

А.Д. НАХМАН, С.В. ПЛОТНИКОВА

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЯМ И ИХ
ПРИЛОЖЕНИЯМ**

• ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ •

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

А.Д. НАХМАН, С.В. ПЛОТНИКОВА

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЯМ И ИХ
ПРИЛОЖЕНИЯМ**

Утверждено Ученым советом университета в качестве учебного пособия



Тамбов
Издательство ТГТУ
2005

УДК 517(075)
ББК В161.6я73-1
Н349

Рецензент

Доктор физико-математических наук, профессор
А.И. Булгаков

Нахман, А.Д.

Н349 Сборник задач по дифференциальным уравнениям и их приложениям : учеб. пособие / А.Д. Нахман, С.В. Плотникова. Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. 96 с.

Приведены краткие сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений и руководство к решению задач по основным разделам: обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, дифференциальные уравнения высшего порядка, решаемые методом понижения порядка, линейные дифференциальные уравнения. Предложены варианты типовых расчетов.

Пособие предназначено для студентов инженерно-технических специальностей.

УДК 517(075)
ББК В161.6я73-1

ISBN 5-8265-0401-3

© Нахман А.Д., Плотникова С.В.,
2005

© Тамбовский государственный
технический университет
(ТГТУ), 2005

Учебное издание

НАХМАН Александр Давидович,
ПЛОТНИКОВА Светлана Валерьевна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЯМ И ИХ
ПРИЛОЖЕНИЯМ

Учебное пособие

Редактор Т.М. Глинка
Инженер по компьютерному макетированию Т.А. Сынкова

Подписано к печати 10.06.2005.

Формат 60 × 84/16. Гарнитура Times. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Объем: 5,58 усл. печ. л.; 5,45 уч.-изд. л.

Тираж 400 экз. С. 445

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, ул. Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

ПРОИСХОДЯЩИЙ В ПОСЛЕДНИЕ ГОДЫ БУРНЫЙ РОСТ ОБЪЕМА НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ, СОЦИАЛЬНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ В ОБЩЕСТВЕ ОБУСЛОВИЛИ СУЩЕСТВЕННЫЙ ПЕРЕСМОТР СОДЕРЖАНИЯ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ И, В ЧАСТНОСТИ, ЕГО ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО КОМПОНЕНТА. РАСШИРИЛСЯ СПИСОК ИЗУЧАЕМЫХ РАЗДЕЛОВ, СДЕЛАНЫ АКЦЕНТЫ НА ФОРМИРОВАНИЕ НАВЫКОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ, УГЛУБЛЕНИЕ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ, В СВЯЗИ С ЧЕМ МАТЕМАТИКА ПРИОБРЕТАЕТ ЧЕРТЫ ПРОФЕССИОНАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОГО КУРСА.

Однако, дальнейшее увеличение количества часов, отводимых на изучение математических дисциплин становится уже нереальным. В связи с этим встает вопрос о более тщательном анализе и проектировании содержания учебного материала, рациональном его изложении, поиске новых путей передачи знаний, разработке методик преподавания, использующих современные информационные технологии. Возрастает роль интенсивного фактора и, в частности, самостоятельной работы студентов.

Рабочие программы инженерных вузов содержат такую позицию, как выполнение типовых расчетов. В отличие от традиционных домашних контрольных работ по математике, типовой расчет отличается комплексным подходом к контролю знаний по данному разделу, всесторонним охватом, прикладной направленностью (что воспринимается как ценный материал для будущей профессиональной деятельности), наличием (в качестве составляющей) вычислительного компонента.

Предлагаемое учебное пособие разработано с учетом вышеперечисленных современных тенденций.

Оно посвящено разделу «Обыкновенные дифференциальные уравнения», являющемуся одним из центральных в курсе математики. Главная его составляющая – подборки заданий для самостоятельного решения (сгруппированных в тридцать вариантов) по разделам: основные типы дифференциальных уравнений первого порядка, уравнения, допускающие понижение порядка, линейные дифференциальные уравнения высших порядков, краевые задачи, системы дифференциальных уравнений. Существенной особенностью является наличие задач с физическим содержанием.

Теоретическая основа для выполнения заданий (в форме основных положений курса) содержится в части первой пособия. Там же приведены алгоритмы выполнения типовых заданий и образцы решений. Авторы надеются, что материал найдет активное применение в учебном процессе студентов инженерных специальностей.

Авторы выражают благодарность ассистенту кафедры прикладной математики и механики ТГТУ Е.С. Сатиной за полезные замечания.

1 УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1 Уравнение вида

$$y' = f(x, y) \quad (1.1)$$

будем рассматривать как задачу о нахождении функции $y = y(x)$, которая при подстановке в (1.1) обращает это соотношение в тождество.

На самом деле в процессе интегрирования определится целый класс решений

$$y = y(x, C), \quad (1.2)$$

где C – произвольная постоянная. Класс (1.2) называется общим решением дифференциального уравнения; часто зависимость между x , C и y получается в неявном виде: $\Phi(x, C, y) = 0$. При каждом конкретном значении $C = C_0$ получаем частное решение

$$y = y(x, C_0). \quad (1.3)$$

Задача о нахождении частного решения (1.1) обычно формулируется в виде

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

(задача Коши), где (x_0, y_0) – заданная точка. Найдя общее решение (1.2), достаточно подставить (согласно (1.4)) значения $x = x_0, y = y_0$ в равенство (1.2), чтобы определить соответствующее значение $C = C_0$; затем ответ записывается в виде (1.3).

1.2 Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x)g(y) \quad (1.5)$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Если y' представить как отношение $\frac{dy}{dx}$ дифференциалов, то (1.5) преобразуется к виду

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Интегрируя, получим общее решение

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Частным случаем (1.5) является $y' = f(x)$; общее решение здесь имеет вид

$$y = \int f(x)dx.$$

Уравнение допускает разделение переменных, если записано в несколько иной, чем (1.5), хотя эквивалентной форме. Характерным признаком здесь является наличие произведений (частных) "блоков", зависящих лишь от x и лишь от y .

Замечания:

1 Если обе части уравнения делим на переменную величину, то ограничиваемся случаем, когда она отлична от нуля.

2 Возникающая при интегрировании произвольная постоянная может быть записана в виде kC или $k \ln C$, где k – произвольно выбранный множитель. Такая запись бывает удобна для упрощения ответа.

Пример 1. $xy' = (4 + y^2) \ln x$. Найти общее решение.

Решение. Имеем уравнение с разделяющимися переменными (см. отмеченный выше характерный признак)

$$x \frac{dy}{dx} = (4 + y^2) \ln x.$$

Умножим обе части на dx , после чего "лишними" окажутся в левой части множитель x , а в правой – $(4 + y^2)$. Поделим, следовательно, обе части на $x(4 + y^2)$. Последовательно получаем

$$\begin{aligned} xdy &= (4 + y^2) \ln x dx; \\ \frac{dy}{4 + y^2} &= \frac{\ln x}{x} dx. \end{aligned}$$

Переменные разделены. Произведем интегрирование

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{2^2 + y^2} &= \int \ln x d(\ln x); \\ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{2} &= \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{1}{2} C. \end{aligned}$$

Итак, получено общее решение

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{2} = \ln^2 x + C.$$

Пример 2. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} (2xy + x)dx - (x^2 + 1)dy = 0; \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение. Если уравнение переписать в виде

$$x(2y + 1)dx = (x^2 + 1)dy,$$

то видим возможность разделения переменных: следует поделить обе части на произведение $(2y + 1)(x^2 + 1)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 + 1}dx &= \frac{dy}{2y + 1}; \\ \int \frac{x dx}{x^2 + 1} &= \int \frac{dy}{2y + 1}; \\ \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} &= \int \frac{dy}{2y + 1}; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln(2y + 1) + \frac{1}{2} \ln C.$$

Упрощаем полученное общее решение:

$$\ln(x^2 + 1) = \ln(2y + 1) + \ln C;$$

$$\ln(x^2 + 1) = \ln C(2y + 1);$$

$$x^2 + 1 = C(2y + 1).$$

Теперь выясним, при каком значении постоянной C будет выполнено указанное начальное условие. Подставляя $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$, получим

$$0 + 1 = C \left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right), \quad C = \frac{1}{2}.$$

При найденном значении C из общего решения получаем

$$x^2 + 1 = \frac{1}{2}(2y + 1) \quad \text{или} \quad y = x^2 + \frac{1}{2}.$$

Замечания:

1 Для определенности считаем, что выражения, содержащиеся под знаком логарифма, положительны, поэтому не записываем соответствующий знак модуля.

2 Здесь и в дальнейшем используются следующие свойства логарифмов:

$$\ln a + \ln b = \ln a \cdot b;$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b};$$

$$k \ln a = \ln a^k;$$

$$\ln z = m \Leftrightarrow z = e^m;$$

$$\ln 1 = 0; \quad \ln e = 1.$$

1.3 Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.6)$$

или приводящееся элементарными преобразованиями к указанному виду, называется *однородным*. Заменой переменных $t = \frac{y}{x}$ (откуда $y' = t + t'x$), уравнение (1.6) преобразуется к рассмотренному типу п. 1.2.

Пример 1. $xy' - y + x \cos^2 \frac{y}{x} = 0$. Найти общее решение.

Решение. Непосредственное разделение переменных здесь невозможно: дробь $\frac{y}{x}$, содержащаяся под знаком косинуса, наводит на мысль о виде (1.6). Действительно, поделив обе части на x , получим

$$y' - \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x} = 0.$$

Уравнение теперь зависит от отношения $\frac{y}{x}$ (однородное); положим $t = \frac{y}{x}$, тогда $y' = t + x \frac{dt}{dx}$ и

$$t + x \frac{dt}{dx} - t + \cos^2 t = 0.$$

Разделяем переменные

$$\begin{aligned} \frac{x dt}{dx} &= -\cos^2 t; \\ x dt &= -\cos^2 t dx; \\ -\frac{dt}{\cos^2 t} &= \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Интегрируя, имеем

$$-\operatorname{tg} t = \ln x + \ln C \quad \text{или} \quad \ln Cx + \operatorname{tg} t = 0.$$

Осталось вспомнить, что $t = \frac{y}{x}$:

$$\ln Cx + \operatorname{tg} \frac{y}{x} = 0.$$

Пример 2. $y' = \frac{y}{x+y}$. Найти общее решение.

Решение. Уравнение принимает вид (1.6), если числитель и знаменатель дроби поделить на x

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}.$$

Для $t = \frac{y}{x}$ имеем

$$t'x + t = \frac{t}{1+t};$$

$$x \frac{dt}{dx} = \frac{t}{1+t} - t;$$

$$xdt = \frac{-t^2}{1+t} dx;$$

$$\frac{1+t}{t^2} dt = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем полученное уравнение

$$\int \frac{1+t}{t^2} dt = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\int t^{-2} dt + \int \frac{dt}{t} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$-\frac{1}{t} + \ln t = C - \ln x;$$

$$\ln tx - \frac{1}{t} = C.$$

Возвращаемся к исходным переменным и записываем окончательный ответ

$$\ln y - \frac{x}{y} = C.$$

1.4 Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1.7}$$

называется *линейным*, его характерным признаком является наличие лишь первых степеней функции y и ее производной y' .

Будем искать решение в виде

$$y = u(x)v(x),$$

тогда (аргумент x в дальнейшем опускаем)

$$y' = u'v + uv'$$

и (1.7) записываем следующим образом

$$u'v + u(v' + pv) = q.$$

Если множитель $v = v(x)$ выбрать как некоторое решение уравнения $v' + pv = 0$, то исходное уравнение (1.7) эквивалентно следующему

$$u'v = q;$$

если $u = u(x, C)$ – его общее решение, то $y = v(x)u(x, C)$.

По той же схеме решается и уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \tag{1.8}$$

где $\alpha \neq 0; 1$.

Пример 1. $y' - \frac{y}{2\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}$. Найти общее решение.

Решение. В наличии – характерные признаки (1.7): y и y' содержатся в первых степенях. Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя в уравнение, получим

$$u'v + uv' - \frac{uv}{2\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}};$$

$$u'v + u \left(v' - \frac{v}{2\sqrt{x}} \right) = 2e^{\sqrt{x}}.$$

Положим $v' - \frac{v}{2\sqrt{x}} = 0$, тогда $u'v = 2e^{\sqrt{x}}$.

Решаем последовательно, разделяя переменные, полученные уравнения:

а)
$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{2\sqrt{x}} = 0;$$

$$dv = \frac{v}{2\sqrt{x}} dx;$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

После разделения переменных интегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx,$$

$$\ln v = \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}},$$

откуда $v = e^{\sqrt{x}}$ (выбрана одна из первообразных $v(x)$).

б) $u'v = 2e^{\sqrt{x}}$ или $\frac{du}{dx} e^{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}$; значит $du = 2dx$;

$$\int du = 2 \int dx;$$

$$u = 2x + C,$$

т.е. $u = 2x + C$ (в отличие от случая а) здесь ищется общее решение).

Поскольку $y = uv$, то ответ имеем в виде

$$y = (2x + C)e^{\sqrt{x}}.$$

Пример 2. $y' \operatorname{tg} x - y = \frac{1}{2y \operatorname{ctg} x}$. Найти общее решение.

Решение. Уравнение приводится к виду (1.8) с $\alpha = -1$, если обе его части поделить на $\operatorname{tg} x$. Замечая, что $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$, имеем:

$$y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{2y}.$$

Полагаем $y = uv$, тогда $u'v + uv' - uv \operatorname{ctg} x = \frac{1}{2uv}$.

Как и выше, группируем второе и третье слагаемые:

$$u'v + u(v' - v \operatorname{ctg} x) = \frac{1}{2uv},$$

полагая затем $v' - v \operatorname{ctg} x = 0$, имеем $u'v = \frac{1}{2uv}$. Тогда:

а) $\frac{dv}{dx} = v \operatorname{ctg} x$;

$$\frac{dv}{v} = \operatorname{ctg} x dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{ctg} x dx;$$

$$\ln v = \ln \sin x;$$

откуда $v = \sin x$.

б) $u' \sin x = \frac{1}{2u \sin x}$ или $\frac{du}{dx} \sin x = \frac{1}{2u \sin x}$;

$$2u du = \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Интегрируя, получим:

$$u^2 = C - \operatorname{ctg} x, \quad \text{т.е.} \quad u = \sqrt{C - \operatorname{ctg} x}.$$

Итак, $y = \sin x \sqrt{C - \operatorname{ctg} x}$.

2 УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1 Функция $y = y(x)$ есть решение уравнения

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2.1)$$

(уравнение *второго порядка* соответственно порядку *старшей производной*), если при ее подстановке в (2.1) оно обращается в тождество. Общее решение (2.1)

$$y = y(x, C_1, C_2) \quad \text{или} \quad \Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

зависит от двух произвольных постоянных (поскольку в процессе нахождения y интегрирование возникает дважды). Задача Коши имеет вид

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'); \\ y(x_0) = y_0; \\ y'(x_0) = y'_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$(2.3)$$

где (x_0, y_0, y'_0) – заданная точка пространства; чтобы удовлетворить начальным условиям (2.2), (2.3), следует соответствующим образом подобрать C_1 и C_2 .

2.2 В следующих случаях путем надлежащей замены переменных уравнение второго порядка решается *последовательным рассмотрением двух уравнений первого порядка*:

а) $y'' = f(x)$ – уравнение не содержит явным образом переменных y и y' . Полагаем $z = z(x) = y'$, тогда $y'' = \frac{dz}{dx}$. Имеем, следовательно:

$$\frac{dz}{dx} = f(x)$$

(случай первого порядка, причем переменные – разделяются), откуда

$$z = \Phi(x, C_1).$$

Возвращаясь к старой переменной, имеем $y' = \Phi(x, C_1)$ и, после интегрирования, $y = \Psi(x, C_1, C_1)$; здесь функции Φ и Ψ возникают как результат интегрирования.

Замечание. Фактически общее решение имеет вид

$$y = \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx + C_2.$$

б) $y'' = f(x, y')$ – уравнение не содержит явным образом переменную y . Полагаем, как и в п. а) $z = y'$, тогда $z' = f(x, z)$.

Найдя общее решение $z = \Phi(x, C_1)$, имеем $y' = \Phi(x, C_1)$ и снова решаем полученное уравнение первого порядка.

в) $y'' = f(y, y')$ – уравнение не содержит явным образом переменную x .

Полагаем $y' = p(y)$, тогда $y'' = p \frac{dp}{dy}$ и, следовательно:

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Находя общее решение этого уравнения

$$p = \Phi(y, C_1),$$

получаем

$$y' = \Phi(y, C_1),$$

откуда искомое общее решение $\Psi(x, y, C_1, C_2) = 0$.

Говорят, что в указанных случаях а) – в) возможно *понижение порядка*.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$\sin \frac{x}{3} - y'' = 6 - 2x.$$

Решение. Если выразить из уравнения y'' , то получим случай а):

$$y'' = \sin \frac{x}{3} + 2x - 6.$$

Положим $y' = z$, тогда $y'' = z'$ и, следовательно:

$$z' = \sin \frac{x}{3} + 2x - 6,$$

откуда

$$z = \int \left(\sin \frac{x}{3} + 2x - 6 \right) dx;$$

$$z = -3 \cos \frac{x}{3} + x^2 - 6x + C_1.$$

Поскольку $z = y'$, то $y' = -3 \cos \frac{x}{3} + x^2 - 6x + C_1$;

$$y = -3 \int \cos \frac{x}{3} dx + \int x^2 dx - 6 \int x dx + \int C_1 dx;$$

$$y = -9 \sin \frac{x}{3} + \frac{x^3}{3} - 3x^2 + C_1 x + C_2.$$

Пример 2. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$. Найти общее решение.

Решение. Уравнение не содержит y – случай б). Положим $z = y'$, тогда $z' = y''$ и, следовательно,

$$xz' = z \ln \frac{z}{x} \quad \text{или} \quad z' = \frac{z}{x} \ln \frac{z}{x}.$$

Получено однородное (см. 1.1.3) уравнение первого порядка. В этом случае $t = \frac{z}{x}$, $z' = t'x + t$, значит:

$$t'x + t = t \ln t \quad \text{или} \quad t'x = t(\ln t - 1).$$

Разделяем переменные

$$x \frac{dt}{dx} = t(\ln t - 1);$$

$$\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Заметим, что $d(\ln t - 1) = \frac{dt}{t}$, значит:

$$\int \frac{d(\ln t - 1)}{\ln t - 1} = \int \frac{dx}{x},$$

откуда $\ln(\ln t - 1) = \ln x + \ln C_1$ или $\ln(\ln t - 1) = \ln x C_1$;

$$\ln t - 1 = x C_1;$$

$$\ln t = 1 + x C_1;$$

$$t = e^{1+x C_1};$$

$$\frac{z}{x} = e^{1+x C_1};$$

$$z = x e^{1+x C_1}.$$

Получено уравнение первого порядка $y' = x e^{1+x C_1}$, ясно, что

$$y = \int x e^{1+x C_1} dx.$$

Интегрируем по частям $u = x$, $dv = e^{1+x C_1} dx$, тогда

$$du = dx, \quad v = \frac{1}{C_1} e^{1+x C_1}.$$

Имеем

$$y = \frac{x}{C_1} e^{1+x C_1} - \frac{1}{(C_1)^2} e^{1+x C_1} + C_2.$$

Пример 3. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} yy'' + (9/y^2) = 0; \\ y(0) = 1/3; \\ y'(0) = 9. \end{cases}.$$

Решение. Имеем случай в), так как уравнение явно не содержит переменную x . Полагая $y' = p$, получим $y'' = p \frac{dp}{dy}$, и, следовательно, уравнение принимает вид

$$yp \frac{dp}{dy} + \frac{9}{y^2} = 0,$$

или (разделяя переменные) $p dp = -\frac{9}{y^3} dy$, откуда

$$\int p dp = -9 \int y^{-3} dy,$$
$$\frac{p^2}{2} = \frac{9}{2y^2} + \frac{C_1}{2},$$

т.е. получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$(y')^2 = \frac{9}{y^2} + C_1.$$

Постоянную C_1 можно найти уже на этом этапе, если, положив $x = 0$, использовать начальные условия: $y(0) = \frac{1}{3}$, $y'(0) = 9$;

$$9^2 = \frac{9}{1/9} + C_1; \quad C_1 = 81 - 81 = 0.$$

Значит, решаем уравнение

$$(y')^2 = \frac{9}{y^2},$$
$$y' = \frac{3}{y}$$

(при извлечении корня для определенности выбран знак плюс; это оправдано тем, что в точке $x = 0$ y и y' имеют одинаковый знак). Разделяя переменные, имеем

$$ydy = 3dx;$$

$$\int ydy = 3 \int dx;$$

$$y^2 = 6x + C_2.$$

Найдем C_2 из условия $y(0) = \frac{1}{3}$: $\frac{1}{9} = 0 + C_2$, $C_2 = \frac{1}{9}$.

Следовательно:

$$y^2 = 6x + \frac{1}{9}, \quad y = \frac{\sqrt{1+54x}}{3}.$$

Пример 4. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y''/(y')^2 = 2; \\ y(0) = 0,5; \\ y'(0) = 0,5. \end{cases}$$

Решение. Уравнение явным образом не зависит ни от x , ни от y , поэтому можно выбирать способы решения как 3.2.2, б), так и 3.2.2, в). Положим, например $y' = z$, где $z = z(x)$. Тогда $y'' = \frac{dz}{dx}$, и уравнение принимает вид

$$\frac{dz}{dx} = 2z^2;$$

откуда

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int 2dx;$$

$$C_1 - \frac{1}{z} = 2x;$$

$$z = \frac{1}{C_1 - 2x};$$

$$y' = \frac{1}{C_1 - 2x}.$$

Условие $y'(0) = 0,5$ дает возможность определить соответствующее значение C_1 :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{C_1 - 0}; \quad C_1 = 2.$$

Теперь

$$y' = \frac{1}{2(1-x)}.$$

Следовательно:

$$y = -\frac{1}{2} \ln(1-x) + \frac{C_2}{2} \quad \text{или} \quad 2y = C_2 - \ln(1-x).$$

Согласно условию $y(0) = 0,5$, получаем

$$1 = C_2 - \ln 1, \quad C_2 = 1.$$

Итак, $2y = 1 - \ln(1-x)$.

2.3 *Линейное однородное уравнение (ЛОУ) второго порядка с постоянными коэффициентами* – это уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q = \text{const} . \quad (2.4)$$

Его общее решение имеет вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – так называемая фундаментальная система решений (ФСР), которая определяется следующим образом:

а) строится характеристическое уравнение (квадратное уравнение с теми же коэффициентами, что и (2.4)):

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (2.5)$$

откуда $\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$, $D = p^2 - 4q$.

б) если уравнение (2.5) имеет действительные различные корни λ_1 и λ_2 (дискриминант $D = p^2 - 4q > 0$), то

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

в) если корни уравнения (2.5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (дискриминант $D = 0$), то

$$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = x e^{\lambda x}.$$

г) если уравнение (2.5) имеет комплексно-сопряженные корни

$$\lambda_1 = a + ib, \quad \lambda_2 = a - ib \quad (i^2 = -1; D < 0),$$

то $y_1 = e^{ax} \cos bx$, $y_2 = e^{ax} \sin bx$.

В частности, если $\lambda = \pm ib$, то $y_1 = \cos bx$, $y_2 = \sin bx$.

Пример 1. Найти общее решение

$$2y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Решение. Это линейное уравнение типа (2.4). Характеристическое уравнение имеет вид

$$2\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0;$$

$$D = 4 - 40 = -36; \quad \sqrt{D} = 6i;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 6i}{4}; \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i;$$

$$a = -\frac{1}{2}; \quad b = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, имеем случай г):

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{3}{2}x, \quad y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{3}{2}x$$

и общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ принимает вид

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{3}{2}x + C_2 \sin \frac{3}{2}x \right).$$

Пример 2. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 16y = 0; \\ y(0) = 1; \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

Решение. Найдем общее решение ЛОУ. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. Используется случай б), значит ФСР:

$$y_1 = e^{4x}, \quad y_2 = xe^{4x},$$

поэтому общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

Подберем теперь постоянные C_1 и C_2 так, чтобы

$$y = e^{4x}(C_1 + xC_2) \tag{2.6}$$

удовлетворило начальным условиям.

Потребуется производная

$$y' = 4e^{4x}(C_1 + xC_2) + e^{4x}C_2 = e^{4x}(4C_1 + C_2 + 4xC_2). \tag{2.7}$$

Подставим в равенства (2.6) и (2.7) значения $x = 0$, $y = 1$, $y' = 4$ из начальных условий:

$$\begin{cases} e^0(C_1 + 0) = 1; \\ e^0(4C_1 + C_2 + 0) = 4, \end{cases}$$

т.е. $C_1 = 1$; $C_2 = 0$.

Тогда из (2.6) $y = e^{4x}$ – искомое частное решение.

2.4 *Линейное однородное уравнение (ЛОУ) произвольного порядка с постоянными коэффициентами* – это уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \quad p_i = \text{const}. \tag{2.8}$$

Фундаментальную систему решений уравнения (2.8) можно найти следующим образом.

а) Строится характеристическое уравнение (алгебраическое уравнение n -й степени с теми же коэффициентами, что и (2.8)):

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0. \tag{2.9}$$

Это уравнение имеет n корней, среди которых могут быть действительные простые или кратные корни, а также пары комплексно-сопряженных корней (простых или кратных).

б) Если все корни λ_j уравнения (2.9) простые и действительные, то получаем следующую фундаментальную систему решений уравнения (2.9)

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \quad \dots, \quad y_n = e^{\lambda_n x}.$$

в) Каждому действительному корню λ кратности k характеристического уравнения (2.9) соответствуют ровно k линейно независимых решений уравнения (2.8)

$$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = x e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y_k = x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

г) Каждой паре комплексно-сопряженных корней $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$ кратности m характеристического уравнения (2.9) соответствуют ровно $2m$ линейно независимых решений уравнения (2.8) вида

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_2 = e^{ax} \sin bx,$$

$$y_3 = x e^{ax} \cos bx, \quad y_4 = x e^{ax} \sin bx,$$

...

$$y_{2m-1} = x^{m-1} e^{ax} \cos bx, \quad y_{2m} = x^{m-1} e^{ax} \sin bx.$$

д) Тогда общее решение уравнения (2.8) имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

Пример 1. Найти общее решение

$$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0.$$

Решение. Это линейное уравнение вида (2.8). Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda + 2)^3 = 0.$$

Отсюда получаем $\lambda_{1,2,3} = -2$ – действительный корень кратности $k = 3$.

Используем случай в). Следовательно:

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = x e^{-2x}, \quad y_3 = x^2 e^{-2x},$$

и общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$ принимает вид

$$y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2).$$

2.5 *Линейное неоднородное уравнение* (ЛНУ) второго порядка имеет вид

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{2.10}$$

Ограничимся случаем постоянных коэффициентов p, q . Уравнение (2.4) будем называть соответствующим ему ЛОУ. Пусть $y_ч$ – некоторое частное решение уравнения (2.10), а

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 -$$

общее решение соответствующего ЛОУ. Тогда общее решение ЛНУ (2.10):

$$y = y_0 + y_ч. \tag{2.11}$$

Согласно (2.11), основная трудность состоит в нахождении $y_ч$. Нахождение частного решения линейного неоднородного уравнения (ЛНУ)

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

по известной ФСР $(y_1(x), y_2(x))$ соответствующего линейного однородного уравнения может быть осуществлено в виде, подобном общему решению ЛОУ $y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, но с переменными величинами $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$:

$$y_ч(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

Производные $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ неизвестных (искомых) функций определяются как решения системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0; \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Можно доказать, что эта система линейных относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ уравнений имеет единственное решение.

Далее, функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ восстанавливаются как первообразные:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int C_1'(x) dx, \\ C_2(x) &= \int C_2'(x) dx. \end{aligned}$$

Теперь частное решение ЛНУ $y_ч(x)$ оказывается найденным и остается записать общее решение $y = y_0 + y_ч$, т.е. окончательный ответ:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x).$$

Заметим, что изложенный метод называется *методом вариации произвольных постоянных*.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 10y' + 25y = \frac{x}{x^2 + 4} e^{-5x}.$$

Решение. Согласно структуре $y = y_0 + y_ч$ общего решения ЛНУ, начнем с соответствующего ЛОУ:

$$y'' + 10y' + 25y = 0.$$

Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ являются числа $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$, следовательно, ФСР имеет вид $y_1(x) = e^{-5x}$, $y_2(x) = x e^{-5x}$. Поскольку $y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, то

$$y_0 = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x}.$$

Теперь мы можем записать следующую структуру частного решения ЛНУ:

$$y_ч = C_1(x) e^{-5x} + C_2(x) x e^{-5x}.$$

Составляем систему уравнений для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-5x} + C_2'(x) x e^{-5x} = 0; \\ C_1'(x) (e^{-5x})' + C_2'(x) (x e^{-5x})' = \frac{x}{x^2 + 4} e^{-5x}. \end{cases}$$

Вычисляя производные, получаем

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-5x} + C_2'(x)xe^{-5x} = 0; \\ C_1'(x)(-5e^{-5x}) + C_2'(x)(e^{-5x} - 5xe^{-5x}) = \frac{x}{x^2 + 4}e^{-5x}, \end{cases}$$

после чего

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)x; \\ -5C_1'(x) + C_2'(x)(1 - 5x) = \frac{x}{x^2 + 4}. \end{cases}$$

Следовательно:

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)x; \\ C_2'(x) = \frac{x}{x^2 + 4}, \end{cases}$$

а значит:

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\frac{x^2}{x^2 + 4}; \\ C_2'(x) = \frac{x}{x^2 + 4}. \end{cases}$$

Для вычисления соответствующих первообразных удобно записать

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{4}{x^2 + 4} - 1; \\ C_2'(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 4}, \end{cases}$$

откуда

$$C_1(x) = 2\operatorname{arctg} \frac{x}{2} - x;$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)},$$

или

$$C_1(x) = 2\operatorname{arctg} \frac{x}{2} - x;$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4).$$

Поскольку $y_{\text{ч}}(x) = (C_1(x) + xC_2(x))e^{-5x}$, то

$$y_{\text{ч}}(x) = \left(2\operatorname{arctg} \frac{x}{2} - x + \frac{x}{2} \ln(x^2 + 4)\right)e^{-5x}.$$

Наконец, складывая y_0 и $y_{\text{ч}}$, получаем окончательно общее решение ЛНУ:

$$y = (C_1 + xC_2 + 2\operatorname{arctg} \frac{x}{2} - x + \frac{x}{2} \ln(x^2 + 4))e^{-5x}.$$

2.6 Если $f(x)$ имеет следующий специальный вид

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x),$$

где P и Q – многочлены соответствующих степеней, то частное решение ЛНУ имеет заранее известную структуру

$$y_{\text{ч}} = x^r e^{\alpha x} (\tilde{P}_N(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_N \sin \beta x). \quad (2.12)$$

Здесь N – наибольшая из степеней n и m многочленов, r – количество совпадений "контрольного числа" $S = \alpha + i\beta$ с корнями λ_1, λ_2 характеристического уравнения (2.5). Коэффициенты $a_N, a_{N-1}, \dots, a_1, a_0$ каждого из многочленов вида

$$a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

в (2.12) определяются следующим образом (метод неопределенных коэффициентов):

- а) найти $y'_{\text{ч}}$ и $y''_{\text{ч}}$;
- б) подставить $y_{\text{ч}}, y'_{\text{ч}}, y''_{\text{ч}}$ в уравнение (2.10);
- в) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях аргумента (или при синусах и косинусах соответственно) в левой и правой части полученного тождества.

Решив полученную систему уравнений, следует записать (2.12) с уже найденными коэффициентами. Затем имеем ответ в виде (2.11). В следующих частных случаях (2.12) можно пользоваться таблицей:

| Вид | Контрольное число | Вид |
|---|-------------------|--|
| 1 $f(x) = A = \text{const}$ | $S = 0$ | $y_{\text{ч}} = x^r M, M = \text{const}$ |
| 2 $f(x) = P_n(x)$ (многочлен n -й степени) | $S = 0$ | $y_{\text{ч}} = x^r Q_n(x)$ |
| 3 $f(x) = Ae^{\alpha x}$ | $S = \alpha$ | $y_{\text{ч}} = x^r Me^{\alpha x}, M = \text{const}$ |
| 4 $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ | $S = \alpha$ | $y_{\text{ч}} = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$ |
| 5 $f(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$ ($A, B = \text{const}$) | $S = i\beta$ | $y_{\text{ч}} = x^r (M \cos \beta x + N \sin \beta x)$ |

Числа M, N , коэффициенты многочленов $Q_n(x)$ (см. правую колонку таблицы) определяются описанным выше методом неопределенных коэффициентов; если контрольное число S не совпало ни с одним из λ_1, λ_2 , то множитель x^r есть 1.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 3e^x.$$

Решение. Согласно (2.11) начнем с соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ и в силу п. 2.3, случай б):

$$y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

Перейдем к нахождению $y_{\text{ч}}$. Правая часть уравнения

$$f(x) = 3e^{1 \cdot x}$$

имеет вид п. 3 таблицы; здесь $\alpha = 1$ и контрольное число $S = \alpha = 1$. Поскольку $S \neq \lambda_1$, $S \neq \lambda_2$, то $r = 0$, т.е. (см. п. 3 таблицы) $y_{\text{ч}} = Me^x$. Осталось определить коэффициент M . Как указано выше, находим

$$y'_{\text{ч}} = Me^x;$$

$$y''_{\text{ч}} = Me^x,$$

и подставляем в неоднородное уравнение

$$Me^x - 2Me^x - 3Me^x = 3e^x \quad \text{или} \quad -4Me^x = 3e^x,$$

откуда $-4M = 3$, $M = -\frac{3}{4}$. Итак,

$$y_{\text{ч}} = -\frac{3}{4}e^x.$$

Теперь, в силу (2.11):

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{3}{4}e^x.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 6y' = 18x - 18x^2 - 2.$$

Решение. Однородное уравнение имеет вид

$$y'' - 6y' = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 6\lambda = 0:$$

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 6.$$

Тогда

$$y_0 = C_1 e^0 + C_2 e^{6x}, \quad \text{т.е.} \quad y_0 = C_1 + C_2 e^{6x}.$$

Найдем $y_{\text{ч}}$. Правая часть уравнения $f(x) = -18x^2 + 18x - 2$ есть многочлен степени $n = 2$ (см. п. 2 таблицы), тогда

$$y_{\text{ч}} = x^r Q_2(x) = x^r (Ax^2 + Bx + C).$$

Здесь r – количество совпадений контрольного числа $S = 0$ с корнями λ_1, λ_2 , т.е. $r = 1$ ($0 = S = \lambda_1$, но $S \neq \lambda_2$). Значит:

$$y_{\text{ч}} = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Осталось, подставив $y_{\text{ч}}$ в уравнение, найти коэффициенты A, B, C .

Поскольку

$$y'_{\text{ч}} = 3Ax^2 + 2Bx + C;$$

$$y''_{\text{ч}} = 6Ax + 2B,$$

то $(6Ax + 2B) - 6(3Ax^2 + 2Bx + C) = -18x^2 + 18x - 2$

или $-18Ax^2 + (6A - 12B)x + 2B - 6C = -18x^2 + 18x - 2.$

Приравнявая коэффициенты при равных степенях x , имеем:

$$\begin{cases} -18A = -18; \\ 6A - 12B = 18; \\ 2B - 6C = -2, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} A = 1; \\ B = -1; \\ C = 0, \end{cases}$$

следовательно, $y_{\text{ч}} = x^3 - x^2$ и

$$y = y_0 + y_{\text{ч}} = C_1 + C_2 e^{6x} + x^3 - x^2.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y = 4 \sin 2x.$$

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения (см. п. 2.3, случай г)):

$$y'' + 4y = 0;$$

$$\lambda^2 + 4 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i;$$

$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Далее, правая часть уравнения $f(x) = 4 \sin 2x = 0 \cdot \cos 2x + 4 \sin 2x$ имеет вид п. 5 таблицы; контрольное число $S = i\beta = i \cdot 2$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения; поэтому $r = 1$ и

$$y_{\text{ч}} = x(M \cos 2x + N \sin 2x).$$

Далее:

$$y'_{\text{ч}} = M \cos 2x + N \sin 2x - 2x(M \sin 2x - N \cos 2x);$$

$$y''_{\text{ч}} = -4M \sin 2x + 4N \cos 2x - 4x(M \cos 2x + N \sin 2x)$$

и, подставляя $y_{\text{ч}}$ и $y''_{\text{ч}}$ в неоднородное уравнение, имеем

$$-4M \sin 2x + 4N \cos 2x - 4x(M \cos 2x + N \sin 2x) +$$

$$+ 4x(M \cos 2x + N \sin 2x) = 4 \sin 2x$$

или $-4M \sin 2x + 4N \cos 2x = 4 \sin 2x$.

Приравнивая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в левой и правой частях равенства, мы получаем

$$\begin{cases} -4M = 4; \\ 4N = 0, \end{cases} \text{ т.е. } y_{\text{ч}} = -x \cos 2x.$$

Итак:

$$y = y_0 + y_{\text{ч}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - x \cos 2x.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$9y'' + 6y' + y = 3.$$

Решение. Общее решение однородного уравнения

$$9y'' + 6y' + y = 0$$

имеет вид

$$y_0 = (C_1 + xC_2)e^{-\frac{x}{3}},$$

так как $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{3}$.

Правая часть неоднородного уравнения

$$f(x) = 3 = \text{const},$$

при этом контрольное число $S = 0$ не совпадает с корнями λ_1, λ_2 . Следовательно, $r = 0$ и (см. п. 1 таблицы) $y_{\text{ч}} = M$. Находя

$$y'_{\text{ч}} = y''_{\text{ч}} = 0$$

и подставляя результаты в уравнение, получим $0 + M = 3$; $M = 3$.

Итак, $y_{\text{ч}} = 3$;

$$y = (C_1 + xC_2)e^{-\frac{x}{3}} + 3.$$

3 КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

3.1 Как отмечалось выше, общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольных постоянных (две "степени свободы"). Частное решение может быть выделено из общего путем задания двух начальных условий. Например, в механике это может быть задание положения движущегося объекта в начальный момент и начальной скорости. Однако, может быть задано также положение объекта в два различных момента времени. Например, процесс механических колебаний объекта массы m относительно положения равновесия описывается уравнением

$$my'' + hy' + ky = f(t), \quad (3.1)$$

где $y = y(t)$ – отклонение в момент t точки от положения равновесия; h – коэффициент трения; k – коэффициент упругости восстанавливающей силы; $f(t)$ – внешняя сила. Если задать положения α и β объекта в моменты соответственно τ и τ_* .

$$\begin{cases} y(\tau) = \alpha; \\ y(\tau_*) = \beta, \end{cases} \quad (3.2)$$

то приходим к так называемой *краевой задаче* (3.1) – (3.2). Подобная математическая модель возникает и в задаче об электрических колебаниях и др.

3.2 В общем случае краевая задача для ЛНУ

$$y'' + py' + qy = f(t) \quad (3.3)$$

с условиями (3.2) может быть решена выделением из общего решения

$$y = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_{\text{ч}}(t) \quad (3.4)$$

того частного решения, которое удовлетворяет (3.2). Подставляя $t = \tau$ и $t = \tau_*$ в соотношение (3.4), получаем систему алгебраических линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1 y_1(\tau) + C_2 y_2(\tau) = \alpha - y_{\text{ч}}(\tau); \\ C_1 y_1(\tau_*) + C_2 y_2(\tau_*) = \beta - y_{\text{ч}}(\tau_*) \end{cases}$$

для нахождения соответствующих значений постоянных C_1 и C_2 , которые (для получения ответа) следует затем "возвратить" в (3.4).

Пример. Механические колебания материальной точки описываются уравнением

$$y'' + 8y' + 17y = e^{-4t},$$

причем положение точки в начальный момент и в момент $t = 1$ заданы:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Определить отклонение $y(t)$ точки от положения равновесия в любой момент времени t .

Решение. Найдем общее решение ЛНУ. Характеристическое уравнение для соответствующего ЛОУ имеет корни $\lambda_{1,2} = -4 \pm i$, поэтому общее решение ЛОУ получаем в виде

$$y_0 = e^{-4t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Поскольку контрольное число $S = -4$ не совпадает ни с одним из корней, то

$$y_{\text{ч}} = M e^{-4t}.$$

Находя

$$y'_{\text{ч}} = -4M e^{-4t},$$

$$y''_{\text{ч}} = 16M e^{-4t}$$

и подставляя результаты в ЛНУ, получаем

$$16M e^{-4t} - 32M e^{-4t} + 17M e^{-4t} = e^{-4t},$$

откуда $M = 1$ так что $y_{\text{ч}} = e^{-4t}$. Следовательно, общее решение ЛНУ

$$y = y_0 + y_{\text{ч}} = e^{-4t} (1 + C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Теперь подставим краевые условия: $t = 0$ и $y = 0$, $t = 1$ и $y = 0$:

$$\begin{cases} 1 + C_1 + 0 = 0; \\ e^{-4} (1 + C_1 \cos 1 + C_2 \sin 1) = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} C_1 = -1; \\ C_2 = \frac{-1 + \cos 1}{\sin 1}. \end{cases}$$

Окончательно,

$$y(t) = e^{-4t} \left(1 - \cos t + \frac{\cos 1 - 1}{\sin 1} \sin t \right).$$

искомое отклонение в любой момент времени t . Вычисляя приближенно (с точностью до 0,1) постоянный коэффициент, получим

$$y(t) \approx e^{-4t} (1 - \cos t - 0,6 \sin t).$$

4 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1 Пара функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ является решением системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \Phi(t, x, y); \\ \frac{dy}{dt} = \Psi(t, x, y), \end{cases}$$

(функции Φ и Ψ – заданы), если при подстановке в каждое из уравнений функции $x(t)$, $y(t)$ обращают его в тождество.

Класс вида

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2); \\ y = y(t, C_1, C_2) \end{cases}$$

есть *общее решение* системы, если при всех значениях произвольных постоянных C_1 , C_2 соответствующая пара функций $\{x, y\}$ является решением системы. С точки зрения механики, решить систему – значит

восстановить закон движения точки по известному вектору скорости $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt} \right) \vec{i} + \left(\frac{dy}{dt} \right) \vec{j}$.

4.2 Ограничимся рассмотрением так называемой *линейной однородной системы* с постоянными коэффициентами, т.е. системы вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by; \\ \frac{dy}{dt} = px + qy, \end{cases} \quad a, b, p, q = \text{const}. \quad (4.1)$$

Переобозначим

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}.$$

Пусть для определенности $p \neq 0$. Выражая x из второго уравнения системы (4.1) в виде

$$x = \frac{1}{p}(y' - qy), \quad (4.2)$$

дифференцируя второе уравнение (4.1) по переменной t и подставляя в него x' (из первого уравнения) и x из (4.2), последовательно получаем

$$\begin{aligned} y'' &= px' + qy'; \\ y'' &= p(ax + by) + qy'; \end{aligned}$$

$$y' = a(y' - qy) + pby + qy'.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} y'' - (a + q)y' + (aq - pb)y = 0; & (4.3) \\ x = \frac{1}{p}(y' - qy). & (4.4) \end{cases}$$

Соотношение (4.3) – это однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами; его характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ p & q - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.5)$$

В соответствии с корнями λ_1, λ_2 (см. 2.3) найдем ФСР y_1 и y_2 и общее решение (4.3)

$$y = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t). \quad (4.6)$$

Затем из равенства (4.4) находим x . В результате будет найдено общее решение системы (4.1).

При решении конкретных систем вида (4.1) можно сразу поступать следующим образом:

- а) составить характеристическое уравнение вида (4.5);
- б) в соответствии с его корнями λ_1, λ_2 построить ФСР $\{y_1(t), y_2(t)\}$ и общее решение

$$\begin{cases} y = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t); \\ x = \frac{1}{p}(y' - qy). \end{cases}$$

Пример. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x' = -6x + 4y; \\ y' = 9x - 6y. \end{cases} \quad (4.7)$$

Решение. Имеем характеристическое уравнение ($a = -6, b = 4, p = 9, q = -6$)

$$\begin{vmatrix} -6 - \lambda & 4 \\ 9 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-6 - \lambda)^2 - 36 = 0,$$

откуда $\lambda + 6 = \pm 6, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -12.$

Следовательно,

$$y_1 = e^0 = 1; \quad y_2 = e^{-12t};$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-12t}.$$

Далее, из второго уравнения системы

$$x = \frac{1}{9}(y' + 6y).$$

Поскольку

$$y' = (C_1 + C_2 e^{-12t})' = -12C_2 e^{-12t},$$

то $x = \frac{1}{9}(-12C_2 e^{-12t} + 6C_1 + 6C_2 e^{-12t})$ или $x = \frac{2}{3}(C_1 - C_2 e^{-12t})$.

Итак:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}(C_1 - C_2 e^{-12t}); \\ y = C_1 + C_2 e^{-12t}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Замечание. Решение (4.8) можно понимать как совокупность возможных траекторий (законов движения) материальной точки в плоскости, найденную по известной зависимости (4.7) координат x' , y' вектора скорости

$$\bar{v} = x' \bar{i} + y' \bar{j}$$

ОТ ПЛОСКИХ КООРДИНАТ ЭТОЙ ТОЧКИ.

5 ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

5.1 Рассмотрим произвольную функцию $y = y(x)$, дифференцируемую сколь угодно много раз в точке x_0 и некоторой ее окрестности $(x_0 - R, x_0 + R)$. Как известно, такую функцию можно представить в виде суммы многочлена произвольной степени и некоторого "малого" (в указанном интервале) остаточного члена. Более точно, для функции $y(x)$ справедлива формула Тейлора (разложение по формуле Тейлора)

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x, x_0),$$

где остаточный член имеет вид

$$R_n(x, x_0) = \frac{y^{(n+1)}(x_0 + \theta \cdot (x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Важен тот факт, что во всех практически интересных случаях выполняется соотношение $R_n(x, x_0) \rightarrow 0$ для каждого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, т.е. значения $y(x)$ аппроксимируемы (могут быть приближенно заменены) значениями многочлена произвольной степени; читатель, знакомый с теорией степенных

рядов, сразу же заметит, что речь идет, фактически, о разложении функции $y(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 . В частности, для $x_0 = 0$ имеем разложение $y(x)$ по формуле Маклорена

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x,0).$$

Указанная формула Тейлора (Маклорена) дает возможность записывать первые несколько степенных членов разложения решения $y = y(x)$ задачи Коши:

$$\begin{cases} y' = \varphi(x, y); \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

что, в свою очередь, позволяет получить первичную информацию о поведении решения задачи, вычислять приближенные значения $y(x)$ и т.п. Такая информация особенно полезна, если не удастся получить запись решения в аналитическом виде, а также если оно получено, но в терминах "неберущихся" интегралов.

5.2 Чтобы найти члены указанного разложения, следует знать значения коэффициентов разложения, т.е. числа $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, ..., $y^{(n)}(x_0)$. Воспользовавшись начальным условием задачи Коши, мы уже имеем $y(x_0) = y_0$. Подставив в обе части уравнения $y' = \varphi(x, y)$ значение $x = x_0$, вычисляем $y'(x_0)$. Далее, дифференцируя по переменной x обе части уравнения, и снова воспользовавшись начальным условием, имеем значение $y''(x_0)$. Последовательно повторяя процесс дифференцирования обеих частей получаемого уравнения, мы можем прийти к значениям (в точке x_0) производных любого порядка, в результате чего разложение решения по формуле Тейлора будет получено.

Пример. Найти три первых отличных от нуля члена разложения по формуле Тейлора решения $y = y(x)$ следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} y' = e^{y+1} - e^{x-1} + 3(x-1); \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

Решение. Разложение решения задачи по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ имеет вид

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots + \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + R_n(x,1).$$

Согласно заданному начальному условию имеем $y(1) = -1$. Далее, подставляя значения $x = x_0 = 1$ и $y(1) = -1$ в дифференциальное уравнение $y' = e^{y+1} - e^{x-1} + 3(x-1)$, получаем

$$y'(1) = e^{-1+1} - e^{1-1} + 3(1-1),$$

т.е. $y'(1) = 0$. Продифференцируем теперь данное уравнение по переменной x ; при этом помним, что y есть функция от x , т.е. пользуемся правилом дифференцирования сложной функции: $y'' = e^{y+1}y' - e^{x-1} + 3$. В точке $x_0 = 1$ имеем:

$$y''(1) = e^{-1+1} \cdot 0 - e^{1-1} + 3 = 2.$$

Мы уже получили два ненулевых коэффициента (члена) в разложении по формуле Тейлора; осталось найти еще один ненулевой коэффициент. Полученное выше уравнение второго порядка еще раз дифференцируем по переменной x : $y''' = e^{y+1}(y')^2 + e^{y+1}y'' - e^{x-1}$. Имеем тогда

$$y'''(1) = e^{-1+1}(0)^2 + e^{-1+1} \cdot 2 - e^{1-1} = 1.$$

Теперь мы можем записать первые члены разложения:

$$y(x) = -1 + 0 + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \dots,$$

т.е.

$$y(x) = -1 + (x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \dots$$

Задача решена.

6 МЕТОД ЭЙЛЕРА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

6.1 Рассмотренные ранее методы решения дифференциальных уравнений называются аналитическими. С помощью этих методов удается получить решение уравнения в виде формул путем аналитических преобразований. Однако класс дифференциальных уравнений, которые можно решить аналитическими методами, весьма узок. Поэтому в большинстве случаев дифференциальные уравнения приходится решать приближенно, используя приближенные методы или численные методы. Численные методы не позволяют найти общее решение дифференциального уравнения, поэтому их применяют для решения краевых задач или задачи Коши.

Наиболее распространенным методом численного решения дифференциальных уравнений является метод конечных разностей. При этом область непрерывного изменения аргумента заменяется дискретным множеством точек – узлами сетки, а само дифференциальное уравнение заменяется системой конечно-разностных уравнений. Неизвестная функция заменяется сеточной функцией, т.е. функцией дискретного аргумента на заданной сетке.

6.2 Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Наиболее простым численным методом решения такой задачи является метод Эйлера. Будем предполагать, что функция $f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности. Согласно этой теореме, имеется отрезок $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, на котором существует единственное решение $y(x)$ задачи (6.1). Пусть точка x_k принадлежит этому отрезку, т.е. $x_k \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$. Метод Эйлера позволяет приближенно найти значение $y(x_k)$ теоретически с любой наперед заданной точностью.

Разделим отрезок $[x_0; x_k]$ на n равных частей точками $x_0, x_1, \dots, x_n = x_k$. Длину отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, $h = x_i - x_{i-1}$, будем называть шагом вычисления. Приближенные значения решения в точках x_i обозначим y_i .

На отрезке $[x_0; x_1]$ вместо задачи (6.1) рассмотрим ее конечно-разностное приближение

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = f(x_0, y_0). \quad (6.2)$$

Здесь производная заменена конечной разностью, а правая часть заменяется значением $f(x_0, y_0)$, т.е. предположили, что на отрезке $[x_0; x_1]$ приближенно выполнено $y' \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$, $f(x, y) \approx f(x_0, y_0)$. С геометрической точки зрения (рис. 1), это означает, что мы искомую интегральную кривую $y(x)$ заменили отрезком касательной к интегральной кривой в точке (x_0, y_0) . Из формулы (6.2) получаем

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$



Рис. 1

Аналогично может быть найдено значение сеточной функции в следующем узле

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

С геометрической точки зрения, это означает, что на отрезке $[x_1; x_2]$ искомая интегральная кривая заменяется отрезком касательной к решению задачи Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

(кривая $y^*(x)$ на рис. 1).

Дальше рассуждаем по индукции. Если приближенные значения y_0, y_1, \dots, y_i известны, то на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ рассматриваем конечно-разностное уравнение $\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$. Решение этого уравнения

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (6.3)$$

принимая за приближенное решение задачи (6.1) в точке $x = x_{i+1}$. Формула (6.3) и определяет метод Эйлера. Функция

$$Y_n(x) = y_i + f(x_i, y_i)(x - x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

называется ломаной Эйлера. Можно доказать, что при условиях теоремы существования и единственности последовательность ломаных Эйлера $\{Y_n(x)\}$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходится на $[x_0; x_k]$ к точному решению задачи (6.1) $y(x)$.

Пример. Найти с помощью метода Эйлера приближенное решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2; \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

в точке $x_k = 0,5$ (вычисления производить с точностью до 0,001). Разбить отрезок $[x_0; x_k]$ на $n = 5$ частей.

Решение. Так как $x_0 = 0$, $x_k = 0,5$, $n = 5$, то $h = \frac{x_k - x_0}{n} = \frac{0,5 - 0}{5} = 0,1$. Из условия задачи $y_0 = 1$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Далее находим $x_1 = x_0 + h = 0,1$; $x_2 = x_1 + h = 0,2$; $x_3 = x_2 + h = 0,3$; $x_4 = x_3 + h = 0,4$; $x_5 = x_4 + h = 0,5$.

Затем находим значения приближенного решения в узлах:

$$1) \quad y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0,1 \cdot (0^2 + 1^2) = 1,1;$$

$$2) y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1 \cdot (0,1^2 + 1,1^2) = 1,222 ;$$

$$3) y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1,222 + 0,1 \cdot (0,2^2 + 1,222^2) = 1,375 ;$$

$$4) y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1,375 + 0,1 \cdot (0,3^2 + 1,375^2) = 1,573 ;$$

$$5) y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = 1,573 + 0,1 \cdot (0,4^2 + 1,573^2) = 1,837 .$$

Таким образом, получили, что приближенное решение $y(x_k) = 1,837$.

6.3 Погрешность приближенного решения в точке x_k равна разности между точным значением искомой функции $y(x_k)$ и значением сеточной функции y_k . Чем больше число n отрезков, на которые разбивается исходный отрезок $[x_0; x_k]$, тем более точным является полученное по методу Эйлера решение. Если проведены две серии расчетов – с числом шагов n и числом шагов $2n$, то для повышения точности решения можно воспользоваться методом Рунге. Для схемы Эйлера формула Рунге имеет вид

$$Y^*(x_k) = 2Y_{2n}(x_k) - Y_n(x_k) . \quad (6.4)$$

Таким образом, решение задачи на двух сетках позволяет повысить точность результатов.

7 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1) Доказать, что функция $y = y(x)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

тогда и только тогда, когда она удовлетворяет интегральному уравнению

$$y = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

(предполагается, что в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши).

2) Пусть $f(x), g(y)$ – функции, непрерывные в окрестностях точек x_0 и y_0 соответственно, $f(x_0) = 0$, $g(y_0) = 0$. Доказать, что каждая из функций $x = x_0$ и $y = y_0$ являются решениями уравнения $f(x)dy + g(y)dx = 0$.

3) С помощью замены переменных $t = \frac{y+a}{x+b}$ найти общее решение уравнения вида

$$y' - \frac{y+a}{x+b} = (x+b)f'(x)$$

(a, b – любые постоянные величины, f – произвольная дифференцируемая на всей числовой оси функция).

4) С помощью замены переменных $u = x + by$ найти общее решение уравнения вида

$$y' = \frac{a(x+by) + p}{x+by+q}$$

(a, b, p, q – любые постоянные ненулевые величины).

5) Найти общее решение уравнения

$$(kx + e^{by} f'(y))y' = 1$$

($k \neq 0$ – любая постоянная величина, f – произвольная дифференцируемая на всей числовой оси функция).

6) Составить линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, решениями которого являются функции e^{-kx} и xe^{-kx} ($k \neq 0$ – любая постоянная величина).

7) Класс функций вида $y = A \sin(x + \gamma)$ представляет собою общее решение некоторого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (A и γ – произвольные постоянные). Каков вид этого дифференциального уравнения?

8) Известно, что функция $y = x^2 e^{kx}$ является решением некоторого линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами ($k \neq 0$ – любая постоянная величина). Каков вид соответствующего ему линейного однородного дифференциального уравнения?

9) Найти общий вид всех решений краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + \lambda^2 y = 0; \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

(λ – произвольное отличное от нуля действительное число).

10) Найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ax + by; \\ \frac{dx}{dt} = bx + ay \end{cases}$$

с постоянными коэффициентами a и b .

8 ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА (Число N от 1 до 20 задается преподавателем)

Задание 1. В задачах 1 – 8 считать, что втекающий газ (или жидкость) вследствие перемешивания равномерно распределяется по всему объему сосуда. Тогда функция $y(t)$, где t – время, $y(t)$ – концентрация вещества (в долях), подчиняется закону $Vy' = a(c_0 - y)$. Здесь V – объем сосуда, $a(t)$ – скорость поступления вещества в сосуд, c_0 – концентрация данного вещества (в долях) в поступающем растворе.

1 В сосуде объема N л содержится воздушная смесь (80 % азота и 20 % кислорода). В сосуд втекает $N/10$ л азота в секунду, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 95 % азота?

2 Сосуд объемом N л содержит газоздушную смесь (азот и кислород). В сосуд втекает 0,2 л азота в секунду, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через 50 с в сосуде оказалось $0,9N$ л азота. Какое количество азота первоначально было в сосуде?

3 В сосуде находится N л раствора, содержащего $N/10$ кг соли. В сосуд непрерывно подается вода ($N/20$ л/мин), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли останется в сосуде через 15 мин?

4 В сосуде находится 40 л раствора, содержащего 1 кг соли. В сосуд непрерывно подается вода (N л/мин), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Через какое время в сосуде останется 0,5 кг соли?

5 В сосуд, содержащий 50 л воды, непрерывно поступает со скоростью N л/мин раствор, в каждом литре которого содержится 0,1 кг соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 30 мин, если первоначально соли в сосуде не содержалось?

6 В сосуд, содержащий N л воды, непрерывно поступает со скоростью $N/10$ л/мин раствор, в каждом литре которого содержится 0,2 кг соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Через какое время в сосуде окажется $N/10$ кг соли?

7 В сосуд, содержащий 30 л воды, непрерывно поступает со скоростью N л/мин раствор, в каждом литре которого содержится 0,2 кг соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Какое наибольшее количество соли (кг) может оказаться в сосуде?

8 В воздухе помещения объемом 100 м^3 содержится $0,2 \%$ углекислого газа. Вентиляция подает в помещение 10 м^3 воздуха в минуту, содержащего $0,04 \%$ углекислого газа. Через какое время концентрация углекислого газа в воздухе помещения станет равна $0,1 \%$?

В задачах 9 – 14 принять, что скорость нагревания (или остывания) тела пропорциональна разности температуры тела и температуры окружающей среды. Тогда функция $y(t)$, где y – температура тела, а t – время, подчиняется закону $y' = k(h - y)$. Здесь k – коэффициент теплообмена, $h(t)$ – температура окружающей среды.

9 Начальная температура тела $100 \text{ }^\circ\text{C}$. За 10 мин оно охладилось до $40 \text{ }^\circ\text{C}$. Температура окружающего воздуха поддерживается равной N градусов. Когда тело остынет до $30 \text{ }^\circ\text{C}$?

10 Кусок металла с температурой $25 \text{ }^\circ\text{C}$ помещен в печь, температура которой равномерно повышается от $25 \text{ }^\circ\text{C}$ со скоростью $20 \text{ }^\circ\text{C}$ за минуту. При разности температур печи и металла в T градусов металл нагревается со скоростью $10NT$ градусов в минуту. Найти температуру тела через 30 мин.

11 Начальная температура тела $100 \text{ }^\circ\text{C}$. За 15 мин оно охладилось до $80 \text{ }^\circ\text{C}$. Температура окружающего воздуха поддерживается равной N градусов. Когда тело остынет до $30 \text{ }^\circ\text{C}$?

12 Кусок металла с температурой N градусов помещен в печь, температура которой равна $300 \text{ }^\circ\text{C}$. При разности температур печи и металла в T градусов металл нагревается со скоростью $20NT$ градусов в минуту. Найти температуру металла через 40 мин.

13 Температура вынутого из печи хлеба снижается от 100 до $70 \text{ }^\circ\text{C}$ за 15 мин. Температура воздуха равна N градусов. Через какой промежуток времени от начала охлаждения температура понизится до $30 \text{ }^\circ\text{C}$?

14 Начальная температура тела $5 \text{ }^\circ\text{C}$. За N мин оно нагрелось до $10 \text{ }^\circ\text{C}$. Температура окружающего воздуха поддерживается равной $25 \text{ }^\circ\text{C}$. Когда тело нагреется до $20 \text{ }^\circ\text{C}$?

В задачах 15 – 22 использовать закон радиоактивного распада – количество радиоактивного вещества, распадающегося в единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент. Тогда функция $y(t)$, где t – время, а $y(t)$ – масса радиоактивного вещества, подчиняется закону $y' = -ky$, где k – некоторая постоянная.

15 Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается $0,44$ мг. Через сколько лет распадется $2N \%$ имеющегося радия?

16 Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается $0,44$ мг. Сколько процентов имеющегося радия останется через $2N$ лет?

17 За 100 дней распалось 15% первоначального количества радиоактивного вещества. Через какое время останется $N \%$ от первоначального количества?

18 За 30 дней распалось $N \%$ первоначального количества радиоактивного вещества. Через какое время останется 50% от первоначального количества?

19 Известно, что за 1600 лет распадается половина первоначального количества радия. Вычислить, через какое время от 1 кг радия останется $0,2N$ кг.

20 За 60 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через какое время останется $N \%$ от первоначального количества?

21 За 60 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Сколько граммов останется от килограмма радиоактивного вещества через $4N$ дней?

22 За 30 дней распалось 10% первоначального количества радиоактивного вещества. Сколько граммов останется от килограмма радиоактивного вещества через $2N$ дней?

В задачах 23 – 30 считать, что сила сопротивления движению пропорциональна скорости или квадрату скорости движущегося тела. В первом случае скорость тела $y(t)$, где t – время, подчиняется закону $ty' = -ky + f$, а во втором – закону $ty' = -ky^2 + f$. Здесь t – масса тела, k – коэффициент сопротивления среды, а f – приложенная сила.

23 Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 2 м/с, через 5 с ее скорость составила 1 м/с. Какая скорость будет у лодки через N секунд от начала торможения?

24 Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки $1,5$ м/с, через 4 с ее скорость составила 1 м/с. Через сколько секунд скорость лодки уменьшится вдвое?

25 Мяч весом $0,5$ кг брошен вверх со скоростью N м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно $0,005$ кг при скорости 1 м/с. Вычислить время подъема мяча.

26 Мяч весом 0,4 кг брошен вверх со скоростью 20 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. Через $N/2$ с скорость мяча уменьшилась вдвое. Вычислить время подъема мяча.

27 Тело массой 5 кг сброшено с высоты с начальной скоростью 1 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально скорости тела. Через N секунд скорость тела увеличилась вдвое. Через сколько секунд скорость тела увеличится втрое по сравнению с первоначальной?

28 Тело массой 5 кг сброшено с высоты с нулевой начальной скоростью. Сопротивление воздуха пропорционально скорости тела. Через 15 с скорость тела составила N м/с. Через сколько секунд скорость тела составит $2N$ м/с?

29 Мяч весом 0,5 кг сброшен с высоты без начальной скорости. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. Определить скорость мяча через N мин, если через 1 мин после начала падения его скорость составила 3 м/с.

30 Тело массой N кг сброшено с высоты с начальной скоростью 2 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально скорости тела. Через 3 с скорость тела составила 5 м/с. Определить скорость тела через 10 с.

Задание 2. Решить дифференциальное уравнение.

1 $(1 + Nx)y' = (2y + 1)\ln^2(2y + 1)$.

2 $y \cos^2(6x)y' = e^{Ny}$.

3 $(y^2 + 2y)y' = y^3 x e^{Nx^2}$.

4 $2^x y' = 4^{x+Ny}$.

5 $(x^2 + 2x)dy = e^{Ny} dx$.

6 $y' = Nxy + x^2 y$.

7 $(\operatorname{tg} x)y' = \cos Ny$.

8 $(\sin y)(Nx + 2)dy = e^{\cos y} dx$.

9 $\sqrt{x^2 + 4}y' = Nx\sqrt{y^2 + 4}$.

10 $(x^2 - 4)y' = \operatorname{ctg}(y + N)$.

11 $x + N = y'x^2 / y^2$.

12 $y' \operatorname{ctg} x + y = N$.

13 $\sqrt{y^2 + N} dx = xy dy$.

14 $y' = N^{x+y}$.

15 $(x + N)y' = 3\sqrt[3]{y^2}$.

16 $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$.

17 $xy' + Ny = y^2$.

18 $y' \sin y = e^{\cos y} x^N$.

19 $(y^2 + 6y + 9) = y'x \ln(Nx)$.

20 $e^{Nx} \sin y dx + \operatorname{tg} y dy = 0$.

21 $y' \sqrt{N^2 - x^2} - \cos^2 y = 0$.

22 $y' N^{y-x} = 2$.

23 $y' = Nxy + x$.

24 $(1 + y^2)dx - (Ny + Nyx^2)dy = 0$.

25 $y' \sqrt{1 + y^2} = x^N / y$.

26 $y' = ye^{Nx} \ln y$.

27 $y' = e^{x^2} x(N^2 + y^2)$.

$$28 \quad y' \operatorname{ctg} x + y = N.$$

$$29 \quad y' \cos x + y^2 = N.$$

$$30 \quad (y^N x + y^N) dx + x dy = 0.$$

Задание 3. Решить дифференциальное уравнение.

$$1 \quad xy' = y - xe^{\frac{N^2}{x}}.$$

$$2 \quad (x + Ny) dx - x dy = 0.$$

$$3 \quad x^3 y' = x^2 y + Ny^3.$$

$$4 \quad y - xy' = Nx \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$5 \quad Ny^2 + x^2 y' = xy.$$

$$6 \quad xy' = y + xN^{y/x}.$$

$$7 \quad y' = N \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

$$8 \quad x^2 y' = xy + Ny^2.$$

$$9 \quad x^N y' = x^{N-1} y + y^N.$$

$$10 \quad (x - Ny) y dx - x^2 dy = 0.$$

$$11 \quad y' x + Nx + y = 0.$$

$$12 \quad y' x + Nx - y = y^2 / x.$$

$$13 \quad y = x \left(y' - N \frac{y}{x} \right).$$

$$14 \quad y' = y / x - N \operatorname{ctg} (y / x).$$

$$15 \quad x dy - y dx = \sqrt{Nx^2 + y^2} dx.$$

$$16 \quad xy' = y + x \sqrt[N+1]{y/x}.$$

$$17 \quad xy' = \sqrt{N^2 x^2 - y^2} + y.$$

$$18 \quad (y + N \sqrt{xy}) dx = x dy.$$

$$19 \quad Nx^3 y' = y(Nx^2 - y^2).$$

$$20 \quad (y^2 + Nx^2) dy = Nxy dx.$$

$$21 \quad \cos(Ny/x)(y - xy') = x.$$

$$22 \quad xy' = Ny \ln(y/x).$$

$$23 \quad xy' = y + \sqrt{x^2 + Ny^2}.$$

$$24 \quad xy' + y(N \ln(y/x) - 1) = 0.$$

$$25 \quad y' = N + y/x + (y/x)^2.$$

$$26 \quad Nxy' = x + (N - 2)y + y^2 / x.$$

$$27 \quad xy' \ln \frac{y}{x} = Nx + y \ln \frac{y}{x}.$$

$$28 \quad y' = N \frac{y}{x} + 5.$$

$$29 \quad \sqrt{x^2 + y^2} = N(y' - y).$$

$$30 \quad y' = \frac{y}{x} \left(1 + N \ln \frac{y}{x} \right).$$

Задание 4. Сосуд объема V л содержит воздушную смесь (воздух и азот). Из сосуда вытекает $a(t)$ л воздушной смеси в минуту, и такое же количество смеси втекает, причем во втекающей смеси количество азота составляет $b(t)$ л за минуту. Определить количество азота (л) в сосуде в момент T , если в момент $t = 0$ в сосуде содержалось V_0 л азота. Количество азота в сосуде подчиняется закону $y' = b - a \frac{y}{V}$.

| Вариант | $a(t)$ | $b(t)$ | V | V_0 | T |
|---------|-----------------------|--------------|-----|-----------|-----|
| 1 | t | t^3 | 1 | $1/(N+2)$ | 1 |
| 2 | $4t$ | t^3 | 4 | $1/N$ | 0,8 |
| 3 | $1/(t+1)$ | e^{-t} | 1 | $1/(N+1)$ | 2 |
| 4 | $10/(t+1)$ | $2e^{-t}$ | 10 | $2/N$ | 2 |
| 5 | $1/(t+5)$ | $e^{-t}/5$ | 1 | $1/(N+3)$ | 2 |
| 6 | $\operatorname{tg} t$ | $\sin t/10$ | 1 | $1/(N+1)$ | 1 |
| 7 | $\operatorname{tg} t$ | $1 - \cos t$ | 1 | $1/(N+2)$ | 0,8 |
| 8 | $2/(t+3)$ | $e^{-t}/3$ | 2 | $1/N$ | 5 |
| 9 | $1/(t+1)$ | $0,5 \sin t$ | 1 | $1/(N-1)$ | 1 |
| 10 | $10/(t+2)$ | $\sin 2t$ | 10 | $N-1$ | 1 |

Продолжение табл.

| Вариант | $a(t)$ | $b(t)$ | V | V_0 | T |
|---------|--------------------|-----------|-----|-----------|-----|
| 11 | $5/(t+1)$ | $2t$ | 5 | $2/N$ | 1 |
| 12 | $2/(t+1)$ | t | 1 | $1/(2N)$ | 0,7 |
| 13 | $4/(t+2)$ | t | 2 | $1/(N+1)$ | 1 |
| 14 | 4 | e^{-t} | 2 | $2/(N+1)$ | 5 |
| 15 | 2 | e^t | 2 | $2/(N+2)$ | 1 |
| 16 | 1 | e^{-2t} | 1 | $1/(N+3)$ | 1 |
| 17 | 4 | e^{-2t} | 2 | $2/(N+2)$ | 4 |
| 18 | 3 | $t+1$ | 1 | $2/(N+3)$ | 2 |
| 19 | 1 | t^2 | 0,5 | $1/(N+5)$ | 1 |
| 20 | 5 | $t+3$ | 1 | $1/(N+2)$ | 2 |
| 21 | $t/(t^2+1)$ | $t/2$ | 1 | $1/(N+2)$ | 1 |
| 22 | $\frac{4t}{t^2+1}$ | t | 2 | $1/N$ | 2 |
| 23 | $\frac{2t}{t^2+1}$ | t^2 | 1 | $1/(N+5)$ | 1 |
| 24 | $\frac{2t}{t^2+4}$ | $t/4$ | 1 | $2/N$ | 0,5 |
| 25 | $\frac{6t}{t^2+4}$ | t | 3 | $1/N$ | 1 |
| 26 | $t^2/(t^3+1)$ | t^2 | 1 | $1/(N+5)$ | 1 |
| 27 | $3t^2/(t^3+1)$ | t | 1 | $1/(N+1)$ | 1 |

| | | | | | |
|----|------------------|---------|------|-------------|---|
| | 1) | | | | |
| 28 | $6t^2/(t^3 + 1)$ | t^2 | 2 | $1/N$ | 1 |
| 29 | $t^3/(t^4 + 2)$ | $t^3/5$ | 0,25 | $1/(N + 8)$ | 1 |
| 30 | $4t^3/(t^4 + 1)$ | t^3 | 1 | $1/(N + 2)$ | 1 |

Задание 5. Решить дифференциальное уравнение.

1 $xy' - 2y = Nx^4$.

2 $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{N}{\cos x}$.

3 $(xy + Ne^x)dx - xdy = 0$.

4 $xy' = x^N + 2y$.

5 $(xy' - N) \ln x = 2y$.

6 $y' + 2y = y^2 e^{Nx}$.

7 $(y + x^2)dx = Nx dy$.

8 $y' = Ny^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

9 $y' + y = xy^{N+1}$.

10 $y \sin x + y' \cos x = N$

11 $y' - \frac{xy}{x^2 - 1} = Nx \sqrt{y}$.

12 $y' + y/x = -y^{N+1}$

13 $xy' + y = \sin Nx$.

14 $(x^2 - 1)y' - xy = Nx^3 - Nx$.

15 $y' \operatorname{ctg} x - y = N \cos x \operatorname{ctg} x$.

16 $y' + y = x \sqrt{y^{N+2}}$.

17 $y' + 2y = y^2 e^{Nx}$.

18 $xy' + y = \ln x + N$.

19 $x^2 y' + xy + N = 0$.

20 $(xy' - 1) \ln x = Ny$.

21 $y' - y = \frac{x}{y} e^{Nx}$.

22 $y' - \frac{N}{x} y = x$.

23 $y'x + y = -x^N y^2$.

24 $y' + \frac{2y}{x} = e^{-x^2} / (Nx)$.

25 $2y' - \frac{xy}{x^2 - 1} = \frac{Nx}{y}$.

26 $2y' - \frac{xy}{x^2 - N^2} = \frac{x}{y^3}$.

27 $xy' + 2y + x^5 y^3 e^{Nx} = 0$.

28 $xy^2 y' = x^N + y^3$.

29 $xy' - Nx^2 \sqrt{y} = 4y$.

30 $y \sin x + y' \cos x = N \operatorname{tg} x$.

Задание 6. Течение процесса $y = y(t)$ описывается уравнением $y'' = g(t)$, скорость процесса в момент $t = 0$ равна нулю, начальное состояние процесса $y(0)$ задано. Найти состояние процесса в момент $t = \tau$. Вычисления провести с точностью до 0,1.

| Вариант | $g(t)$ | $y(0)$ | τ |
|---------|-----------------------------------|--------|--------|
| 1 | $-\frac{10t+11}{5t+7}$ | 2 | 3 |
| 2 | $1 + \frac{4}{3t+4}$ | 1 | 1/3 |
| 3 | $\frac{2}{\cos^2(t/3)}$ | 6 | 3 |
| 4 | $-2\ln(t+4)$ | 1 | 1 |
| 5 | $\frac{1}{2t+3} - 3$ | 4 | 1/2 |
| 6 | $-\frac{3}{\sqrt{4-6t}}$ | 0 | 1/2 |
| 7 | $6t + \frac{1}{\sin^2(t/2+1)}$ | 1 | 2 |
| 8 | $t - \cos^2(2t/3)$ | 2 | 3 |
| 9 | $\frac{4t}{(t^2+1)^2}$ | 3 | 5 |
| 10 | $1 - \frac{5}{\cos^2 3t}$ | 2 | 1/3 |
| 11 | $\frac{4}{t^2+9}$ | 4 | 3 |
| 12 | $\frac{2 + \cos^2 2t}{\cos^2 2t}$ | 3 | 5/2 |
| 13 | $4t - \frac{1}{9t^2+4}$ | 2 | 2 |
| 14 | $4 + \ln(2t+3)$ | 5 | 3/2 |
| 15 | $\frac{12}{\sqrt{t+5}}$ | 2 | 4 |

Продолжение табл.

| Вариант | $g(t)$ | $y(0)$ | τ |
|---------|------------------------------|--------|--------|
| 16 | $\frac{1}{\sin^2(t+1)} - 3t$ | 1 | 2 |
| 17 | $\frac{2t}{(6t^2+3)^2}$ | 3 | 1 |
| 18 | $-\frac{4}{\sqrt{36-t^2}}$ | 6 | 3 |
| 19 | $-\ln(3-t)$ | 2 | 1 |
| 20 | $\frac{1}{(4-3t)^2}$ | 4 | 1 |
| 21 | $-\frac{1}{(3t+1)^2}$ | 1 | 2/3 |
| 22 | $-4\cos^2(5t)$ | 2 | 2 |

| | | | |
|----|-----------------------------|----|-----|
| 23 | $-\frac{5}{\sqrt{4-t^2}}$ | 10 | 1 |
| 24 | $-\frac{t}{(2t^2+5)^2}$ | 3 | 1 |
| 25 | $-\frac{1}{\sqrt{25-4t^2}}$ | 5 | 3/2 |
| 26 | $48 - \sin^2(t/4)$ | 4 | 8 |
| 27 | $\frac{5}{5t^2+9}$ | 2 | 3 |
| 28 | $\frac{3}{t^2+8t+16}$ | 2 | 1 |
| 29 | $\frac{3}{\sin^2(2-t)}$ | 0 | 1 |
| 30 | $\frac{t^2+4t+8}{t^2+4t+4}$ | 2 | 3 |

Задание 7. Решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

1 $2(y')^2 = (y-1)y''$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2 $y = \frac{(y')^2}{y''}$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 5$.

3 $y'' + 4/y^3 = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1/2$.

4 $(1-y)y'' + (y')^2 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1/2$.

5 $y''e^{-9y} = \frac{9}{2}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

6 $y''e^{-y} = 4y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.

7 $y'' + 3y' = (y')^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.

8 $2y''\sqrt{y} = y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

9 $(y')^2 = 2y''y - 25$, $y(0) = 50$, $y'(0) = 5$.

10 $\frac{y''}{y'} - \frac{y'}{y} = 2 \ln y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

11 $y'' = 2 \frac{y'}{\sqrt{y}}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

12 $y'' = \frac{e^{y/2}}{4}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

13 $y'' = -2/y^3$, $y(0) = 3$, $y'(0) = \sqrt{2}/3$.

14 $y'' + \frac{5}{1-y}(y')^2 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

15 $y'' = 9y^{-1/2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$.

16 $y'' = -y'e^{-2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1/2$.

17 $y'' = -2y' + (y')^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

18 $3yy'' = (y')^2$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 2$.

19 $2yy'' = 4 + (y')^2$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 2$.

20 $y'' - \frac{(y')^2}{y} = 2y' \ln y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 9$.

21 $y'' = -\frac{1}{2e^y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

$$22 \quad y''\sqrt{y} = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$23 \quad y''y^2 = -\frac{1}{y}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1/2.$$

$$24 \quad yy'' = 0,5(y')^2, \quad y(0) = 9, \quad y'(0) = 3.$$

$$25 \quad y'' - \frac{3}{y-1}(y')^2 = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 8.$$

$$26 \quad y'' - y'e^{3y} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1/3.$$

$$27 \quad y'' = (y')^2 - y', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

$$28 \quad y'' + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

$$29 \quad 2yy'' - 1 = (y')^2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

$$30 \quad yy'' - (y')^2 = 2yy' \ln y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 16.$$

Задание 8. Найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

$$1 \quad (x+1)y'' - y' = (x+1)^4.$$

$$2 \quad y'' - y' \operatorname{ctg} x + 2 \sin x = 0.$$

$$3 \quad x^2 y'' + xy' = 1.$$

$$4 \quad xy'' + y' = 6 \ln x.$$

$$5 \quad \left(y'' - \frac{y'}{x} \right) e^{3x} = x.$$

$$6 \quad y'' = \frac{y'}{x} (\ln(5y') - \ln x).$$

$$7 \quad 0,5y'' = x(y')^2.$$

$$8 \quad 2y'' = \frac{y'}{x} - \frac{4}{xy'}.$$

$$9 \quad y''(2 + \ln x) = \frac{y'}{x}.$$

$$10 \quad y'' \sin x = (2y' + 1) \cos x.$$

$$11 \quad y'' - \frac{y'}{x+1} = x^2 + 2x + 1.$$

$$12 \quad y'' - y' \operatorname{ctg} x = x \sin x.$$

$$13 \quad xy'' = y' + x^2.$$

$$14 \quad y'' + \frac{y'}{x} = \frac{\ln x}{x}.$$

$$15 \quad y'' - \frac{y'}{x} = xe^{4x}.$$

$$16 \quad y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{2y'}{x}.$$

$$17 \quad y'' + 18x(y')^2 = 0.$$

$$18 \quad 2xy'y'' = (y')^2 + 3.$$

$$19 \quad y''x(7 + \ln x) = y'.$$

$$20 \quad y'' \operatorname{tg} x = y' + 2.$$

$$21 \quad y'' - \frac{y'}{x+1} - \sqrt{x+1} = 0.$$

$$22 \quad y'' \operatorname{tg} x = y' + 1.$$

$$23 \quad y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1).$$

$$24 \quad y'' + \frac{y'}{x} - \frac{\ln x^2}{x} = 0.$$

$$25 \quad y'' - \frac{y'}{x} = \frac{x}{e^x}.$$

$$26 \quad xy'' = y' \ln \frac{8y'}{x}.$$

$$27 \quad y'' - (2y'\sqrt{2x})^2 = 0.$$

$$28 \quad 2xy'y'' - (y')^2 + 9 = 0.$$

$$29 \quad x(5 + \ln x) \frac{y''}{y'} = 1.$$

$$30 \quad 3 + y'' \operatorname{tg} x = 2y'.$$

Задание 9. Решить линейное однородное дифференциальное уравнение.

$$a) \quad y'' - (5 + N)y' + 5Ny = 0.$$

$$1 \quad б) \quad y'' + 4Ny' + 4N^2y = 0.$$

$$в) \quad 9y''' + N^2y' = 0.$$

$$a) \quad y'' - (2 + 2N)y' + 4Ny = 0.$$

$$2 \quad б) \quad y'' + 4N^2y = 0.$$

$$в) \quad 4y''' - N^2y' = 0.$$

$$a) \quad 2y'' - (2 + N)y' + Ny = 0.$$

$$3 \quad б) \quad N^2y'' + 4y = 0.$$

$$в) \quad y''' + 2Ny'' + N^2y' = 0.$$

$$a) \quad 9y'' - 6Ny' + N^2y = 0.$$

$$4 \quad б) \quad y'' - 2Ny' + (N^2 + 1)y = 0.$$

$$в) \quad y''' + Ny'' + 9y' + 9Ny = 0.$$

$$a) \quad y'' + 6Ny' - 10N^2y = 0.$$

$$5 \quad б) \quad y'' - 2y' + (N^2 + 1)y = 0.$$

$$в) \quad y''' + 2Ny'' + 9y' + 18Ny = 0.$$

$$a) \quad y'' - 8Ny' + 15N^2y = 0.$$

$$6 \quad б) \quad y'' - 4Ny' + 4N^2y = 0.$$

$$в) \quad y''' + 2y'' + (1 + N^2)y' = 0.$$

$$a) \quad y'' - 8Ny' = 0.$$

$$7 \quad б) \quad y'' - 2Ny' + 2N^2y = 0.$$

$$в) \quad y''' + 2Ny'' + N^2y' = 0.$$

$$a) 5y'' + Ny' = 0.$$

$$8 \quad \text{б)} 4y'' - 4Ny' + (1 + N^2)y = 0.$$

$$\text{в)} y''' + 3Ny'' + 3N^2y' + N^3y = 0.$$

$$a) 5y'' + (1 + 5N)y' + Ny = 0.$$

$$9 \quad \text{б)} y'' - 4y' + (4 + 9N^2)y = 0.$$

$$\text{в)} y''' - 3Ny'' + 3N^2y' - N^3y = 0.$$

$$a) 6y'' - 5Ny' + N^2y = 0.$$

$$10 \quad \text{б)} N^2y'' + 4y = 0.$$

$$\text{в)} y''' + 2Ny'' + N^2y' = 0.$$

$$a) 3y'' - 4Ny' + N^2y = 0.$$

$$11 \quad \text{б)} N^2y'' - 4y = 0.$$

$$\text{в)} y''' + 2Ny'' + (N^2 + 1)y' = 0.$$

$$a) 3y'' + 2Ny' - N^2y = 0.$$

$$12 \quad \text{б)} y'' - 2Ny'' + (N^2 + 9)y = 0.$$

$$\text{в)} y''' + Ny'' = 0.$$

$$a) y'' + (2N - 3)y' - 6Ny = 0.$$

$$13 \quad \text{б)} y'' - 2y' + (1 + 4N^2)y = 0.$$

$$\text{в)} 4y''' + 4Ny'' + N^2y' = 0.$$

$$a) y'' - 3Ny' - 4N^2y = 0.$$

$$14 \quad \text{б)} y'' + 9N^2y = 0.$$

$$\text{в)} y''' + 5Ny'' + 4y' + 20Ny = 0.$$

$$a) y'' - 4Ny' - 5N^2y = 0.$$

$$15 \quad \text{б)} 9y'' - N^2y = 0.$$

$$\text{в)} y''' + Ny'' + 9y' + 9Ny = 0.$$

$$a) y'' + (2 - N)y' - 2Ny = 0.$$

$$16 \quad \text{б)} N^2y'' - 4y = 0.$$

$$\text{в)} y''' + 2y'' + (1 + 25N^2)y' = 0.$$

$$a) y'' + (N - 1)y' - Ny = 0.$$

$$17 \quad \text{б)} N^2y'' + 4y = 0.$$

$$\text{в)} y''' + 2Ny'' = 0.$$

$$a) Ny'' - (N + 1)y' + y = 0.$$

$$18 \quad \text{б)} N^2y'' + 2Ny' + y = 0.$$

$$\text{в)} y''' + 4N^2y' = 0.$$

$$a) Ny'' - (2N + 1)y' + 2y = 0.$$

$$19 \quad \text{б)} N^2y'' + 4Ny' + 4y = 0.$$

$$\text{в)} y''' + 6y'' + (4N^2 + 9)y' = 0.$$

$$a) 2Ny'' - (2N+1)y' + y = 0.$$

$$20 \quad б) N^2y'' + 4Ny' = 0.$$

$$в) 8y''' + 12Ny'' + 6N^2y' + N^3y = 0.$$

$$a) Ny'' - (N+1)y' + y = 0.$$

$$21 \quad б) N^2y'' - 4y = 0.$$

$$в) y''' + 2Ny'' + (N^2 + 16)y' = 0.$$

$$a) y'' + 2Ny' - 15N^2y = 0.$$

$$22 \quad б) y'' - 4y' + (N^2 + 4)y = 0.$$

$$в) y''' + 3Ny'' + 4y' + 12Ny = 0.$$

$$a) y'' - 6Ny' + 8N^2y = 0.$$

$$23 \quad б) y'' - 8Ny' + 16N^2y = 0.$$

$$в) y''' + 4y'' + (4 + N^2)y' = 0.$$

$$a) 5y'' + 2Ny' = 0.$$

$$24 \quad б) y'' - 2Ny' + 5N^2y = 0.$$

$$в) 9y''' + 6Ny'' + N^2y' = 0.$$

$$a) 7y'' + Ny' = 0.$$

$$25 \quad б) 4y'' - 4Ny' + (1 + N^2)y = 0.$$

$$в) 27y''' + 27Ny'' + 9N^2y' + N^3y = 0.$$

$$a) 3y'' + (1 + 3N)y' + Ny = 0.$$

$$26 \quad б) y'' - 4Ny' + (4 + 4N^2)y = 0.$$

$$в) y''' - 6Ny'' + 12N^2y' - 8N^3y = 0.$$

$$a) 12y'' - 7Ny' + N^2y = 0.$$

$$27 \quad б) 9N^2y'' + 4y = 0.$$

$$в) y''' + 4Ny'' + 4N^2y' = 0.$$

$$a) 4y'' - 5Ny' - N^2y = 0.$$

$$28 \quad б) 9N^2y'' - 4y = 0.$$

$$в) y''' + 6Ny'' + (9N^2 + 1)y' = 0.$$

$$a) 2y'' - Ny' - N^2y = 0.$$

$$29 \quad б) y'' - 2Ny' + (N^2 + 36)y = 0.$$

$$в) 8y''' + Ny'' = 0.$$

$$a) y'' + (3N - 2)y' - 6Ny = 0.$$

$$30 \quad б) y'' - 6y' + (9 + 4N^2)y = 0.$$

$$в) 16y''' + 8Ny'' + N^2y' = 0.$$

Задание 10. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение методом вариации постоянных.

$$1 \quad y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$$

- 2 $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2}$.
- 3 $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.
- 4 $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$.
- 5 $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$.
- 6 $y'' + 9y = \operatorname{ctg} 3x$.
- 7 $y'' + 2y' = \frac{e^{-2x}}{e^{-2x} + 1}$.
- 8 $y'' + 16y = 4 \operatorname{tg} 4x$.
- 9 $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^3}$.
- 10 $y'' - 9y = \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 1}$.
- 11 $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x} \ln x$.
- 12 $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{4 - x^2}}$.
- 13 $y'' + 9y = \frac{1}{\sin^2 3x}$.
- 14 $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$.
- 15 $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$.
- 16 $y'' + 9y = \operatorname{tg}^2 3x$.
- 17 $y'' - y = \frac{e^{-x}}{e^x + 2}$.
- 18 $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln 2x$.
- 19 $y'' - 8y' + 16y = \frac{e^{4x}}{x^2 + 4}$.
- 20 $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$.
- 21 $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \operatorname{tg} 2x$.
- 22 $y'' - 2y' + 10y = e^x \cos 3x$.
- 23 $y'' + 16y = \frac{1}{\sin 4x}$.
- 24 $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x + 1}$.
- 25 $y'' + 8y' + 16y = \frac{e^{-4x}}{x^2 + 9}$.
- 26 $4y'' - 4y' + y = e^{x/2} \ln 2x$.
- 27 $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \operatorname{tg} x$.
- 28 $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 2}$.
- 29 $y'' + 9y = \frac{\cos 3x}{\sin^2 3x}$.
- 30 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sqrt{x}$.

Задание 11. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение.

- 1 $5y'' + 2Ny' = e^x(x(N + 5) + N + 10)$.
- 2 $y'' - 10y' = -10N$.

- 3 $y'' - 2Ny' + (N^2 + 1)y = 2e^{Nx} \cos 2x$.
- 4 $y'' - 6y' + 9y = e^{Nx}(N^2 - 6N + 10)$.
- 5 $4y'' + N^2y = \sin 2x(N^2 + 1)$.
- 6 $Ny'' + 3y' = e^{5x}(25N + 15)$.
- 7 $y'' - N^2y = (N^2 + 4)\cos 2x - 2(N^2 + 4)\sin 2x$.
- 8 $2y'' + y' = 2Nx + 4N$.
- 9 $y'' - 2Ny' + 2N^2y = e^{3x}(x(2N^2 - 6N + 9) + 2N^2 - 8N + 15)$.
- 10 $y'' - 4y' + 29y = \cos 5x(4Nx - 4N) + \sin 5x(20Nx - 10N)$.
- 11 $y'' - 6y' + 10y = 10x^2 + 2x(5N - 6) + 2 - 6N$.
- 12 $4y'' - N^2y = -2N^2x^2 + 5N^2 + 16$.
- 13 $y'' - 2y' - 8y = 2e^{4x}(6x + 3N + 1)$.
- 14 $y'' - 4y' + 4y = 6Nxe^{2x}$.
- 15 $4y'' + 4Ny' + N^2y = e^{-Nx}(N^2x - 4N)$.
- 16 $y'' + N^2y = N^2(Nx + 1)$.
- 17 $y'' + 4N^2y = e^{-x}(20N^2 + 5)$.
- 18 $y'' + 9y = 6N \cos 3x$.
- 19 $y'' - 4y = 4Ne^{2x}$.
- 20 $y'' + 2Ny' + N^2y = 2e^{-Nx}$.
- 21 $N^2y'' - 2Ny' + y = x^3 - 6Nx^2 + 6N^2x + 1$.
- 22 $y'' - 5y' + 6y = 6Nx^2 - 10Nx + 2(N + 3)$.
- 23 $y'' - 6y' + 8y = 8x^2 + 4x(2N - 3) + 2(1 - 3N)$.
- 24 $y'' - y' - 6y = 5Ne^{3x}$.
- 25 $y'' - (N + 2)y' + 2Ny = -e^{4x}(2x(3N - 4) + 31N - 46)$.
- 26 $y'' - 4y' + 29y = \cos 5x(4Nx - 4N) + \sin 5x(20Nx - 10N)$.
- 27 $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 2x(5N - 6) + 2 - 6N$.
- 28 $y'' - 2y' + 2y = (x + N)e^x$.
- 29 $y'' - 5Ny' + 6N^2y = 2(2 - 5Nx)\cos 2x + (x(6N^2 - 4) - 5N)\sin 2x$.
- 30 $y'' - 2Ny' + 2N^2y = e^{3x}(x(2N^2 - 6N + 9) + 2N^2 - 8N + 15)$.

Задание 12. Решить задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения.

- 1 $y'' - 4y' + 4y = 20x^2 - 40x + 10; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 4 - N$.
- 2 $y'' - 4y' + 13y = -6e^{2x} \cos x; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 3N$.
- 3 $y'' - 5y' + 6y = -4e^{2x}; \quad y(0) = N; \quad y'(0) = 2(N + 2)$.
- 4 $y'' - 3y' + 2y = 2(Nx^2 - 3Nx + N + 1); \quad y(0) = 6; \quad y'(0) = 10$.
- 5 $y'' - 2Ny' + (N^2 + 9)y = 18xe^{Nx}; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = N - 4$.
- 6 $y'' + 6y' - 16y = 2Ne^{2x}(-10x + 1); \quad y(0) = 3; \quad y'(0) = 6$.
- 7 $y'' + 4y' = 84x^2 + 42x + 4N; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = N$.
- 8 $4y'' + 4y' + y = e^x(9x + 12); \quad y(0) = N; \quad y'(0) = (4 - N)/2$.
- 9 $y'' + 8y' - 20y = -48 \cos 2x - 32 \sin 2x; \quad y(0) = N + 2; \quad y'(0) = 2N$.
- 10 $y'' - N^2y = 2 \cos x - x(N^2 + 1) \sin x; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = N$.
- 11 $6y'' - 5y' + y = Nx^2 - 10Nx + 12N - 2; \quad y(0) = -2; \quad y'(0) = 0,5$.
- 12 $9y'' + 6y' + y = 20Ne^{3x}(5x + 3); \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = N + 3$.
- 13 $y'' + 4y = 4N \cos 2x; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 2$.
- 14 $y'' + 2y' + 2y = (2N - 1) \cos x + (N + 2) \sin x; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = N + 1$.

- 15 $y'' - Ny' = (N+1)e^{-x}$; $y(0) = 11$; $y'(0) = -1$.
- 16 $y'' - 2Ny' + (N^2 + 1)y = (N^2 + 1)x^2 - 4Nx - 3N^2 - 1$; $y(0) = -3$; $y'(0) = 2$.
- 17 $y'' + 5y' = -4e^{-x}$; $y(0) = 1 - N$; $y'(0) = -1$.
- 18 $2y'' - 3y' + y = e^x(10x + 19)$; $y(0) = N$; $y'(0) = N + 1$.
- 19 $y'' - 8y' + 15y = -2Ne^{3x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = N - 2$.
- 20 $y'' - 10y' = -30Nx^2 + 6Nx - 20$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.
- 21 $4y'' - 9y = -12Ne^{-3x/2}$; $y(0) = 2$; $y'(0) = N + 3$.
- 22 $y'' + N^2y = e^{2x}(2N^2 + 8)$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 2N + 4$.
- 23 $y'' + 4y' + 8y = 4Ne^{-2x}$; $y(0) = 1 + N$; $y'(0) = -2N - 2$.
- 24 $y'' + 9y = 2e^x(5Nx^2 + (2N - 5)x + N - 1)$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -4$.
- 25 $y'' + 2y' + 10y = 9Nxe^{-x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = N + 4$.
- 26 $y'' - 6y' + 9y = 2Ne^{3x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.
- 27 $y'' - 8y' + 16y = 32N \sin 4x$; $y(0) = N$; $y'(0) = 1$.
- 28 $3y'' - 4y' + y = e^x(4x + 8)$; $y(0) = N$; $y'(0) = N + 1$.
- 29 $y'' + Ny' = -25 \cos 5x - 5N \sin 5x$; $y(0) = 7$; $y'(0) = 0$.
- 30 $y'' - Ny' = 12 - 12Nx$; $y(0) = 2$; $y'(0) = N$.

Задание 13. Процесс колебания материальной точки массой m под действием силы упругости $F_y = -ky$, силы сопротивления среды $F_c = -hy'$ и внешней силы $F(t)$, где t – время, а $y(t)$ – отклонение от состояния равновесия $y = 0$, может быть описан уравнением вида $y'' + py' + qy = f(t)$. Здесь $p = \frac{h}{m}$, $q = \frac{k}{m}$, $f(t) = \frac{F(t)}{m}$. Найти закон движения точки, если известны значения $p, q, f(t)$, а также координаты точки в моменты времени $t_0 = 0$ и $t_1 = 1$.

| Вариант | p | q | $f(t)$ | $y(0)$ | $y(1)$ |
|---------|------|------------|-----------------------|--------|---------|
| 1 | 2 | 2 | $\sin 2t$ | 0 | N |
| 2 | 2 | 10 | $e^{-t} \cos t$ | 0 | $N - 1$ |
| 3 | $2N$ | $N^2 + 1$ | $\sin 2t$ | 10 | 0 |
| 4 | $2N$ | $N^2 + 9$ | e^{-Nt} | 0 | 5 |
| 5 | $4N$ | $4N^2 + 1$ | $e^{-t} \cos 2t$ | 5 | 0 |
| 6 | 4 | 8 | $e^{-2t} \cos 2t$ | 0 | N |
| 7 | 0 | 4 | $N \sin 2t$ | 1 | 0 |
| 8 | 4 | $N^2 + 4$ | $e^{-t} \cos 2t$ | 10 | 5 |
| 9 | 0 | N^2 | $2 \sin 5t$ | 10 | 0 |
| 10 | 6 | 13 | $e^{-2t} \cos 2t$ | 1 | N |
| 11 | 8 | 17 | $\sin Nt - 2 \cos Nt$ | 12 | 6 |
| 12 | 8 | 25 | $e^{-Nt} \sin t$ | 8 | 2 |

Продолжение табл.

| Вариант | p | q | $f(t)$ | $y(0)$ | $y(1)$ |
|---------|-----|-----------|-----------------------|--------|--------|
| 13 | 2 | $N^2 + 1$ | $e^{-2t} \cos 2t$ | 6 | 0 |
| 14 | 4 | 40 | $5 \sin 2t + \cos 2t$ | 0 | N |

| | | | | | |
|----|------|-----------------------|-----------------------|-----|-----|
| 15 | 8 | $\frac{N^2 + 16}{16}$ | $e^{-3t} \cos t$ | 0 | 10 |
| 16 | $4N$ | $\frac{4N^2 + 4}{4}$ | $e^{-t} \sin 2t$ | 8 | 1 |
| 17 | 4 | 8 | $5 \sin t + 5 \cos t$ | N | 0 |
| 18 | 4 | 29 | $e^{-5t} \cos 2t$ | N | 1 |
| 19 | 0 | N^2 | $\sin Nt$ | 1 | 2 |
| 20 | 0 | 9 | $e^{-3t} \cos t$ | N | 0 |
| 21 | 2 | 26 | $\sin Nt$ | 0 | 4 |
| 22 | 6 | 34 | $e^{-Nt} \sin t$ | 1 | 5 |
| 23 | 8 | 20 | $e^{-Nt} \sin 4t$ | 0 | 4 |
| 24 | 0 | 16 | $N \cos 4t + \sin 4t$ | 8 | 2 |
| 25 | 6 | $\frac{4N^2 + 9}{9}$ | $\cos 2Nt$ | 5 | 1 |
| 26 | 6 | 18 | $e^{-3t} \cos t$ | 4 | 0 |
| 27 | 4 | $\frac{4N^2 + 4}{4}$ | $5 \sin 2t + \cos 2t$ | 0 | 6 |
| 28 | 10 | 26 | $e^{-5t} \cos 2t$ | 0 | N |
| 29 | 10 | 34 | $\cos 2Nt$ | 8 | 0 |
| 30 | 0 | 16 | $e^{-Nt} \sin 4t$ | 1 | 4 |

Задание 14. Пусть движение материальной точки на плоскости описывается системой дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y; \\ y' = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$ Здесь t – время; $x(t)$, $y(t)$ – координаты точки в момент t ; $x'(t)$, $y'(t)$ – скорость точки в момент t . Найти неизвестные функции $x(t)$ и $y(t)$.

$$1 \quad \begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = (N-2)x + (N-1)y. \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} x' = 5x + (N-5)y; \\ y' = 3x + (N-3)y. \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} x' = -x + (N^2 + 4)y; \\ y' = -x + 3y. \end{cases}$$

$$4 \quad \begin{cases} x' = (1-N)x + y; \\ y' = (N+1)x + y. \end{cases}$$

$$5 \quad \begin{cases} x' = (2N+1)x + y; \\ y' = -x + (2N-1)y. \end{cases}$$

$$6 \quad \begin{cases} x' = (2+N)x + Ny; \\ y' = -Nx + (2-N)y. \end{cases}$$

$$7 \quad \begin{cases} x' = (N-2)x - y; \\ y' = 5x + (N+2)y. \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} x' = Nx - 2y; \\ y' = N^2x + 3Ny. \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} x' = (N + 2)x + Ny; \\ y' = (2 - N)x + (4 - N)y. \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} x' = (N - 1)x + (6 - N)y; \\ y' = Nx + (5 - N)y. \end{cases}$$

$$11 \begin{cases} x' = x + (4 + N^2)y; \\ y' = -x + 5y. \end{cases}$$

$$12 \begin{cases} x' = 3Nx - 10y; \\ y' = N^2x + Ny. \end{cases}$$

$$13 \begin{cases} x' = Nx - y; \\ y' = (N^2 + 4)x - Ny. \end{cases}$$

$$14 \begin{cases} x' = (N + 2)x - (N + 4)y; \\ y' = 2x - 4y. \end{cases}$$

$$15 \begin{cases} x' = (N + 5)x + Ny; \\ y' = -(N + 10)x - (N + 5)y. \end{cases}$$

$$16 \begin{cases} x' = (N - 2)x - Ny; \\ y' = Nx - (2 + N)y. \end{cases}$$

$$17 \begin{cases} x' = (N + 3)x + 3y; \\ y' = -3x + (N - 3)y. \end{cases}$$

$$18 \begin{cases} x' = -4x - y; \\ y' = (N^2 + 16)x + 4y. \end{cases}$$

$$19 \begin{cases} x' = 5x - (N + 5)y; \\ y' = 2x - (N + 2)y. \end{cases}$$

$$20 \begin{cases} x' = (N + 4)x + Ny; \\ y' = -(N + 8)x - (N + 4)y. \end{cases}$$

$$21 \begin{cases} x' = -(N + 2)x - 2y; \\ y' = 4x + (-N + 2)y. \end{cases}$$

$$22 \begin{cases} x' = 6x + 2y; \\ y' = (N - 6)x + (N - 2)y. \end{cases}$$

$$23 \begin{cases} x' = (N + 1)x + y; \\ y' = -2x + (N - 1)y. \end{cases}$$

$$24 \begin{cases} x' = (N - 2)x + Ny; \\ y' = (6 - N)x + (4 - N)y. \end{cases}$$

$$25 \begin{cases} x' = (3 - N)x - y; \\ y' = (N^2 + 1)x + (3 + N)y. \end{cases}$$

$$26 \begin{cases} x' = Nx + Ny; \\ y' = (5 - N)x + (5 - N)y. \end{cases}$$

$$27 \begin{cases} x' = (N + 2)x - (N + 2)y; \\ y' = 2x - 2y. \end{cases}$$

$$28 \begin{cases} x' = (N - 3)x - 13y; \\ y' = x + (N + 3)y. \end{cases}$$

$$29 \begin{cases} x' = (N + 5)x + 5y; \\ y' = -5x + (N - 5)y. \end{cases}$$

$$30 \begin{cases} x' = -Nx - Ny; \\ y' = (6 + N)x + (6 + N)y. \end{cases}$$

Задание 15. Найти три первых отличных от нуля члена разложения по формуле Маклорена решения $y = y(x)$ следующей задачи Коши

$$1 \begin{cases} y' = 2x^2 + y^2 + 6x - 1; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} y' = 2e^y + 4y + x - 2; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} y' = e^x + 4xy + \cos x - 1; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} y' = \frac{x^2}{2} + 2e^x + y + 1; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} y' = \sin^2 2x + 9 \sin y + 1; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} y' = x^2 + 9y + 6e^y + 1; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} y' = 7 \cos x + \cos y + 5x; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} y' = 11 + 2y^2 + x^2 + 3x; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} y' = \frac{x^3}{6} + 2 \sin y + 3; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} y' = 2 \sin 2x + 5e^y; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$11 \begin{cases} y' = 2e^{2y} - x^2 + 4; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$12 \begin{cases} y' = 2 \sin x + 4y^2 - 2; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$13 \begin{cases} y' = \cos x + e^x + y; \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

$$14 \begin{cases} y' = \frac{x}{2} + x^2 + y^2; \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

$$15 \begin{cases} y' = \sin x + \cos x + 9y^2; \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

$$16 \begin{cases} y' = x^2 + 6y^2; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$17 \begin{cases} y' = 7 \cos x + 5x + y^2; \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

$$18 \begin{cases} y' = 1 + \cos x + y^2; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$19 \begin{cases} y' = \frac{y^2}{2} + 2 \cos x + 3; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$20 \begin{cases} y' = y^2 + 2x + y; \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

$$21 \begin{cases} y' = 7e^{-x} + 5x + \cos y; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$22 \begin{cases} y' = 3y^2 + x^2 - x; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$23 \begin{cases} y' = \frac{x^2}{2} + 7y + e^{-x}; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$24 \begin{cases} y' = \frac{y^3}{3} + 6 \cos x; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$25 \begin{cases} y' = 4 \sin x + 9y^2 + 1; \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

$$26 \begin{cases} y' = 2x + 9y + 6e^y; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$27 \begin{cases} y' = 4xy - 1 + 3e^x; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$28 \begin{cases} y' = \cos x + 4y + e^x; \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

$$29 \begin{cases} y' = 6e^y + 9y + e^x; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$30 \begin{cases} y' = 2 - \cos x + y^2; \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Задание 16. Найти приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

в точке $x = x_k$ с помощью метода Эйлера. Использовать разбиение отрезка $[x_0; x_1]$ на $n_1 = 5$ и $n_2 = 10$ равных частей. Получить уточненное решение с помощью формулы Рунге.

| Вариант | $f(x, y)$ | x_0 | y_0 | x_k |
|---------|---------------------------|-------|-------|-------|
| 1 | $\sin(xy) + Ny^2$ | 0 | 1 | 0,5 |
| 2 | $\sin(x + Ny) + y$ | 0 | 0 | 0,5 |
| 3 | $Ny^2 + e^x$ | 0 | 1 | 0,5 |
| 4 | $N + \sqrt{y} + \sin x$ | 0 | 4 | 0,5 |
| 5 | $N\sqrt{y} + 2x^2$ | 0 | 1 | 1 |
| 6 | $10\sqrt{y} + \sin(x/N)$ | 0 | 1 | 1 |
| 7 | $\cos y\sqrt{y} + x^2y/N$ | 0 | 0,1 | 1 |
| 8 | $\sqrt{y}/N + x^2$ | 0 | 0,1 | 1 |
| 9 | $3x + Ny + \ln y$ | 0 | 1 | 0,5 |
| 10 | $x/N + 2yx \ln y$ | 1 | 1 | 1,5 |
| 11 | $xy/N + \ln y$ | 1 | 1 | 1,5 |
| 12 | $3xy + (\ln y)/N$ | 1 | 1 | 1,5 |
| 13 | $e^{2x}y + N$ | 0 | 0 | 0,5 |
| 14 | $e^x + xy/N$ | 0 | 1 | 1 |

| | | | | |
|----|-----------------------|---|---|-----|
| 15 | $e^x y + Nx$ | 0 | 1 | 0,5 |
| 16 | $e^x \sin y + Nx$ | 0 | 1 | 0,5 |
| 17 | $e^x \cos y + xy / N$ | 0 | 1 | 1 |
| 18 | $e^x(1+y) + x / N$ | 0 | 1 | 1 |
| 19 | $yx^2 + e^{-Nx}$ | 0 | 0 | 5 |
| 20 | $yx^3 + e^{-Nx}$ | 0 | 1 | 5 |
| 21 | $y\sqrt{x} + e^{-Nx}$ | 0 | 1 | 5 |
| 22 | $2yx + e^{-Ny}$ | 0 | 0 | 1 |

Продолжение табл.

| Вариант | $f(x, y)$ | x_0 | y_0 | x_k |
|---------|----------------------|-------|-------|-------|
| 23 | $5yx + 2\sin(x/N)$ | 0 | 1 | 0,1 |
| 24 | $2x^2 + \cos y / N$ | 0 | 1 | 0,5 |
| 25 | $2\ln x + \cos(y/N)$ | 1 | 1 | 1,5 |
| 26 | $x + y + xy / N$ | 0 | 1 | 0,5 |
| 27 | $xy + x + y / N$ | 0 | 1 | 1 |
| 28 | $x + N / y$ | 0 | 1 | 0,5 |
| 29 | $x / N + e^{-y}$ | 0 | 1 | 0,5 |
| 30 | $\cos(xy / N)$ | 0 | 0 | 0,5 |

9 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Задача 1

а) В сосуд, содержащий 5 л воды, непрерывно со скоростью 1 л/мин поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 10 мин?

Считать, что вытекающий газ (или жидкость) вследствие перемешивания равномерно распределяется по всему объему сосуда. Тогда функция $y(t)$, где t – время, а $y(t)$ – концентрация вещества (в долях), подчиняется закону $Vy' = a(c_0 - y)$. Здесь V – объем сосуда; $a(t)$ – скорость поступления вещества в сосуд; c_0 – концентрация данного вещества (в долях) в поступающем растворе.

Решение. По условию задачи $V = 5$, $a = 1$, $c_0 = 0,3$. Следовательно, дифференциальное уравнение, описывающее процесс, имеет вид

$$5y' = 0,3 - y.$$

Начальная концентрация соли в воде равна нулю, следовательно, начальное условие имеет вид

$$y(0) = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Заменяем y' на $\frac{dy}{dt}$:

$$5 \frac{dy}{dt} = 0,3 - y;$$

разделяем переменные:

$$5 \frac{dy}{0,3 - y} = dt.$$

Далее интегрируем

$$5 \int \frac{dy}{0,3-y} = \int dt ;$$

$$-5 \ln |0,3-y| = t + C ;$$

$$\ln |0,3-y| = -t/5 + C$$

(так как C – произвольная константа, то заменяем $-C/5$ на C). Проводим преобразования, чтобы из полученного уравнения выразить y .

$$0,3-y = e^{C-t/5};$$

$$y = 0,3 - e^{C-t/5};$$

$$y = 0,3 - Ce^{-t/5}.$$

Находим константу C из начального условия:

$$0 = 0,3 - Ce^0;$$

$$C = 0,3.$$

Окончательно зависимость концентрации соли от времени имеет вид

$$y(t) = 0,3(1 - e^{-t/5}).$$

Находим значение $y(t)$ в момент времени $t = 10$.

$$y(10) = 0,3(1 - e^{-10/5}) \approx 0,3(1 - 0,135) \approx 0,260.$$

Если концентрация соли в сосуде составляет 0,260 кг/л, а объем сосуда 5 л, то масса соли в сосуде составит $0,260 \cdot 5 = 1,3$ кг.

Ответ: через 10 мин в сосуде будет 1,3 кг соли.

б) Начальная температура тела 5 °С. За 10 мин оно нагрелось до 15 °С. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 22 °С. Когда тело нагреется до 20 °С?

Принять, что скорость нагревания (или остывания) тела пропорциональна разности температуры тела и температуры окружающей среды. Тогда функция $y(t)$, где y – температура тела, а t – время, подчиняется закону $y' = k(h-y)$. Здесь k – коэффициент теплообмена; $h(t)$ – температура окружающей среды.

Решение. По условию задачи $h(t) = 22$, $y(0) = 5$, $y(10) = 15$, $y(T) = 20$. В задаче требуется найти время T . Дифференциальное уравнение, описывающее процесс, имеет вид

$$y' = k(22 - y).$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Заменяем y' на $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = k(22 - y);$$

разделяем переменные:

$$\frac{dy}{22-y} = k dt .$$

Далее интегрируем:

$$\int \frac{dy}{22-y} = k \int dt ;$$

$$-\ln |22-y| = kt + C ;$$

$$\ln |22-y| = -kt + C$$

(так как C – произвольная константа, то заменяем $-C$ на C). Проводим преобразования, чтобы из полученного уравнения выразить y .

$$22 - y = e^{C-kt} ;$$

$$y = 22 - e^{C-kt} ;$$

$$y = 22 - Ce^{-kt}$$

(так как C – произвольная константа, то заменяем e^C на C)

Находим константы C и k из условий:

$$\begin{cases} y(0) = 5; \\ y(10) = 15. \end{cases}$$

Подставляя в эти условия найденное решение, получим

$$\begin{cases} 22 - Ce^0 = 5; \\ 22 - Ce^{-10k} = 15; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 17; \\ 17e^{-10k} = 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 17; \\ k = 0,1 \ln \frac{17}{7}. \end{cases}$$

Окончательно зависимость температуры тела от времени имеет вид

$$y(t) = 22 - 17e^{-0,1 \ln(17/7)t} .$$

По условию задачи $y(T) = 20$:

$$22 - 17e^{-0,1 \ln(17/7)T} = 20 .$$

Отсюда получаем

$$e^{-0,1\ln(17/7)T} = \frac{2}{17};$$

$$-0,1\ln(17/7)T = \ln(2/17);$$

$$T = -10 \frac{\ln(2/17)}{\ln(17/7)}.$$

$$T \approx 24,12.$$

Ответ: через 24,12 мин тело нагреется до 20 °С.

в) Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется 50 % имеющегося радия?

Использовать закон радиоактивного распада – количество радиоактивного вещества, распадающегося в единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент. Тогда функция $y(t)$, где t – время, а $y(t)$ – масса радиоактивного вещества, подчиняется закону $y' = -ky$, где k – некоторая постоянная.

Решение. По условию задачи $y(0) = 1$ (г), $y(1) = 1 - 0,00044 = 0,99956$ (г), $y(T) = 0,5$ (г). В задаче требуется найти время T (в годах). Дифференциальное уравнение, описывающее процесс, имеет вид

$$y' = -ky.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Заменяем y' на $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = -ky,$$

разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = -k dt.$$

Далее интегрируем

$$\int \frac{dy}{y} = -k \int dt;$$

$$\ln |y| = -kt + C;$$

$$y = e^{C-kt};$$

$$y = Ce^{-kt}.$$

(так как C – произвольная константа, то заменяем e^C на C).

Находим константы C и k из условий:

$$\begin{cases} y(0) = 1; \\ y(1) = 0,99956. \end{cases}$$

Подставляя в эти условия найденное решение, получим

$$\begin{cases} Ce^0 = 1; \\ Ce^{-k} = 0,99956; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 1; \\ k = -\ln 0,99956. \end{cases}$$

Окончательно зависимость температуры тела от времени имеет вид $y(t) = e^{\ln(0,99956)t}$. По условию задачи $y(T) = 0,5$:

$$e^{\ln(0,99956)T} = 0,5.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \ln(0,99956)T &= \ln(0,5); \\ T &= \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,99956)}; \quad T \approx 1575. \end{aligned}$$

Ответ: через 1575 лет распадется 50 % имеющегося радия.

г) Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально квадрату скорости лодки. Начальная скорость лодки 3 м/с, через 5 с ее скорость составила 2 м/с. Какая скорость будет у лодки через 10 с от начала торможения?

Считать, что скорость тела $y(t)$, где t – время, подчиняется закону $my' = -ky^2 + f$. Здесь m – масса тела; k – коэффициент сопротивления среды, а f – приложенная сила.

Решение. По условию задачи $f = 0$, $y(0) = 3$, $y(5) = 2$. В задаче требуется найти значение $y(10)$. Дифференциальное уравнение, описывающее процесс, имеет вид

$$y' = -\frac{k}{m}y^2.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Заменяем y' на $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m}y^2,$$

разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{k}{m}dt.$$

Далее интегрируем

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{k}{m} \int dt;$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{k}{m}t + C;$$

$$y = \frac{1}{\frac{k}{m}t - C}.$$

Находим константы C и $\frac{k}{m}$ из условий:

$$\begin{cases} y(0) = 3; \\ y(5) = 2. \end{cases}$$

Подставляя в эти условия найденное решение, получим

$$\begin{cases} 3 = \frac{1}{-C}; \\ 2 = \frac{1}{\frac{5k}{m} - C}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -\frac{1}{3}; \\ \frac{k}{m} = \frac{1}{30}. \end{cases}$$

Окончательно зависимость скорости тела от времени имеет вид $y = \frac{30}{t+10}$.

Тогда $y(10) = \frac{30}{10+10} = 1,5$.

Ответ: через 10 с скорость лодки будет равна 1,5 м/с.

Задача 2. Решить дифференциальное уравнение

$$(x^2y + y)dx + (xy^2 + x)dy = 0.$$

Решение. Преобразуем уравнение:

$$y(x^2 + 1)dx + x(y^2 + 1)dy = 0;$$

$$y(x^2 + 1)dx = -x(y^2 + 1)dy.$$

Предполагая, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$, разделим обе части данного уравнения на xy . Получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{x^2 + 1}{x} dx = -\frac{y^2 + 1}{y} dy;$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) dx = -\left(y + \frac{1}{y}\right) dy.$$

Переменные разделены, поэтому уравнение можно интегрировать:

$$\int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = -\int \left(y + \frac{1}{y}\right) dy.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{x^2}{2} + \ln|x| = -\frac{y^2}{2} + \ln|y| + C.$$

Последнее равенство является общим решением исходного уравнения. При его нахождении были приняты ограничения $x \neq 0$, $y \neq 0$. Однако, функции $x = 0$ и $y = 0$ также являются решениями исходно-

го уравнения, что легко проверяется подстановкой. Следовательно, $x=0$ и $y=0$ – частные решения исходного уравнения.

$$\text{Ответ: } \frac{x^2}{2} + \ln|x| = -\frac{y^2}{2} + \ln|y| + C, \quad x=0, \quad y=0.$$

Задача 3. Решить дифференциальное уравнение $4x^2y' = x^2 + 4y^2$.

Решение. Данное уравнение является однородным первого порядка. Поделим обе части уравнения на x^2 . Получим

$$4y' = 1 + 4\frac{y^2}{x^2}.$$

Положим $t = \frac{y}{x}$, тогда $y' = t + x\frac{dt}{dx}$ и

$$4\left(t + x\frac{dt}{dx}\right) = 1 + 4t^2; \quad 4t + 4x\frac{dt}{dx} = 1 + 4t^2;$$

$$4x\frac{dt}{dx} = 1 + 4t^2 - 4t; \quad 4x\frac{dt}{dx} = (2t-1)^2.$$

Предполагая, что $x \neq 0$ и $2t-1 \neq 0$, разделим обе части данного уравнения на $x(2t-1)^2$ и умножим на dx . Получаем

$$\frac{4dt}{(2t-1)^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим общее решение уравнения

$$-\frac{2}{2t-1} = \ln|x| + C.$$

Возвращаемся к исходным переменным и, учитывая, что $t = \frac{y}{x}$, получаем общее решение дифференциального уравнения:

$$-\frac{2x}{2y-x} = \ln|x| + C.$$

Подставляя в исходное уравнение функцию $x=0$, получаем, что она не является решением (для нее не определена y'). Из условия $2t-1=0$ следует: $y = \frac{x}{2}$. Подставляя эту функцию в исходное уравнение, видим, что она является частным решением дифференциального уравнения.

$$\text{Ответ: } -\frac{2x}{2y-x} = \ln|x| + C, \quad y = \frac{x}{2}.$$

Задача 4. Сосуд объемом $V = 2$ л содержит воздушную смесь (воздух и азот). Из сосуда вытекает $a(t) = 2t$ л воздушной смеси в минуту, и такое же количество смеси втекает, причем во втекающей смеси количество азота составляет $b(t) = t^3$ л за минуту. Определить количество азота (л) в сосуде в момент $T = 1$ мин, если в момент $t = 0$ в сосуде содержалось $V_0 = 0,1$ л азота. Количество азота в сосуде подчиняется закону $y' = b - a\frac{y}{V}$.

Решение. Согласно условию задачи, дифференциальное уравнение, описывающее изменение количества азота в сосуде, имеет вид

$$y' = t^3 - 2t \frac{y}{2};$$

$$y' + ty = t^3.$$

Полученное уравнение является линейным, следовательно, решаем его с помощью подстановки Бернулли

$$y = u(t)v(t); \quad y' = u'v + uv'.$$

Получаем уравнение

$$u'v + uv' + tuv = t^3;$$

$$u'v + u(v' + tv) = t^3.$$

Положим $v' + tv = 0$, тогда $u'v = t^3$.

Решаем последовательно, разделяя переменные, полученные уравнения

а) $\frac{dv}{dt} + tv = 0; \quad dv = -tv dt;$

$$\frac{dv}{v} = -tdt;$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int t dt, \quad \text{или} \quad \ln v = -\frac{t^2}{2},$$

откуда $v = e^{-t^2/2}$ (выбрана одна из первообразных $v(t)$).

б) $u'v = t^3$ или $\frac{du}{dt} e^{-t^2/2} = t^3;$

$$du = t^3 e^{t^2/2} dt;$$

$$\int du = \int t^3 e^{t^2/2} dt.$$

Представляем интеграл в левой части в виде $\int t^2 t e^{t^2/2} dt$ и интегрируем по частям:

$$U = t^2; \quad dV = t e^{t^2/2} dt;$$

$$dU = 2t dt; \quad V = \int t e^{t^2/2} dt = \int e^{t^2/2} d \frac{t^2}{2} = e^{t^2/2}.$$

Следовательно:

$$\int t^2 t e^{t^2/2} dt = t^2 e^{t^2/2} - \int e^{t^2/2} 2t dt = t^2 e^{t^2/2} - 2 \int e^{t^2/2} d \frac{t^2}{2} =$$

$$= t^2 e^{t^2/2} - 2e^{t^2/2} + C = e^{t^2/2} (t^2 - 2) + C,$$

т.е. $u = e^{t^2/2} (t^2 - 2) + C$ (в отличие от случая а) здесь ищется общее решение).

Поскольку $y = uv$, то ответ имеет вид

$$y = (e^{t^2/2} (t^2 - 2) + C) e^{-t^2/2} = t^2 - 2 + C e^{-t^2/2}.$$

Из начального условия $y(0) = V_0 = 0,1$ получаем

$$0,1 = 0^2 - 2 + C e^0; \quad C = 2,1.$$

Следовательно, решение задачи имеет вид

$$y = t^2 - 2 + 2,1e^{-t^2/2}.$$

Найдем значение искомой функции в момент $T = 1$:

$$y(1) = 1^2 - 2 + 2,1e^{-1/2} \approx -1 + 1,274 = 0,274 \text{ (л)}.$$

Ответ: количество азота в сосуде в момент $T = 1$ мин равно 0,274 л.

Задача 5. Решить дифференциальное уравнение $y' + 2e^x y = 2e^x \sqrt{y}$.

Решение. Имеем уравнение Бернулли, следовательно, решаем его с помощью подстановки Бернул-
ли

$$y = u(t)v(t); \quad y' = u'v + uv'.$$

Получаем уравнение

$$\begin{aligned} u'v + uv' + 2e^x uv &= 2e^x \sqrt{uv}; \\ u'v + u(v' + 2e^x v) &= 2e^x \sqrt{uv}. \end{aligned}$$

Положим

$$v' + 2e^x v = 0,$$

тогда

$$u'v = 2e^x \sqrt{uv}.$$

Решаем последовательно, разделяя переменные, полученные уравнения.

а) $\frac{dv}{dx} + 2e^x v = 0; \quad dv = -2e^x v dx;$

$$\frac{dv}{v} = -2e^x dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int e^x dx;$$

$$\ln v = -2e^x,$$

откуда $v = e^{-2e^x}$ (выбрана одна из первообразных $v(x)$).

б) $u'v = 2e^x \sqrt{uv}$ или $\frac{du}{dx} e^{-2e^x} = 2e^x \sqrt{u} e^{-2e^x};$

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = 2e^x e^{2e^x} e^{-e^x};$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int 2e^x e^{e^x} dx;$$

$$\int u^{-1/2} du = \int 2e^{e^x} de^x.$$

Интегрируя, получаем:

$$\frac{u^{1/2}}{1/2} = e^{e^x} + C;$$

$$u = \frac{1}{4}(e^{e^x} + C)^2.$$

Поскольку $y = uv$, то ответ имеет вид

$$y = \frac{1}{4}(e^{e^x} + C)^2 e^{-2e^x};$$

$$y = \frac{1}{4}((e^{e^x} + C)e^{-e^x})^2;$$

$$y = \frac{1}{4}(1 + C^{-e^x})^2.$$

Ответ: $y = \frac{1}{4}(1 + C^{-e^x})^2.$

Задача 6. Течение процесса $y = y(t)$ описывается уравнением $y'' = \frac{5}{(t-4)^3}$, скорость процесса в момент $t = 0$ равна нулю, начальное состояние процесса $y(0) = 1$. Найти состояние процесса в момент $t = 2$. Вычисления провести с точностью до 0,1.

Решение. Требуется решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y'' = \frac{5}{(t-4)^3}; \\ y(0) = 1; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Согласно правилам интегрирования, имеем

$$y' = \int \frac{5}{(t-4)^3} dt;$$

$$y' = \int 5(t-4)^{-3} dt;$$

$$y' = \frac{-5}{2(t-4)^2} + C_1.$$

Из начального условия находим значение константы C_1 :

$$0 = \frac{-5}{2(0-4)^2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{5}{32}.$$

Далее находим

$$y = \int \left(\frac{-5}{2(t-4)^2} + C_1 \right) dt;$$

$$y = \frac{5}{2(t-4)} + C_1 t + C_2;$$

$$y = \frac{5}{2(t-4)} - \frac{5}{32} t + C_2.$$

Из начального условия находим значение константы C_2 :

$$1 = \frac{5}{2(0-4)} - \frac{5}{32} \cdot 0 + C_2;$$

$$C_2 = 1 + \frac{5}{8} + \frac{5}{32} = \frac{57}{32}.$$

Окончательно получаем решение задачи Коши, описывающее состояние процесса.

$$y(t) = \frac{5}{2(t-4)} - \frac{5}{32}t + \frac{57}{32}.$$

Найдем состояние процесса в момент $t = 2$:

$$y(2) = \frac{5}{2(2-4)} - \frac{5}{32} \cdot 2 + \frac{57}{32} = \frac{27}{32}.$$

Вычисляя значение с точностью до 0,1, получим $y(2) \approx 0,8$.

Ответ: Состояние процесса в момент $t = 2$ равно $y(2) \approx 0,8$.

Задача 7. Решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} 2yy'' = y'^2 + 1; \\ y(0) = 5; \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Решение. В уравнение не входит явным образом x . Полагаем

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy},$$

и, следовательно, уравнение принимает вид

$$2yp \frac{dp}{dy} = p^2 + 1.$$

Полагая $y \neq 0$, разделяем переменные:

$$\frac{2p}{p^2 + 1} dp = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{2p}{p^2 + 1} dp = \int \frac{dy}{y};$$

$$\ln |p^2 + 1| = \ln |y| + \ln C_1;$$

$$p^2 + 1 = C_1 y;$$

$$p = \pm \sqrt{C_1 y - 1},$$

т.е. $y' = \pm \sqrt{C_1 y - 1}$.

Постоянную C_1 можно найти уже на этом этапе, если, положив $x = 0$, использовать начальные условия: $y(0) = 5$, $y'(0) = 2$.

$$2 = \pm\sqrt{5C_1 - 1};$$

$$C_1 = \frac{4+1}{5} = 1.$$

Значит, решаем уравнение $y' = \sqrt{y-1}$ (при извлечении корня выбран знак плюс, так как в точке $x=0$ y' является положительной). Разделяя переменные (предполагаем, что $y-1 \neq 0$), имеем

$$\frac{dy}{\sqrt{y-1}} = dx,$$
$$\int (y-1)^{-1/2} dy = 3 \int dx, \quad 2(y-1)^{1/2} = 3x + C_2.$$

Найдем C_2 из условия $y(0) = 5$:

$$2\sqrt{4} = 0 + C_2, \quad C_2 = 4.$$

Следовательно:

$$2\sqrt{y-1} = 3x + 4,$$
$$4(y-1) = (3x+4)^2.$$

Напомним, что это решение было получено в предположении, что $y \neq 0$ и $y-1 \neq 0$. Очевидно, что функции $y=0$ и $y=1$ не являются решениями данной задачи Коши.

Ответ: $4(y-1) = (3x+4)^2$.

Задача 8. Найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $x^2 y'' = y'^2$.

Решение. Уравнение не содержит в явном виде y . Положим

$$z = y',$$

тогда

$$z' = y''$$

и следовательно:

$$x^2 z' = z^2.$$

Получено уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$x^2 \frac{dz}{dx} = z^2.$$

Разделяем переменные (предполагаем, что $x \neq 0$, $z \neq 0$):

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2};$$
$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + C_1.$$

Выражаем отсюда z :

$$\frac{1}{z} = \frac{1 - C_1 x}{x};$$

$$z = \frac{x}{1 - C_1 x}.$$

Проверяем: функция $x = 0$ не является решением дифференциального уравнения, а функция $z = 0$ является решением.

Получаем два уравнения первого порядка:

$$1) \quad y' = \frac{x}{1 - C_1 x}.$$

Отсюда

$$y = \int \frac{x}{1 - C_1 x} dx;$$

$$y = \frac{1}{C_1} \left(\int \frac{C_1 x - 1}{1 - C_1 x} dx + \int \frac{1}{1 - C_1 x} dx \right);$$

$$y = \frac{1}{C_1} \left(-x - \frac{1}{C_1} \ln |1 - C_1 x| \right) + C_2;$$

$$y = -\frac{x}{C_1} - \frac{1}{(C_1)^2} \ln |1 - C_1 x| + C_2.$$

$$2) \quad y' = 0.$$

Отсюда

$$y = \int 0 dx; \quad y = C_3.$$

Ответ: $y = -\frac{x}{C_1} - \frac{1}{(C_1)^2} \ln |1 - C_1 x| + C_2; \quad y = C_3.$

Задача 9. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения.

a) $y'' - 10y' + 9y = 0;$

б) $y'' + 8y' + 16y = 0;$

в) $9y''' + y' = 0.$

Решение:

a) $y'' - 10y' + 9y = 0$ – линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0;$$

$$D = 100 - 36 = 64; \quad \sqrt{D} = 8;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{2};$$

$$\lambda_1 = 9; \quad \lambda_2 = 1.$$

Следовательно, ФСР:

$$y_1 = e^{9x}, \quad y_2 = e^x,$$

и общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ принимает вид

$$y = C_1 e^{9x} + C_2 e^x.$$

б) $y'' + 8y' + 16y = 0.$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0;$$

$$D = 64 - 64 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-8}{2} = -4.$$

Следовательно, ФСР:

$$y_1 = e^{-4x}, \quad y_2 = xe^{-4x}.$$

и общее решение $y = C_1y_1 + C_2y_2$ принимает вид

$$y = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}.$$

в) $9y''' + y' = 0.$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$9\lambda^3 + \lambda = 0;$$

$$\lambda(9\lambda^2 + 1) = 0;$$

1) $\lambda_1 = 0;$

2) $9\lambda^2 + 1 = 0; \quad \lambda_{2,3} = \pm \frac{1}{3}i.$

Следовательно, ФСР:

$$y_1 = 1; \quad y_2 = \cos \frac{x}{3}; \quad y_3 = \sin \frac{x}{3},$$

и общее решение $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$ принимает вид

$$y = C_1 + C_2 \cos \frac{x}{3} + C_3 \sin \frac{x}{3}.$$

Ответ: а) $y = C_1e^{9x} + C_2e^x$; б) $y = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$;

в) $y = C_1 + C_2 \cos \frac{x}{3} + C_3 \sin \frac{x}{3}.$

Задача 10. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$$

МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ.

Решение. Согласно структуре $y = y_0 + y_ч$ общего решения ЛНУ, рассмотрение начинаем с соответствующего ЛОУ:

$$y'' + 4y = 0.$$

Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 + 4 = 0$ являются числа $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, следовательно, ФСР имеет вид

$$y_1(x) = \cos 2x, \quad y_2(x) = \sin 2x.$$

Поскольку $y_0 = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, то $y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Теперь мы можем записать следующую структуру частного решения ЛНУ:

$$y_ч = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x.$$

Составляем систему уравнений для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0; \\ C_1'(x)(\cos 2x)' + C_2'(x)(\sin 2x)' = 2 \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Вычисляя производные, получаем

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0; \\ C_1'(x)(-2\sin 2x) + C_2'(x)(2\cos 2x) = 2 \operatorname{tg} x, \end{cases}$$

после чего

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\sin 2x}{\cos 2x}; \\ -C_2'(x)\frac{\sin 2x}{\cos 2x}(-2\sin 2x) + C_2'(x)(2\cos 2x) = 2 \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Следовательно:

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\sin 2x}{\cos 2x}; \\ \frac{C_2'(x)2\sin^2 2x + C_2'(x)2\cos^2 2x}{\cos 2x} = 2 \operatorname{tg} x, \end{cases}$$

а значит:

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\sin 2x}{\cos 2x}; \\ \frac{2C_2'(x)}{\cos 2x} = 2 \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Учитывая, что $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, получаем

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} 2\sin x \cos x; \\ C_2'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} (\cos^2 x - \sin^2 x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -2\sin^2 x; \\ C_2'(x) = \sin x \cos x - \frac{\sin^3 x}{\cos x}. \end{cases}$$

Для вычисления первообразных удобно записать (используем формулы $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$):

$$\begin{cases} C_1'(x) = -1 + \cos 2x; \\ C_2'(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{(1 - \cos^2 x)\sin x}{\cos x}, \end{cases}$$

откуда

$$C_1(x) = -x + \frac{\sin 2x}{2};$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx + \int \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x \right) d \cos x;$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{4} \cos 2x + \ln |\cos x| - \frac{1}{2} \cos^2 x ;$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{4} \cos 2x + \ln |\cos x| - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2x .$$

Окончательно

$$C_1(x) = -x + \frac{1}{2} \sin 2x ;$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \ln |\cos x| - \frac{1}{4} .$$

Поскольку $y_4 = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x$, то

$$y_4(x) = \left(-x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \cos 2x + \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + \ln |\cos x| - \frac{1}{4} \right) \sin 2x ;$$

$$y_4(x) = -x \cos 2x + \sin 2x \ln |\cos x| - \frac{1}{4} \sin 2x .$$

Наконец, складывая y_0 и y_4 , получаем общее решение ЛНУ:

$$y(x) = -x \cos 2x + \sin 2x \ln |\cos x| - \frac{1}{4} \sin 2x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x .$$

Учитывая, что $C_2 - 4$ также является произвольной константой, окончательно ответ можно записать в виде

$$\text{Ответ: } y(x) = -x \cos 2x + \sin 2x \ln |\cos x| + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x .$$

Задача 11. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 5y' = 2xe^{2x} .$$

Решение. Согласно структуре $y = y_0 + y_4$ общего решения ЛНУ, рассмотрение начинаем с соответствующего ЛОУ:

$$y'' + 5y' = 0 .$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 5\lambda = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -5$ и, следовательно:

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{-5x} .$$

Перейдем к нахождению y_4 . Правая часть уравнения

$$f(x) = 2xe^{2x}$$

имеет вид п. 4 таблицы (степень многочлена $P_n(x)$ равна 1); здесь $\alpha = 2$ и контрольное число $S = \alpha = 2$. Поскольку $S \neq \lambda_1$, $S \neq \lambda_2$, то $r = 0$,

$$y_4 = (A + Bx)e^{2x} .$$

Осталось определить коэффициенты A и B .

Находим

$$y'_ч = Be^{2x} + 2(A + Bx)e^{2x};$$

$$y''_ч = 2Be^{2x} + 4(A + Bx)e^{2x} + 2Be^{2x}; \quad y''_ч = 4Be^{2x} + 4(A + Bx)e^{2x}$$

и подставляем в неоднородное уравнение

$$4Be^{2x} + 4(A + Bx)e^{2x} + 5Be^{2x} + 10(A + Bx)e^{2x} = 2xe^{2x}$$

или $(4B + 4A + 5B + 10A)e^{2x} + (4B + 10B)xe^{2x} = 2xe^{2x},$

$$(9B + 14A)e^{2x} + 14Bxe^{2x} = 2xe^{2x}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях, получаем

$$\begin{cases} 9B + 14A = 0; \\ 14B = 2. \end{cases}$$

Отсюда $B = \frac{1}{7}; \quad A = -\frac{9}{98}.$

Итак, $y_ч = \left(\frac{1}{7}x - \frac{9}{98}\right)e^{2x}.$

Следовательно, общее решение ЛНУ

$$y = C_1 + C_2e^{-5x} + \left(\frac{1}{7}x - \frac{9}{98}\right)e^{2x}.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-5x} + \left(\frac{1}{7}x - \frac{9}{98}\right)e^{2x}.$

Задача 12. Решить задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Решение. Согласно структуре $y = y_0 + y_ч$ общего решения ЛНУ, рассмотрение начинаем с соответствующего ЛОУ:

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ и, следовательно, $a = 1, b = 2$. Тогда

$$y_0 = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Перейдем к нахождению $y_ч$. Правая часть уравнения

$$f(x) = 5x^2 + 6x - 12$$

имеет вид п. 2 таблицы (степень многочлена $P_n(x)$ равна 2); контрольное число $S=0$. Поскольку $S \neq \lambda_1$, $S \neq \lambda_2$, то $r=0$.

$$y_{\text{ч}} = Ax^2 + Bx + C.$$

Осталось определить коэффициенты A , B и C .

Находим

$$y'_{\text{ч}} = 2Ax + B;$$

$$y''_{\text{ч}} = 2A$$

и подставляем в неоднородное уравнение

$$2A - 2(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = 5x^2 + 6x - 12$$

или $5Ax^2 + (-4A + 5B)x + (2A - 2B + 5C) = 5x^2 + 6x - 12.$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 5A = 5; \\ -4A + 5B = 6; \\ 2A - 2B + 5C = -12. \end{cases}$$

Отсюда $A=1$; $B=2$; $C=-2$.

Итак, $y_{\text{ч}} = x^2 + 2x - 2$.

Следовательно, общее решение ЛНУ

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + x^2 + 2x - 2.$$

Найдем частное решение ЛНУ, удовлетворяющее начальным условиям. Для этого сначала продифференцируем полученное общее решение ЛНУ:

$$y' = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^x(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x) + 2x + 2.$$

Подставляя в полученные равенства значения $x=0$; $y=0$; $y'=2$, получим систему

$$\begin{cases} 0 = 1 \cdot (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0) + 0 + 0 - 2; \\ 2 = 1 \cdot (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0) + 1 \cdot (-2C_1 \cdot 0 + 2C_2 \cdot 1) + 0 + 2. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_1 = 2, \quad C_2 = -1.$$

Подставляя эти значения констант в общее решение ЛНУ, получим решение задачи Коши.

Ответ: $y = e^x(2 \cos 2x - C_2 \sin 2x) + x^2 + 2x - 2$.

Задача 13. Процесс колебания материальной точки массой m под действием силы упругости $F_y = -ky$, силы сопротивления среды $F_c = -hy'$ и внешней силы $F(t)$, где t – время, а $y(t)$ – отклонение от состояния равновесия $y=0$, может быть описан уравнением вида $y'' + py' + qy = f(t)$. Здесь $p = \frac{h}{m}$, $q = \frac{k}{m}$, $f(t) = \frac{F(t)}{m}$. Найти закон движения точки, если известны значения $p = 2$, $q = 10$, $f(t) = \sin 3t$, а также координаты точки в моменты времени $t_0 = 0$ и $t_1 = 5$: $y(0) = 0$, $y(5) = 0$.

Решение. Требуется решить уравнение

$$y'' + 2y' + 10y = \sin 3t,$$

причем положение точки в начальный момент и в момент $t_1 = 5$ заданы:

$$y(0) = 0, \quad y(5) = 0.$$

Найдем общее решение ЛНУ. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0.$$

Это уравнение для соответствующего ЛОУ имеет комплексные корни $\lambda_{1,2} = -1 \pm 3i$, поэтому общее решение ЛОУ получаем в виде

$$y_0 = e^{-t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t).$$

Поскольку контрольное число $S = 3i$ не совпадает ни с одним из корней, то частное решение ЛНУ ищем в виде

$$y_{\text{ч}} = M \cos 3t + N \sin 3t.$$

Находя

$$y'_{\text{ч}} = -3M \sin 3t + 3N \cos 3t;$$

$$y''_{\text{ч}} = -9M \cos 3t - 9N \sin 3t$$

и подставляя результаты в ЛНУ, получаем

$$\begin{aligned} & -9M \cos 3t - 9N \sin 3t + 2(-3M \sin 3t + 3N \cos 3t) + \\ & + 10(M \cos 3t + N \sin 3t) = \sin 3t; \\ & \cos 3t(-9M + 6N + 10M) + \sin 3t(-9N - 6M + 10N) = \sin 3t; \\ & \cos 3t(M + 6N) + \sin 3t(-6M + N) = \sin 3t. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях, получаем

$$\begin{cases} M + 6N = 0; \\ -6M + N = 1, \end{cases}$$

откуда $M = -\frac{6}{37}$, $N = \frac{1}{37}$, так что

$$y_{\text{ч}} = -\frac{6}{37} \cos 3t + \frac{1}{37} \sin 3t.$$

Следовательно, общее решение ЛНУ

$$y = y_0 + y_{\text{ч}} = e^{-t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) - \frac{6}{37} \cos 3t + \frac{1}{37} \sin 3t.$$

Теперь подставим краевые условия: $t=0$ и $y=0$, $t=5$ и $y=0$:

$$\begin{cases} C_1 - \frac{6}{37} = 0; \\ e^{-5}(C_1 \cos 15 + C_2 \sin 15) - \frac{6}{37} \cos 15 + \frac{1}{37} \sin 15 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{6}{37}; \\ C_2 = \frac{(6 \cos 15 - \sin 15)e^5 - 6 \cos 15}{37 \sin 15}. \end{cases}$$

Вычисляя с точностью до двух знаков после запятой, получаем

$$\begin{cases} C_1 \approx 0,16; \\ C_2 \approx -31,94. \end{cases}$$

Окончательно:

$$y(t) \approx e^{-t}(0,16 \cos 3t - 31,94 \sin 3t) - 0,16 \cos 3t + 0,03 \sin 3t -$$

искомое отклонение в любой момент времени t .

$$\text{Ответ: } y(t) \approx e^{-t}(0,16 \cos 3t - 31,94 \sin 3t) - 0,16 \cos 3t + 0,03 \sin 3t .$$

Задача 14. Пусть движение материальной точки на плоскости описывается системой дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 4x - y; \\ y' = 5x + 2y. \end{cases}$ Здесь t – время; $x(t), y(t)$ – координаты точки в момент t ; $x'(t); y'(t)$ – скорость точки в момент t . Найти неизвестные функции $x(t)$ и $y(t)$.

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(4-\lambda)(2-\lambda)+5=0,$$

или $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0,$

откуда $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i; a = 3, b = 2.$

Следовательно:

$$y_1 = e^{3t} \cos 2t; \quad y_2 = e^{3t} \sin 2t;$$

$$y = e^{3t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) .$$

Далее из второго уравнения системы

$$x = \frac{1}{5}(y' - 2y) .$$

Поскольку

$$y' = 3e^{3t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + e^{3t}(-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t) ,$$

то $y' = e^{3t}((3C_1 + 2C_2) \cos 2t + (3C_2 - 2C_1) \sin 2t) .$

Тогда

$$x = \frac{1}{5}(e^{3t}((3C_1 + 2C_2) \cos 2t + (3C_2 - 2C_1) \sin 2t) - 2e^{3t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)) ,$$

или

$$x = \frac{1}{5} e^{3t} ((C_1 + 2C_2) \cos 2t + (C_2 - 2C_1) \sin 2t).$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{1}{5} e^{3t} ((C_1 + 2C_2) \cos 2t + (C_2 - 2C_1) \sin 2t); \\ y = e^{3t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t). \end{cases}$$

Задача 15. Найти три первых отличных от нуля члена разложения по формуле Маклорена решения $y = y(x)$ задачи Коши

$$\begin{cases} y' = 1 + e^{-y} + xy; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Разложение по формуле Маклорена всякой (дифференцируемой $n + 1$ раз в точке x_0 и ее окрестности) функции имеет вид

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x, 0).$$

Поэтому достаточно найти лишь его коэффициенты $y(0), y'(0), y''(0), y'''(0), \dots$. Значение $y(0) = 0$ – дано, зависимость y' от x и y известна. Следовательно,

$$y'(0) = 1 + e^{-y(0)} + 0 \cdot y(0) = 1 + e^0 = 2.$$

Далее

$$y'' = (1 + e^{-y} + xy) = -e^{-y} y' + y + xy'$$

(использована формула дифференцирования сложной функции). Подставляя $x = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$, получаем $y''(0) = -2$. Осталось найти еще один ненулевой коэффициент. Имеем:

$$y''' = e^{-y} (y')^2 - e^{-y} y'' + 2y' + xy''$$

и

$$y'''(0) = e^0 \cdot 2^2 - e^0 (-2) + 2 \cdot 2 + 0 = 10.$$

Подставляя найденные значения в формулу Маклорена, получаем следующий ответ:

$$y(x) = 2x - x^2 + \frac{5}{3} x^3 + \dots$$

Задача 16. Найти приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} y' = \cos xy + y/5; \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

в точке $x_1 = 0,5$ с помощью метода Эйлера. Использовать разбиение отрезка $[x_0; x_1]$ на $n_1 = 5$ и $n_2 = 10$ равных частей. Получить уточненное решение с помощью формулы Рунге (вычисления проводить с точностью до 0,001).

Решение. Проводим расчет, разбивая отрезок на 5 частей. Так как $x_0 = 0, x_k = 0,5, n = 5$, то $h = \frac{x_k - x_0}{n} = \frac{0,5 - 0}{5} = 0,1$. Из условия задачи $y_0 = 1, f(x, y) = \cos xy + y/5$. Находим значения приближенного решения в узлах:

$$y_{i+1} = y_i + h(\cos x_i y_i + y_i / 5) .$$

Последовательно выполняя вычисления, получаем $y_5(x_k) = 1,595$.

Аналогично, разбивая отрезок на 10 частей $\left(h = \frac{0,5-0}{10} = 0,05 \right)$, имеем $y_{10}(x_k) = 1,592$.

Найдем уточненное значение решения, используя формулу Рунге:

$$Y^*(x_k) = 2y_{10}(x_k) - y_5(x_k) = 2 \cdot 1,592 - 1,595 = 1,589 .$$

Ответ: $y(0,5) \approx 1,589$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Бермант А.Ф., Арамонович И.Г. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1967. 736 с.
- 2 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1969. 640 с.
- 3 Нахман А.Д. Дифференциальные уравнения. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 1999. 96 с.
- 4 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2. М.: Наука, 1978. Т. 1: 456 с., Т. 2: 576 с.
- 5 Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1979. 129 с.
- 6 Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 304 с.