , определяющие две взаимно перпендикулярные площадки, по одной из которых действует максимальное напряжение τ_{\max} , а по другой – минимальное τ_{\min} . Из закона парности касательных напряжений следует, что $\tau_{\max} = -\tau_{\min}$.

Сравнивая выражение (3.13) с выражением (3.10), устанавливаем, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_0},$$

откуда

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - 2\alpha_1) = -\operatorname{ctg}2\alpha_0 - \operatorname{ctg}(-2\alpha_0),$$

следовательно,

$$90^\circ - 2\alpha_1 = -2\alpha_0,$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 - 45^\circ$$

Таким образом, *площадки сдвига наклонены к главным площадкам под углами, равными 45° .*

Нормальные напряжения σ в площадках сдвига одинаковы по величине и знаку и равны [на основании формул (3.6) и (3.8)]

$$\frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}.$$

Для определения величин τ_{\max} и τ_{\min} за исходные примем главные напряжения σ_{\max} и σ_{\min} . Подставив в формулу (3.7) значения $\sigma_x = \sigma_{\max}$, $\sigma_y = \sigma_{\min}$, $\tau_x = 0$, $\alpha_1 = \pm 45^\circ$, получим

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (3.14)$$

Подставив в формулу (3.14) значения σ_{\max} и σ_{\min} по формулам (3.12), найдем

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}. \quad (3.15)$$

Определение экстремальных значений касательных напряжений и площадок сдвига производят обычно одним из следующих двух способов.

1 Если одновременно определяют также главные нормальные напряжения и главные площадки, то экстремальные касательные напряжения вычисляют по формулам (3.14) или (3.15). Положения площадок сдвига определяют по положениям главных площадок, к которым они всегда наклонены под углами 45° . Экстремальные касательные напряжения действуют в направлениях от σ_{\max} к σ_{\min} , как показано на рис. 3.5.

2 Если главные нормальные напряжения не определяются, то с помощью формулы (3.13) находят углы наклона площадок сдвига, а затем по формуле (3.7) или (3.15) вычисляют значения действующих по этим площадкам экстремальных касательных напряжений.

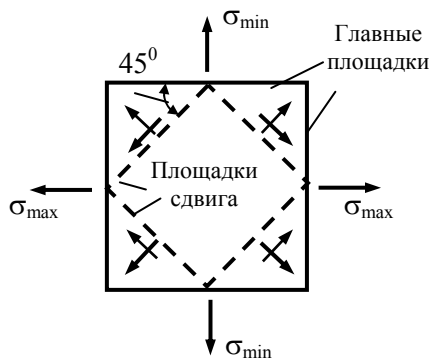


Рис. 3.5

3.5 ПОНЯТИЕ О ПРОСТРАНСТВЕННОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В общем случае напряженного состояния через исследуемую точку нельзя провести ни одной площадки, по которой одновременно и касательное, и нормальное напряжения были бы равны нулю. Такое напряженное состояние называется *пространственным, или трехосным, или объемным*.

В курсе теории упругости доказывается, что при пространственном напряженном состоянии через каждую точку всегда можно провести три площадки, по которым касательные напряжения равны нулю. Такие площадки называются *главными площадками*, а нормальные напряжения, действующие по ним, – *главными напряжениями*. Все три главные площадки взаимно перпендикулярны. Наибольшее (в алгебраическом смысле) главное напряжение принято обозначать σ_1 следующее по величине σ_2 , а наименьшее σ_3 :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Напряжение σ_1 является максимальным ($\sigma_1 = \sigma_{\max}$), а напряжение σ_3 – минимальным ($\sigma_3 = \sigma_{\min}$); нормальные напряжения по любым площадкам, проходящим через данную точку, имеют промежуточные значения между σ_1 и σ_3 .

Закон парности касательных напряжений, доказанный выше для плоского напряженного состояния, действителен и в случае пространственного напряженного состояния, однако в этом случае равны друг другу по абсолютной величине не полные касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам, а их *составляющие*, нормальные к линиям пересечения этих площадок (рис. 3.6).

Выделим в окрестности точки, напряжения в которой изучаются, элементарный кубик с гранями, параллельными главным площадкам (рис. 3.7).

Проведем через кубик площадку, параллельную напряжению σ_1 (на рис. 3.7 эта площадка заштрихована). Величины σ и τ нормальных и касательных напряжений, действующих по этой площадке, зависят только от напряжений σ_2 и σ_3 и не зависят от напряжений σ_1 ; поэтому для определения значений σ и τ можно использовать формулы, применяемые при исследовании плоского напряженного состояния.

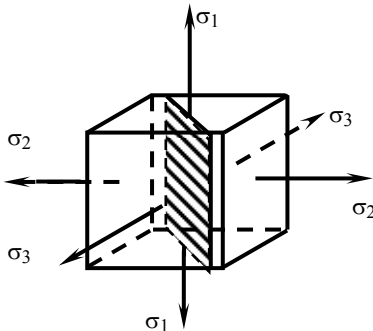
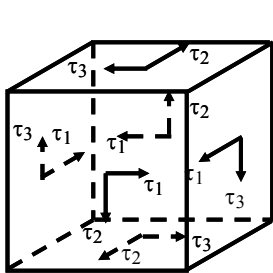


Рис. 3.6

Рис. 3.7

Аналитически напряжения σ и τ в любой площадке определяются по формулам:

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3; \quad (3.16)$$

$$\tau = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma^2}. \quad (3.17)$$

Здесь α_1 , α_2 и α_3 – углы между нормалью к рассматриваемой площадке и нормальями к главным площадкам.

Если по формуле (3.16) определить нормальные напряжения σ_x , σ_y и σ_z по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам и сложить их значения, то сумма этих напряжений будет равна сумме главных напряжений

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \quad (3.18)$$

Таким образом, *сумма нормальных напряжений, действующих по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, есть постоянная величина.*

Экстремальные касательные напряжения действуют по площадкам, параллельным главному напряжению σ_2 . Эти площадки наклонены к площадкам, по которым действуют главные напряжения σ_1 и σ_3 , под углами в 45° . Значения экстремальных касательных напряжений

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

При плоском и линейном напряженных состояниях главные напряжения часто обозначают так же, как и при пространственном, т.е. σ_1 , σ_2 и σ_3 (где $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$). При этом в случае плоского напряженного состояния одно из них, а в случае линейного – два из них равны нулю.

В зависимости от вида плоского напряженного состояния возможны следующие три случая:

а) оба не равных нулю главных напряжения положительны; в этом случае они обозначаются σ_1 и σ_2 ($\sigma_1 \geq \sigma_2$), а $\sigma_3 = 0$;

б) оба не равных нулю главных напряжения отрицательны; в этом случае они обозначаются σ_2 и σ_3 ($\sigma_2 \geq \sigma_3$), а $\sigma_1 = 0$;

в) не равные нулю главные напряжения имеют разные знаки – одно из них является растягивающим, а другое – сжимающим. В этом случае растягивающее главное напряжение обозначается σ_1 , а сжимающее σ_3 ; $\sigma_2 = 0$.

При одноосном растяжении не равно нулю только одно главное напряжение: $\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Аналогично при одноосном сжатии $\sigma_3 < 0$; $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

3.6 ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

Формулы относительных деформаций бруса, полученные выше для случая его центрального растяжения или сжатия, можно обобщить на случай трехосного (пространственного) напряженного состояния. Для этого выделим из тела элементарный параллелепипед (с бесконечно малыми размерами ребер), грани которого совпадают с главными площадками (рис. 3.8).

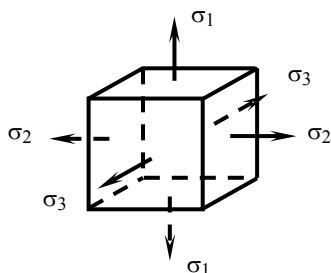


Рис. 3.8

Обозначим σ_1 , σ_2 и σ_3 нормальные напряжения на главных площадках (т.е. главные напряжения), а ε_1 , ε_2 и ε_3 – относительные деформации ребер параллелепипеда, параллельных этим напряжениям.

Значения ε_1 , ε_2 и ε_3 определим на основании принципа независимости действия сил, последовательно рассматривая влияние напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 .

В результате воздействия напряжений σ_1 относительные деформации равны [см. формулы (2.7) и (2.10)]

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = -\mu \varepsilon_{11} = -\mu \frac{\sigma_1}{E}.$$

Первый индекс при ε указывает направление относительной деформации, а второй – причину деформации. Так, например, ε_{21} является относительной деформацией в направлении напряжения σ_2 вызванной напряжением σ_1 .

Аналогично от воздействия напряжений σ_2 и σ_3 получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_{32} = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = -\mu \frac{\sigma_3}{E}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_3}{E}. \end{aligned}$$

Относительные деформации, вызванные одновременным воздействием напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 , равны

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23}; \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{31} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33}. \end{aligned}$$

После замены относительных деформаций ε_{11} , ε_{12} и т.д. их выражениями последние формулы примут вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Аналогичные формулы можно получить и для случаев, когда грани элементарного параллелепипеда не совпадают с главными площадками (т.е. когда по этим граням, кроме нормальных напряжений, дей-

ствуют также и касательные). Это является следствием того, что касательные напряжения не вызывают удлинений ребер параллелепипеда, а вызывают лишь изменения прямых углов между его гранями. Для указанных случаев формулы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

где σ_x , σ_y и σ_z – нормальные напряжения, действующие по боковым граням элементарного параллелепипеда (в общем случае не совпадающим с главными площадками); ε_x , ε_y и ε_z – относительные деформации его ребер.

Выражения (3.19) и (3.20), устанавливающие связь между деформациями и напряжениями при пространственном напряженном состоянии, носят название *обобщенного закона Гука*. Они применимы при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала.

3.7 ОБЪЕМНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Под действием внешней нагрузки упругое тело деформируется, его объем изменяется, и в нем накапливается потенциальная энергия. В процессе разгрузки тела потенциальная энергия проявляется в виде работы, совершаемой внутренними силами. В общем случае, когда напряженное состояние в различных точках тела различно, для определения изменения его объема и количества накопленной им потенциальной энергии необходимо знать изменение объема и количество энергии в каждой элементарной частице тела.

Выделим в окрестности некоторой точки тела до его деформации элементарный параллелепипед с ребрами dl_1 , dl_2 и dl_3 так, чтобы его грани совпадали с главными площадками (рис. 3.9).

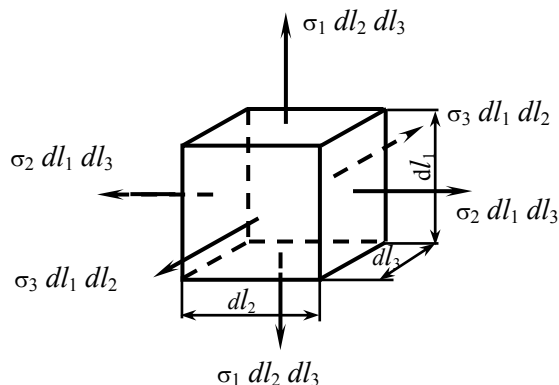


Рис. 3.9

Первоначальный объем параллелепипеда $dV = dl_1 dl_2 dl_3$. В общем случае трехосного напряженного состояния после деформации длины всех ребер параллелепипеда изменяются и становятся равными

$$dl_1(1 + \varepsilon_1); \quad dl_2(1 + \varepsilon_2); \quad dl_3(1 + \varepsilon_3),$$

где ε_1 , ε_2 и ε_3 – относительные деформации ребер параллелепипеда (в направлениях главных напряжений), определяемые по формулам (3.19).

Объем элементарного параллелепипеда после его деформации

$$\begin{aligned} dV + \Delta(dV) &= dl_1(1 + \varepsilon_1) dl_2(1 + \varepsilon_2) dl_3(1 + \varepsilon_3) = \\ &= dl_1 dl_2 dl_3 \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3). \end{aligned}$$

Здесь $\Delta(dV)$ – приращение объема элементарного параллелепипеда.

Так как величины ε_1 , ε_2 и ε_3 весьма малы, то их произведениями можно пренебречь. Тогда

$$dV + \Delta(dV) = dV(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

откуда

$$\Delta(dV) = dV(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Отношение величины $\Delta(dV)$ к первоначальному объему параллелепипеда dV обозначается θ и называется *относительным изменением объема*:

$$\theta = \frac{\Delta(dV)}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (3.21)$$

Относительное изменение объема выражается в отвлеченных величинах (безразмерная величина).

Подставив в выражение (3.21) значения ε_1 , ε_2 и ε_3 по формулам (3.19), после преобразования получим

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.22)$$

В формулу (3.22) входит сумма главных нормальных напряжений $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$. Вместо этой суммы сюда можно подставить сумму $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ [см. формулу (3.18)]:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (3.23)$$

Правая часть формулы (3.23) равна сумме относительных деформаций ε_x , ε_y и ε_z [это следует из выражений (3.20)]. Поэтому формулу (3.23) можно представить в виде

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (3.24)$$

Зная относительное изменение объема тела в каждой его точке, можно вычислить объемную деформацию (т.е. изменение объема) всего тела:

$$\Delta V = \int_V \theta dV. \quad (3.25)$$

В частном случае пространственного напряженного состояния, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma > 0$ (такой случай называется *пространственным равномерным растяжением*), на основании формулы (3.22) относительное изменение объема

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} 3\sigma. \quad (3.26)$$

Совершенно очевидно, что объем кубика, находящегося в условиях пространственного равномерного растяжения, не может уменьшаться, т.е. θ в этом случае не может быть отрицательным; следовательно [на основании зависимости (3.26)], коэффициент Пуассона для любых материалов не может быть больше 0,5.

Полученные здесь формулы действительны для напряжений, не превышающих предела пропорциональности материала.

3.8 ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Для определения потенциальной энергии деформации, накапливаемой в элементарной частице тела, выделим из тела элементарный параллелепипед, ребра которого dl_1 , dl_2 и dl_3 , а грани совмещены с главными площадками. В общем случае трехосного напряженного состояния на каждую грань параллелепипеда перпендикулярно к ней действует внешняя сила, равная произведению нормального напряжения на площадь этой грани (см. рис. 3.9).

На основании закона сохранения энергии потенциальная энергия деформации элементарного параллелепипеда равна работе внешних сил, приложенных к его граням. При вычислении этой работы будем предполагать, что внешние силы (все одновременно) постепенно нарастают от нуля до своего конечного значения, т.е. эти силы действуют *статически*.

В результате действия на элементарный параллелепипед внешних сил его ребра dl_1 , dl_2 и dl_3 удлинятся на следующие величины:

$$\Delta(dl_1) = \varepsilon_1 dl_1; \quad \Delta(dl_2) = \varepsilon_2 dl_2; \quad \Delta(dl_3) = \varepsilon_3 dl_3. \quad (3.27)$$

Работа dA внешних сил на этих удлинениях и равная ей потенциальная энергия dU определяются выражением

$$dA = dU = \frac{\sigma_1 dl_2 dl_3 \Delta(dl_1)}{2} + \frac{\sigma_2 dl_1 dl_3 \Delta(dl_2)}{2} + \frac{\sigma_3 dl_1 dl_2 \Delta(dl_3)}{2},$$

где каждое из слагаемых в правой части равенства представляет собой работу статически нарастающей силы ($\sigma_1 dl_2 dl_3$ или $\sigma_2 dl_1 dl_3$, или $\sigma_3 dl_1 dl_2$) на соответствующем (т.е. по направлению этой силы) удлинении ребер параллелепипеда [$\Delta(dl_1)$ или $\Delta(dl_2)$, или $\Delta(dl_3)$].

Подставляем в это выражение значения удлинений из (3.27):

$$dU = \frac{dl_1 dl_2 dl_3}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3).$$

Разделив выражение dU на первоначальный объем параллелепипеда $dV = dl_1 dl_2 dl_3$, получим общее количество u потенциальной энергии, приходящееся на единицу объема тела, т.е. так называемую *полную удельную потенциальную энергию деформации*:

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3}{2}. \quad (3.28)$$

Заменим в этой формуле относительные деформации их выражениями через напряжения [см. обобщенный закон Гука – формулы (3.19)]:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)]. \quad (3.29)$$

Размерность удельной потенциальной энергии – кгс·см/см³ (или кгс/см²), тс·м/м³ (или тс/м²) и т.д.

Под действием внешних сил, приложенных к элементарному параллелепипеду, его объем изменяется на величину

$$\Delta(dV) = \theta dV = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) dV. \quad (3.30)$$

Кроме того, изменяется и форма параллелепипеда, так как в результате того, что $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, относительные удлинения ребер оказываются различными и, следовательно, первоначальное соотношение между длинами ребер изменяется.

Установим, какие напряжения надо приложить к элементарному параллелепипеду для того, чтобы его объем изменился на величину, определяемую формулой (3.30), а форма сохранилась прежней. Сохранение формы параллелепипеда возможно лишь при действии по всем его граням одинаковых напряжений (обозначим их σ_0). При этом изменение объема параллелепипеда равно [см. формулу (3.30)]

$$\frac{1-2\mu}{E} 3\sigma_0 dV.$$

Приравниваем его фактическому изменению, определяемому формулой (3.30):

$$\frac{1-2\mu}{E} 3\sigma_0 dV = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) dV,$$

откуда

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (3.31)$$

Таким образом, рассматриваемое напряженное состояние параллелепипеда (рис. 3.10, *а*) можно расчленить на два напряженных состояния. В первом из них (рис. 3.10, *б*) объем параллелепипеда изменяется, а форма его остается неизменной; потенциальная энергия, накопленная в этом состоянии, называется *потенциальной энергией изменения объема*.

Во втором состоянии (рис. 3.10, *в*) объем параллелепипеда не изменяется, а изменяется лишь его форма; потенциальная энергия, накопленная в этом состоянии, называется *потенциальной энергией изменения формы*.

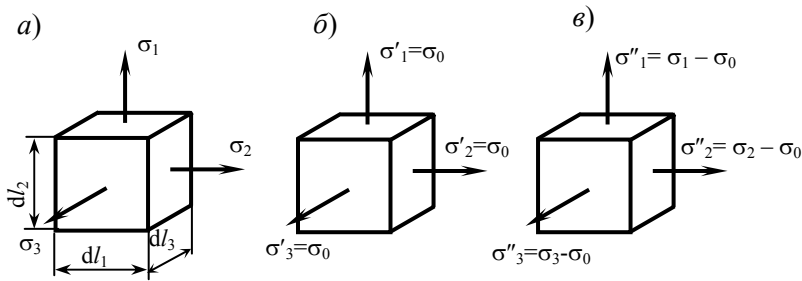


Рис. 3.10

Для того чтобы получить выражение удельной потенциальной энергии изменения объема, подставим в формулу (3.29) напряжения $\sigma'_1 = \sigma_0$ $\sigma'_2 = \sigma_0$ $\sigma'_3 = \sigma_0$ (рис. 3.10, б):

$$u_{об} = \frac{1}{2E} [\sigma_0^2 + \sigma_0^2 + \sigma_0^2 - 2\mu(\sigma_0\sigma_0 + \sigma_0\sigma_0 + \sigma_0\sigma_0)] =$$

$$= \frac{1-2\mu}{2E} 3\sigma_0^2 = \frac{1-2\mu}{2E} 3 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2$$

или

$$u_{об} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2, \quad (3.32)$$

или [на основании формулы (3.18)]

$$u_{об} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2. \quad (3.33)$$

Для того чтобы получить выражение удельной потенциальной энергии изменения формы, подставим в правую часть формулы (3.29) напряжения $\sigma''_1 = \sigma_1 - \sigma_0$; $\sigma''_2 = \sigma_2 - \sigma_0$; $\sigma''_3 = \sigma_3 - \sigma_0$ (рис. 3.12, в):

$$u_{\phi} = (1/2E) \left\{ (\sigma_1 - \sigma_0)^2 + (\sigma_2 - \sigma_0)^2 + (\sigma_3 - \sigma_0)^2 - \right.$$

$$\left. - 2\mu [(\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0) + (\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0) + (\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0)] \right\}$$

После преобразований и замены σ_0 выражением $\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ получаем

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3). \quad (3.34)$$

Сумма удельных потенциальных энергий изменения объема и формы равна полной удельной потенциальной энергии деформации, т.е.

$$u_{об} + u_{\phi} = u. \quad (3.35)$$

В этом можно убедиться, если в равенство (3.35) подставить выражения $u_{об}$, u_{ϕ} и u из формул (3.32), (3.34) и (3.29). Следовательно, полную удельную потенциальную энергию деформации можно рассматривать состоящей из удельной потенциальной энергии изменения объема и удельной потенциальной энергии изменения формы.

Зная удельную потенциальную энергию деформации в каждой точке упругого тела, можно вычислить потенциальную энергию, накапливаемую во всем теле:

$$U = \sum_V \int u dV. \quad (3.36)$$

Из формул (3.29), (3.32) и (3.34) легко получить выражения удельных потенциальных энергий для случаев двухосного и одноосного напряженных состояний. Так, например, для двухосного напряженного состояния, обозначив σ_3 главное напряжение, равное нулю, получим

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_2), \\ u_{об} &= \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2)^2; \\ u_{\phi} &= \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2). \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Если в этих равенствах главные напряжения σ_x и σ_y заменим их выражениями через напряжения в двух произвольных взаимно перпендикулярных площадках [с помощью формул (3.12)], то после преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y) + \frac{\tau_x^2}{2G}; \\ u_{об} &= \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y)^2; \\ u_{\phi} &= \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y) + \frac{\tau_x^2}{2G}, \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

где

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (3.39)$$

В формулах (3.38) нормальные напряжения учитываются одними слагаемыми, а касательные напряжения – другими. Это означает, что удельную потенциальную энергию деформации можно вычислить отдельно от нормальных напряжений, действующих по боковым граням элементарного параллелепипеда, и отдельно от касательных напряжений.

Полученные здесь формулы действительны для напряжений, не превышающих предела пропорциональности материала.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

- 1 Какое напряженное состояние называется пространственным (трехосным), плоским (двухосным) и линейным (одноосным)?
- 2 Каково правило знаков для нормальных и касательных напряжений?
- 3 Докажите закон парности касательных напряжений.
- 4 Чему равна сумма нормальных напряжений по любым двум взаимно перпендикулярным площадкам (перпендикулярным главной площадке с напряжением $\sigma = 0$)?
- 5 В чем сущность принципа наложения напряжений?
- 6 Что представляют собой главные напряжения и главные площадки? Как расположены главные площадки друг относительно друга?
- 7 Чему равны касательные напряжения на главных площадках?
- 8 Как определить главную площадку, по которой действует главное напряжение σ_{max} в общем случае плоского напряженного состояния?
- 9 Чему равны экстремальные значения касательных напряжений в случае плоского напряженного состояния?
- 10 Что представляют собой площадки сдвига и как они наклонены к главным площадкам?
- 11 Чему равна сумма нормальных напряжений на любых трех взаимно перпендикулярных площадках?
- 12 Чему равны максимальные и минимальные касательные напряжения (при заданных напряжениях σ_1 , σ_2 и σ_3) и по каким площадкам они действуют?
- 13 На основе какого из допущений, принятых в курсе сопротивления материалов, составлены выражения обобщенного закона Гука?
- 14 Что называется полной удельной потенциальной энергией деформации и из каких частей она состоит?
- 15 В каких единицах выражается удельная потенциальная энергия?

4 Сдвиг

4.1 ЧИСТЫЙ СДВИГ

ЧИСТЫМ СДВИГОМ НАЗЫВАЕТСЯ ТАКОЙ СЛУЧАЙ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ, ПРИ КОТОРОМ В ОКРЕСТНОСТИ ДАННОЙ ТОЧКИ МОЖНО ВЫДЕЛИТЬ ЭЛЕ-

МЕНТАРНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД С БОКОВЫМИ ГРЯНЯМИ, НАХОДЯЩИМИСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОДНИХ ЛИШЬ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ.

Определим нормальные и касательные напряжения на площадке $n - n$, проходящей через точку O и составляющей угол α с вертикальной исходной площадкой (рис. 4.1):

$$\sigma = \tau \sin 2\alpha; \quad \tau = -\tau \cos 2\alpha. \quad (4.1)$$

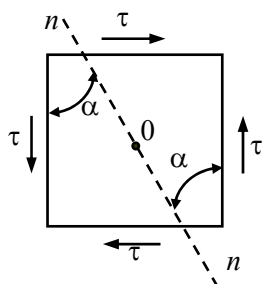


Рис. 4.1

Из выражения видно, что касательные напряжения по абсолютной величине больше касательных напряжений по любым другим площадкам, проходящим через точку O (так как $\cos 2\alpha$ при $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 90^\circ$ по абсолютной величине меньше единицы).

Следовательно, касательные напряжения τ , действующие по боковым граням рассматриваемого параллелепипеда, являются экстремальными (τ_{\max} и τ_{\min}), а эти грани являются площадками сдвига и образуют с главными площадками углы, равные 45° .

В случае плоского напряженного состояния рассматриваются только площадки, перпендикулярные той плоскости, в которой нормальные и касательные напряжения равны нулю. Эту плоскость при изображении элементарного параллелепипеда (или призмы), находящегося в плоском напряженном состоянии, обычно совмещают с плоскостью чертежа. Эти площадки сдвига отличаются от площадок сдвига в общем случае напряженного состояния тем, что по ним не действуют нормальные напряжения. В связи с этим их называют площадками чистого сдвига.

Из формулы (4.1) следует, что σ_α при $\alpha = 45^\circ$ имеет максимальное значение, равное $\tau = \tau_{\max}$ (так как при этом $\sin 2\alpha = \sin 90^\circ = 1$), а при $\alpha = -45^\circ$ – минимальное значение, равное $-\tau = -\tau_{\max}$. Следовательно, при чистом сдвиге главные напряжения (т.е. экстремальные нормальные напряжения и экстремальные касательные напряжения) по абсолютной величине равны друг другу.

Подставим в выражение (4.1) значения углов α_1 и $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$, соответствующие двум взаимно перпендикулярным площадкам:

$$\sigma_{\alpha_1} = \tau \sin 2\alpha_1; \quad \sigma_{\alpha_2} = \tau \sin(2\alpha_1 + 180^\circ) = -\tau \sin 2\alpha_1;$$

$$\sigma_{\alpha_1} = -\sigma_{\alpha_2}.$$

Следовательно, при чистом сдвиге нормальные напряжения на любых двух взаимно перпендикулярных площадках равны друг другу по величине и противоположны по знаку. Поэтому чистым сдвигом можно называть такое плоское напряженное состояние, при котором нормальные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках равны друг другу по величине и противоположны по знаку.

При чистом сдвиге полное напряжение p по любой площадке, определяемое выражением $\sqrt{\sigma_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}$, как это следует из формулы (4.1), равно по абсолютной величине напряжению τ_{\max} .

4.2 Деформации при сдвиге. Закон Гука при сдвиге

Напряженное состояние, изображенное на рис. 4.2, *a* представляет собой чистый сдвиг. В этом состоянии длины ребер элементарного параллелепипеда не изменяются, а изменяются лишь углы между боковыми гранями: первоначально прямые углы становятся равными $90^\circ + \gamma$ и $90^\circ - \gamma$ (рис. 4.2, *б*).

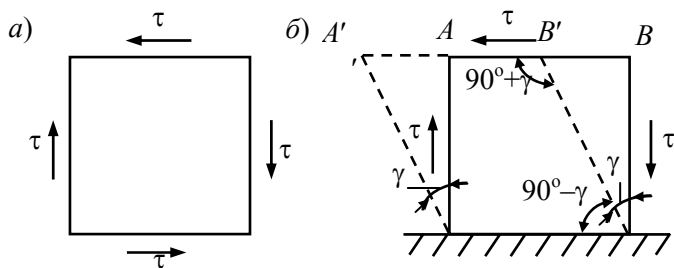


Рис. 4.2

Каждая из граней параллелепипеда при деформации чистого сдвига перемещается относительно противоположной грани на величину AA' , называемую абсолютным сдвигом. Отношение абсолютного сдвига к расстоянию между противоположными гранями называется относительным сдвигом, при малых деформациях оно равно углу сдвига γ – изменения первоначально прямых углов между боковыми гранями параллелепипеда. Абсолютный сдвиг выражается в мерах длины, а относительный сдвиг является безразмерной величиной. Угол сдвига γ , как показывает опыт, прямо пропорционален касательным напряжениям. Эта зависимость между γ и τ , называемая законом Гука при сдвиге, выражается в виде

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (4.2)$$

или

$$\tau = \gamma G.$$

Она справедлива при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала.

Коэффициент пропорциональности G в формулах называется модулем сдвига (или модулем упругости второго рода).

Модуль сдвига является физической постоянной материала, характеризующей его жесткость (т.е. способность сопротивляться упругим деформациям) при сдвиге. Модуль сдвига G , как и модуль упругости E , выражается в паскалях (Па), мегапаскалях (МПа).

4.3 ОБЪЕМНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ E , G , μ

Относительное изменение объема в случае чистого сдвига определим по формуле

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Величина θ в данной точке тела не зависит от того, как в ее окрестности выделен элементарный параллелепипед. Если его боковые грани являются площадками чистого сдвига, то $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ и, следовательно, $\theta = 0$.

Итак, относительное изменение объема при чистом сдвиге равно нулю. Если напряженное состояние во всех точках тела является состоянием чистого сдвига, то и изменение объема всего тела (т.е. его объемная деформация) равно нулю.

Определим теперь потенциальную энергию деформации тела при чистом сдвиге. Как известно, полная удельная потенциальная энергия деформации u равна сумме удельной потенциальной энергии изменения объема $u_{об}$ и удельной потенциальной энергии изменения формы $u_{ф}$.

Величины удельных потенциальных энергий найдем по формулам (3.29), (3.32) и (3.34). Подставим в них значения $\sigma_1 = \tau_{\max}$, $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 = -\tau_{\max}$:

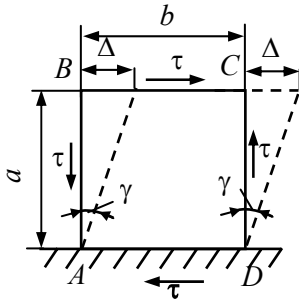
$$\left. \begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] = \\
 &= \frac{1}{2E} [\tau_{\max}^2 + \tau_{\max}^2 - 2\mu(-\tau_{\max}^2)] = \frac{\tau_{\max}^2(1+\mu)}{E}; \\
 u_{об} &= \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1-2\mu}{6E} (\tau_{\max} = \tau_{\max})^2 = 0; \\
 u_{\phi} &= \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3) = \\
 &= \frac{1+\mu}{3E} (\tau_{\max}^2 + \tau_{\max}^2 + \tau_{\max}^2) = \frac{\tau_{\max}^2(1+\mu)}{E}.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Таким образом, при чистом сдвиге потенциальная энергия изменения объема равна нулю, а полная удельная потенциальная энергия равна удельной потенциальной энергии изменения формы.

Величину полной удельной потенциальной энергии деформации при чистом сдвиге можно получить иным способом, не используя для этого общей формулы, относящейся к любому случаю напряженного состояния, а рассматривая работу касательных сил, действующих по боковым граням элементарного параллелепипеда, совмещенным с площадками чистого сдвига.

В результате деформации такого параллелепипеда (см. рис. 4.3) работу совершит лишь сила, действующая на грань BC , так как перемещения граней AB , CD и AD в своих плоскостях при сдвиге равны нулю. Грань BC перемещается в своей плоскости на величину $\Delta = \gamma a = \frac{\tau}{G} a = \frac{\tau_{\max}}{G} a$.

Рис. 4.3



Сила T , действующая по грани BC , равна произведению соответствующего напряжения на площадь этой грани:

$$T = \tau_{\max} bl,$$

где l – размер параллелепипеда в направлении, перпендикулярном чертежу.

Работа силы T при ее статическом действии на перемещении Δ численно равна потенциальной энергии U :

$$A = \frac{T\Delta}{2} = \frac{\tau_{\max} bl \tau_{\max} a}{2G} = \frac{\tau_{\max}^2 abl}{2G} = \frac{\tau_{\max}^2 V}{2G} = U,$$

где V – объем элементарного параллелепипеда ($V = abl$).

Удельная потенциальная энергия деформации параллелепипеда определяется выражением

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\tau_{\max}^2}{2G}.$$

Приравняем полученные выражения:

$$\frac{\tau_{\max}^2(1+\mu)}{E} = \frac{\tau_{\max}^2}{2G},$$

откуда

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (4.4)$$

Коэффициент Пуассона μ для различных материалов имеет значение от нуля до 0,5 и, следовательно, модуль сдвига G составляет от 0,33 до 0,5 модуля упругости E . Для большинства материалов можно приближенно принимать $G = 0,4E$, т.е. для стали, для которой $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, можно принимать $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа.

4.4 ПРАКТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ КОНСТРУКЦИЙ, РАБОТАЮЩИХ НА СДВИГ

В некоторых конструкциях по отдельным сечениям действуют значительные касательные напряжения. В этих же сечениях, как правило, действуют и нормальные напряжения, а потому они не являются площадками чистого сдвига. Однако если нормальные напряжения в них значительно меньше касательных, то в приближенных расчетах учитываются лишь касательные напряжения, а указанные сечения при этом рассматриваются как площадки чистого сдвига.

Рассмотрим заклепочное соединение на примере стыка элемента конструкции (с сечением, состоящим из двух уголков), растянутого силами P (рис. 4.4).

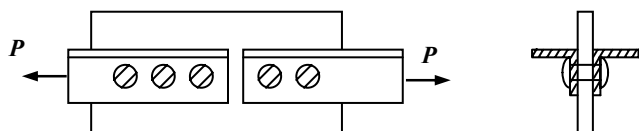


Рис. 4.4

Касательные напряжения в заклепках по плоскостям среза определяются по формуле

$$\tau = \frac{P}{n(\pi d^2/4) m}, \quad (4.6)$$

где d – диаметр стержней заклепок, n – число заклепок, m – число плоскостей среза заклепки. В случае, показанном на рис. 4.4, $n = 2$, $m = 2$.

Найденное значение должно удовлетворять условию прочности

$$\frac{P}{n(\pi d^2/4) m} \leq [\tau], \quad (4.7)$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение. Для большинства материалов допускаемое касательное напряжение составляет от 60 до 80 % допускаемого растягивающего напряжения.

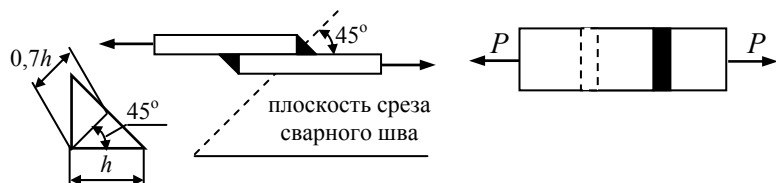


Рис. 4.5

Аналогично рассчитываются сварные соединения (рис. 4.5).

$$\tau = \frac{Q}{F_{\text{ср}}}; \quad Q = P, \quad F_{\text{ср}} = 10,7h,$$

где l – длина шва.

$$\tau = \frac{P}{10,7h} \leq [\tau_{\text{ш}}],$$

где $[\tau_{\text{ш}}]$ – допускаемые напряжения для шва в зависимости от типа электродов (50...70 % от допускаемых напряжений на растяжение свариваемого металла).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какой случай плоского напряженного состояния называется чистым сдвигом?
2. Что представляют собой площадки чистого сдвига и чем они отличаются от площадок сдвига?

3. Как деформируется под действием касательных напряжений элементарный параллелепипед, боковые грани которого совпадают с площадками чистого сдвига?
4. Что называется абсолютным сдвигом, относительным сдвигом и углом сдвига?
5. Закон Гука при сдвиге.

5 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ

Как уже известно, при растяжении и сжатии прочность и жесткость стержней, напряжения, возникающие в их поперечных сечениях, потенциальная энергия деформации и т.д. зависят от площадей поперечных сечений стержней.

Площадь является простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения. Если представить сечение состоящим из бесчисленного множества элементарных площадок dF , то площадь всего сечения

$$F = \int dF. \quad (5.1)$$

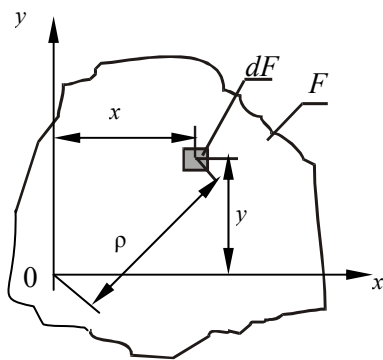


Рис. 5.1

При расчетах на изгиб, кручение, сложное сопротивление, а также при расчетах сжатых стержней на устойчивость используются более сложные геометрические характеристики сечений: статический момент, а также осевой (или экваториальный), полярный и центробежный моменты инерции сечений. Выражения этих характеристик отличаются от выражения (5.1) тем, что у них под знаки интеграла входят произведения элементарных площадок dF на функции координат y , x , ρ этих площадок (рис. 5.1). Таким образом, указанные геометрические характеристики зависят не только от формы и размеров сечения, но также от положения осей и точек (полюсов), относительно которых они вычисляются.

Геометрические характеристики сечений простой формы можно определить по специальным формулам. Кроме того, в таблицах ГОСТа (называемых также таблицами нормального сортамента) приводятся геометрические характеристики профилей стандартного проката (уголков, швеллеров, двутавров). Для определения геометрических характеристик сложных сечений приходится расчленять их на ряд

простых фигур и пользоваться формулами, устанавливающими зависимости между геометрическими характеристиками относительно различных осей.

5.1 СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЙ

Статическим моментом сечения относительно некоторой оси называется взятая по всей его площади F сумма произведений элементарных площадок dF на их расстояния от этой оси, т.е.

$$S_x = \int_F y dF ; S_y = \int_F x dF . \quad (5.2)$$

Статические моменты выражаются в см^3 , м^3 и т.д.

Статический момент сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме статических моментов всех частей этого сечения относительно той же оси.

Нельзя суммировать статические моменты частей сечения, вычисленные относительно различных осей. Изменение положительного направления оси y вызывает изменение знака статического момента S_x ; аналогично, изменение положительного направления оси x вызывает изменение знака статического момента S_y .

Установим зависимость между статическими моментами одного и того же сечения относительно двух параллельных друг другу осей x и x_1 (рис. 5.2). Выражения статических моментов относительно этих осей на основании формулы (5.2) имеют вид

$$S_x = \int_F y dF ; S_{x_1} = \int_F y_1 dF ,$$

но $y_1 = y - a$ и, следовательно,

$$S_{x_1} = \int_F (y - a) dF = \int_F y dF - a \int_F dF = S_x - aF .$$

Окончательно

$$S_{x_1} = S_x - aF \quad (5.3)$$

и, аналогично,

$$S_{y_1} = S_y - bF . \quad (5.4)$$

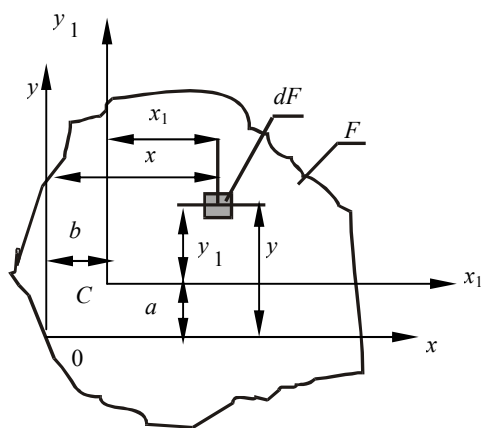


Рис. 5.2

Найдем теперь положение осей x_1 и y_1 , относительно которых статические моменты равны нулю. Для этого приравняем нулю выражения (5.3) и (5.4):

$$S_{x_1} = S_x - y_C F = 0 ; S_{y_1} = S_y - x_C F = 0 ,$$

откуда

$$y_C = S_x / F ; x_C = S_y / F . \quad (5.5)$$

Оси, проходящие через центр тяжести, называются центральными осями. Относительно любой оси, проходящей через центр тяжести сечения (т.е. относительно любой центральной оси), статический момент равен нулю. Формулы (5.5) используются для определения координат центра тяжести сечения.

Для случаев, когда положение центра тяжести сечения известно, а требуется определить статические моменты сечения относительно любых осей y и x , формулы (5.5) преобразуются к виду

$$S_x = y_C F ; \quad S_y = x_C F . \quad (5.6)$$

На основании вышеизложенного можно установить следующий порядок определения положения центра тяжести сложного сечения:

- 1 Сложное сечение разбивается на части, имеющие вид простых фигур.
- 2 Определяются площади и положения центров тяжести каждой фигуры.
- 3 Выбираются случайные координатные оси y и x .
- 4 По формулам (5.6) вычисляются статические моменты S_y^i и S_x^i каждой фигуры относительно осей y и x . Затем путем суммирования значений S_y^i определяется статический момент S_y , а значений S_x^i – статический момент S_x всего сечения.

5 По формулам (5.5) вычисляются координаты центра тяжести всего сечения.

В отдельных случаях, когда заданное сечение нельзя разбить на такие фигуры, положение центров тяжести которых известны, положение центра тяжести всего сечения необходимо определить путем непосредственного интегрирования.

5.2 МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЙ

Осевым (или экваториальным) моментом инерции сечения относительно некоторой оси называется взятая по всей его площади F сумма произведений элементарных площадок dF на квадраты их расстояний от этой оси, т.е.

$$J_y = \int_F x^2 dF ; \quad J_x = \int_F y^2 dF . \quad (5.7)$$

Полярным моментом инерции сечения относительно некоторой точки (полюса) называется взятая по всей его площади F сумма произведений элементарных площадок dF на квадраты их расстояний от этой точки, т.е.

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF . \quad (5.8)$$

Центробежным моментом инерции сечения относительно некоторых двух взаимно перпендикулярных осей называется взятая по всей его площади F сумма произведений элементарных площадок dF на их расстояния от этих осей, т.е.

$$J_{yx} = \int_F yx dF . \quad (5.9)$$

Моменты инерции выражаются в см^4 , м^4 и т.д. Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны, так как в их выражения под знаки интегралов входят величины площадок dF (всегда положительные) и квадраты расстояний этих площадок от данной оси или полюса.

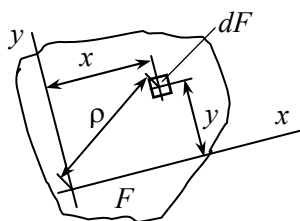


Рис. 5.3

На рис. 5.3 изображено сечение площадью F и показаны оси y и x . Осевые моменты инерции этого сечения относительно осей y и x :

$$J_y = \int_F x^2 dF ; \quad J_x = \int_F y^2 dF .$$

Сумма этих моментов инерции

$$J_y + J_x = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF = \int_F (y^2 + x^2) dF,$$

но

$$y^2 + x^2 = \rho^2$$

и, следовательно,

$$J_y + J_x = \int_F \rho^2 dF = J_\rho,$$

т.е.

$$J_y + J_x = J_\rho. \quad (5.10)$$

Сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции этого сечения относительно точки пересечения указанных осей.

Центробежные моменты инерции могут быть положительными или равными нулю. Центробежный момент инерции сечения относительно осей, из которых одна или обе совпадают с его осями симметрии, равен нулю. Осевой момент инерции сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме осевых моментов инерции составляющих его частей относительно этой же оси. Аналогично, центробежный момент инерции сложного сечения относительно любых двух взаимно перпендикулярных осей равен сумме центробежных моментов инерции составляющих его частей относительно этих же осей. Также и полярный момент инерции сложного сечения относительно некоторой точки равен сумме полярных моментов инерции составляющих его частей относительно той же точки. Следует иметь в виду, что нельзя суммировать моменты инерции, вычисленные относительно различных осей и точек.

5.3 ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ

Часто при решении практических задач необходимо определять моменты инерции сечения относительно осей, различным образом ориентированных в его плоскости. При этом удобно использовать уже известные значения моментов инерции всего сечения (или отдельных составляющих его частей) относительно других осей, приводимые в технической литературе, специальных справочниках и таблицах, а также подсчитываемые по имеющимся формулам. Поэтому очень важно установить зависимости между моментами инерции одного и того же сечения относительно разных осей.

В самом общем случае переход от любой *старой* к любой *новой* системе координат может рассматриваться как два последовательных преобразования старой системы координат:

- 1) путем параллельного переноса осей координат в новое положение;
- 2) путем поворота их относительно нового начала координат.

Рассмотрим первое из этих преобразований, т.е. параллельный перенос координатных осей.

Предположим, что моменты инерции J_y , J_x и J_{yz} данного сечения относительно старых осей y и x (рис. 5.4) известны.

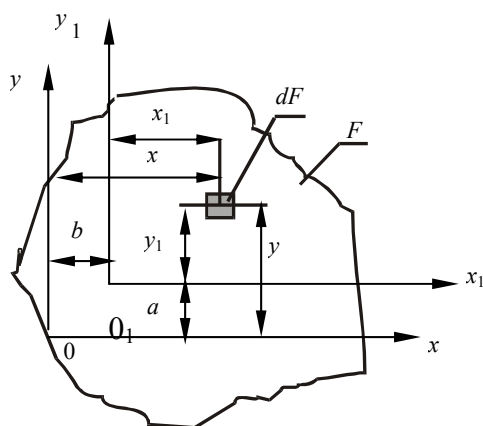


Рис. 5.4

Возьмем новую систему координат y_1, x_1 , оси которой параллельны прежним. Обозначим a и b координаты точки O_1 (т.е. нового начала координат) в старой системе координат y, x . Рассмотрим элементарную площадку dF . Координаты ее в старой системе координат равны y и x . В новой системе они равны $y_1 = y - a$ и $x_1 = x - b$.

Подставим эти значения координат в выражение осевого момента инерции относительно оси z_1 :

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y - a)^2 dF = \int_F y^2 dF - 2a \int_F y dF + a^2 \int_F dF.$$

В полученном выражении $\int_F y^2 dF$ – момент инерции J_x , $\int_F y dF$ – статический момент S_x сечения относительно оси x , $\int_F dF$ равен площади F сечения. Следовательно,

$$J_{x_1} = J_x - 2aS_x + a^2F. \quad (5.11)$$

Если ось z проходит через центр тяжести сечения, то статический момент $S_z = 0$ и

$$J_{x_1} = J_x + a^2F. \quad (5.12)$$

Из формулы (5.12) видно, что момент инерции относительно любой оси, не проходящей через центр тяжести, больше момента инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести, на величину a^2F , которая всегда положительна. Следовательно, *из всех моментов инерции относительно параллельных осей осевой момент инерции имеет наименьшее значение относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения.*

Момент инерции относительно оси y [по аналогии с формулой (5.11)]

$$J_{y_1} = J_y - 2bS_y + b^2F. \quad (5.13)$$

В частном случае, когда ось y проходит через центр тяжести сечения,

$$J_{y_1} = J_y + b^2F. \quad (5.14)$$

Формулы (5.12) и (5.14) широко используются при вычислении осевых моментов инерции сложных (составных) сечений.

Подставим теперь значения $y_1 = y - a$ и $x_1 = x - b$ в выражение центробежного момента инерции относительно осей y_1 и x_1 :

$$\begin{aligned} J_{y_1x_1} &= \int_F y_1x_1 dF = \int_F (y - a)(x - b) dF = \\ &= \int_F yx dF - b \int_F y dF - a \int_F x dF + ab \int_F dF. \end{aligned}$$

В полученном выражении

$$\int_F yx dF = J_{yx}; \quad \int_F y dF = S_x; \quad \int_F x dF = S_y \quad \text{и} \quad \int_F dF = F.$$

Следовательно,

$$J_{y_1x_1} = J_{yx} - aS_y - bS_x + abF. \quad (5.15)$$

В частном случае, когда начало старой системы координат yz находится в центре тяжести сечения,

$$S_y = S_x = 0$$

и

$$J_{y_1x_1} = J_{yx} + abF. \quad (5.16)$$

Если сечение симметрично и одна из старых осей (или обе) совпадают с осью симметрии, то $J_{yz} = 0$ и выражение (5.16) принимает вид

$$J_{y_1x_1} = abF. \quad (5.17)$$

5.4 ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Предположим, что известны моменты инерции J_y , J_x и J_{yx} сечения относительно осей y и x старой системы координат с началом в точке 0 (рис. 5.5).

Возьмем новую систему координат y_1x_1 , с началом в той же точке 0, но повернутую на некоторый угол α относительно старой. Будем считать угол α положительным, если старую систему координат для перехода, к новой надо повернуть на этот угол против часовой стрелки.

Рассмотрим элементарную площадку dF с координатами y и x в старой системе координат. Определим координаты y_1 и x_1 этой площадки в новой системе координат.

Из рис. 5.5 следует:

$$\begin{aligned} y_1 &= BE = CE - CB = CE - DA = y \cos \alpha - x \sin \alpha; \\ x_1 &= OA + AB = OA + DC = y \sin \alpha + x \cos \alpha. \end{aligned}$$

Подставим эти, значения координат в выражение осевого момента инерции относительно оси x_1 :

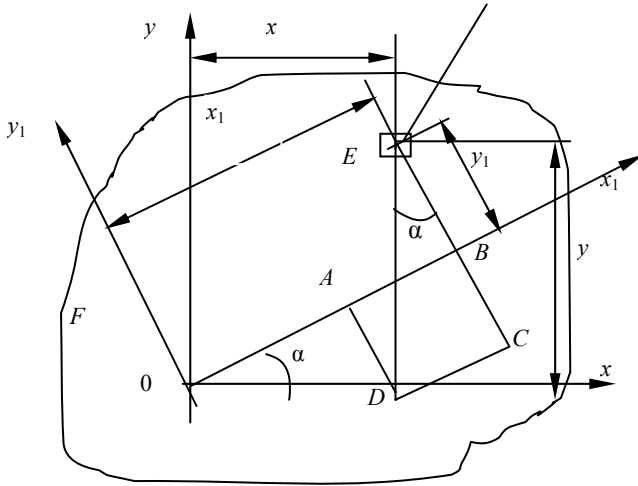


Рис. 5.5

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \int_F y_1^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF = \\ &= \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF + \sin^2 \alpha \int_F x^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_F yx dF \end{aligned}$$

или

$$J_{x_1} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{yx} \sin 2\alpha, \quad (5.18)$$

так как

$$\int_F y^2 dF = J_x; \quad \int_F x^2 dF = J_y; \quad \int_F yx dF = J_{yx}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} J_{y_1} &= \int_F x_1^2 dF = \int_F (y \sin \alpha + x \cos \alpha)^2 dF = \\ &= \cos^2 \alpha \int_F x^2 dF + \sin^2 \alpha \int_F y^2 dF + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_F yx dF \end{aligned}$$

или

$$J_{y_1} = J_y \cos^2 \alpha + J_x \sin^2 \alpha + J_{yx} \sin 2\alpha. \quad (5.19)$$

Если сложить величины моментов инерции относительно осей y_1 и x_1 , то

$$J_{y_1} + J_{x_1} = J_y + J_x. \quad (5.20)$$

Следовательно, сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей сохраняет постоянную величину при повороте осей на любой угол. Этот результат объясняется также тем, что сумма моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно начала координат [см. формулу (5.10)]; величина же полярного

момента инерции не изменяется, если начало координат остается на месте, а координатные оси поворачиваются.

Определим теперь величину центробежного момента инерции относительно осей y_1 и x_1 :

$$\begin{aligned} J_{y_1 x_1} &= \int_F y_1 x_1 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)(y \sin \alpha + x \cos \alpha) dF = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \left(\int_F y^2 dF - \int_F x^2 dF \right) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_F y x dF, \end{aligned}$$

или

$$J_{y_1 x_1} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{yx} \cos 2\alpha. \quad (5.21)$$

5.5 ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ. ГЛАВНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ

Формулы (5.18), (5.19) и (5.21) позволяют установить, как изменяются величины моментов инерции сечения при повороте осей на произвольный угол α . Для некоторых значений угла α величины осевых моментов инерции достигают максимума и минимума. Экстремальные (максимальные и минимальные) значения осевых моментов инерции сечения называются *главными моментами инерции*. Оси, относительно которых осевые моменты инерции имеют экстремальные значения, называются *главными осями инерции*.

Из формулы (5.20) следует, что если осевой момент инерции относительно некоторой оси является максимальным (т.е. эта ось главная), то осевой момент инерции относительно перпендикулярной к ней оси является минимальным (т.е. эта ось также главная), так как сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей не зависит от угла α .

Таким образом, *главные оси инерции взаимно перпендикулярны*.

Для нахождения главных моментов инерции и положения главных осей инерции определим первую производную по углу α от момента инерции J_x [см. формулу (5.18) и рис. 5.5]:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{x_1}}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} (J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{yx} \sin 2\alpha) = \\ &= -J_x 2 \sin \alpha \cos \alpha + J_y 2 \sin \alpha \cos \alpha - J_{yx} 2 \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Приравниваем этот результат нулю:

$$\left(\frac{dJ_{x_1}}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -(J_x - J_y) \sin 2\alpha_0 - 2J_{yx} \cos 2\alpha_0 = 0, \quad (5.22)$$

где α_0 – угол, на который надо повернуть координатные оси y и x , чтобы они совпали с главными осями.

Сравнивая выражения (5.22) и (5.21), устанавливаем, что

$$\left(\frac{dJ_{x_1}}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = (-2J_{y_1 x_1})_{\alpha=\alpha_0} = 0,$$

т.е.

$$(J_{y_1 x_1})_{\alpha=\alpha_0} = 0.$$

Следовательно, *относительно главных осей инерции центробежный момент инерции равен нулю*. Поэтому главными осями инерции можно называть оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

Как уже известно, центробежный момент инерции сечения относительно осей, из которых одна или обе совпадают с осями симметрии, равен нулю.

Следовательно, *взаимно перпендикулярные оси, из которых одна или обе совпадают с осями симметрии сечения, всегда являются главными осями инерции*. Это правило позволяет во многих случаях непосредственно (без расчета) устанавливать положение главных осей.

Решим уравнение (5.22) относительно угла α_0 :

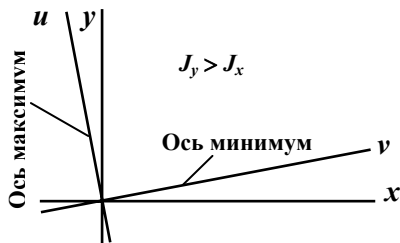
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{yx}}{J_x - J_y}. \quad (5.23)$$

Уравнению (5.23) в каждом конкретном случае удовлетворяет ряд значений α_0 . Из них выбирается одно любое. Если оно положительно, то для определения по нему положения одной из главных осей инерции ось x следует повернуть на угол α_0 против вращения часовой стрелки, а если отрицательное – то по вращению часовой стрелки; другая главная ось инерции перпендикулярна к первой. Одна из главных осей инерции является осью максимум (относительно нее осевой момент инерции сечения максимален), а другая – осью минимум (относительно нее осевой момент инерции сечения минимален).

Ось максимум всегда составляет меньший угол с той из осей (y или x), относительно которой осевой момент инерции имеет большее значение. Это обстоятельство позволяет легко устанавливать, какая из главных осей инерции является осью максимум, а какая – осью минимум. Так, например, если $J_y > J_x$, а главные оси инерции u и v расположены, как это показано на рис. 5.6, то ось u является осью максимум (так как образует с осью y меньший угол, чем с осью x), а ось v – осью минимум.

При решении конкретной числовой задачи для определения главных моментов инерции J_{\max} и J_{\min} можно выбранное значение угла α_0 и значение $\alpha'_0 = \alpha_0 + 90^\circ$ подставить в формулу (5.18) или (5.19).

Рис. 5.6



Подставив эти выражения в формулу (5.18), после простых преобразований получим

$$J_{\max}^{\min} = \frac{J_y + J_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{yx}^2}. \quad (5.24)$$

Главные оси инерции можно провести через любую точку, взятую в плоскости сечения. Однако практическое значение для расчетов элементов конструкции имеют лишь главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, т.е. *главные центральные оси инерции*. Моменты инерции относительно этих осей (*главные центральные моменты инерции*) в дальнейшем будем обозначать J_{\max} и J_{\min} .

Рассмотрим несколько частных случаев.

1 Если $J_y = J_x$ и $J_{yx} = 0$, то формула (5.21) дает значение центробежного момента инерции относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей, равное нулю, и, следовательно, любые оси, полученные путем поворота системы координат uz , являются главными осями инерции (также как оси y и x). В этом случае

$$J_y = J_x = J_{\max} = J_{\min} = \text{const}.$$

2 Для фигур, имеющих более двух осей симметрии, осевые моменты инерции относительно всех центральных осей равны между собой. Действительно, направим одну из осей (y или x) по одной из осей симметрии, а другую – перпендикулярно к ней. Для этих осей $J_{yx} = 0$. Если фигура имеет более двух осей симметрии, то какая-либо из них составляет острый угол с осью x . Обозначим такую ось x_1 , а перпендикулярную к ней ось y_1 .

Центробежный момент инерции $J_{y_1x_1} = 0$, так как ось x_1 является осью симметрии. По формуле же (5.21):

$$J_{y_1x_1} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{yx} \cos 2\alpha = 0,$$

но так как $J_{yx} = 0$, то $J_x = J_y$.

Тогда в соответствии с рассмотренным выше случаем момент инерции относительно любой оси имеет одно и то же значение и любые оси, полученные путем поворота системы координат ux , являются главными осями инерции. Отсюда следует, что для всех правильных фигур (равностороннего треуголь-

ника, квадрата, круга и т.д.) моменты инерции относительно всех центральных осей равны между собой и все эти оси являются главными осями инерции.

3 Если $J_x = J_y$ и $J_{yx} \neq 0$ то по формуле (5.23)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \infty; \quad 2\alpha_0 = 90^\circ; \quad \alpha_0 = 45^\circ.$$

В этом случае главные оси инерции наклонены к исходным осям y и x под углами 45° .

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

- 1 Что называется статическим моментом сечения относительно оси?
- 2 Что называется осевым, полярным и центробежным моментами инерции сечения?
- 3 В каких единицах выражается статический момент сечения?
- 4 Какая зависимость существует между статическими моментами относительно двух параллельных осей?
- 5 Чему равен статический момент относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения?
- 6 Как определяются координаты центра тяжести простого и сложного сечения?
- 7 В каких единицах выражаются моменты инерции сечения?
- 8 Чему равна сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
- 9 Изменится ли сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей при повороте этих осей?
- 10 Что представляют собой главные и главные центральные моменты инерции?
- 11 Какие оси называются главными осями инерции?
- 12 Чему равен центробежный момент инерции относительно главных осей инерции?

6 КРУЧЕНИЕ

6.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. КРУТЯЩИЙ МОМЕНТ

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент M_k (крутящий момент можно также обозначить M_z , так как это момент внутренних сил относительно продольной оси бруса – оси z).

Кручение возникает в валах, винтовых пружинах и других элементах конструкций. Кручение прямого бруса происходит при нагружении его внешними скручивающими моментами (парами сил), плоскости действия которых перпендикулярны к его продольной оси. Эти моменты обозначим m . Кручение криволинейных брусьев может возникать и при других видах нагружения.

Если прямой брус находится в состоянии покоя или равномерного вращения, то алгебраическая сумма всех внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу, равна нулю.

При расчете валов в ряде случаев величины внешних скручивающих моментов определяются по величине потребляемой мощности и по скорости вращения вала. Если вал делает в минуту n оборотов, то угол поворота вала за одну секунду, выраженный в радианах, равен $(n/60)2\pi$, или $\pi n/30$. Работа скручивающего момента m за одну секунду, т.е. мощность N , передаваемая валом, равна произведению величины момента на угол поворота вала (в радианах) за одну секунду:

$$N = m \frac{\pi n}{30},$$

откуда

$$m = \frac{30N}{\pi n} \text{ кгс}\cdot\text{м},$$

где мощность N выражена в кгс·м/с.

Если мощность N задана в лошадиных силах (л.с.), то

$$m = \frac{30 \cdot 75N}{\pi n} = 716,2 \frac{N}{n} \text{ кгс}\cdot\text{м} \quad (6.1)$$

Если мощность N задана в киловаттах, то, учитывая, что 1 л.с. равна 0,736 кВт, получаем

$$m = 973,6 \frac{N}{n} \text{ кгс}\cdot\text{м}. \quad (6.2)$$

Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях брусьев, определяются по внешним скручивающим моментам с помощью метода сечений (см. раз.1.2). В простейшем случае, когда брус нагружен только двумя внешними моментами (эти моменты из условия равновесия бруса $\sum M_z = 0$ всегда равны друг другу по величине и направлены в противоположные стороны), как показано на рис. 6.1, а, крутящий момент M_k в любом поперечном сечении бруса (на участке между внешними моментами) по величине равен внешнему моменту $m_1 = m_2$.

В более сложных случаях, когда к брусу приложено несколько внешних моментов, крутящие моменты в поперечных сечениях различных участков бруса неодинаковы.

На основании метода сечений *крутящий момент в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения.*

При расчетах на прочность и жесткость знак крутящего момента не имеет никакого значения, но для удобства построения эпюр M_z примем следующее правило знаков: *крутящий момент*

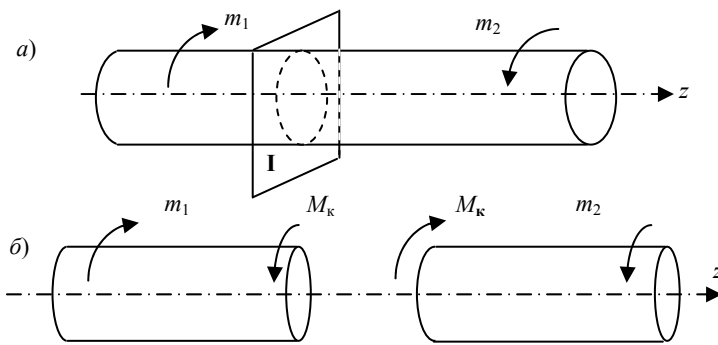


Рис. 6.1

считается положительным, если при взгляде в торец отсеченной части бруса действующий на него момент представляется направленным по движению часовой стрелки (рис. 6.2).

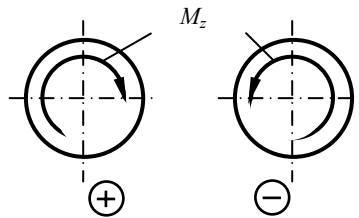


Рис. 6.2

В частности, в сечении I бруса (рис. 6.1, а) крутящий момент отрицателен (рис. 6.1, б) и численно равен внешнему моменту m_1 (или m_2).

На рис. 6.3 изображен брус, к которому приложены четыре внешних скручивающих момента. Крутящий момент $M_{1к}$ в сечении 1-1 численно равен m_1 и, согласно принятому правилу знаков, отрицателен. Крутящий момент в сечении 2-2 численно равен разности моментов m_1 и m_2 , т.е. $|M_{2к}| = |m_1 - m_2|$, а его знак зависит от соотношения этих моментов: если $m_2 > m_1$, то момент $M_{2к}$ положителен, а если $m_2 < m_1$, то отрицателен.

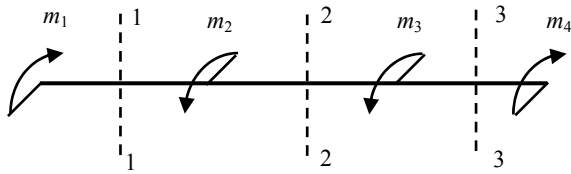


Рис. 6.3

Абсолютная величина крутящего момента в сечении 3-3 бруса, если его вычислять по внешним моментам, приложенным слева от рассматриваемого сечения, определится из выражения

$$|M_{3к}| = |m_1 - m_2 - m_3|.$$

В данном случае крутящий момент $M_{3к}$ удобнее определять по внешним нагрузкам, приложенным справа от сечения 3-3, так как с этой стороны приложен лишь внешний момент m_4 (вместо трех внешних моментов, приложенных слева от сечения). Момент $M_{3к}$, действующий на правую отсеченную часть бруса, направлен противоположно моменту m_4 , что следует из условия равновесия этой части; следовательно, по принятому правилу знаков он положителен.

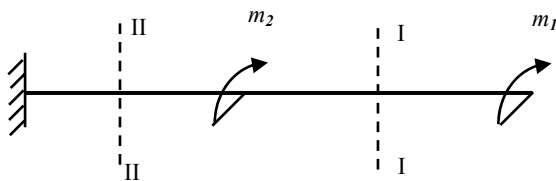


Рис. 6.4

Для брусьев, имеющих один неподвижно закрепленный (заделанный) и один свободный конец, крутящие моменты в их поперечных сечениях удобно выражать через внешние моменты, приложенные с той стороны от рассматриваемого сечения, с которой расположен свободный конец. Это позволяет определять крутящие моменты, не вычисляя реактивного момента, возникающего в заделке. Так, например, крутящие моменты $M_{Iк}$ и $M_{IIк}$ в сечениях I-I и II-II бруса, изображенного на рис. 6.4, можно определить без вычисления реактивного момента левой заделки:

$$M_{Iк} = m_1; \quad M_{IIк} = m_1 + m_2$$

Оба момента $M_{Iк}$ и $M_{IIк}$ положительны.

Изменение крутящих моментов по длине бруса удобно изображать графически – с помощью так называемой эпюры крутящих моментов. На рис. 6.5, а показана такая эпюра для бруса, изображенного на рис. 6.1, а. На рис. 6.5, в показана эпюра крутящих моментов для бруса, изображенного на рис. 6.5, б.

Каждая ордината эпюры крутящих моментов в принятом масштабе равна величине крутящего момента, действующего в том поперечном сечении бруса, которому соответствует эта ордината. В сечении, в котором к брусу приложен внешний скручивающий момент, ордината эпюры изменяется скачкообразно на величину, равную значению этого момента (рис. 6.5, в).

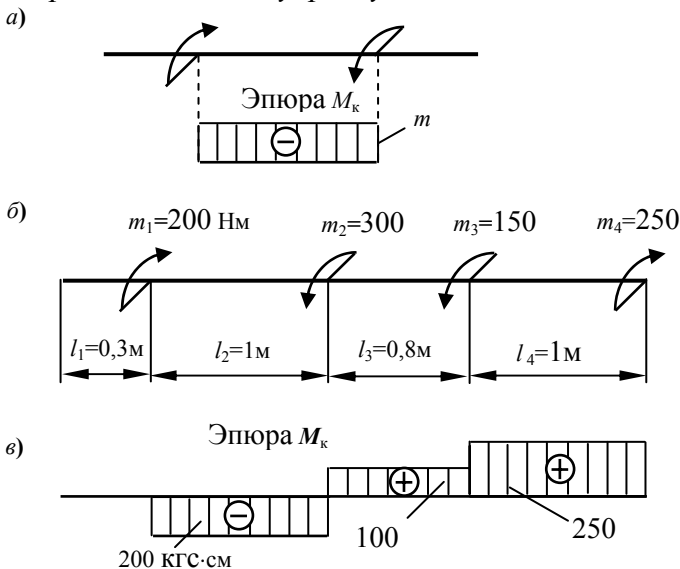


Рис. 6.5

Следует учитывать, что наибольший внешний скручивающий момент, приложенный к брусу, не всегда равен наибольшему крутящему моменту, по которому ведется расчет бруса на прочность и жесткость. Так, например, на рис. 6.5, б наибольший внешний момент равен 300 кгс·см, а наибольший (по абсолютной величине) крутящий момент (внутренний) равен 250 кгс·см (рис. 6.5, в).

6.2 КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим прямой брус с поперечным сечением в виде круга, нагруженный на концах скручивающими моментами m (рис. 6.6). Левый из моментов представляет собой реакцию заделки.

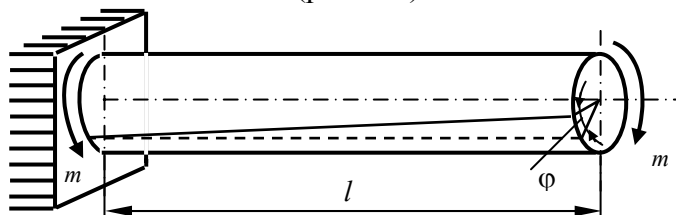


Рис. 6.6

В результате действия этих моментов крайние сечения бруса повернутся друг относительно друга вокруг его продольной оси на некоторый угол φ , который представляет собой полный угол закручивания на участке длиной l . Отношение полного угла закручивания $d\varphi$ на элементарном участке бруса к длине dz называется относительным углом закручивания, который обозначается

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dz}. \quad (6.3)$$

Если размеры поперечных сечений прямого бруса и крутящие моменты, действующие в них, на некотором участке бруса постоянны, то значение ϑ также постоянно и равно отношению полного угла закручивания на этом участке к его длине l , т.е.

$$\vartheta = \frac{\varphi}{l}.$$

Угол φ измеряется в радианах, а относительный угол закручивания ϑ выражается в рад/см, рад/м и т.п.

Теория кручения брусков, имеющих круглое сплошное или кольцевое поперечное сечение, основана на следующих положениях.

1 Поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к ней и после деформации (гипотеза плоских сечений); они лишь поворачиваются на некоторые углы вокруг этой оси.

2 Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину.

3 Расстояния (вдоль оси бруса) между поперечными сечениями не изменяются.

Формулы, выведенные на основе этих положений, совпадают с формулами, полученными точными методами теории упругости, и подтверждаются экспериментально.

Выделим двумя поперечными сечениями элемент скручиваемого бруса длиной dz (рис. 6.7, а). В результате деформации одно сечение повернется относительно другого на угол $d\varphi = \vartheta dz$. Будем считать левое сечение элемента dz неподвижно закрепленным. Тогда величина $d\varphi$ представит собой угол поворота правого торцевого сечения элемента вокруг продольной оси бруса.

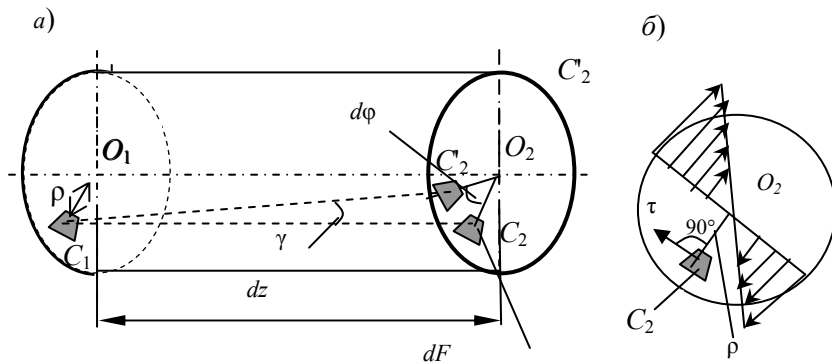


Рис. 6.7

Продольное волокно C_1C_2 (рис. 6.7, а), находящееся на расстоянии ρ от оси бруса, можно рассматривать как параллелепипед высотой dz с бесконечно малыми основаниями C_1 и C_2 . Этот параллелепипед в результате деформации перекосится и займет положение C_1C_2' . Основание C_2 при этом сместится в своей плоскости, повернувшись вместе с правым торцевым сечением рассматриваемого элемента на угол $d\varphi$ вокруг продольной оси бруса.

Величина C_1C_2' его смещения равна $\rho d\varphi = \rho \vartheta dz$ и представляет собой абсолютный сдвиг основания C_2 параллелепипеда относительно основания C_1 в направлении, перпендикулярном к радиусу ρ . Отношение этой величины к высоте параллелепипеда dz является относительным сдвигом γ (см. рис. 6.7, а):

$$\gamma = \frac{C_1C_2'}{dz} = \frac{\vartheta \rho dz}{dz} = \vartheta \rho.$$

По основанию C_2 параллелепипеда в направлении сдвига, т.е. перпендикулярно к радиусу ρ , действуют касательные напряжения τ (рис. 6.7, б). Величина их, на основании закона Гука при сдвиге, равна

$$\tau = \gamma G = \vartheta \rho G. \quad (6.4)$$

Итак, в поперечных сечениях бруса при кручении возникают касательные напряжения, направление которых в каждой точке перпендикулярно к радиусу, соединяющему эту точку с центром сечения, а величина прямо пропорциональна расстоянию точки от центра. В центре (при $\rho = 0$) касательные напряжения равны нулю; в точках же, расположенных в непосредственной близости от внешней поверхности бруса, они наибольшие. График изменения величин τ вдоль какого-либо радиуса (т.е. эпюра касательных напряжений) изображается прямой линией (см. рис. 6.7, б).

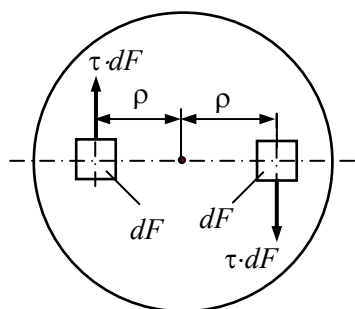


Рис. 6.8

Рассмотрим две элементарные площадки dF поперечного сечения бруса, расположенные на общем диаметре на равных расстояниях от центра сечения (рис. 6.8). Силы, действующие на каждую из этих площадок, равны τdF , расположены в плоскости поперечного сечения бруса и направлены перпендикулярно к диаметру в противоположные стороны. Они образуют элементарную пару сил. Таких пар в поперечном сечении возникает бесчисленное множество. Все они приводятся к одному моменту, действующему в плоскости поперечного сечения и представляющему собой крутящий момент M_k .

Установим зависимость между крутящим моментом и касательными напряжениями, возникающими в поперечном сечении бруса. Момент элементарной силы τdF относительно центра сечения (или, что то же самое, относительно продольной оси бруса) равен произведению этой силы на расстояние ρ от площадки dF до центра сечения:

$$dM_k = \tau dF \rho$$

или на основании (6.4)

$$dM_k = \vartheta \rho^2 G dF,$$

откуда

$$M_k = \vartheta G \int_F \rho^2 dF.$$

Здесь $\int_F \rho^2 dF = J_\rho$ – полярный момент инерции поперечного сечения бруса относительно его центра.

Следовательно,

$$M_k = \vartheta G J_\rho, \quad (6.5)$$

откуда

$$\vartheta = \frac{M_k}{G J_\rho}. \quad (6.6)$$

Подставив полученное значение ϑ в формулу (6.4), найдем касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения скручиваемого круглого бруса:

$$\tau = \frac{M_k}{J_\rho} \rho. \quad (6.7)$$

Наибольшее касательное напряжение, возникающее в непосредственной близости к наружной боковой поверхности бруса, т.е. в точках контура его поперечного сечения, найдем, подставив в выражение (6.7) значение $\rho = d/2$:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{J_\rho} \frac{d}{2} = \frac{M_k}{W_\rho}. \quad (6.8)$$

Здесь W_ρ – полярный момент сопротивления поперечного сечения бруса:

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{d/2} = \frac{2J_\rho}{d}. \quad (6.9)$$

Полярным моментом сопротивления сечения называется отношение полярного момента инерции к расстоянию от центра тяжести сечения до наиболее удаленной его точки. Полярный момент сопротивления выражается в см^3 , мм^3 и т.п.

Полярный момент инерции круглого поперечного сечения определяется по формуле (5.10):

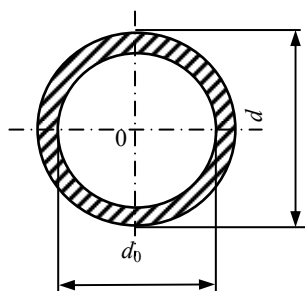
$$J_y + J_x = J_\rho;$$

$$J_\rho = 2J_x = \frac{2\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4$$

и, следовательно, полярный момент сопротивления равен

$$W = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (6.10)$$

Формулы (6.5) – (6.9), выведенные для расчета на кручение прямых брусьев круглого сплошного сечения, применимы и в случае, если поперечное сечение имеет форму кольца (рис. 6.9), так как характер деформации при кручении для обеих указанных форм поперечных сечений одинаков.



Полярный момент инерции кольцевого сечения определяется по формуле

$$J_p = \frac{\pi(d^4 - d_0^4)}{32} = \frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4) \approx 0,1d^4(1 - c^4),$$

где $c = \frac{d_0}{d}$ (рис. 6.9).

Полярный момент сопротивления кольцевого сечения определяется по формуле

$$W_p = \frac{J_p}{d/2} = \frac{\pi(d^4 - d_0^4)}{16d} = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4) \approx 0,2d^3(1 - c^4). \quad (6.11)$$

Отметим, что полярный момент сопротивления кольцевого сечения не равен разности полярных моментов сопротивления, подсчитанных для двух сплошных сечений: одного с диаметром, равным наружному диаметру кольца, а другого – внутреннему.

При одинаковой площади поперечного сечения (т.е. при одинаковом расходе материала) полярные момент инерции и момент сопротивления для кольцевого сечения, которое не имеет площадок, близко расположенных к центру, значительно больше, чем для сплошного круглого сечения. Поэтому брус кольцевого сечения при кручении является более экономичным, чем брус сплошного круглого сечения, т.е. требует меньшего расхода материала. Но при проектировании валов (брусев, работающих на кручение) следует учитывать, что в случае кольцевого сечения их изготовление сложнее, а значит, и дороже.

Полный угол закручивания стержня на участке длиной l на основании формул (6.3) и (6.6)

$$\varphi = \int_l \vartheta dx = \int_l \frac{M_k}{GJ_p} dx. \quad (6.12)$$

Угол φ представляет собой взаимный угол поворота конечных сечений участка.

Если крутящий момент во всех поперечных сечениях бруса имеет одно и то же значение, а размеры сечения постоянны по всей его длине, то полный угол закручивания определяется из выражения

$$\varphi = \vartheta l = \frac{M_k l}{GJ_p}. \quad (6.13)$$

Из формул (6.7) и (6.8) видно, что значения напряжений при кручении не зависят от физических свойств материала бруса, так как величина G в формулы напряжений не входит. Значения же деформаций зависят от свойств материала.

Произведение GJ_p называется жесткостью сечения при кручении. Она выражается в кгс·мм², кгс·см² и т.д. Из формул (6.6), (6.12) и (6.13) следует, что величины относительных и полных углов закручивания бруса обратно пропорциональны жесткости его поперечных сечений.

6.3 ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Как уже известно (п. 6.2), в поперечных сечениях бруса при кручении возникают касательные напряжения, которые в каждой точке сечения перпендикулярны к радиусу, соединяющему эту точку с осью бруса; такие же напряжения возникают и в радиальных плоскостях бруса, т.е. в плоскостях, проходящих через его продольную ось (рис. 6. 10).

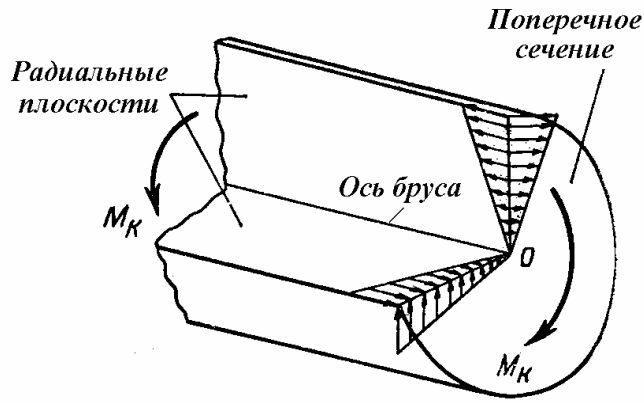


Рис. 6.10

Выделим из бруса элементарный параллелепипед, основание которого $abcd$ расположено на поверхности цилиндра радиусом ρ , а боковые грани bc и ad расположены в поперечных сечениях бруса (рис. 6.11). По боковым граням этого параллелепипеда действуют только касательные напряжения, показанные на рис. 6.11. По основаниям параллелепипеда ни нормальные, ни касательные напряжения не действуют. Следовательно, параллелепипед находится в плоском напряженном состоянии чистого сдвига. Боковые грани параллелепипеда являются площадками чистого сдвига, и, следовательно, действующие на них касательные напряжения являются экстремальными.

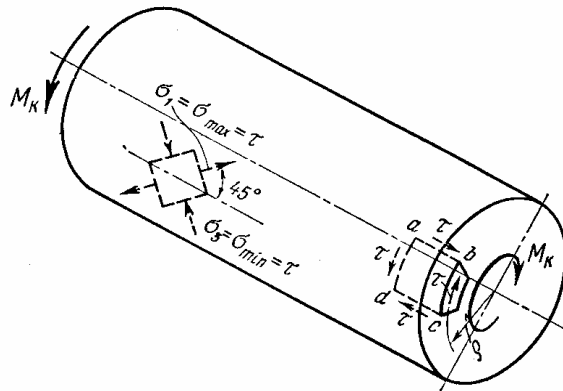


Рис. 6.11

Для определения напряжений по любым площадкам, перпендикулярным к основанию $abcd$ параллелепипеда, можно использовать формулы плоского напряженного состояния [формулы (3.6) и (3.7)]. Главные напряжения σ_1 и σ_2 при чистом сдвиге, как известно, равны по величине экстремальным касательным напряжениям и, следовательно, равны касательным напряжениям по боковым граням параллелепипеда, расположенным в поперечных сечениях бруса. Главные площадки наклонены под углом 45° к площадкам чистого сдвига (см. рис. 6.11).

Наибольшие по величине экстремальные касательные и главные напряжения действуют в окрестностях точек, расположенных в непосредственной близости от внешней поверхности бруса. Эти напряжения можно определить по формуле

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \tau_{\max} = -\tau_{\min} = M_K / W_\rho. \quad (6.14)$$

Экспериментальные данные свидетельствуют о правильности сделанных выводов. Так, например, скручиваемый деревянный стержень разрушается, скалываясь вдоль волокон, что свидетельствует о наличии касательных напряжений в его продольных (радиальных) плоскостях. Скручиваемый чугунный стержень разрушается от действия главных растягивающих напряжений по винтовой поверхности, наклоненной к оси стержня под углом 45° . Этот результат согласуется с указанным выше положением главных площадок.

Определим теперь потенциальную энергию U деформации при кручении. Рассмотрим брус длиной l постоянной жесткости GJ_ρ , изображенный на рис. 6.6; во всех поперечных сечениях бруса действует

постоянный крутящий момент $M_k = m$. Угол поворота правого конца бруса равен полному углу его закручивания [см. формулу (6.13)]:

$$\varphi = \frac{M_k l}{G J_p}.$$

Работа внешнего статически нарастающего момента M равна половине произведения конечного значения этого момента на угол поворота свободного конца бруса [см. (2.12)], т.е.

$$A = \frac{M\varphi}{2} = \frac{M_k \varphi}{2} = \frac{M_k^2 l}{2G J_p}.$$

Эта формула верна при любом характере закрепления бруса.

На основании закона сохранения энергии $U = A$ и, следовательно,

$$U = \frac{M_k^2 l}{2G J_p}. \quad (6.15)$$

В случае бруса переменной жесткости или переменного значения момента M_k по длине бруса потенциальная энергия деформации

$$U = \sum \int_l \left[\frac{M_k^2 dx}{2G J_p} \right]. \quad (6.16)$$

6.4 РАСЧЕТ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

Наибольшие касательные напряжения, возникающие в скручиваемом брус, не должны превышать соответствующих допускаемых напряжений:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (6.17)$$

Это требование называется условием прочности. Допускаемое напряжение при кручении $[\tau]$ (так же как и при других видах деформаций) зависит от свойств материала рассчитываемого бруса и от принятого коэффициента запаса прочности:

$$[\tau] = \tau_{\text{пред}} / [n]. \quad (6.18)$$

В случае пластичного материала в качестве опасного (предельного) напряжения $\tau_{\text{пред}}$ принимается τ_r – предел текучести при сдвиге, а в случае хрупкого материала – τ_b – предел прочности.

В связи с тем, что механические испытания материалов на кручение производятся значительно реже, чем на растяжение, не всегда имеются экспериментально полученные данные об опасных (предельных) напряжениях при кручении. Поэтому в большинстве случаев допускаемые напряжения на кручение принимают в зависимости от допускаемых напряжений на растяжение для того же материала. Например, для стали $[\tau] \approx 0,5[\sigma]$; для чугуна $[\tau] \approx [\sigma_p]$, где $[\sigma_p]$ – допускаемое напряжение при растяжении чугуна.

Следует стремиться к тому, чтобы материал бруса был по возможности полностью использован, т.е. чтобы наибольшие расчетные напряжения, возникающие в брус, равнялись допускаемым напряжениям.

Величина τ_{\max} в условии прочности (6.17) представляет собой значение наибольшего касательного напряжения в опасном сечении бруса в непосредственной близости к его внешней поверхности. Опасным сечением бруса является сечение, для которого абсолютная величина отношения M_k/W_p имеет наибольшее значение. Для бруса постоянного сечения наиболее опасным является сечение, в котором крутящий момент имеет наибольшее абсолютное значение.

При расчете скручиваемых брусев на прочность, как и при расчете других конструкций, возможны следующие три вида задач, различающихся формой использования условия прочности (6.17): а) проверка напряжений (проверочный расчет); б) подбор сечения (проектный расчет); в) определение допускаемой нагрузки.

При проверке напряжений по заданным нагрузке и размерам бруса определяются наибольшие возникающие в нем касательные напряжения. При этом во многих случаях предварительно следует построить эпюру M_k , наличие которой облегчает определение опасного сечения бруса. Наибольшие касательные напряжения в опасном сечении затем сравниваются с допускаемыми напряжениями. Если

при этом условие (6.17) не удовлетворяется, то требуется изменить размеры сечения бруса или уменьшить действующую на него нагрузку, или применить материал более высокой прочности. Конечно, незначительное (порядка 5 %) превышение максимальных расчетных напряжений над допускаемыми не опасно.

При подборе сечения по заданной нагрузке определяются крутящие моменты в поперечных сечениях бруса (обычно строится эпюра M_k), а затем по формуле

$$W_p \geq \frac{|M_k|_{\max}}{[\tau]}, \quad (6.19)$$

являющейся следствием формулы (6.8) и условия (6.17), определяется необходимый полярный момент сопротивления поперечного сечения бруса для каждого его участка, на котором сечение принимается постоянным. Здесь $|M_k|_{\max}$ – величина наибольшего (по абсолютному значению) крутящего момента в пределах каждого такого участка.

По величине полярного момента сопротивления с помощью формулы (6.10) определяется диаметр сплошного круглого или с помощью формулы (6.11) – наружный и внутренний диаметры кольцевого сечения бруса.

При определении допускаемой нагрузки с помощью формулы (6.8) по известному допускаемому напряжению $[\tau]$ и полярному моменту сопротивления W_p определяется величина допускаемого крутящего момента $|M_k|_{\max}$, затем устанавливаются величины допускаемых внешних нагрузок, от действия которых возникающий в сечениях бруса наибольший крутящий момент равняется допускаемому моменту.

Расчет вала на прочность не исключает возможности возникновения деформаций, недопустимых при его эксплуатации. Большие углы закручивания вала особенно опасны при передаче им переменного во времени момента, так как при этом возникают опасные для его прочности крутильные колебания. В технологическом оборудовании, например металлорежущих станках, недостаточная жесткость на кручение некоторых элементов конструкции (в частности, ходовых винтов токарных станков) приводит к нарушению точности обработки изготавливаемых на этом станке деталей. Поэтому в необходимых случаях валы рассчитывают не только на прочность, но и на жесткость.

Условие жесткости бруса при кручении имеет вид

$$\vartheta_{\max} \leq [\vartheta], \quad (6.20)$$

где ϑ_{\max} – наибольший относительный угол закручивания бруса, определяемый по формуле (6.6); $[\vartheta]$ – допускаемый относительный угол закручивания, принимаемый для разных конструкций и разных видов нагрузки равным от 0,15 до 2° на 1 м длины стержня (от 0,0015 до 0,02° на 1 см длины или от 0,000026 до 0,00035 рад на 1 см длины вала).

6.5 КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА НЕКРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Задачи определения напряжений и деформаций при кручении брусьев некруглого сечения нельзя решить методами сопротивления материалов. Такие задачи решаются методами теории упругости. В отличие от круглых брусьев, при кручении которых поперечные сечения остаются плоскими, сечения стержней любой другой формы искривляются. При этом различные точки одного поперечного сечения смещаются друг относительно друга параллельно оси стержня – происходит так называемая *депланация* поперечного сечения.

На рис. 6.12 показана депланация прямоугольных поперечных сечений скручиваемого стержня; на рис. 6.13 она изображена с помощью горизонталей. Сплошные горизонталы показывают выпуклость, штриховые – вогнутость; диагонали и оси симметрии поперечного сечения остаются в одной плоскости и не искривляются.

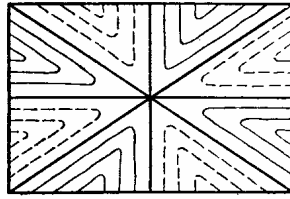
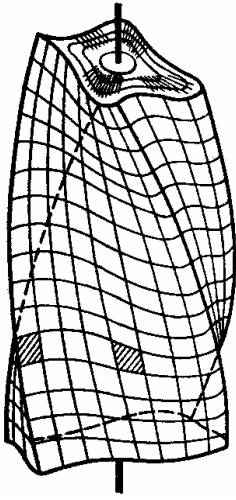


Рис. 6.12

Рис. 6.13

В поперечном сечении скручиваемого бруса касательное напряжение в каждой точке, расположенной в непосредственной близости от боковой поверхности стержня, всегда направлено параллельно касательной к контуру сечения (рис. 6.14, а). Действительно, если касательное напряжение τ в этой точке направить под углом к касательной, то его составляющая τ_1 , перпендикулярная к касательной, будет отличной от нуля (рис. 6.14, б). Тогда и составляющая касательного напряжения на боковой поверхности стержня, параллельная его оси, на основании закона парности касательных напряжений, будет равняться τ_1 , т.е. будет отличной от нуля. Но этого быть не может, так как при кручении напряжения на боковой поверхности отсутствуют.

Следовательно, в точках поперечного сечения бруса, около его контура, могут возникать касательные напряжения, лишь направленные вдоль контура (рис. 6.14, в).

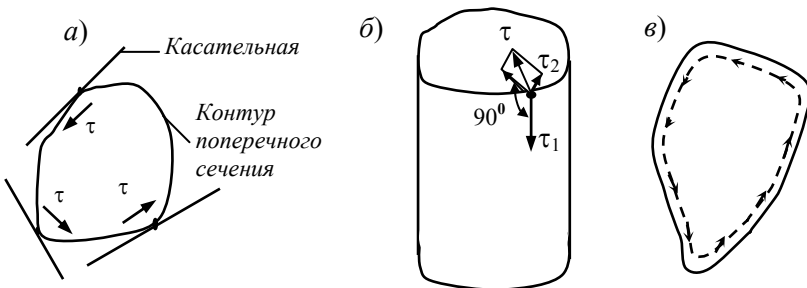


Рис. 6.14

Так как напряжения τ в точках контура поперечного сечения направлены параллельно касательным к контуру, то контур представляет собой как бы траекторию касательных напряжений. Это позволяет наметить примерный характер траекторий τ и внутри контура. Траектории касательных напряжений (силовые линии) для некоторых форм сечений показаны на рис. 6.15. Рассмотрение их позволяет сделать некоторые выводы не только о направлении, но и о величине касательных напряжений. Так, например, на рис. 6.15, а видно, что силовые линии более сгущены у середины длинной стороны прямоугольника, чем короткой; следовательно, касательные напряжения у середины длинной стороны имеют большую величину, чем у середины короткой.

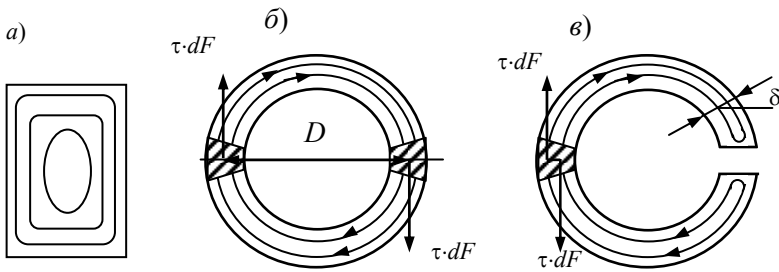


Рис. 6.15

Рассмотрение силовых линий, изображенных на рис. 6.15, б, показывает, что в замкнутом кольце крутящий момент создает элементарные пары из сил $\tau \cdot dF$ с плечами, примерно равными по величине среднему диаметру кольца D , в разрезанном же кольце плечи элементарных пар составляют часть толщины кольца δ , т.е. эти плечи значительно меньше диаметра D . Следовательно, при одних и тех же крутящих моментах касательные напряжения в разрезанном кольце значительно больше, чем в неразрезанном; другими словами, сопротивляемость разрезанного кольца кручению ниже, чем неразрезанного.

Расположение силовых линий касательных напряжений подобно характеру распределения скоростей течения жидкости при вращательном движении ее в сосуде, имеющем форму поперечного сечения скручиваемого бруса. Такое подобие называется *гидродинамической аналогией*.

Для удобства пользования формулам, применяемым при расчете на кручение брусцов некруглого сечения, придается такой же вид, как и в случае круглого сечения. В соответствии с этим наибольшие касательные напряжения в поперечном сечении бруса некруглого сечения определяются по формуле

$$\tau_{\max} = M_{\kappa} / W_{\kappa}, \quad (6.21)$$

а углы закручивания по формуле

$$\varphi = M_{\kappa} l / (GJ_{\kappa}). \quad (6.22)$$

Значения W_{κ} и J_{κ} зависят от формы поперечного сечения бруса. Величину W_{κ} иногда называют моментом сопротивления при кручении, а J_{κ} – геометрической характеристикой крутильной жесткости. Следует иметь в виду, что эти величины лишь по размерности и значению в расчетных формулах аналогичны W_{ρ} и J_{ρ} для круглого бруса

Ниже приводятся формулы определения W_{κ} и J_{κ} в случаях прямоугольного сечения и для тонкостенных стержней открытого профиля.

Брус прямоугольного сечения

Если обозначить большую сторону прямоугольного сечения h и меньшую b , то

$$J_{\kappa} = \alpha b^4; \quad W_{\kappa} = \beta b^3, \quad (6.23)$$

где α и β определяются по табл. 6.1 в зависимости от отношения сторон h/b .

При $h/b \geq 10$ можно пользоваться упрощенными формулами:

$$J_{\kappa} = \frac{hb^3}{3}; \quad W_{\kappa} = \frac{J_{\kappa}}{b} = \frac{hb^2}{3}. \quad (6.24)$$

Напряжения τ_{\max} [см. формулу (6.21)] возникают в серединах длинных сторон прямоугольника. Касательные напряжения τ в серединах коротких сторон

$$\tau = \gamma \tau_{\max}, \quad (6.25)$$

где γ определяется по табл. 6.1; при $h/b \geq 4$ можно принимать $\gamma = 0,74$.

Таблица 6.1

h/b	α	β	γ	h/b	α	β	γ
1,0	0,140	0,208	1,000	4,0	1,123	1,150	0,745
1,5	0,294	0,346	0,859	6,0	1,789	1,789	0,743

2,0	0,457	0,493	0,795	8,0	2,456	2,456	0,742
3,0	0,790	0,801	0,753	10,0	3,123	3,123	0,742

Тонкостенные стержни открытого профиля

Сечение стержня разбивается на n тонкостенных элементов в виде прямоугольников. Для всего стержня

$$J_k = \sum_{i=1}^{i=n} J_{ki}, \quad (6.26)$$

где J_{ki} – значение J_k для i -го элемента, подсчитанное по формуле (6.24); суммирование производится по всем n тонкостенным элементам

$$W_k = \frac{J_k}{b_{\max}}, \quad (6.27)$$

где b_{\max} – размер меньшей стороны прямоугольного элемента, имеющего наибольшую толщину.

Наибольшие касательные напряжения возникают в серединах длинных сторон элемента, имеющего наибольшую толщину.

Если в сечении тонкостенного стержня имеются криволинейные элементы, то для них значения J_{ki} определяются как для прямоугольников той же толщины и с длиной h , равной длине оси элемента.

Формулы (6.26) и (6.28) практически являются точными, если сечение состоит их прямоугольных элементов, для каждого из которых $h/b \geq 10$. Но ими можно пользоваться для приближенных расчетов и при $h/b \geq 4$, подсчитывая при этом J_{ki} по формуле (6.24).

При расчете на кручение тонкостенных стержней из прокатных профилей к величине J_k , полученной по формуле (6.26), вводится поправочный коэффициент, имеющий следующие значения для:

- уголкового сечения 1,00
- двутаврового сечения 1,20
- таврового сечения 1,15
- корытного (швеллерного) сечения 1,12

ния

6.6 ПРИ КРУЧЕНИИ

СТАТИЧЕСКИ

НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ

ЗАДАЧИ

При расчете на кручение прямых брусьев, жестко зашпеленных одним концом, а также при расчете валов (представляющих собой вращающиеся брусья, нагруженные взаимно уравновешенными скручивающими моментами) значения крутящих моментов в поперечных сечениях можно определить с помощью одних лишь уравнений равновесия (методом сечений). Следовательно, такие задачи являются *статически определенными*.

Задачи расчета на кручение являются *статически неопределимыми*, если крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях скручиваемых стержней, нельзя определить с помощью только уравнений равновесия. Для решения этих задач дополнительно к уравнениям равновесия, составляемым для системы в целом или ее отсеченной части, необходимо составить также *уравнения перемещений*, основанные на рассмотрении характера деформации системы.

Рассмотрим для примера брус круглого сечения, жестко заделанный обоими концами и нагруженный моментом m на расстоянии a от левого конца (рис. 6.16, а).

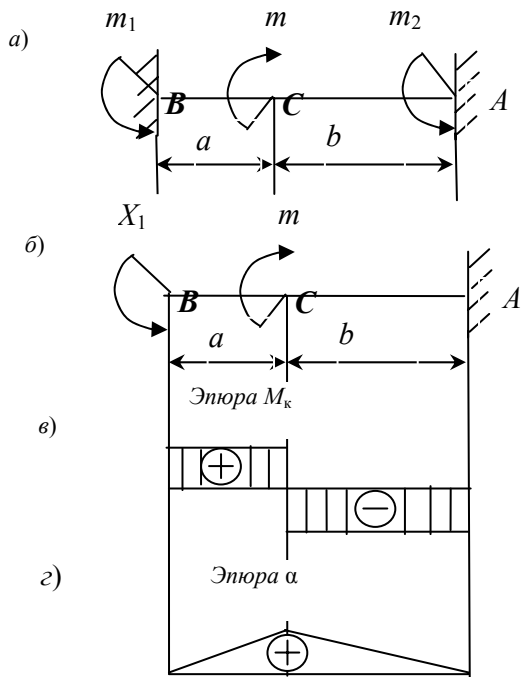


Рис. 6.16

Для решения данной задачи можно составить лишь одно уравнение равновесия – в виде равенства нулю суммы моментов относительно оси бруса:

$$\sum M_k = m_1 - m + m_2 = 0,$$

где m_1 и m_2 – реактивные скручивающие моменты, возникающие в заделках.

Дополнительное уравнение для решения рассматриваемой задачи можно получить следующим образом. Отбросим левое опорное закрепление бруса, но оставим правое (рис. 6.16, б). Поворот левого конца полученного таким путем бруса должен быть равен нулю, т.е. $\alpha_B = 0$, так как в действительности этот конец жестко закреплен и не может поворачиваться.

На основании принципа независимости действия сил уравнение перемещений имеет вид

$$\alpha_B = \alpha_{B_1} + \alpha_{B_2}.$$

Здесь α_{B_1} – угол поворота левого конца бруса от действия внешнего скручивающего момента m_1 ; α_{B_2} – угол поворота левого конца от действия внешнего момента m .

По формуле $\alpha_{\text{лев}} = \alpha_{\text{прав}}$, учитывая, что правый конец бруса не поворачивается (т.е. $\alpha_A = 0$), и по формуле (6.13) находим

$$\alpha_{B_1} = -\varphi_1 = -\frac{m_1 l}{G J_p};$$

$$\alpha_{B_2} = -\varphi_2 = \frac{m b}{G J_p}.$$

Подставим эти значения в уравнение перемещений

$$-\frac{m_1 l}{G J_p} + \frac{m b}{G J_p} = 0,$$

откуда

$$m_1 = \frac{m b}{l}.$$

Из уравнения равновесия

$$m_2 = m - m_1 = \frac{ma}{l}.$$

После определения моментов m_1 и m_2 эпюру крутящих моментов можно построить обычным способом, т.е. как для статически определимого бруса. Для рассмотренной задачи эта эпюра представлена на рис. 6.16, в.

Наглядное представление об изменении углов поворота поперечных сечений бруса по его длине дает *эпюра углов поворота* (иногда ее называют эпюрой углов закручивания). Каждая ордината этой эпюры дает в принятом масштабе величину угла поворота соответствующего поперечного сечения бруса.

Построим такую эпюру для бруса по рис. 6.16, б, учитывая при этом, что значение m_1 уже найдено и эпюра крутящих моментов построена. Крайнее правое сечение A бруса неподвижно, т.е. $\alpha_A = 0$. Произвольное поперечное сечение, принадлежащее участку AC и отстоящее на расстояние z от правого конца, повернется на угол [см. вторую из формул (6.14)]

$$\alpha_x = \alpha_A - \varphi_z = 0 + \frac{M_2 z}{GJ_\rho} = \frac{M(a/l)z}{GJ_\rho}.$$

Здесь φ_z – угол закручивания на участке длиной x , определяемый по формуле (6.13).

Таким образом, углы поворота изменяются по линейному закону в зависимости от расстояния z . Подставляя в полученное выражение $z = b$, найдем угол поворота сечения C :

$$\alpha_C = \frac{M(a/l)b}{GJ_\rho}.$$

Заметим, что всегда при нагружении бруса постоянного сечения сосредоточенными скручивающими моментами эпюра углов поворота поперечных сечений на каждом из участков бруса линейна.

Для построения эпюры на участке CB вычислим угол поворота сечения B . На основании второй из формул (6.12) и формулы (6.13)

$$\alpha_B = \alpha_C - \varphi_{CB} = \frac{M(a/l)b}{GJ_\rho} - \frac{M_1 a}{GJ_\rho} = \frac{M(a/l)b}{GJ_\rho} - \frac{M(b/l)a}{GJ_\rho} = 0.$$

Этот результат подтверждает правильность решения задачи, так как по условию сечение B заделано жестко. Таким образом, кроме чисто иллюстративного значения, построение эпюры углов поворота поперечных сечений можно рассматривать как метод контроля решения некоторых статически неопределимых задач.

Построенная по полученным значениям эпюра углов поворота представлена на рис. 6.16, г.

При действии на брус нескольких внешних скручивающих моментов, а также для брусей, имеющих на отдельных участках разные поперечные сечения, составляются дополнительные уравнения.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

- 1 При каком нагружении прямой брус испытывает деформацию кручения?
- 2 Как вычисляется скручивающий момент, передаваемый шкивом по заданной мощности и числу оборотов в минуту?
- 3 Что представляют собой эпюры крутящих моментов и как они строятся?
- 4 Что называется полным и относительным углом закручивания бруса?
- 5 Перечислите предпосылки теории кручения прямого бруса круглого поперечного сечения?
- 6 Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого бруса при кручении и как они направлены?
- 7 Что называется жесткостью сечения при кручении?
- 8 Что называется полярным моментом сопротивления, в каких единицах он выражается и чему равен?
- 9 Как производится расчет скручиваемого бруса на прочность?
- 10 Как производится расчет скручиваемого бруса на жесткость?

7 ПРЯМОЙ ИЗГИБ

7.1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Изгиб представляет собой такую деформацию, при которой происходит искривление осей прямых брусьев или изменение кривизны осей кривых брусьев.

Изгибающий момент – внутренний силовой фактор (внутреннее усилие), возникающий в поперечном сечении бруса, а именно момент относительно оси, расположенной в плоскости поперечного сечения и проходящей через его центр тяжести; он действует в плоскости, перпендикулярной к поперечному сечению бруса.

Здесь рассмотрен *прямой изгиб*, возникающий в случае, когда изгибающий момент в данном поперечном сечении бруса действует в плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции этого сечения. Прямой изгиб возникает, например, тогда, когда на прямой брус действует нагрузка в виде системы сосредоточенных сил, расположенных в одной плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции каждого поперечного сечения бруса.

Случай, когда плоскость действия изгибающего момента в данном поперечном сечении бруса не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции этого сечения, называется *косым изгибом*.

7.2 ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ

Внешние нагрузки, действующие на сооружение, вызывают появление в нем внутренних усилий. При действии на брус внешних нагрузок, расположенных в одной плоскости, проходящей через ось бруса (т.е. в случае плоского действия сил), в каждом поперечном сечении бруса возникают внутренние силовые факторы (усилия), действующие в этой же плоскости, а именно (рис. 7.1):

а) продольная сила N , приложенная в центре тяжести сечения, действующая перпендикулярно к сечению;

б) поперечная сила Q , действующая в плоскости поперечного сечения, проходящая через его центр тяжести;

в) изгибающий момент M_y , действующий в плоскости, перпендикулярной к поперечному сечению. Изгибающий момент обозначается также M_y , M_x (где индекс y или x указывает на ось, расположенную в поперечном сечении бруса, относительно которой действует момент) или просто M .

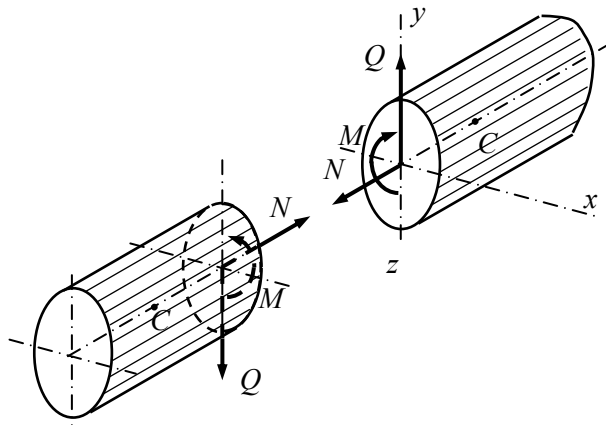


Рис. 7.1

Изгибающий момент $M_{из}$ в поперечном сечении считается положительным, когда на левом торце правой части бруса он направлен по часовой стрелке, а на правом торце левой части – против часовой стрелки. Продольная сила N в сечении положительна при растяжении. Поперечная сила Q положительна, когда на левом торце правой части бруса она направлена снизу вверх, а на правом торце левой части – сверху вниз; положительная поперечная сила стремится вращать отсеченную часть бруса (на которую она действует) по часовой стрелке – относительно любой точки C , расположенной на внутренней нормали к поперечному сечению. Положительные направления внутренних усилий показаны на рис. 7.1 (в аксонометрии) и 7.2.

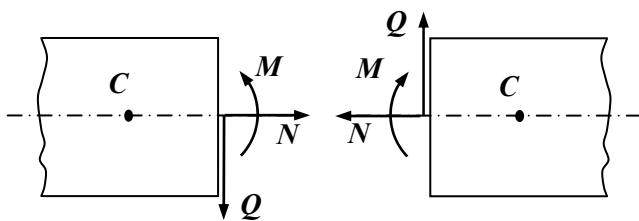


Рис. 7.2

Из рис. 7.2 следует, что при положительном изгибающем моменте верхние волокна бруса испытывают сжатие (укорочение), а нижние – растяжение (удлинение).

При определении знаков внутренних усилия в вертикальных брусках необходимо какой-то конец бруса (нижний или верхний) принимать в качестве левого и отмечать его на чертеже каким-либо значком.

Изгибающий момент, продольная сила и поперечная сила, действующие в каждом поперечном сечении, связаны с напряжениями, возникающими в этом сечении, следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} M_z &= \int_F \sigma y dF; \\ Q &= \int_F \tau_y dF; \\ N &= \int_F \sigma dF. \end{aligned} \right\} (7.1)$$

Для определения проекции на какую-либо ось внутренних сил в сечении, действующих со стороны левой части бруса на правую, на эту ось надо спроектировать все внешние силы, приложенные к левой части. Аналогично, чтобы определить момент (относительно какой-либо оси) внутренних сил в сечении, действующих со стороны левой части бруса на правую, надо вычислить момент (относительно этой оси) всех внешних сил, приложенных к левой части. Определение внутренних сил, действующих со стороны левой части бруса на правую, можно производить по

внешним силам, приложенным не к левой части, а к правой. В этом случае проекции внешних сил на выбранные оси и их моменты относительно этих осей необходимо взять с обратными знаками. Эти положения позволяют сформулировать следующие правила определения внутренних усилий, возникающих в поперечном сечении бруса, для случаев, когда все внешние силы расположены в одной плоскости.

Изгибающий момент M_x относительно центральной оси x поперечного сечения по величине и знаку равен сумме моментов относительно этой оси всех внешних сил, приложенных к левой части бруса, или сумме моментов (относительно той же оси), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части:

$$M_x = \sum_{\text{лев}} M_x = - \sum_{\text{прав}} M_x, \quad (7.2)$$

ПРИ ЭТОМ МОМЕНТЫ ВНЕШНИХ СИЛ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ, КОГДА ОНИ ДЕЙСТВУЮТ ПО ЧАСОВОЙ СТРЕЛКЕ.

Поперечная сила Q по величине и знаку равна сумме проекций всех внешних сил, приложенных к левой части бруса, на нормаль к его продольной оси, проведенную в рассматриваемом поперечном сечении, или сумме проекций (на ту же нормаль), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части бруса:

$$Q = \sum_{\text{лев}} Y = - \sum_{\text{прав}} Y, \quad (7.3)$$

ПРИ ЭТОМ ПРОЕКЦИИ ВНЕШНИХ СИЛ НА НОРМАЛЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ, КОГДА ОНИ НАПРАВЛЕННЫ СНИЗУ ВВЕРХ.

Продольная сила N по величине и знаку равна сумме проекций всех внешних сил, приложенных к левой части бруса, на его продольную ось, или сумме проекций (на ту же ось), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части бруса:

$$N = \sum_{\text{лев}} Z = - \sum_{\text{прав}} Z. \quad (7.4)$$

при этом проекция внешних сил на ось бруса положительны, когда они направлены справа налево.

Отметим, что при определении внутренних усилий моменты и проекции вычисляются от всех внешних сил, приложенных к брусу по одну (и только по одну) сторону от рассматриваемого поперечного сечения (т.е. или слева, или справа от сечения).

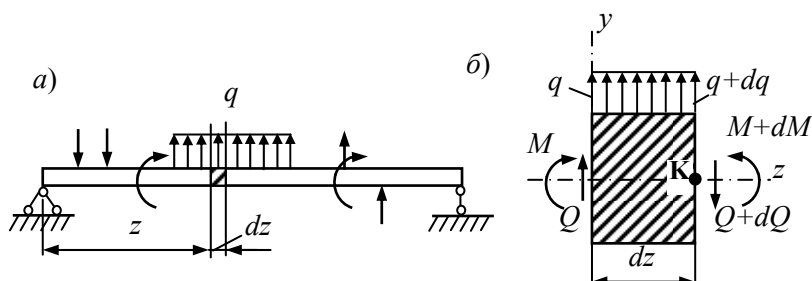
С невыполнением этого условия связано большинство ошибок при определении внутренних усилий.

7.3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ, ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ И ИНТЕНСИВНОСТЬЮ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим балку, находящуюся под действием плоской системы сил (рис. 7.3, а). Двумя поперечными сечениями, отстоящими на расстоянии dz друг от друга, выделим из балки элемент так, чтобы на него не действовали внешние сосредоточенные силы и моменты. На левый торец элемента действуют внутренние усилия M и Q (рис. 7.3, б), а на правый $M+dM$ и $Q+dQ$. Здесь dM и dQ представляют собой приращения величин внутренних усилий на участке dz балки. Кроме того, на элемент действует распределенная нагрузка, перпендикулярная к оси балки; интенсивность ее у левого конца элемента равна q , а у правого $q + dq$ (рис. 7.3, б).

Рис. 7.3

Так как вся балка в целом находится в равновесии, то в равновесии находится и ее элемент dz . Со-



ставим уравнение равновесия элемента dz в виде суммы проекций на ось y всех действующих на него сил (рис. 7.3):

$$\sum Y = Q + qdz - (Q + dQ) = 0,$$

откуда

$$\frac{dQ}{dz} = q. \quad (7.5)$$

Итак, первая производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности распределенной нагрузки, перпендикулярной к оси балки.

Составим теперь уравнение равновесия элемента dz в виде суммы моментов действующих на него сил относительно точки K (рис. 7.3.б):

$$\sum M = M + Qdz - (M + dM) + qdz \frac{dz}{2} = 0.$$

Отбросив бесконечно малые величины высших порядков, получим

$$Qdz - dM = 0,$$

откуда

$$\frac{dM}{dz} = Q. \quad (7.6)$$

Таким образом, первая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе. Эта зависимость называется теоремой Журавского.

Зависимости (7.5) и (7.6) действительны, когда абсцисса поперечного сечения возрастает от левого конца балки к правому. Если, наоборот, абсцисса z возрастает от правого конца балки к левому, то в правых частях формул (7.5) и (7.6) перед q и Q должен стоять знак «минус».

Из курса высшей математики известен геометрический смысл первой производной dy/dz : при любом значении аргумента z она равна тангенсу угла между касательной к кривой $y = f(z)$ (в точке с координатами z, y) и положительным направлением оси z , т.е. $\operatorname{tg} \alpha = dy/dz$.

Если первая производная (а следовательно, и угол α) положительна, то функция $y = f(z)$ возрастает, а если она отрицательна, – то убывает. Экстремум (максимум или минимум) функции $y = f(z)$ имеется при тех значениях z , при которых производная dy/dz равна нулю и, следовательно, угол α также равен нулю, т.е. касательная к кривой $y = f(z)$ параллельна оси z .

Используя изложенные зависимости между функцией и ее первой производной, из теоремы Журавского можно сделать ряд важных выводов:

1 Тангенс угла α между касательной к линии, ограничивающей эпюру M , и осью эпюры равен поперечной силе Q .

2 На участках балки, на которых поперечная сила положительна, изгибающий момент возрастает (слева направо), а на участках, на которых она отрицательна, – убывает.

3 Чем больше по абсолютной величине значение поперечной силы Q , тем круче линия, ограничивающая эпюру M .

4 На участке балки, на котором поперечная сила имеет постоянное значение, эпюра M ограничена прямой линией.

5 Если на границе соседних участков балки эпюра Q не имеет скачка, то линии, ограничивающие эпюру M на этих участках, сопрягаются без перелома, т.е. имеют в точке сопряжения общую касательную.

6 Если на границе соседних участков балки в эпюре Q имеется скачок, то линии, ограничивающие эпюру M на этих участках, сопрягаются с переломом, т.е. не имеют в точке сопряжения общей касательной.

7 Изгибающий момент достигает максимума или минимума в сечениях балки, в которых поперечная сила равна нулю; касательная к линии, ограничивающей эпюру M , в этом сечении параллельна оси эпюры.

7.4 ПРЯМОЙ ЧИСТЫЙ ИЗГИБ

Для наглядного представления характера деформации брусьев (стержней) при изгибе проводится следующий опыт. На боковые грани резинового бруса прямоугольного сечения наносится сетка линий, параллельных и перпендикулярных оси бруса (рис. 7.4, а). Затем к бруску по его концам прикладываются моменты M (рис. 7.4, б), действующие в плоскости симметрии бруса, пересекающей каждое его поперечное сечение по одной из главных центральных осей инерции. Плоскость, проходящая через ось бруса и одну из главных центральных осей инерции каждого его поперечного сечения, будем называть

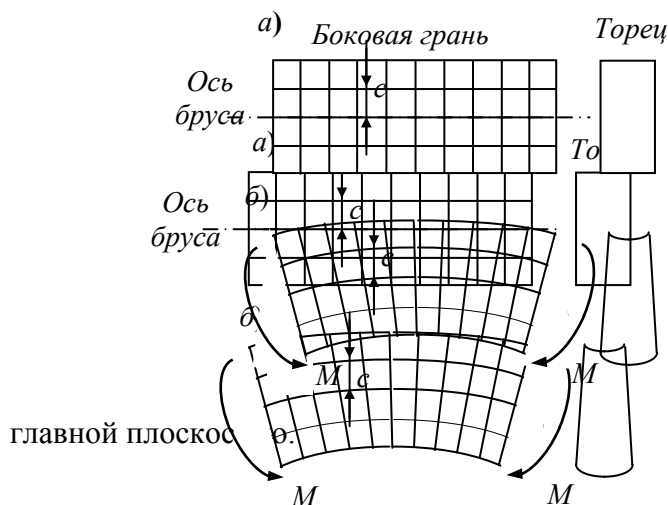


Рис. 7.4

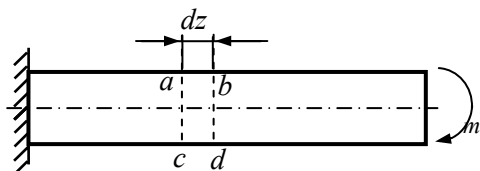
Под действием моментов M брус испытывает прямой чистый изгиб. В результате деформации, как показывает опыт, линии сетки, параллельные оси бруса, искривляются, сохраняя между собой прежние расстояния. При указанном на рис. 7.4, б направлении моментов M : эти линии в верхней части бруса удлиняются, а в нижней – укорачиваются.

Каждую линию сетки, перпендикулярную к оси бруса, можно рассматривать как след плоскости некоторого поперечного сечения бруса. Так как эти линии остаются прямыми, то можно предполагать, что *поперечные сечения бруса, плоские до деформации, остаются плоскими и в процессе деформации*. Это предположение, основанное на опыте, как известно, носит название *гипотезы плоских сечений*, или гипотезы Бернулли.

Гипотеза плоских сечений применяется не только при чистом, но и при поперечном изгибе. Для поперечного изгиба она является приближенной, а для чистого изгиба – строгой, что подтверждается теоретическими исследованиями, проведенными методами теории упругости.

Рассмотрим теперь прямой брус с поперечным сечением, симметричным относительно вертикальной оси, заделанный правым концом и нагруженный на левом конце внешним моментом M , действующим в одной из главных плоскостей бруса (рис. 7.5). В каждом поперечном сечении этого бруса возникают только изгибающие моменты $M_x = m$, действующие в той же плоскости, что и момент m .

Рис. 7.5



Таким образом, брус на всем своем протяжении находится в состоянии прямого чистого изгиба. В состоянии чистого изгиба могут находиться отдельные участки балки и в случае действия на нее поперечных нагрузок.

Выделим из рассматриваемого бруса (см. рис. 7.5) двумя поперечными сечениями ac и bd элемент длиной dz . В результате деформации, как это следует из гипотезы Бернулли, сечения ac и bd останутся плоскими, но наклонятся по отношению друг к другу на некоторый угол $d\theta$. Примем левое сечение ac

условно за неподвижное. Тогда в результате поворота правого сечения bd на угол $d\vartheta$ оно займет положение $b'd'$ (рис. 7.6).

Прямые ac и $b'd'$ пересекутся в некоторой точке A , которая является центром кривизны (или, точнее, следом оси кривизны) продольных волокон элемента dz . Верхние волокна рассматриваемого элемента при показанном на рис. 7.5 направлении момента m удлинятся, а нижние укорачиваются. Волокна же некоторого промежуточного слоя kn , перпендикулярного к плоскости действия момента m , сохраняют свою длину. Этот слой называется *нейтральным слоем*.

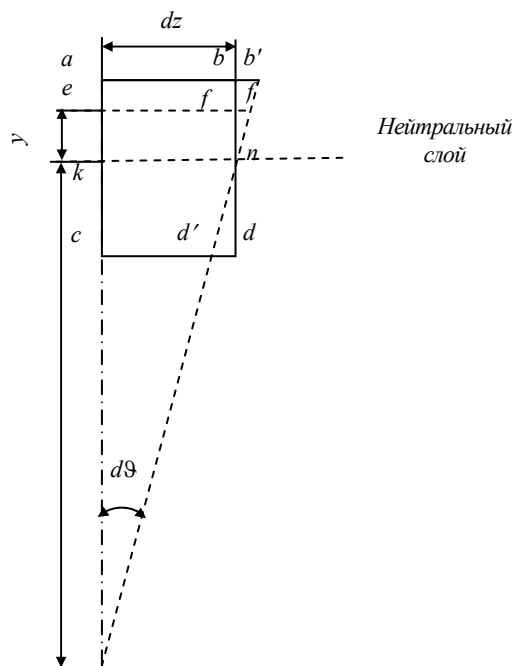


Рис. 7.6

Обозначим ρ радиус кривизны нейтрального слоя, т.е. расстояние от этого слоя до центра кривизны A (см. рис. 7.6). Рассмотрим некоторый слой ef , расположенный на расстоянии y от нейтрального слоя. Абсолютное удлинение волокон этого слоя равно $\overline{ff'}$, а относительное $\varepsilon = \overline{ff'}/ef$.

Рассматривая подобные треугольники nf' и Akn , устанавливаем, что $\overline{ff'}:kn = y:\rho$. Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\overline{ff'}}{ef} = \frac{(y/\rho)\overline{kn}}{ef} = \frac{y dz}{\rho dz}$$

или

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}, \quad (7.7)$$

так как $kn = ef = dz$.

В теории изгиба предполагается, что продольные волокна бруса не давят друг на друга. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что это предположение не влияет существенно на результаты расчета. При чистом изгибе в поперечных сечениях бруса не возникают касательные напряжения. Таким образом, все волокна при чистом изгибе находятся в условиях одноосного растяжения или сжатия.

По закону Гука для случая одноосного растяжения или сжатия нормальное напряжение σ и соответствующая относительная деформация ε связаны зависимостью

$$\sigma = E\varepsilon$$

или на основании формулы (7.5)

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho}. \quad (7.8)$$

Из формулы (7.8) следует, что нормальные напряжения в продольных волокнах бруса прямо пропорциональны их расстояниям y от нейтрального слоя, следовательно, в поперечном сечении бруса в каждой его точке нормальные напряжения пропорциональны расстоянию y от этой точки до нейтраль-

ной оси, представляющей собой линию пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением (рис. 7.7, а). Из симметрии бруса и нагрузки следует, что нейтральная ось горизонтальна. В точках нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю; по одну сторону от нейтральной оси они растягивающие, а по другую – сжимающие.

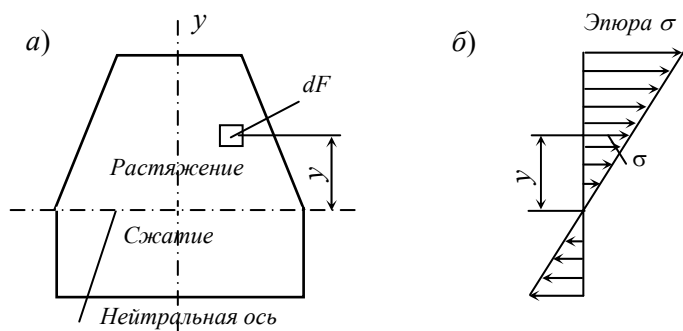


Рис. 7.7

Эпюра напряжений σ представляет собой график, ограниченный прямой линией, с наибольшими по абсолютной величине значениями напряжений для точек, наиболее удаленных от нейтральной оси (рис. 7.7, б).

Рассмотрим теперь условия равновесия выделенного элемента dz бруса. Действие левой части бруса на сечение ac элемента dz (см. рис. 7.5) представим в виде изгибающего момента M_z , остальные внутренние усилия в этом сечении при чистом изгибе равны нулю. Действие правой части бруса на сечение bd элемента dz представим в виде элементарных сил σdF , приложенных к каждой элементарной площадке dF поперечного сечения (рис. 7.8) и параллельных оси z бруса.

Составим шесть условий равновесия элемента dz :

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0; \sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0.$$

Ось x совпадает с нейтральной осью сечения bd , а ось y перпендикулярна к ней; обе эти оси расположены в плоскости поперечного сечения bd .

Элементарная сила не дает проекций на оси y и x , и не вызывает момента относительно оси z . Поэтому уравнения равновесия $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$ и $\sum M_x = 0$ удовлетворяются при любых значениях σ .

Уравнение равновесия $\sum Z = 0$ имеет вид

$$\sum Z = \int_F \sigma dF = 0. \quad (7.9)$$

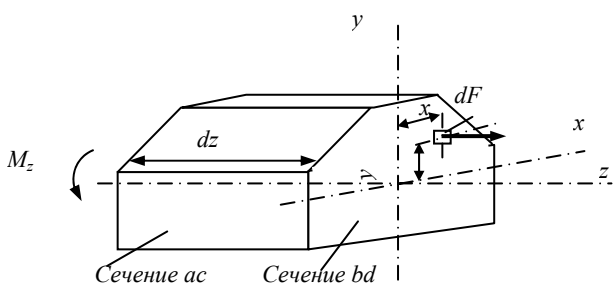


Рис. 7.8

Подставим в уравнение (7.7) значение $\sigma = Ey/\rho$:

$$\int_F (Ey/\rho) dF = (E/\rho) \int_F y dF = 0.$$

Так как $E/\rho \neq 0$ (рассматривается изогнутый элемент бруса для которого $\rho \neq \infty$), то

$$\int_F y dF = 0.$$

Интеграл $y dF$ представляет собой статический момент поперечного сечения бруса относительно нейтральной оси x . Равенство его нулю означает, что нейтральная ось (т.е. ось x) проходит, через центр

тяжести поперечного сечения. Таким образом, центр тяжести всех поперечных сечений бруса, а следовательно, и ось бруса, являющаяся геометрическим местом центров тяжести, расположены в нейтральном слое. Следовательно, радиус ρ кривизны нейтрального слоя является радиусом кривизны изогнутой оси бруса.

Составим теперь уравнение равновесия в виде суммы моментов всех сил, приложенных к элементу dz бруса, относительно нейтральной оси x :

$$\sum M_x = \int_F \sigma dF y - M_x = 0. \quad (7.10)$$

Здесь $\sigma dF y$ представляет собой момент элементарной внутренней силы σdF относительно оси x .

Обозначим F_1 площадь части поперечного сечения бруса, расположенной над нейтральной осью, а F_2 – под нейтральной осью.

Тогда $\int_{F_1} \sigma dF$ представит собой равнодействующую элементарных сил σdF , приложенных выше нейтральной оси, а $\int_{F_2} \sigma dF$ – ниже нейтральной оси (рис. 7.9). Обе эти равнодействующие равны друг

другу по абсолютной величине, так как их алгебраическая сумма на основании условия (7.7) равна нулю. Эти равнодействующие образуют внутреннюю пару сил, действующую в поперечном сечении бруса. Момент этой пары сил, равный $r \int_{F_1} \sigma dF$, т.е. произведению величины одной из них на расстояние r

между ними (рис. 7.9), представляет собой изгибающий момент M_x , в поперечном сечении бруса.

Подставим в уравнение (7.10) значение σ по формуле (7.8):

$$\int_F (E y^2 / \rho) dF = (E / \rho) \int_F y^2 dF = M_x.$$

Здесь $\int_F y^2 dF$ представляет собой осевой момент инерции J_x поперечного сечения бруса относительно нейтральной оси x , т.е. оси, проходящей через центр тяжести сечения. Следовательно,

$$1/\rho = M_x / (E J_x). \quad (7.11)$$

Подставим значение $1/\rho$ из формулы (7.11) в формулу (7.8):

$$\sigma = (M_x / J_x) y. \quad (7.12)$$

Формула (7.12) используется для определения абсолютных значений напряжений σ , поэтому в нее следует подставлять абсолютные значения изгибающего момента M_x и ординаты y . Знак же напряжений всегда легко устанавливается по знаку момента M_x или по характеру деформации балки.

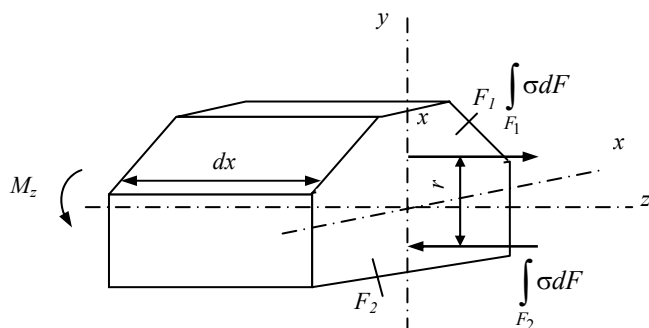


Рис. 7.9

Составим теперь уравнение равновесия в виде суммы моментов всех сил, приложенных к элементу dz бруса, относительно оси y :

$$\sum M_y = \int_F \sigma dFx = 0. \quad (7.13)$$

Здесь σdFx представляет собой момент элементарной внутренней силы σdF относительно оси y (см. рис. 7.8).

Подставим в выражение (7.13) значение σ по формуле (7.8):

$$\sum M_y = \int_F (E/\rho) yx dF = (E/\rho) \int_F yx dF = 0.$$

Здесь интеграл $yx dF$ представляет собой центробежный момент инерции J_{yx} поперечного сечения бруса относительно осей y и x . Следовательно,

$$\sum M_y = (E/\rho) J_{yx} = 0; \quad (7.14)$$

но так как

$$E/\rho \neq 0,$$

то

$$J_{yx} = 0.$$

Как известно, центробежный момент инерции сечения равен нулю относительно главных осей инерции.

В рассматриваемом случае ось y является осью симметрии поперечного сечения бруса и, следовательно, оси y и x являются главными центральными осями инерции этого сечения. Поэтому условие (7.14) здесь удовлетворяется.

В случае, когда поперечное сечение изгибаемого бруса не имеет ни одной оси симметрии, условие (7.14) удовлетворяется, если плоскость действия изгибающего момента проходит через одну из главных центральных осей инерции сечения или параллельна этой оси.

Если плоскость действия изгибающего момента не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции поперечного сечения бруса и не параллельна ей, то условие (7.14) не удовлетворяется и, следовательно, нет прямого изгиба – брус испытывает косой изгиб.

Формула (7.12), определяющая нормальное напряжение в произвольной точке рассматриваемого сечения бруса, применима при условии, что плоскость действия изгибающего момента проходит через одну из главных осей инерции этого сечения или ей параллельна. При этом нейтральная ось поперечного сечения является его главной центральной осью инерции, перпендикулярной к плоскости действия изгибающего момента.

Формула (7.11) показывает, что при прямом чистом изгибе кривизна изогнутой оси бруса прямо пропорциональна произведению модуля упругости E на момент инерции J_x . Произведение EJ_x будем называть жесткостью сечения при изгибе; она выражается в кгс·мм², кгс·см², тс·м² и т.д.

При чистом изгибе балки постоянного сечения изгибающие моменты M_x и жесткости сечений EJ_x постоянны по ее длине. В этом случае радиус ρ кривизны изогнутой оси балки имеет постоянное значение [см. выражение (7.11)], т.е. балка изгибается по дуге окружности.

Из формулы (7.12) следует, что наибольшие (положительные – растягивающие) и наименьшие (отрицательные – сжимающие) нормальные напряжения в поперечном сечении бруса возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, расположенных по обе стороны от нее. При поперечном сечении, симметричном относительно нейтральной оси, абсолютные величины наибольших растягивающих и сжимающих напряжений одинаковы и их можно определить по формуле

$$\sigma_{\max} = (M_x / J_x) y_{\max},$$

где y_{\max} – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной точки сечения.

Величина J_x / y_{\max} , зависящая только от размеров и формы поперечного сечения, называется осевым моментом сопротивления сечения и обозначается W_x :

$$W_x = J_x / y_{\max}. \quad (7.15)$$

Следовательно,

$$\sigma_{\max} = M_x / W_x. \quad (7.16)$$

Определим осевые моменты сопротивления для прямоугольного и круглого сечений.

Для прямоугольного сечений шириной b и высотой h

$$W_x = J_x / y_{\max} = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}. \quad (7.17)$$

Для круглого сечения диаметром d

$$W_x = J_x / y_{\max} = \frac{J_x}{d/2} = \frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3. \quad (7.18)$$

Момент сопротивления выражается в мм^3 , см^3 , м^3 . Для сечений, не симметричных относительно нейтральной оси, например для треугольника, тавра и т.п., расстояния от нейтральной оси до наиболее удаленных растянутых и сжатых волокон различны; поэтому для таких сечений имеются два момента сопротивления:

$$W_x^I = J_x / y_{\max}^I \quad \text{и} \quad W_x^{II} = J_x / y_{\max}^{II},$$

где y_{\max}^I и y_{\max}^{II} – расстояния от нейтральной оси до наиболее удаленных растянутых и сжатых волокон.

7.5 ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

При поперечном изгибе в поперечном сечении бруса (балки), кроме изгибающего момента, действует также поперечная сила. Если поперечный изгиб является прямым, то изгибающий момент действует в плоскости, совпадающей с одной из главных плоскостей бруса. Поперечная сила при этом обычно параллельна плоскости действия изгибающего момента и проходит через определенную точку поперечного сечения, называемую центром изгиба. Положение центра изгиба зависит от формы и размеров поперечного сечения бруса. При поперечном сечении, имеющем две оси симметрии, центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения.

Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что формулы, полученные для случая прямого чистого изгиба, применимы и при прямом поперечном изгибе.

Поперечная сила, действующая в сечении бруса, связана с касательными напряжениями, возникающими в этом сечении, зависимостью

$$Q = \int_F \tau_y dF, \quad (7.19)$$

где τ_y – составляющая касательного напряжения в поперечном сечении бруса, параллельная оси y и силе Q .

Величина $\tau_y dF$ представляет собой элементарную касательную силу (параллельную силе Q), действующую на элементарную площадку dF поперечного сечения бруса.

Рассмотрим некоторое поперечное сечение бруса (рис. 7.10). Касательные напряжения в точках около контура сечения направлены по касательной к контуру. Действительно, если бы касательное напряжение имело составляющую, направленную по нормали к контуру, то по закону парности касательных напряжений такое же напряжение возникло бы и на боковой поверхности бруса, что невозможно, так как боковая поверхность свободна от напряжений.

Касательное напряжение в каждой точке сечения можно разложить на две составляющие: τ_y и τ_x .

Рассмотрим определение составляющих. Предполагается, что составляющие τ_y касательных напряжений по всей ширине сечения в направлении, параллельном оси x , одинаковы (рис. 7.10), т.е. что величина τ_y изменяется только по высоте сечения.

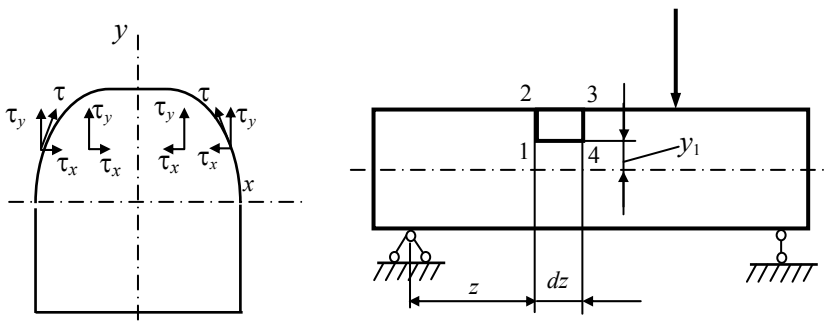


Рис. 7.10

Рис. 7.11

Для определения вертикальных составляющих τ_y касательных напряжений выделим из балки постоянного сечения, симметричного относительно оси y , элемент 1-2-3-4 двумя поперечными сечениями, проведенными на расстояниях z и $z + dz$ от левого конца балки, и одним сечением, параллельным нейтральному слою, отстоящим от него на расстояние y_1 (рис. 7.11).

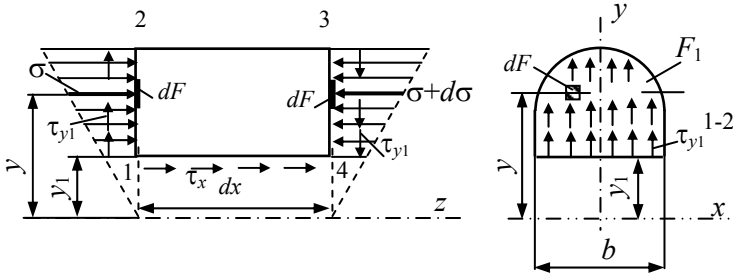


Рис. 7.12

В поперечном сечении балки с абсциссой z действует изгибающий момент M , а с абсциссой $z + dz$ – момент $M + dM$. В соответствии с этим нормальные напряжения σ и $\sigma + d\sigma$, действующие по площадкам 1–2 и 3–4 выделенного элемента, определяются выражениями

$$\sigma = \frac{M}{J} y \quad \text{и} \quad \sigma + d\sigma = \frac{M + dM}{J} y. \quad (7.20)$$

Эпюры нормальных напряжений σ и $\sigma + d\sigma$, действующих по площадкам 1–2 и 3–4 при положительном значении M , показаны на рис. 7.12. По этим же площадкам действуют и касательные напряжения τ_y , также показанные на рис. 7.12. Величина этих напряжений изменяется по высоте сечения.

Обозначим τ_{y1} величину касательного напряжения в нижних точках площадок 1–2 и 3–4 (на уровне y_1). По закону парности касательных напряжений следует, что такие же по величине касательные напряжения τ_x действуют по нижней площадке 1–4 выделенного элемента. Нормальные напряжения по этой площадке считаются равными нулю, так как в теории изгиба предполагается, что продольные волокна балки не оказывают друг на друга давления.

Площадку 1–2 или 3–4 (рис. 7.12 и 7.13), т.е. часть поперечного сечения, расположенную выше уровня y_1 (выше площадки 1–4), называют отсеченной частью поперечного сечения. Ее площадь обозначим F_1 .

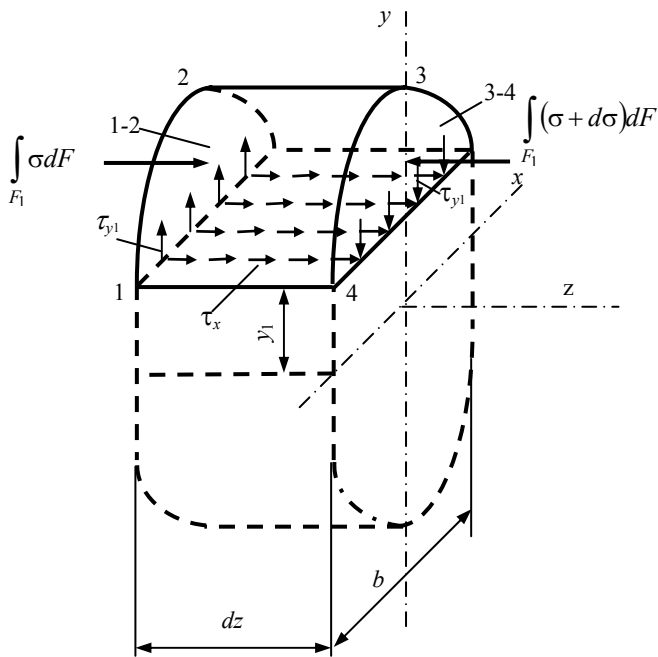


Рис. 7.13

Составим уравнение равновесия для элемента 1–2–3–4 в виде суммы проекций всех приложенных к нему сил на ось балки:

$$\sum Z = \int_{F_1} \sigma dF + \tau_z b dz - \int_{F_1} (\sigma + d\sigma) dF = 0. \quad (7.21)$$

Здесь $\int_{F_1} \sigma dF$ – равнодействующая элементарных сил σdF , возникающих по площадке 1–2 элемента;

$\int_{F_1} (\sigma + d\sigma) dF$ – равнодействующая элементарных сил $(\sigma + d\sigma) dF$, возникающих по площадке 3–4 элемен-

та; $\tau_z b dz$ – равнодействующая элементарных касательных сил, возникающих по площадке 1–4 элемента; b – ширина поперечного сечения балки на – уровне y_1 .

Подставим в уравнение (7.21) выражения σ и $\sigma + d\sigma$ по формулам (7.20):

$$\int_{F_1} \frac{M}{J} y dF + \tau_z b dz - \int_{F_1} \frac{M + dM}{J} y dF = 0$$

или

$$\tau_z b dz = \int_{F_1} \frac{dM}{J} y dF = \frac{dM}{J} \int_{F_1} y dF.$$

Но на основании теоремы Журавского

$$dM = Q dz,$$

поэтому

$$\tau_z b dz = \frac{Q dz}{J} \int_{F_1} y dF,$$

откуда

$$\tau_z = \frac{Q}{Jb} \int_{F_1} y dF.$$

Интеграл $\int_{F_1} y dF$ представляет собой статический момент S_x площади F_1 относительно нейтральной оси x поперечного сечения балки. Следовательно,

$$\tau_z = QS_x / (Jb).$$

По закону парности касательных напряжений напряжения τ_y в точках поперечного сечения балки, отстоящих на расстояние y_1 от нейтральной оси, равны (по абсолютной величине) τ_z , т.е.

$$\tau_{y_1} = QS_x / (Jb).$$

Таким образом, величины касательных напряжений τ в поперечных сечениях балки и в сечениях ее плоскостями, параллельными нейтральному слою, определяются по формуле

$$\tau = QS / (Jb), \quad (7.22)$$

где Q – поперечная сила в рассматриваемом поперечном сечении балки; S – статический момент (относительно нейтральной оси) отсеченной части поперечного сечения, расположенной по одну сторону от уровня, на котором определяются касательные напряжения; J – момент инерции всего поперечного сечения относительно нейтральной оси; b – ширина поперечного сечения балки на том уровне, на котором определяются касательные напряжения τ .

7.6 ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ

Для определения величины потенциальной энергии деформации, накапливающейся в балке при изгибе, воспользуемся формулой (3.29) удельной потенциальной энергии:

$$u = (1/2E)[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)].$$

При изгибе в каждой точке балки возникает двухосное (плоское) напряженное состояние с напряжениями $\sigma_1 = \sigma_{\max}$, $\sigma_3 = \sigma_{\min}$ и $\sigma_2 = 0$; следовательно,

$$u = (1/2E)(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_3). \quad (7.23)$$

Выразим главные напряжения $\sigma_1 = \sigma_{\max}$, $\sigma_3 = \sigma_{\min}$ через напряжения σ и τ в площадках, совпадающих с поперечным сечением балки

$$u = (1/2E)\{2(\sigma/2)^2 + 2[(\sigma/2)^2 + \tau^2] - 2\mu[(\sigma/2)^2 - (\sigma/2)^2 - \tau^2]\}.$$

Преобразуем это выражение:

$$u = \sigma^2 / 2E + (\tau^2 / 2)2(1 + \mu) / E.$$

Учитывая, что

$$2(1 + \mu) / E = 1 / G,$$

получаем

$$u = \sigma^2 / (2E) + \tau^2 / (2G). \quad (7.24)$$

Формула (7.24) дает выражение удельной потенциальной энергии при прямом поперечном изгибе.

Подставим в выражение (7.24) значения σ и τ по формулам (7.12) и (7.22), получим

$$u = [M^2 / (2EJ^2)]y^2 + Q^2 S^2 / (2GJ^2 b^2). \quad (7.25)$$

Потенциальная энергия, накапливающаяся в элементарном объеме $dV = dFdz$ балки,

$$udV = udFdz;$$

потенциальная энергия на участке балки длиной dz (т.е. в объеме Fdz) определяется выражением

$$dU = dz \int_F udF,$$

Подставим в него значение u , получим

$$dU = dz \int_F \left(\frac{M^2}{2EJ^2} y^2 + \frac{Q^2 S^2}{2GJ^2 b^2} \right) dF =$$

$$= dz \left(\frac{M^2}{2EJ^2} \int_F y^2 dF + \frac{Q^2}{2GJ^2} \int_F \frac{S^2}{b^2} dF \right).$$

Учитывая, что $\int_F y^2 dF = J$, и обозначая

$$\frac{F}{J^2} \int_F \frac{S^2}{b^2} dF = \eta, \quad (7.26)$$

получаем

$$dU = \frac{M^2}{2EJ} dz + \eta \frac{Q^2}{2GF} dz,$$

откуда полная потенциальная энергия деформации изгиба, накапливающаяся в балке на участке длиной l ,

$$U = \frac{1}{2EJ} \int_l M^2 dz + \frac{\eta}{2GF} \int_l Q^2 dz. \quad (7.27)$$

В случае, когда балка имеет несколько участков, различающихся законами изменения жесткостей поперечных сечений, величин изгибающих моментов и поперечных сил, потенциальную энергию деформации следует определять по формуле

$$U = \sum \int_{l_i} \frac{M^2}{2EJ} dz + \sum \int_{l_i} \eta \frac{Q^2}{2GF} dz, \quad (7.28)$$

где i – порядковый номер участка балки.

7.7 РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Расчет балок на прочность обычно ведется по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в их поперечных сечениях. Обозначая эти напряжения σ_{\max} , получаем условие прочности в виде

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (7.29)$$

Здесь $[\sigma]$ – допускаемое напряжение, зависящее в основном от материала балки и ее назначения.

При расчете на прочность элементов конструкций, работающих на изгиб, возможны три вида задач, различающихся формой использования условия прочности (7.29):

- а) проверка напряжений (проверочный расчет);
- б) подбор сечения (проектный расчет);
- в) определение допускаемой нагрузки (определение грузоподъемности).

Методика решения этих задач для балок из пластичных и хрупких материалов различна, так как балки из пластичных материалов одинаково работают на растяжение и сжатие, а из хрупких материалов лучше работают на сжатие, чем на растяжение. Это влияет на применяемые формы поперечных сечений балок и на способ определения опасного сечения.

Известные различия имеются также в расчетах балок постоянного по всей длине и переменного поперечного сечения.

Кроме того, следует иметь в виду, что в некоторых (сравнительно редких) случаях расчет на прочность только по наибольшим нормальным напряжениям, действующим в поперечном сечении балки, недостаточен, и приходится дополнительно производить проверку прочности также по главным напряжениям, возникающим в наклонных сечениях, и по максимальным касательным напряжениям.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. ЧТО НАЗЫВАЕТСЯ ПРЯМЫМ ИЗГИБОМ?

2. Что называется чистым и поперечным изгибом?
3. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях бруса?
4. Какие правила знаков приняты для каждого из внутренних усилий?
5. Как вычисляются изгибающий момент и поперечная сила в поперечном сечении бруса?
6. Какая дифференциальная зависимость существует между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки?

8 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

8.1 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОГО БРУСА

Для стального бруса (рис. 8.1) определить значения внутренних усилий и построить соответствующие эпюры: эпюры нормального усилия, нормального напряжения и перемещения. Принять $[\sigma] = 110$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа., $l = 0,5$ м, $P = 15$ кН.

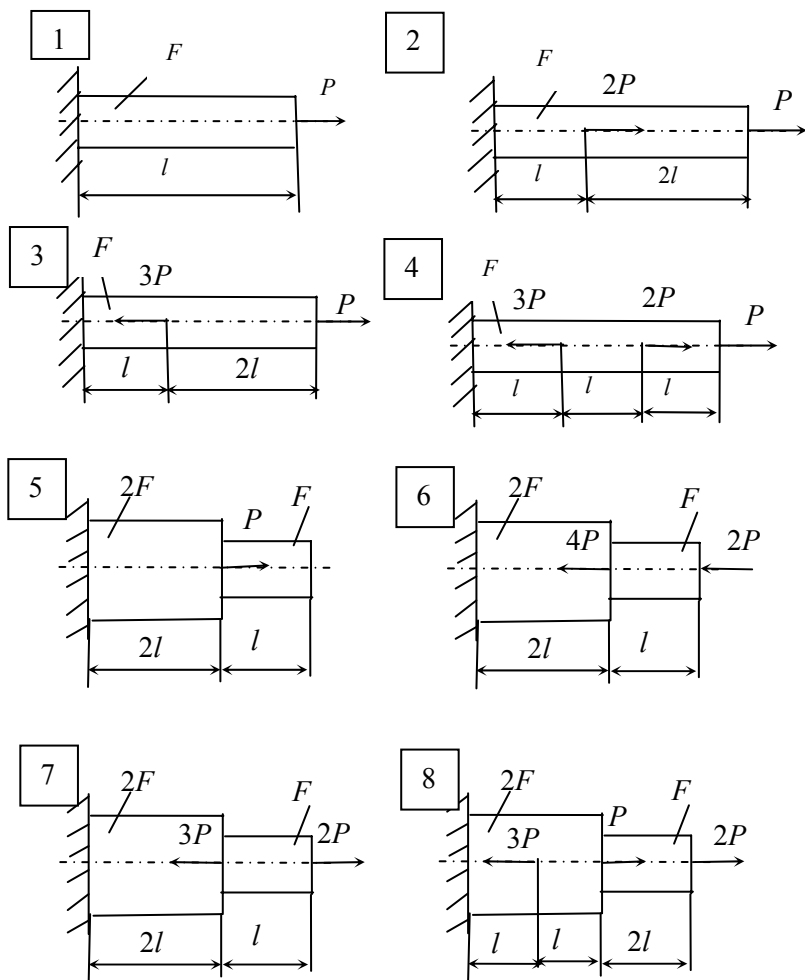


Рис. 8.1

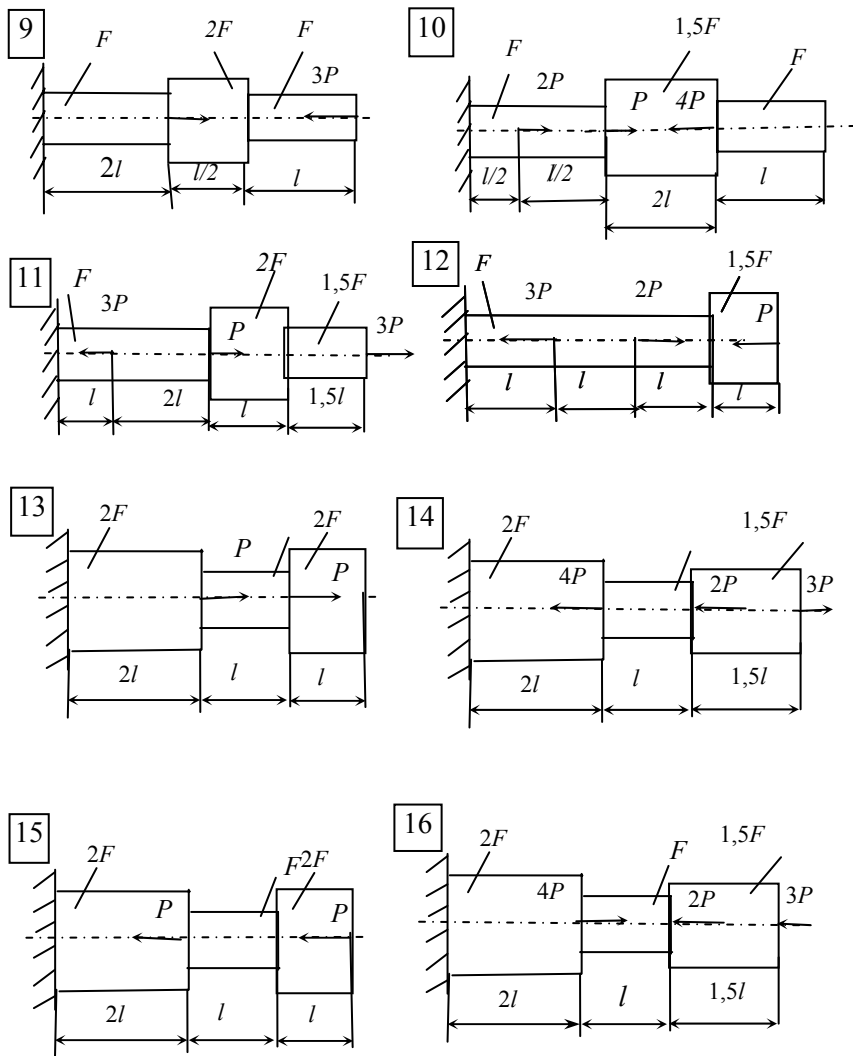


Рис. 8.1 Продолжение
 8.2 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОГО БРУСА

Стальной стержень, заземленный обоими концами, нагружен силами P (рис. 8.2). Раскрыть статическую неопределенность, построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений. Принять $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $l = 0,4 \text{ м}$, $P = 14 \text{ кН}$.

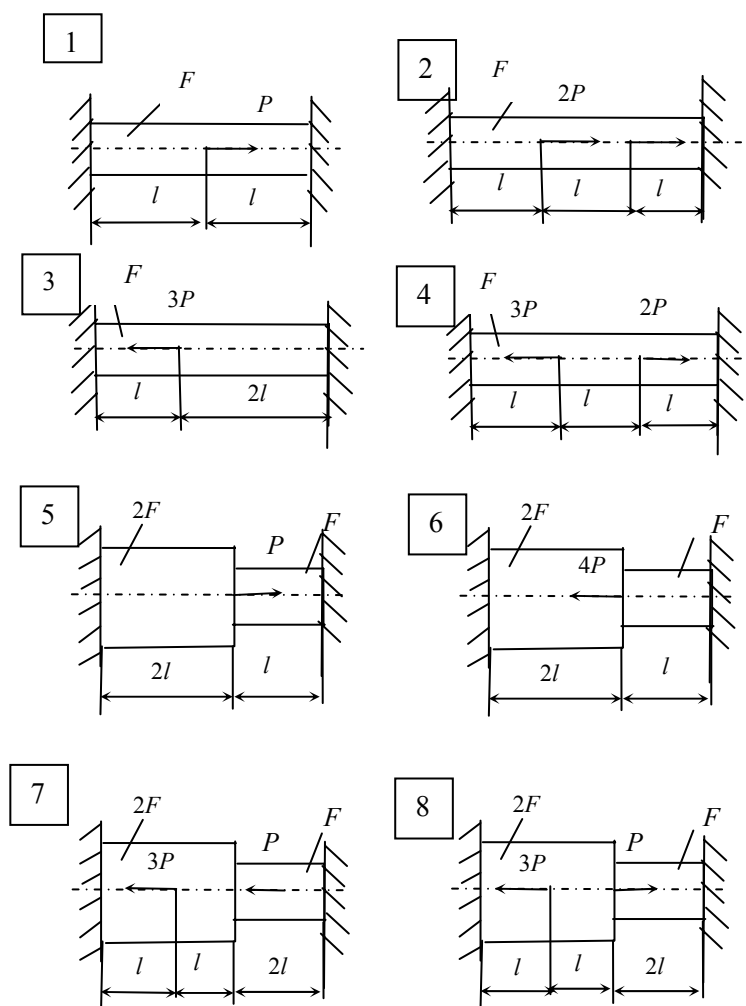


Рис. 8.2

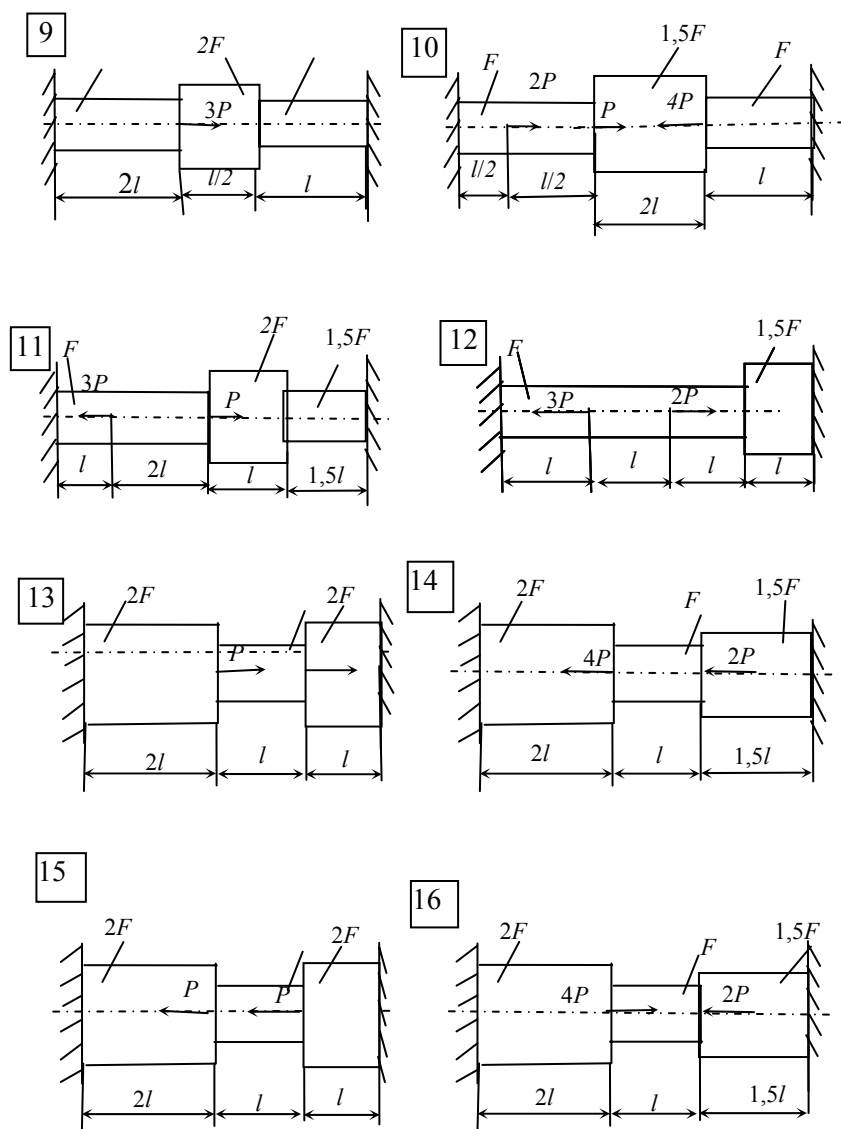


Рис. 8.2 Продолжение
8.3 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ
СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Абсолютно жесткий брус (рис. 8.3) шарнирно поддерживается стальными стержнями, или крепится посредством опорных устройств; брус нагружен силами P . Требуется определить площади поперечных сечений стержней 1 и 2, определить перемещения этих стержней. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $l = 0,5$ м, $Q = 60$ кН.

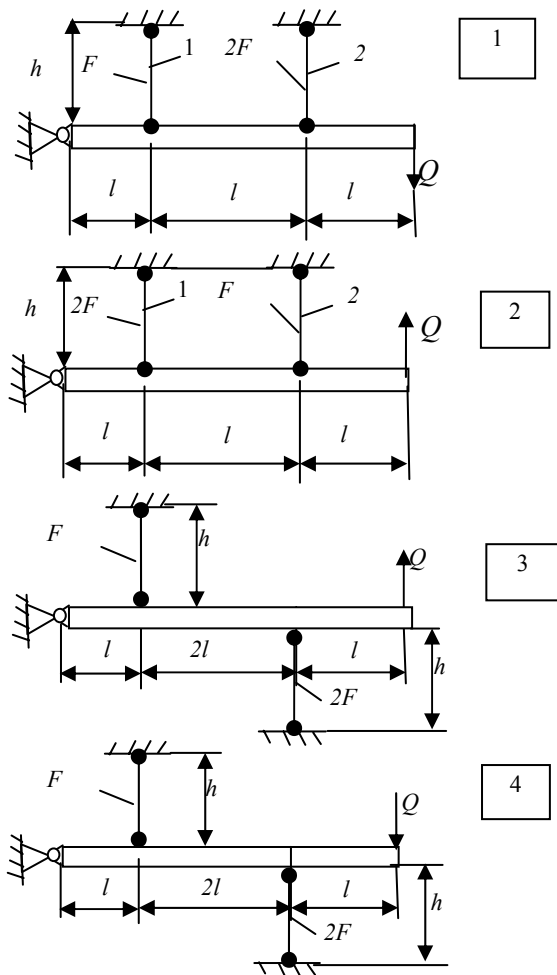
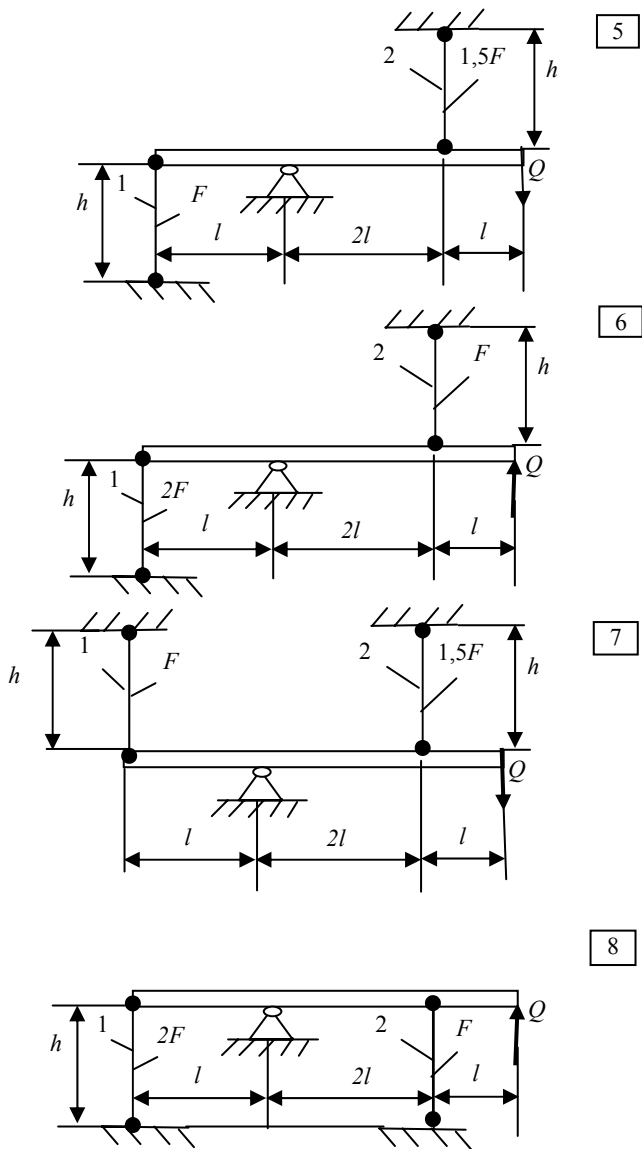


Рис. 8.3



8.3 Продолжение

8.4 КРУЧЕНИЕ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Для стального вала (рис. 8.4) необходимо: из условия равновесия вала найти значение момента X ,

построить эпюру крутящих моментов, из условия прочности определить размеры поперечных сечений d , построить эпюру углов закручивания. $m_1 = 1000$ Нм, $m_2 = 3,6$ Нм, $m_3 = 1,4$ Нм. Допускаемое напряжение $[\tau] = 40$ МПа, модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

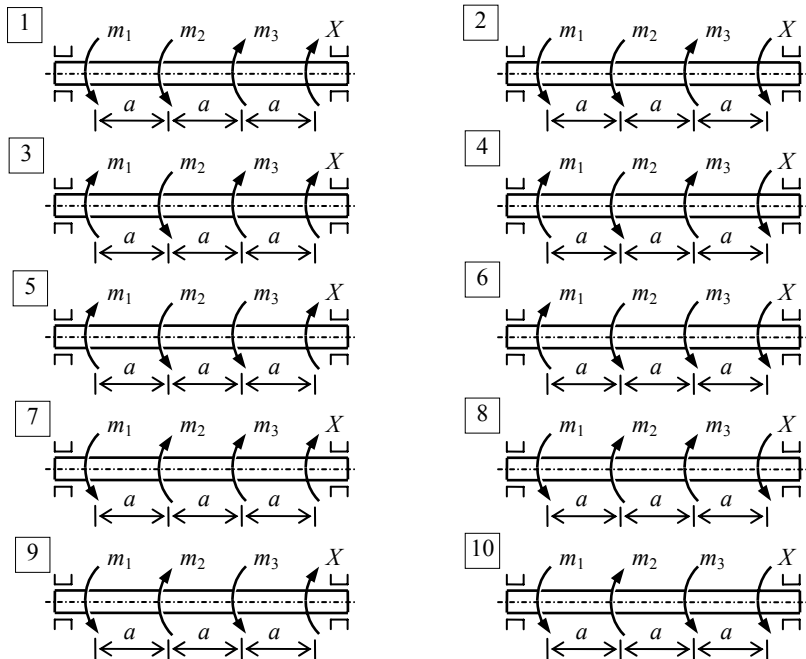


Рис. 8.4
8.5 ПРЯМОЙ ИЗГИБ

Составить выражения поперечных сил и изгибающих моментов для всех участков балок, изображенных на рис. 8.5, и построить эпюры Q и M . Принять $P = 15$ кН, $m = 20$ кНм, $q = 5$ кН/м, $a = 1,2$ м, $b = 1,4$ м, $c = 1,5$ м.

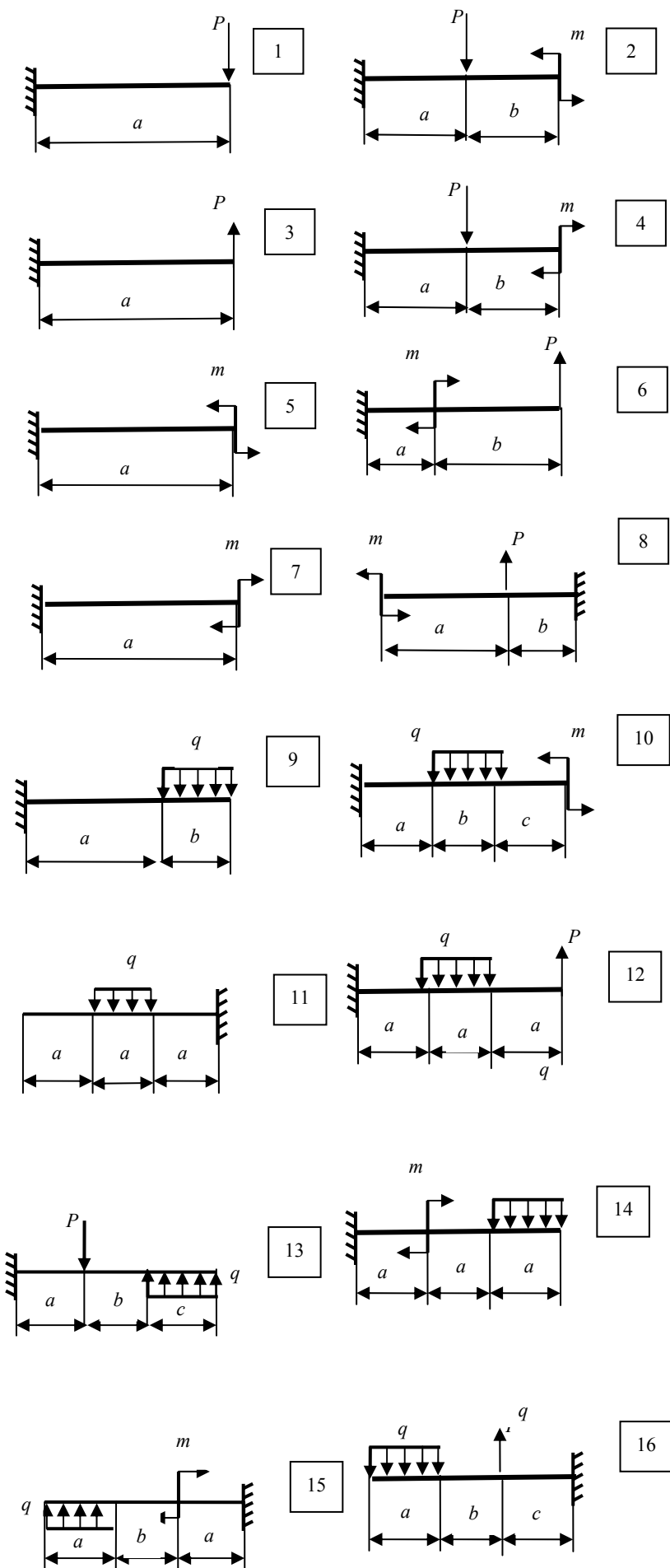
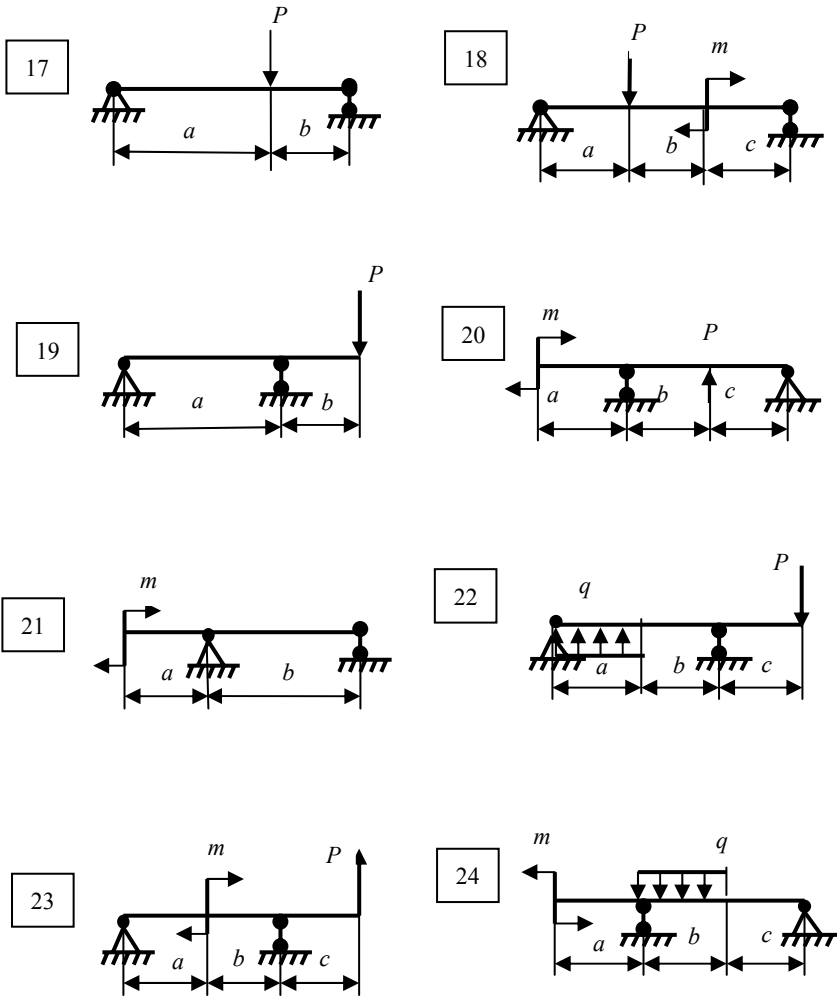


Рис. 8.5

Рис. 8.5 Продолжение

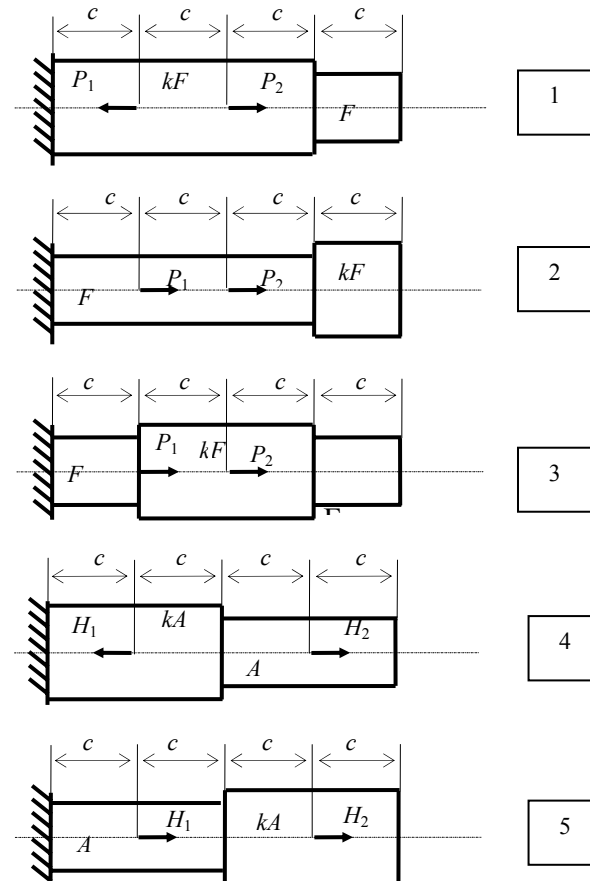


**Рис. 8.5 Продолжение
9 РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫЕ РАБОТЫ**

9.1 РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

9.1.1 Расчет ступенчатого стержня

Для стального ступенчатого бруса определить значения внутренних силовых факторов и построить соответствующие эпюры: эпюры нормального уси-



лия, нормального напряжения и перемещения. Данные взять из табл. 9.1 и рис. 9.1 по указанию преподавателя.

Рис. 9.1

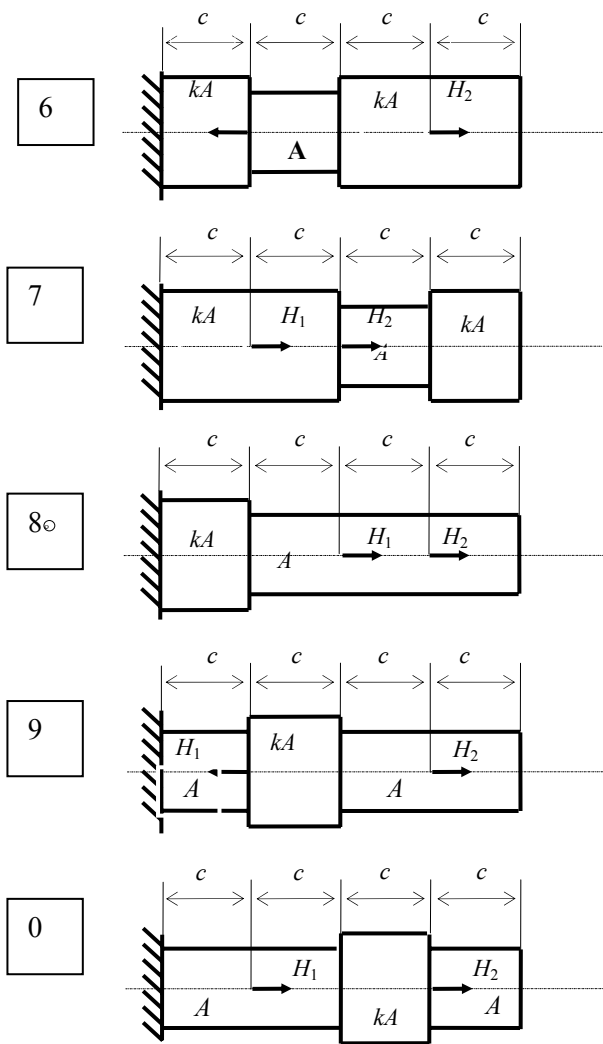


Рис. 9.1 Продолжение

Таблица 9.1

№ стро- ки	№ схе- мы	K	c , см	H_1 , кН	H_2 , кН
1	1	1,1	10	90	100
2	2	1,2	12	95	105
3	3	1,3	13	100	110
4	4	1,4	14	105	115
5	5	1,5	15	110	120
6	6	1,6	16	115	125
7	7	1,7	17	120	130
8	8	1,8	18	125	140
9	9	1,9	19	130	145
0	0	2,0	20	135	150

	а	б	в	г	д
--	---	---	---	---	---

При решении задачи принять: модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; допусаемое напряжение $[\sigma] = 100$ МПа.

*Порядок выполнения проектного расчета
(подбор площади поперечного сечения)*

1. ВЫЧЕРТИТЬ В МАСШТАБЕ РАСЧЕТНУЮ СХЕМУ В СООТВЕТСТВИИ СО СВОИМИ ДАННЫМИ.

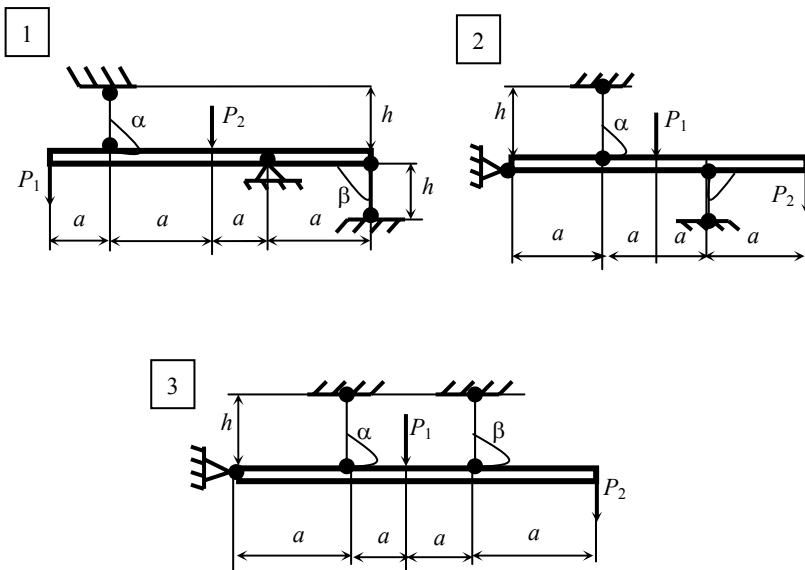
2. Определить значение продольных сил на каждом участке.
3. Определить сечение, в котором значение нормального напряжения будет максимальным.
4. Из условия прочности подобрать величину поперечного сечения бруса.
5. Определить напряжения на каждом участке бруса и перемещения бруса.
6. Построить эпюры N , σ , δ .

9.1.2 Расчет статически неопределимого бруса

По условиям задачи 9.1.1, считая, что правый край бруса жестко заземлен, раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений.

9.1.3 Расчет статически неопределимой стержневой системы

Абсолютно жесткий брус шарнирно поддерживается стальными стержнями, или крепится посредством опорных устройств; брус нагружен силами P_i (рис. 9.2 и табл. 9.2). Требуется выполнить проективный расчет (рассчитать площади стержней).



№ варианта	α , град.	β , град.	P_1 , кН	P_2 , кН
1	90	30	–	15
2	40	40	10	–
3	120	90	–	20
4	130	130	25	–
5	120	30	–	30
6	45	130	35	–
7	90	30	40	–
8	40	40	–	45
9	120	30	30	–
0	130	130	–	25

При решении задачи принять: длину участка $a = 1,5$ м, $h = 0,5$ м; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; допускаемое напряжение $[\sigma] = 100$ МПа.

*Порядок выполнения проектного расчета
(подбор площади поперечного сечения)*

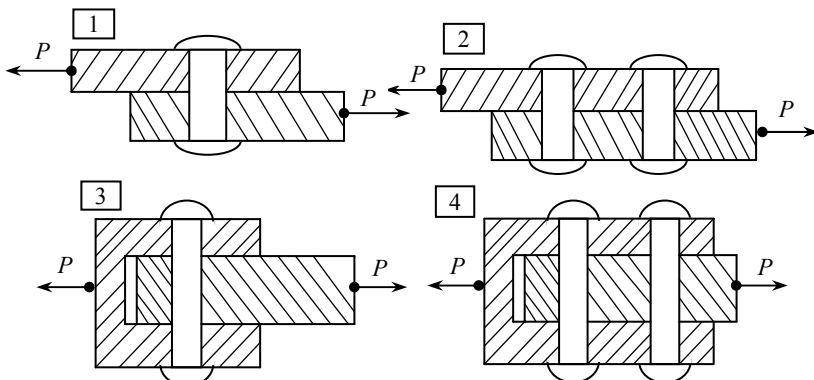
- ВЫЧЕРТИТЬ РАСЧЕТНУЮ СХЕМУ В СООТВЕТСТВИИ СО СВОИМИ ДАННЫМИ.**
- Определить степень статической неопределимости системы.
- Показать деформированное состояние системы, вызванное действием силы P .
- Раскрыть статическую неопределимость системы.
- ОПРЕДЕЛИТЬ НАИБОЛЬШИЕ ПО АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЕ НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕРЖНЯХ.**
- ИЗ УСЛОВИЯ ПРОЕКТИРОВОЧНОГО РАСЧЕТА ОПРЕДЕЛИТЬ ПЛОЩАДИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ.**
- Графически проверить правильность решения.

9.2 СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

9.2.1 Сдвиг (расчет заклепочного соединения)

Из условия прочности на срез, рассчитать диаметр заклепки.

Принять $[\tau] = 40$ МПа.



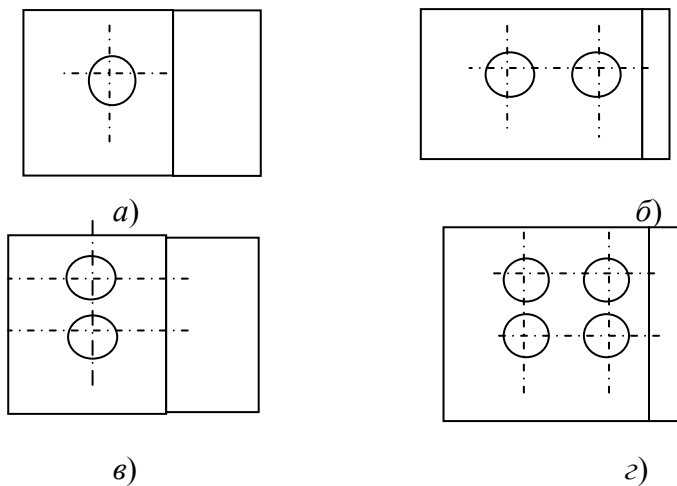


Рис. 9.3

Таблица 9.3

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
№ схе- мы	1а	1в	2б	2г	3а	3в	4б	4г
1 P , кН	0,6	1,2	1,5	3	0,8	1,2	2,4	4
2 P , кН	0,8	1,4	1,6	2,8	1	1,4	2,8	3,6
3 P , кН	0,7	1,6	1,8	2,6	1,2	1	2,6	3,8
4 P , кН	0,5	1	1,4	3,2	1,4	0,8	3	4,2

9.2.2 Кручение статически определимого вала

Для ступенчатого вала необходимо: построить эпюру крутящих моментов; из условия прочности определить размеры поперечных сечений d_1 и d_2 ; построить эпюру углов закручивания (рис. 9.4 и табл. 9.4).

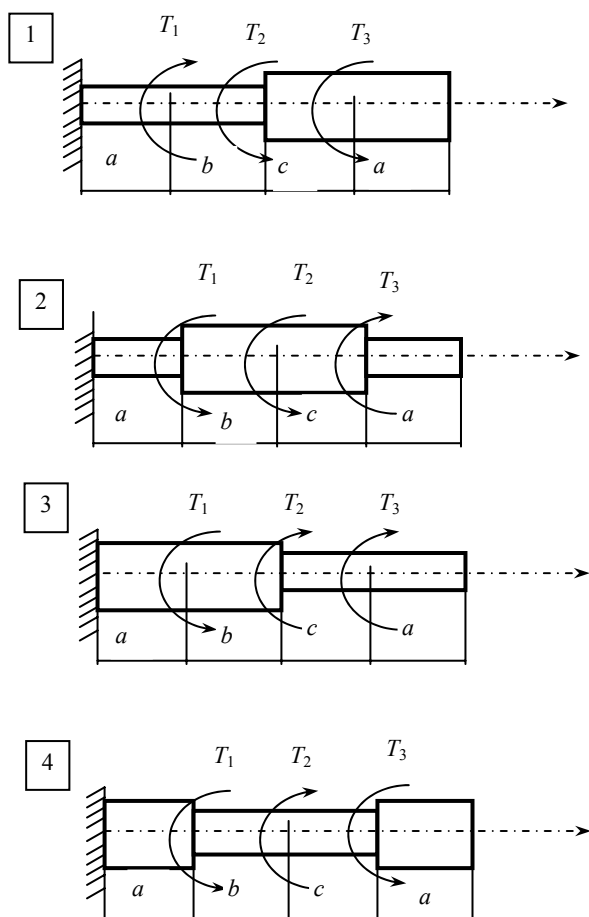


Рис. 9.4

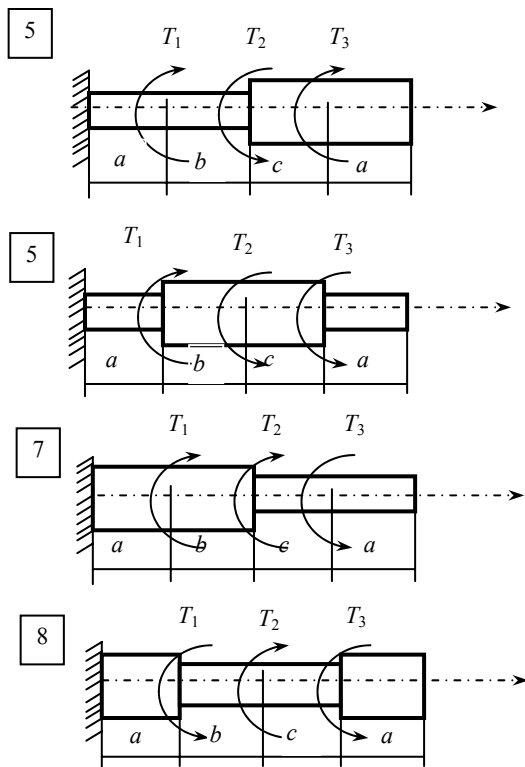


Рис. 9.4 Продолжение

Таблица 9.4

	$T_1,$ кН м	$T_2,$ кН м	$T_3,$ кН м	Длина участка, м				d_2/d_1	[τ], МПа
				1	2	3	4		
1	2	1,5	1	0,1	0,1	0,1	0,2	1,5	35
2	1	2	1,5	0,1	0,1	0,2	0,2	2	40
3	-2	- 1,5	1	0,1	0,2	0,2	0,2	2,5	45
4	2	- 1,5	2	0,2	0,1	0,1	0,2	3	50
5	-3	4	-2	0,1	0,2	0,2	0,1	3,5	55
6	-2	3	-2	0,3	0,2	0,2	0,2	1,5	60
7	1	-2	-3	0,3	0,3	0,2	0,2	2,5	65
8	-3	1	-2	0,3	0,3	0,3	0,2	3	70

9.2.3 Кручение статически неопределимого вала

По условию задачи 9.2.2, считая, что правый край вала жестко защемлен, раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры крутящих моментов и углов закручивания.

9.3 ПРЯМОЙ ИЗГИБ

9.3.1 Статически определимые балки

Требуется: 1) построить эпюры Q и M ; 2) определить сечение, в котором значение изгибающего момента будет максимальным; 3) из условия прочности подобрать размеры прямоугольного поперечного сечения балки со сторонами h – большая, b – меньшая (отношение сторон $h/b = 2$) (табл. 9.5 и рис. 9.5).

Таблица 9.5

№ строки	№ схемы	P , кН	m , кНм	q , кН/м
1	1а, б	1	2	3
2	2а, б	2	3	4
3	3а, б	3	4	5
4	4а, б	4	5	6
5	5а, б	5	6	7
6	6а, б	6	7	8
7	7а, б	7	8	9
8	1а, б	9	10	15
9	2а, б	10	15	20

При решении задачи принять: длину участка $a = 1$ м; допускаемое напряжение $[\sigma] = 100$ МПа.

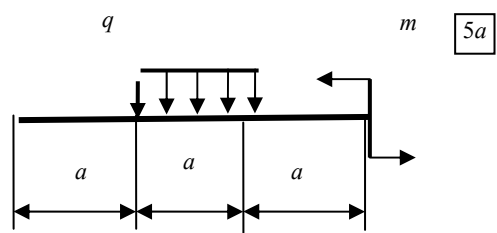
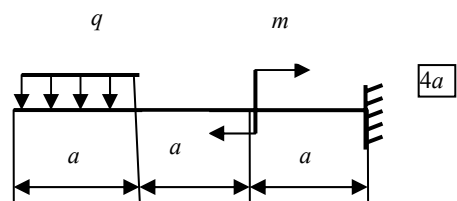
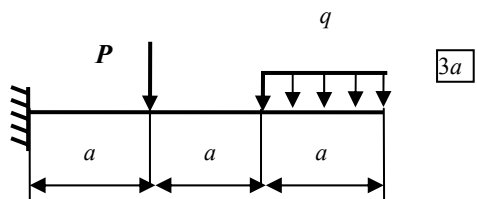
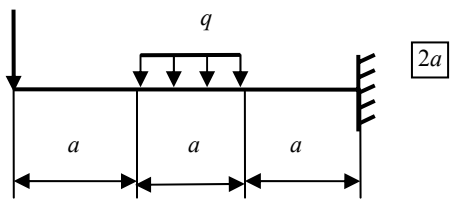
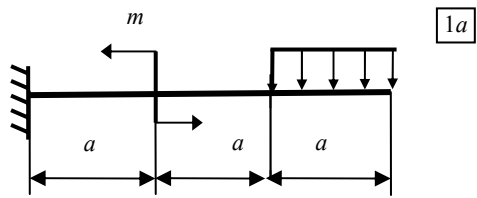


Рис. 9.5

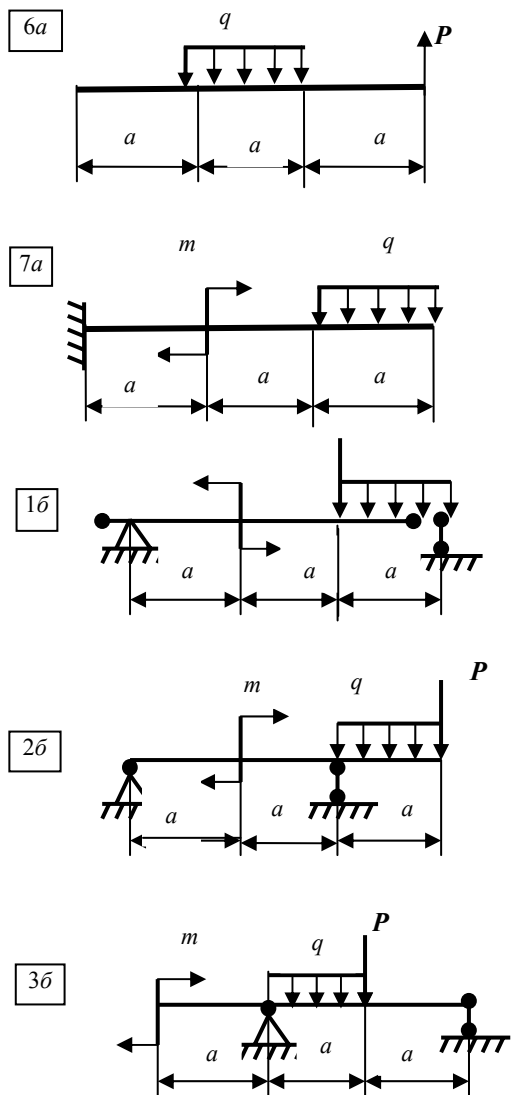


Рис. 9.5 Продолжение

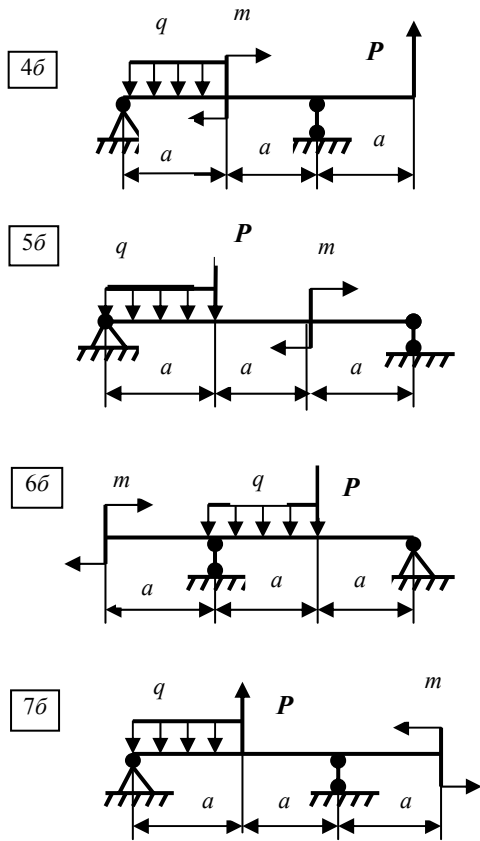


Рис. 9.5 Продолжение

*Порядок выполнения проектного расчета
(подбор площади поперечного сечения)*

ВЫЧЕРТИТЬ В МАСШТАБЕ РАСЧЕТНУЮ СХЕМУ В СООТВЕТСТВИИ СО СВОИМИ ДАННЫМИ.

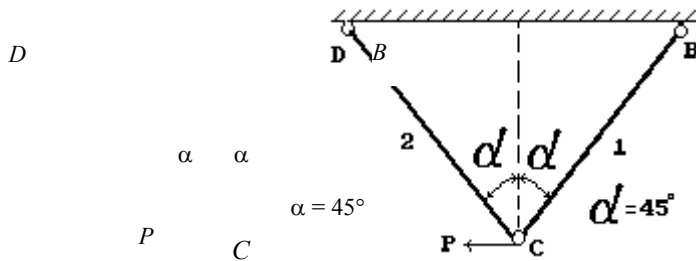
Определить значение поперечных сил Q и изгибающих моментов M на каждом участке (построить эпюры Q и M).

Определить сечение, в котором значение изгибающего момента будет максимальным.

Из условия прочности подобрать величину поперечного сечения бруса.

10 ТЕСТЫ

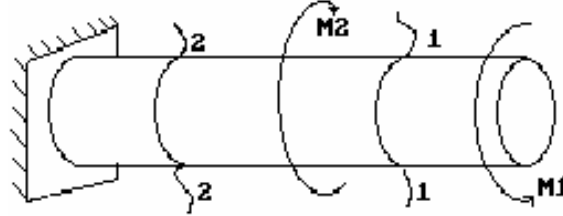
- 1 Способность конструкции (или отдельной детали) сопротивляться деформации называется ...
- 1) жесткостью;
 - 2) изотропностью;
 - 3) выносливостью;
 - 4) устойчивостью;
 - 5) прочностью.



В стержневой системе, изображенной на рисунке, все соединения шарнирные. Площади поперечных сечений стержней равны $A_1 = A_2 = \sqrt{2} \text{ см}^2$. Допускаемое напряжение для стержня ВС равно $[\sigma]_1 = 160 \text{ МПа}$, для стержня СД – $[\sigma]_2 = 100 \text{ МПа}$. ($\alpha = 45^\circ$). Найденное из условий прочности стержней наибольшее допускаемое значение силы P будет равно

- 1) $P = 25 \text{ кН}$;
- 2) $P = 30 \text{ кН}$;
- 3) $P = 32 \text{ кН}$;
- 4) $P = 20 \text{ кН}$;
- 5) $P = 15 \text{ кН}$.

3 Чему равны крутящие моменты в сечениях 1–1 и 2–2 показанного на рисунке бруса?

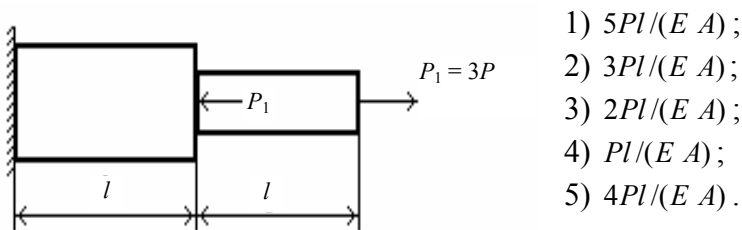


- 1) $M_{k1} = M_1; M_{k2} = M_2$;
- 2) $M_{k1} = M_1 + M_2; M_{k2} = 0$;
- 3) $M_{k1} = M_1; M_{k2} = -M_2$;
- 4) $M_{k1} = M_1; M_{k2} = M_1 - M_2$;
- 5) $M_{k1} = M_1; M_{k2} = 0$.

4 В нагруженном теле внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади какого-либо сечения, называется ... в данной точке на данной площадке.

- 1) продольной силой;
- 2) поперечной силой;
- 3) напряжением;
- 4) критической силой;
- 5) сосредоточенной силой.

5 Ступенчатый брус нагружен силами P и P_1 , действующими вдоль оси бруса. Левый конец бруса жестко закреплен. Площадь поперечного сечения правого участка бруса равна A , а левого $A_1 = 2A$. Модуль продольной упругости одинаков и равен E . Если $P_1 = 3P$, то удлинение стержня Δl будет определяться следующим соотношением:

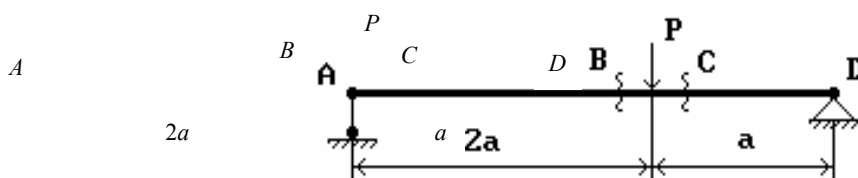


- 1) $5Pl/(EA)$;
- 2) $3Pl/(EA)$;
- 3) $2Pl/(EA)$;
- 4) $Pl/(EA)$;
- 5) $4Pl/(EA)$.

6 Круглый вал закручивается моментами $M_k = 31,4$ Нм. Длина вала $l = 62,8$ см. Угол закручивания не должен превышать $\varphi = 0,9^\circ$, модуль сдвига материала равен $G = 8 \cdot 10^{10}$ Па. Наименьшее значение диаметра круглого вала, подобранного из условия жесткости окажется равным

- 1) 2 см; 2) 1,5 см;
- 3) 2,5 см; 4) 0,5 см;
- 5) 1 см.

7 Балка на двух шарнирных опорах нагружена сосредоточенной силой. Чему равны изгибающие моменты в сечениях A, B, C, D ? (Сечения B и C находятся на ничтожно малых расстояниях от сечения, где приложена сила P).

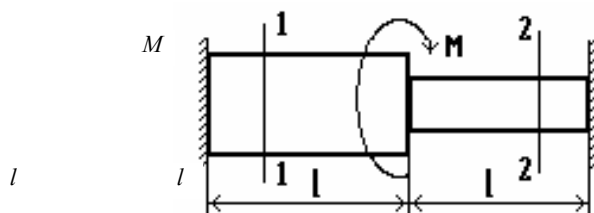


- 1) $M_A = 0; M_B = M_C = 2Pa/3; M_D = Pa$;
- 2) $M_A = M_B = 0; M_C = P2a; M_D = Pa$;
- 3) $M_A = M_D = 2Pa; M_B = M_C = Pa$;
- 4) $M_A = M_D = 0; M_B = P2a; M_C = Pa$;
- 5) $M_A = M_D = 0; M_B = M_C = 2Pa/3$.

8 Проекция главного вектора внутренних сил в поперечном сечении нагруженного бруса на ось бруса называется ...

- 1) критической силой;
- 2) сосредоточенной силой;
- 3) поперечной силой;
- 4) продольной силой;
- 5) напряжением.

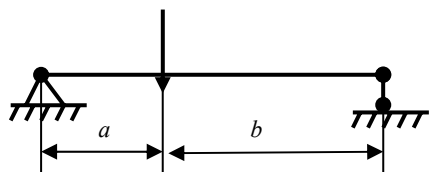
8 Круглый ступенчатый брус жестко закреплен по торцам и скручивается моментом M , как показано на рисунке. Диаметр правой части бруса в два раза меньше, чем левой. Материал левой и правой части бруса одинаков. Тогда значения крутящих моментов в поперечных сечениях бруса будут равны



- 1) $M_{k1} = M/19; M_{k2} = -18M/19$;
- 2) $M_{k1} = M/17; M_{k2} = -16M/17$;

- 3) $M_{k1} = M/2; M_{k2} = M/2;$
- 4) $M_{k1} = M/2; M_{k2} = -M/2;$
- 5) $M_{k1} = M/4; M_{k2} = 3M/4.$

10 Определить изгибающий момент в опасном сечении



11 Круглый брус скручивается моментам $M_k = 10$ кН·м. Допускаемое касательное напряжение равно $[\tau] = 50$ МПа. Момент сопротивления поперечного сечения определить по приближенной формуле $W_p = 0,2d^3$. Тогда вычисленный из условия прочности, необходимый диаметр круглого бруса окажется равным

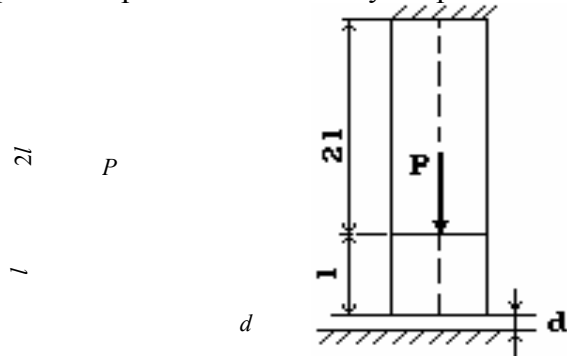
- 1) 20 см; 2) 10 см; 3) 15 см;
- 4) 5 см; 5) 1 см.

12 Напряжение, при котором наблюдается рост деформаций без изменения нагрузки, называется

...

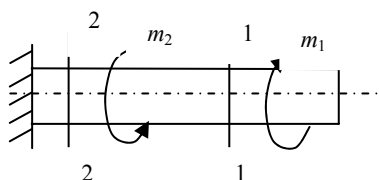
- 1) пределом пропорциональности;
- 2) пределом текучести;
- 3) критическим;
- 4) пределом прочности;
- 5) допускаемым.

13 Медный стержень закреплен верхним концом. Между нижним концом и жесткой опорной плоскостью имеется зазор $d = 1$ мм. Стержень нагружается силой, как показано на рисунке. Если $l = 0,5$ м, модуль Юнга $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, то значение напряжения в поперечных сечениях верхней части стержня в момент касания нижним концом стержня опорной плоскости будет равно



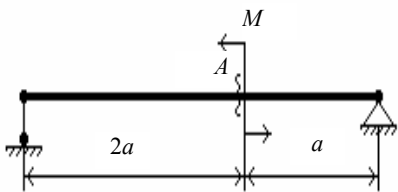
- 1) 100 МПа; 2) 50 МПа; 3) 150 МПа;
- 4) 1000 МПа; 5) 200 МПа.

14 Чему равны крутящие моменты в сечениях 1-1 и 2-2 показанного на рисунке бруса?



- 1) $M_{k1} = M_1; M_{k2} = M_2;$
- 2) $M_{k1} = M_1 + M_2; M_{k2} = 0;$
- 3) $M_{k1} = M_1; M_{k2} = -M_2;$
- 4) $M_{k1} = M_1; M_{k2} = M_1 - M_2;$
- 5) $M_{k1} = M_1; M_{k2} = 0.$

15 Балка на двух шарнирных опорах нагружена парой сил (сосредоточенным моментом M) как показано на рисунке. Чему равны изгибающий момент и поперечная сила в сечении А?



- 1) $M_A = 2M/3; Q = 0$
- 2) $M_A = M; Q = 0$
- 3) $M_A = 2M/3; Q = M/(3a)$
- 4) $M_A = M/2; Q = 0$
- 5) $M_A = M; Q = M/(3a)$.

16 Тело, у которого упругие свойства по различным направлениям неодинаковы, называется ...

- 1) изотропным;
- 2) упругим;
- 3) хрупким;
- 4) анизотропным;
- 5) неоднородным.

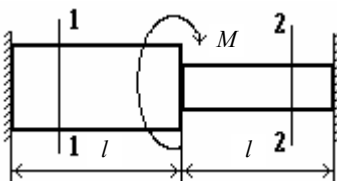
17 Момент внутренних сил в поперечном сечении бруса относительно оси бруса называется ...

- 1) крутящим моментом;
- 2) динамой;
- 3) главным моментом;
- 4) моментом инерции сечения;
- 5) изгибающим моментом.

18 В каких точках прямоугольного поперечного сечения бруса при чистом кручении возникают наибольшие касательные напряжения?

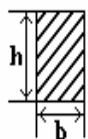
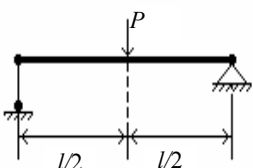
- 1) в середине коротких сторон контура сечения;
- 2) касательные напряжения везде одинаковы;
- 3) в угловых точках;
- 4) в середине длинных сторон контура сечения;
- 5) в центре тяжести сечения.

19 Круглый ступенчатый брус жестко закреплен по торцам и скручивается моментом M , как показано на рисунке. Диаметр правой части бруса в два раза меньше, чем левой. Материал левой и правой части бруса одинаков. Тогда значения крутящих моментов в поперечных сечениях бруса будут равны ...



- 1) $M_{k1} = M/19; M_{k2} = -18M/19;$
- 2) $M_{k1} = M/17; M_{k2} = -16M/17;$
- 3) $M_{k1} = M/2; M_{k2} = M/2;$
- 4) $M_{k1} = M/2; M_{k2} = -M/2;$
- 5) $M_{k1} = M/4; M_{k2} = 3M/4.$

20 Балка на двух шарнирных опорах нагружена посередине силой $P = 1,92$ кН. Длина балки $l = 1$ м; $h = 1,5b$; схема загрузки балки и ее поперечное сечение даны на рисунке. Если допустимое напряжение $[\delta] = 160$ МПа, то из условия прочности по нормальным напряжениям получим размеры прямоугольного поперечного сечения ...

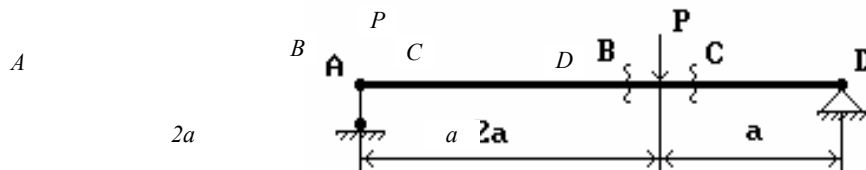


- 1) $b = 2,4$ см; $h = 3,6$ см;
- 2) $b = 0,6$ см; $h = 0,9$ см;
- 3) $b = 3$ см; $h = 4,5$ см;
- 4) $b = 1$ см; $h = 1,5$ см;
- 5) $b = 2$ см; $h = 3$ см.

21 Круглый вал закручивается моментами $M_k = 31,4 \text{ Нм}$. Длина вала $l = 62,8 \text{ см}$. Угол закручивания не должен превышать $\varphi = 0,9^\circ$, модуль сдвига материала равен $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$. Наименьшее значение диаметра круглого вала, подобранного из условия жесткости окажется равным ...

- 1) 2 см;
- 2) 1,5 см;
- 3) 2,5 см;
- 4) 0,5 см;
- 5) 1 см.

22 Балка на двух шарнирных опорах нагружена сосредоточенной силой. Чему равны изгибающие моменты в сечениях A, B, C, D ? (Сечения B и C находятся на ничтожно малых расстояниях от сечения, где приложена сила P).

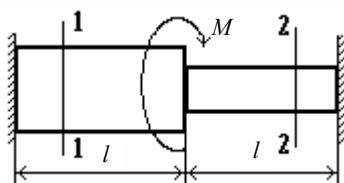


- 1) $M_A = 0; M_B = M_C = 2Pa/3; M_D = Pa$;
- 2) $M_A = M_B = 0; M_C = P2a; M_D = Pa$;
- 3) $M_A = M_D = 2Pa; M_B = M_C = Pa$;
- 4) $M_A = M_D = 0; M_B = P2a; M_C = Pa$;
- 5) $M_A = M_D = 0; M_B = M_C = 2Pa/3$.

23 Взаимный угол поворота относительно оси бруса двух его поперечных сечений называется ... участка бруса, находящегося между этими сечениями.

- 1) углом сдвига;
- 2) прогибом;
- 3) углом зацепления;
- 4) относительным сдвигом;
- 5) углом закручивания.

24 Круглый ступенчатый брус жестко закреплен по торцам и скручивается моментом M , как показано на рисунке. Диаметр правой части бруса в два раза меньше, чем левой. Материал левой и правой части бруса одинаков. Тогда значения крутящих моментов в поперечных сечениях бруса будут равны ...



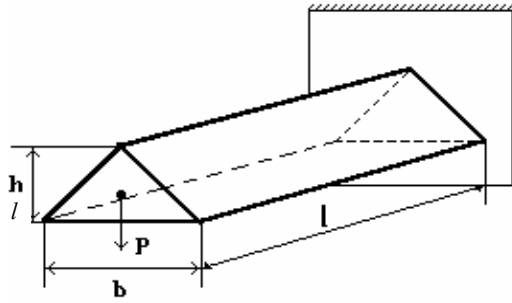
- 1) $M_{k1} = M/19; M_{k2} = -18M/19$;
- 2) $M_{k1} = M/17; M_{k2} = -16M/17$;
- 3) $M_{k1} = M/2; M_{k2} = M/2$;
- 4) $M_{k1} = M/2; M_{k2} = -M/2$;
- 5) $M_{k1} = M/4; M_{k2} = 3M/4$.

25 Консоль треугольного поперечного сечения нагружена на свободном конце силой P . Наибольшее нормальное напряжение, возникающее в балке, выразится соотношением ...

h

P

b



- 1) $\sigma = 12Pl/bh^2$;
- 2) $\sigma = 24Pl/bh^2$;
- 3) $\sigma = 6Pl/bh^2$;
- 4) $\sigma = 18Pl/bh^2$;
- 5) $\sigma = 2Pl/bh^2$.

26 В каких точках поперечного сечения балки при изгибе возникают наибольшие нормальные напряжения?

- 1) В точках наиболее удаленных от центра тяжести.
- 2) В точках наиболее удаленных от нейтральной оси.
- 3) В точках контура поперечного сечения.
- 4) В центре тяжести сечения.
- 5) В точках нейтральной оси сечения.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

-
- 1 Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1989, 623 с.
 - 2 Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1989. 512 с.
 - 3 Степин П.А. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1983. 303 с.
 - 4 Миролубов И.Н. и др. Пособие по решению задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для техн. вузов. М.: Высшая школа, 1985. 399 с.
 - 5 Сопромат: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., испр. / Под ред. Н.А. Костенко. М.: Высшая школа, 2004. 430 с.