Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

О.Ю. Буравлева

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В КОММЕРЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Утверждено Ученым советом университета
в качестве учебного пособия
для студентов специальности 080301

Тамбов
Издательство ТГТУ
2005

УДК 330.83(07)
ББК У.в 611я73
Б91

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой «Прикладная математика» ТГТУ
Г.М. Куликов
Доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой «Алгебра и геометрия» ТГУ
им. Г.Р. Державина
А.И. Булгаков

Буравлева О.Ю.

Б91 Математические методы в коммерческой деятельности: Учебное пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. 80 с.

В учебном пособии рассмотрены теоретические и практические вопросы раздела «Математическое и линейное программирование» в курсе «Математика в экономике».

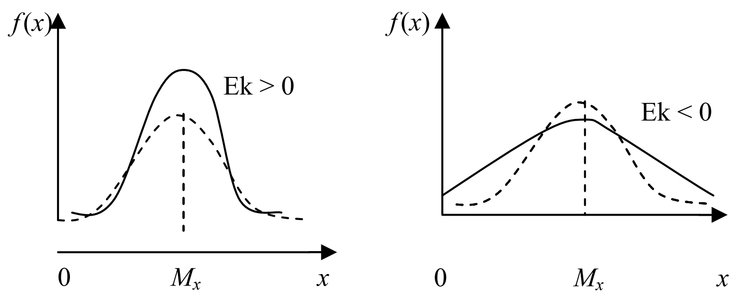
Предназначено студентам специальности 080301 «Коммерция (торговое дело)» в качестве дополнительной литературы для самостоятельной работы при изучении курса «Математика в экономике».

УДК 330.83(07)
ББК У.в 611я73

ISBN

О.Ю. БУРАВЛЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В КОММЕРЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ



• **Издательство ТГТУ** •

Учебное издание

БУРАВЛЕВА Оксана Юрьевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В КОММЕРЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Учебное пособие

Редактор Т.М. Федченко

Компьютерное макетирование И.В. Евсеевой

Подписано к печати 18.11.2005.
Гарнитура Times New Roman. Формат 60 × 84/16. Бумага газетная.
Печать офсетная. Объем: 4,65 усл. печ. л.; 4,90 уч.-изд. л.
Тираж 100 экз. С. 747

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Математика в экономике» является региональной составляющей блока естественно-научных дисциплин Государственного образовательного стандарта второго поколения подготовки специалистов коммерции по специальности 080301 – Коммерция (торговое дело).

Данное учебное пособие посвящено разделу «Математическое и линейное программирование». В нем рассмотрены теоретические вопросы и на конкретных примерах показаны возможности использования математического метода как инструмента для решения задач коммерции.

Пособие будет полезным при самостоятельной работе студентов над контрольными заданиями по курсу «Математика в экономике».

1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Математическое программирование – это раздел высшей математики, посвященный решению задач, связанных с нахождением экстремумов функций нескольких переменных при наличии ограничений на переменные. Методами математического программирования решаются задачи о распределении ресурсов, планировании выпуска продукции, ценообразовании, транспортные задачи и т.п.

Построение математической модели экономической задачи включает следующие этапы: 1) выбор переменных задачи; 2) составление системы ограничений; 3) выбор целевой функции.

Переменными задачи называются величины $x_1, x_2, ..., x_n$, которые полностью характеризуют экономический процесс. Их обычно записывают в виде вектора $A = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Система ограничений включает в себя систему уравнений и неравенств, которым удовлетворяют переменные задачи и которые следуют из ограниченности ресурсов или других экономических или физических условий.

Целевой функцией называют функцию переменных задачи, которая характеризует качество выполнения задачи, и экстремум которой требуется найти.

Общая задача математического программирования формулируется следующим образом: найти экстремум целевой функции

$$Z(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max(\min),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i, \\ a_{(i+1)1}x_1 + a_{(i+1)2}x_2 + a_{(i+1)n}x_n = b_{i+1}, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,...,t, t \le n.$$

Данная запись означает следующее: найти экстремум целевой функции задачи и соответствующие ему переменные при условии, что эти переменные удовлетворяют системе ограничений и условиям неотрицательности.

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется любой n-мерный вектор X, удовлетворяющий системе ограничений и условиям неотрицательности.

Множество допустимых решений (планов) задачи образует область допустимых решений (ОДР).

Оптимальным решением (планом) задачи линейного программирования называется такое допустимое решение (план) задачи, при котором целевая функция достигает экстремума.

В общем случае задача линейного программирования записывается так, что ограничениями являются как уравнения, так и неравенства, а переменные могут быть как неотрицательными, так и произвольно изменяющимися. В том случае, когда все ограничения – уравнения, и все переменные удовлетворяют условию неотрицательности, задачу линейного программирования называют канонической. Она может быть представлена в координатной, векторной и матричной формах записи.

Рассмотрим математические модели простейших экономических задач: задача о диете и задача о составлении плана производства.

Задача о диете

Задача о диете возникает при составлении наиболее экономного (т.е. наиболее дешевого) рациона питания животных, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям.

Предположим, что в нашем распоряжении имеется n продуктов питания (сено, зерно, комбикорм, соль и т.д.). Обозначим эти продукты через $F_i (i = \overline{1,n})$. Предположим, что c_i есть стоимость единицы веса (например, стоимость одного килограмма) продукта F_i.

Рациональная диета должна доставлять животному определенные компоненты (белки, жиры, углеводы, витамины, микроэлементы и т.д.). Обозначим эти компоненты через $N_j (j = \overline{1,m})$. Тогда можно составить таблицу-справочник, указывающую, какое количество каждого компонента имеется в единице веса каждого продукта (табл. 1.1).

Таблица 1.1

	F_1	F_2	...	F_j	...	F_n
N_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
N_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
N_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...
N_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Таким образом, величина a_{ij} есть количество i-го компонента, содержащегося в единице веса j-го продукта. Матрица $A = [a_{ij}]$ называется **матрицей питательности**.

Рацион кормления должен указать, какое количество x_{ij} i-го продукта должно быть скормлено животному за определенный срок (скажем, за месяц). Он означает, что за этот срок животное должно получить единиц первого x_1 продукта, единиц второго, x_n единиц n-го продукта.

Что же требуется от рациона? Во-первых, должны быть выполнены определенные медицинские требования, которые заключаются в том, что за указанный срок животное должно получить не менее определенного количества каждого компонента (не менее определенного количества белков, жиров, витаминов и т.д.). Обозначим через b_j то минимальное количество j-го компонента, которое должно получить животное. Тогда рацион кормления должен удовлетворять ограничениям

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Кроме того, очевидно, что все переменные x_i неотрицательны, т.е.

$$x_1 \geq 0;\ \ x_2 \geq 0; \ldots,\ x_n \geq 0. \tag{1.2}$$

Пусть стоимость единицы веса i-го продукта равна c_i. Тогда весь наш рацион будет стоить

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n\ . \tag{1.3}$$

Мы, естественно, хотели бы понести минимальные затраты на содержание животных. Поэтому задача приобретает вид: найти рацион минимальной стоимости при выполнении медицинских ограничений (1.1) и естественных ограничений (1.2). Математически это выглядит как:

$$
\begin{aligned}
&c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow \min \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m, \\
&x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \ldots, x_n \ge 0.
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

Обратите внимание на полученный результат. Во-первых, достаточно реальная задача приобрела строгую математическую форму. Во-вторых, целевая функция (стоимость рациона) является **линейной функцией** переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. В третьих, сами ограничения на значения переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ имеют вид **линейных неравенств**. Все это и определило название этого класса задач – задачи **линейного программирования**.

Рассмотрим теперь другую классическую задачу.

ЗАДАЧА О СОСТАВЛЕНИИ ПЛАНА ПРОИЗВОДСТВА

Рассмотрим деятельность некоторой производственной единицы (цеха, отдела и т.д.). Пусть наша производственная единица может производить некоторые **товары** $G_1, G_2, ..., G_n$.

Для производства этих товаров приходится использовать некоторые **сырьевые ресурсы.** Пусть число этих ресурсов есть *m*; обозначим их через $R_1, R_2, ..., R_m$.

Технологией производства товара G_j назовем набор чисел $a_{ij}, i = \overline{1,m}$, показывающий, какое количество *i*-го ресурса необходимо для производства единицы товара G_j. Это можно записать в виде **технологической матрицы**, которая полностью описывает технологические потребности производства и элементами которой являются числа a_{ij} (табл. 1.2.).

Таблица 1.2

	G_1	G_2	…	G_j	…	G_n
R_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
R_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
R_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…
R_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

При наличии b_j запасов каждого ресурса мы планируем произвести x_i единиц *i*-го товара. При этом нет возможности превысить пределы имеющихся у нас ресурсов и наш план производства $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ должен удовлетворять ограничениям

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

при очевидных условиях неотрицательности переменных x_i

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0 .$$

Естественно, мы стремимся получить за нашу продукцию возможно больше. Поэтому стоящая перед нами задача составления плана производства приобретает вид:

$$
\begin{aligned}
&c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow \max \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m,
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0; \ldots, x_n \ge 0 .$$

Вновь получается **линейная целевая функция** и ограничения имеют характер **линейных неравенств.** Таким образом, мы снова имеем дело с задачей **линейного программирования.**

Не будем рассматривать примеры других задач линейного программирования. Отметим лишь, что они встречаются очень часто при оптимизации самых разнообразных производственных и экономических задач.

Задача линейного программирования может быть решена графически. Алгоритм решения для случая двух переменных следующий:

1 Строится область допустимых решений.

2 Строится вектор нормали с точкой приложения в начале координат.

3 Перпендикулярно вектору проводится одна из линий уровня, например, линия уровня, проходящая через начало координат.

4 Линия уровня перемещается до положения опорной прямой. На этой прямой и будет находиться максимум или минимум функции.

В зависимости от вида ОДР и целевой функции $Z(X)$ задача может иметь единственное решение, бесконечное множество решений или не иметь ни одного оптимального решения.

Графическим методом можно решать также задачи линейного программирования, имеющие каноническую форму и удовлетворяющую условию $n - r \prec 2$, где n – число неизвестных системы, r – ранг системы векторов условий (число линейно независимых уравнений системы).

Пример. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$
\begin{aligned}
&Z(X) = 2x_1 + 4x_2 \to \max, \\
&\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 12, \end{cases} \\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Р е ш е н и е. Изобразим на плоскости систему координат Ox_1x_2 и покажем граничные прямые области допустимых решений (номера прямых соответствуют их порядковому номеру в системе).

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 12, \\ x_1 + x_2 = 9, \\ 3x_1 - 2x_2 = 12, \end{cases} \\
&x_1 = 0, x_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Область допустимых решений определяется многоугольником $OABCD$ (рис. 1.1).

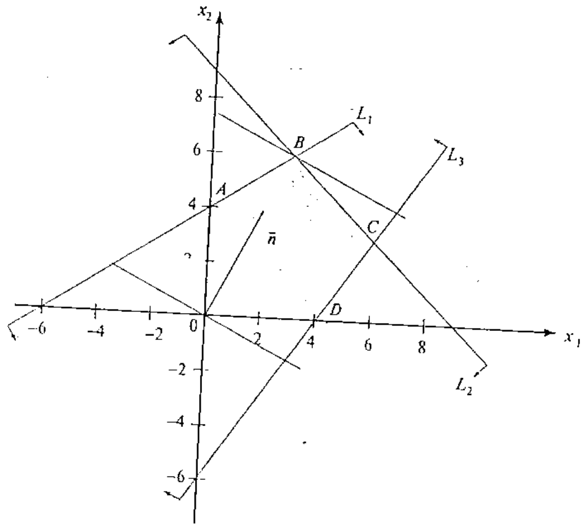


Рис. 1.1

Для линий уровня $2x_1 + 4x_2 = c(c = \mathrm{const})$ строим нормальный вектор $\bar{n} = (2;4)$. Перпендикулярно вектору $\bar{n}$ построим одну из линий уровня (на рис. 1.1 она проходит через начало координат). Так как задача на максимум, то перемещаем линию уровня в направлении вектора $\bar{n}$ до опорной прямой. В данном случае опорной прямой является прямая, проходящая через точку пересечения граничных прямых L_1 и L_2, т.е. через точку $B = L_1 \cap L_2$. Для определения координат точки B решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 12, \\ x_1 + x_2 = 9. \end{cases}$$

Получаем $x_1 = 3, x_2 = 6$. Это и будет оптимальное решение данной задачи, которому соответствует максимальное значение целевой функции max $Z(X) = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 30$.

2 СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Симплексный метод – это метод целенаправленного перебора опорных решений задачи линейного программирования. Он позволяет на конечное число шагов расчета либо найти оптимальное решение, либо установить, что оптимального решения не существует.

Основное содержание метода состоит в следующем.

1. Указать способ нахождения начального опорного решения.
2. Указать способ перехода от одного опорного решения к другому, на котором значение целевой функции ближе к оптимальному.
3. Задать критерии, которые позволяют своевременно прекратить перебор решений или сделать заключение об отсутствии решения.

2.1 Нахождение начального опорного решения и переход к новому опорному решению

Пусть имеется задача линейного программирования в канонической форме:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min), \qquad (2.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$x_j \geq 0 \forall j; b_i \geq 0 \forall i,$$

$$j \in \overline{1,n};\ i_i \in 1,m \qquad (2.3)$$

Если в каком-либо уравнении правая часть отрицательна, то это уравнение нужно умножить на -1.

Для нахождения опорного решения воспользуемся тем, что любое допустимое базисное решение является опорным. Найдем базисное решение методом Жордана–Гаусса. При этом разрешающие элементы для всех преобразований Жордана будем выбирать так, чтобы правые части уравнений системы оставались неотрицательными. Тогда найденное базисное решение будет допустимым, т.е. опорным.

Получим правило выбора разрешающих элементов для преобразований Жордана, при котором правые части системы уравнений остаются неотрицательными.

Пусть разрешающим элементом для преобразования Жордана является коэффициент a_{lk} при неизвестной x_k в уравнении с номером l. В результате преобразования Жордана правые части уравнений, как известно, пересчитываются по следующим формулам:

$$b_1' = \frac{b_1}{a_{1k}}, \quad b_i' = b_i - \frac{b_1}{a_{1k}} a_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ i \neq 1.$$

1 Для того чтобы правая часть b_l' уравнения с разрешающим элементом a_{lk} оставалась неотрицательной, должно выполняться неравенство:

$$b_1' = \frac{b_1}{a_{1k}} \geq 0,$$

так как $b_l \geq 0$, то первое условие для разрешающего элемента a_{lk} состоит в том, что он должен быть положительным, т.е. $a_{lk} \geq 0$.

2 Неотрицательными также должны быть правые части остальных уравнений, т.е.

$$b_i' = b_i - \frac{b_1}{a_{1k}} a_{ik} \geq 0, \ i = 1,2, \ldots, m, \ i \neq 1.$$

Для получения требований, налагаемых на разрешаемый элемент a_{lk}, рассмотрим два случая:

а) если $a_{lk} \leq 0$, то в силу того, что $b_i \geq 0 \forall i, \ b_i \geq 0, \ a_{lk} \geq 0$, без дополнительных условий $b_l' \geq 0$;

б) если же $a_{ik} > 0$, то неравенство Q_{ok}

$$b_i' = b_i - \frac{b_1}{a_{1k}} a_{ik} \geq 0 \text{ поделим на } a_{ik,} \text{ получим } \frac{b_i}{a_{ik}} \geq \frac{b_l}{a_{lk}}.$$

Данное неравенство должно выполняться для любого уравнения с номером i, в котором $a_{ik} \succ 0$. Для удобства вычислений вводят вспомогательный параметр Q_{ok}.

$$Q_{ok} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\} = \frac{b_l}{a_{lk}} \text{ при } a_{ik} > 0, \qquad (2.4)$$

где k – номер вектора условия A_k, вводимого в базис (выбираемого столбца матрицы системы ограничений), а l – номер вектора A_k, выводимого из базиса (номер строки матрицы, в которой следует выбирать разрешающий элемент для преобразований Жордана).

С помощью данного условия можно выбрать разрешающий элемент в любом столбце k матрицы системы ограничений, в котором имеется хотя бы один положительный элемент. Если нарушить это условие при выборе разрешающего элемента, в правой части системы появятся отрицательные величины.

Используя данное условие, можно найти начальное опорное решение.

Аналогичное условие может быть использовано при переходе от одного опорного решения к другому.

Пусть система уравнений-ограничений путем выбора разрешающих элементов приведена к равносильной разрешенной так, что правые части системы сохранились неотрицательными, и имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_{1(m+1)}x_{m+1} + \ldots + x_{lk}x_k + \ldots + x_{1n}x_n = x_{10}, \\ x_2 + x_{2(m+1)}x_{m+1} + \ldots + x_{2k}x_k + \ldots + x_{2n}x_n = x_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + x_{m(m+1)}x_{m+1} + \ldots + x_{mk}x_k + \ldots + x_{mn}x_n = x_{m0}, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \forall, j \in \overline{1,n}.$$

Тогда базисное решение $X_1 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}, 0, \ldots, 0)$ является допустимым и опорным решением с базисом из единичных векторов $B_1 = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$.

Для перехода от этого опорного решения к новому необходимо использовать соотношение

$$Q_{0k} = \min\left\{\frac{x_{i0}}{x_{ik}}\right\} = \frac{x_{l0}}{x_{lk}} \quad \text{при } x_{ik} \succ 0, \qquad (2.5)$$

где k – номер вектора, вводимого в базис; l – номер вектора, выводимого из базиса; x_{i0} – координаты опорного решения; x_{ik} – коэффициенты разложения вектора A_k по базису опорного решения.

2.2 Преобразование целевой функции при переходе от одного опорного решения к другому

Пусть имеется опорное решение задачи линейного программирования $X_1 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{mo}, 0, ..., 0)$ с базисом $B_1 = (A_1, A_2, ..., A_m)$. Значение целевой функции задачи на этом решении $Z(X_1) = \sum_{i=1}^{m} c_1 x_{i0}$. Используя преобразование Жордана с разрешающим элементом a_{lk}, перейдем к другому опорному решению: $X_1 = (x'_{10}, x'_{20}, ..., x'_{(l+1)0}, ..., x'_{m0}, 0, ..., 0, x'_{10}, 0, ..., 0)$ с базисом $B_2 = (A_1, A_2, ..., A_{l-1}, A_{l+1}, ..., A_m, A_k)$ т.е. введем в базис вектор A_k и исключим A_l.

Пересчитав правые части с помощью преобразований Жордана, получим выражение для целевой функции задачи на новом опорном решении X_2: $Z(X_2) = Z(X_1) - Q_{0k}\Delta_k$.

Здесь через Δ_k обозначена величина, называемая **оценкой разложения вектора условий A_k по базису опорного решения** и вычисляемая по формуле

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{m} c_l x_{ik} - c_k$$

или в векторной записи

$$\Delta_k = C_б X_k - c_k, \tag{2.6}$$

где $C_б = (c_1, c_2, ..., c_m)$ – вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных; $X_k = (x_{1k}, x_{2k}, ..., x_{mk})$ – вектор коэффициентов разложения вектора A_k по базису опорного решения; c_k – коэффициент целевой функции при переменной x_k.

Находим приращение целевой функции при переходе от одного опорного решения к другому

$$\Delta Z_k = Z(X_2) - Z(X_1) = -Q_{0k}\Delta_k.$$

2.3 Улучшение опорного решения

Теорема 2.3.1 Если в задаче линейного программирования на максимум (минимум) хотя бы для одного вектора условий оценка разложения по базису невырожденного опорного решения отрицательная (положительная), то опорное решение может быть улучшено, т.е. можно найти новое опорное решение на котором значение целевой функции будет больше (меньше).

Следствие 1 (условие наискорейшего нахождения оптимального решения). Наибольшее изменение целевой функции при переходе от одного опорного решения к другому обеспечивает выбор векторов, выводимого и вводимого в базис опорного решения задачи на:

– максимум

$$\max_k\{\Delta Z_k\} = \max_k\{-Q_{0k}\Delta_k\}; \tag{2.7}$$

– минимум

$$\min_k\{\Delta Z_k\} = \min_k\{-Q_{0k}\Delta_k\}. \tag{2.8}$$

В упрощенном варианте вектор, вводимый в базис, можно выбрать, в задаче на:

– минимум

$$\min_k\{\Delta_k\}; \tag{2.9}$$

– максимум

$$\max_k\{\Delta_k\}. \tag{2.10}$$

Этот вариант перехода к новому опорному решению обычно используется при расчетах на ЭВМ.

Следствие 2 (признак оптимальности опорного решения). Опорное решение задачи линейного программирования на максимум (минимум) является оптимальным, если для любого вектора условий оценка разложений по базису опорного решения неотрицательная (неположительная).

Следствие 3 (признак единственности оптимального решения). Оптимальное решение задачи линейного программирования является единственным, если для любого вектора условий, не входящего в базис, оценка отлична от нуля, т.е.

$$\Delta_k \neq 0 \quad \forall k = m+1, v+2, ..., n. \tag{2.11}$$

Здесь предполагается, что в базис оптимального решения входят первые m векторов.

Следствие 4 (признак существования бесконечного множества оптимальных решений). Задача линейного программирования имеет бесконечное множество оптимальных решений, если оценка хотя бы одного вектора условий, не входящего в базис, равна нулю, т.е.

$$\exists k \in \{m+1, m+2, ..., n\}: \ \Delta_k = 0 \ . \tag{2.12}$$

Следствие 5 (признак отсутствия оптимального решения вследствие неограниченности целевой функции). Задача линейного программирования не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, если для какого-либо из векторов условий A_k с оценкой Δ_k, противоречащей признаку оптимальности, среди коэффициентов разложения по базису опорного решения нет положительного, в задаче на:

– максимум

$$\exists A_k : \Delta_k < 0 \text{ и } x_{ik} \leq 0 \ \ \forall i \ ; \tag{2.13}$$

– минимум

$$\exists A_k : \Delta_k > 0 \text{ и } x_{ik} \leq 0 \ \ \forall i \ . \tag{2.14}$$

2.4 Алгоритм симплексного метода

Для того чтобы решить задачу симплексным методом (методом последовательного улучшения плана), необходимо выполнить следующее.

1 Привести задачу линейного программирования к каноническому виду.

2 Найти начальное опорное решение с единичным базисом и коэффициенты разложения векторов условий по базису опорного решения.

Если опорное решение отсутствует, то задача не имеет решения в силу несовместности системы ограничений.

3 Вычислить оценки разложений векторов условий по базису опорного решения и заполнить симплексную таблицу.

4 Если выполняется признак единственности оптимального решения то решение задачи заканчивается.

5 Если выполняется условие существования множества оптимальных решений (следствие 4 из теоремы 2.3.1), то путем простого перебора находят все оптимальные решения.

6 Если выполняются условия следствия 5 теоремы об улучшении опорного решения, то задача не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции.

7 Если пункты 4 – 6 алгоритма не выполняются, находят новое опорное решение с использованием условий следствия 1 и возвращаются к пункту 3.

Пример. Решить симплексным методом задачу

$$Z(X) = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \rightarrow \max,$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 30, \end{array}\right| \qquad +x_6 \, .$$

$$x_j \geq 0 \forall j, \ \ j \in 1{,}5.$$

Р е ш е н и е. Приводим задачу к каноническому виду. Для этого в левую часть первого ограничения-неравенства типа «меньше или равно» вводим дополнительную переменную x_6 с коэффициентом +1. В целевую функцию переменная x_6 входит с коэффициентом 0 (т.е. не входит). Получаем:

$$Z(X) = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 0x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_6 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 30, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \forall j,\ j \in \overline{1,6}.$$

Находим начальное опорное решение. Для этого свободные (неразрешенные) переменные приравниваем к нулю $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Получаем опорное решение $X_1 = (0,\ 0,\ 0,\ 24,\ 30,\ 6)$ с единичным базисом $Б_1 = (A_4, A_5, A_6)$.

Вычисляем оценки разложений векторов условий по базису опорного решения, используя формулу (2.6).

$$\Delta_1 = C_б X_1 - c_1 = (0,3,2)\cdot(1,1,2) - 9 = 0 + 3 + 4 - 9 = -2;$$
$$\Delta_2 = C_б X_2 - c_2 = (0,3,2)\cdot(-2,2,1) - 5 = 0 + 6 + 2 - 5 = 3;$$
$$\Delta_3 = C_б X_3 - c_3 = (0,3,2)\cdot(2,1,-4) - 4 = 0 + 3 - 8 - 4 = -9;$$
$$\Delta_4 = C_б X_4 - c_4 = (0,3,2)\cdot(0.1,0) - 3 = 0 + 3 + 0 - 3 = 0;$$
$$\Delta_5 = C_б X_5 - c_5 = (0,3,2)\cdot(0,0,1) - 2 = 0 + 0 + 2 - 3 = 0;$$
$$\Delta_6 = C_б X_6 - c_6 = (0,3,2)\cdot(1,0,0) - 0 = 0 + 0 + 0 - 0 = 0.$$

Оценки векторов, входящих в базис, всегда равны нулю. Обычно эти вычисления проводятся устно. Опорное решение, коэффициенты разложений и оценки разложений векторов условий по базису опорного решения записываются в симплексную таблицу (табл. 2.1). Сверху над таблицей для удобства вычислений оценок записываются коэффициенты целевой функции. В первом столбце «Б» записываются векторы, входящие в базис опорного решения. Порядок записи этих векторов в симплексной таблице соответствует номерам разрешенных неизвестных в уравнениях-ограни-чениях. Во втором столбце таблицы «$C_б$» записываются коэффициенты целевой функции при базисных переменных в том же порядке. При правильном расположении коэффициентов целевой функции в столбце «$C_б$» оценки единичных векторов, входящих в базис, всегда равны нулю.

В последней строке таблицы с оценками Δ_k в столбце «A_0» записывается значение целевой функции на опорном решении $Z(X_1)$.

Таблица 2.1

			9	5	↓4	3	2	0		
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Q_1	Q_3
← A_6	0	6	1	–2	2	0	0	1	6	3
A_4	3	24	1	2	1	1	0	0	24	24
A_5	2	30	2	1	–4	0	1	0	15	–
Δ_k		13 2	–2	3	–9	0	0	0		

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как оценки $\Delta_1 = -2$, $\Delta_3 = -9$ для векторов A_1 и A_3 противоречат признаку оптимальности. Для оптимальности опорного решения в задаче на максимум требуется неотрицательность оценок для всех векторов условий.

По теореме об улучшении опорного решения (см. теорему 2.3.1), если в задаче на максимум хотя бы один вектор имеет отрицательную оценку, то можно найти новое опорное решение, на котором значение целевой функции будет больше.

Определим, введение какого из двух векторов приведет к большему приращению целевой функции. Приращения целевой функции найдем по формуле $\Delta Z_k = -Q_{0k}\Delta_k$. Вычислим значения параметра Q_{0k} для первого и третьего столбцов по формуле (2.1.5), получим $Q_{01} = 6$ при $l = 1$ (где l – номер строки) и $Q_{03} = 3$ при $l = 1$. Находим приращение целевой функции при введении в базис первого вектора $\Delta Z_1 = -6\cdot(-2) = 12$ и третьего вектора $\Delta Z_3 = -3\cdot(-9) = 27$. Следовательно, для наиболее быстрого нахождения оптимального решения необходимо ввести в базис опорного решения вектор A_3 вместо первого вектора базиса A_6, так как минимум параметра Q_{03} достигается в первой строке (l = 1).

Далее выполним преобразование Жордана с элементом $x_{13} = 2$, получим второе опорное решение $X_2 =$(0, 0, 3, 21, 42, 0) с базисом $Б_2 = (A_3, A_4, A_5)$ (табл. 2.2). Это решение не является оптимальным, так как вектор A_2 имеет отрицательную оценку $\Delta_2 = -6$. Для улучшения опорного решения необходимо ввести в его базис вектор A_2.

Таблица 2.2

Б	$C_б$	A_0	A_1	↓ A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Q_2
A_3	4	3	1/2	–1	1	0	0	1/2	–
← A_4	3	21	1/2	$\boxed{3}$	0	1	0	–	7
A_5	2	42	4	–3	0	0	1	1/2 2	–
Δ_k		159	5/2	–6	0	0	0	9	

Определим номер вектора, выводимого из базиса. Для этого вычислим параметр Q_{02} для второго столбца, он равен 7 при l = 2. Следовательно, из базиса выводим второй вектор базиса A_4. Выполним преобразование Жордана с элементом $x_{22} = 3$, получим третье опорное решение $X_3 =$(0, 7, 10, 0, 63, 0) с базисом $Б_2 = (A_3, A_4, A_5)$ (табл. 2.3). Это единственное оптимальное решение, так как для всех векторов, не входящих в базис, оценки разложений по базису опорного решения положительны:

$$\Delta_1 = 7/2, \quad \Delta_4 = 2, \quad \Delta_6 = 7/2.$$

Таблица 2.3

Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	4	10	2/3	0	1	1/3	0	1/3
A_4	5	7	1/6	1	0	1/3	0	–1/6
A_5	2	63	9/2	0	0	1	1	3/2
Δ_k		201	7/2	0	0	2	0	7/2

О т в е т: max $Z(X)$ = 201 при X^* = (0, 7, 10, 0, 63).

3 МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА

Метод искусственного базиса применяется для решения задач линейного программирования в случае, когда задача не имеет начального опорного решения с базисом из единичных векторов.

Согласно данному методу для задачи линейного программирования составляется так называемая **расширенная** задача, которая решается симплексным методом. На основе результатов решения расширенной задачи либо находится оптимальное решение исходной задачи, либо устанавливается причина его отсутствия.

Пусть имеется каноническая задача линейного программирования:

$$\begin{gathered} Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min), \\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \\ x_j \geq 0 \forall j. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Без ограничения общности можно считать, что правые части уравнений системы ограничений неотрицательны, т.е. $b_i \geq 0 \ \forall i$.

В дальнейшем для краткости записи при доказательствах используется компактная запись этой задачи:

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min),$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i=1,2,...,m, \qquad (3.2)$$
$$x_j \ge 0 \forall j, \quad \mathrm{j} \in \overline{1,n}$$

$$b_i \ge 0 \quad \forall i, \quad i \in \overline{1,m}$$

Для исходной задачи составляется расширенная задача. При этом используется искусственные переменные.

Искусственными переменными называются неотрицательные переменные, которые вводятся в ограничения-равенства для получения начального опорного решения с базисом из единичных векторов. Каждая искусственная переменная вводится в левую часть одного из уравнений системы ограничений с коэффициентом +1 и в целевую функцию в задаче на максимум с коэффициентом $-M$, а в задаче на минимум с коэффициентом $+M$. Число M сколь угодно большое по сравнению с единицей ($M >> 1$).

В общем случае расширенная задача на максимум имеет вид:

$$\overline{Z}(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - ... - Mx_{n+m} \to \max,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{m+n} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \, j = 1,2, \, ..., \, n+m, b_i \ge 0 i = 1,2, \, ..., \, m. \qquad (3.3)$$

или в компактной записи

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} Mx_{n+i} \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, i=1,2,...,m, \qquad (3.4)$$
$$x_j \ge 0 \forall j,$$
$$b_i \ge 0 \forall i.$$

Данная задача имеет начальное опорное решение $\overline{X}_1 = (0, 0, ..., 0, b_1, b_2, ..., b_m)$ с базисом $\overline{Б}_1 = (A_{n+1}, A_{n+2}, ..., A_{n+m})$.

Здесь и в дальнейшем для расширенной задачи отмечаются чертой сверху следующие величины: целевая функция $\overline{Z}(\overline{X})$, допустимое решение $\overline{X}$, опорные решения $\overline{X}_i$, базисы опорных решений $\overline{Б}_i$, область допустимых решений $\overline{G}$.

Для обоснования метода используются две леммы и три теоремы.

Лемма 3.1 Любому допустимому решению $X = (k_1, k_2, ..., k_n)$ исходной задачи программирования соответствует допустимое решение расширенной задачи $\overline{X} = (k_1, k_2, ..., k_n, 0, ..., 0)$ и, наоборот, любому допустимому решению расширенной задачи $\overline{X} = (k_1, k_2, ..., k_n, 0, ..., 0)$ соответствует допустимое решение исходной задачи $X = (k_1, k_2, ..., k_n)$. При этом значение целевых функций задач на соответствующих решениях совпадают, т.е. $Z(X) = \overline{Z}(\overline{X})$.

Лемма 3.2 Значение целевой функции расширенной задачи на максимум (минимум) на любом допустимом решении $\overline{X_k} = \; = (k_1, k_2, ..., k_n, 0, ..., 0)$, у которого все искусственные переменные равны нулю, больше (меньше) значения целевой функции на любом допустимом решении $X_l = (l_1, l_2, ..., l_n, l_{n+1}, ..., l_{n+m})$, у которого хотя бы одна искусственная переменная отлична нуля.

Теорема 3.2 (признак оптимальности решения). Если расширенная задача линейного программирования имеет оптимальное решение $\overline{X^*} = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0)$, у которого все искусственные переменные равны нулю, то исходная задача имеет оптимальное решение $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, которое получается из $\overline{X}^*$ отбрасыванием этих нулевых искусственных переменных.

Теорема 3.3 (признак отсутствия решения ввиду несовместности системы ограничений). Если расширенная задача имеет оптимальное решение, у которого хотя бы одна искусственная переменная отлична от нуля, то исходная задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Теорема 3.4 (признак отсутствия решения ввиду неограниченности целевой функции). Если расширенная задача не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то исходная задача также не имеет решения по той же причине.

3.1 Особенности алгоритма метода искусственного базиса

Алгоритм метода искусственного базиса имеет следующие особенности.

1 Ввиду того, что начальное опорное решение расширенной задачи содержит искусственные переменные, входящие в целевую функцию с коэффициентом –*M* (в задаче на максимум) или +*M* (в задаче на минимум), оценки разложений векторов условий $\Delta_k = C_б X_k - c_k$ состоят из двух слагаемых Δ_k' и $\Delta_k''(M)$, одно из которых Δ_k' не зависит от M, а другое $\Delta_k''(M)$ зависит от *M*. Так как *M* сколь угодно велико по сравнению с единицей ($M >> 1$), то на первом этапе расчета для нахождения векторов, вводимых в базис, используется только слагаемые оценок $\Delta_k''(M)$.

2 Векторы, соответствующие искусственным переменным, которые выводятся из базиса опорного решения, исключаются из рассмотрения.

3 После того как все векторы, соответствующие искусственным переменным, исключаются из базиса, расчет продолжается обычным симплексным методом с использованием оценок Δ_k', не зависящих от *M*.

4 Переход от решения расширенной задачи к решению исходной задачи осуществляется с использованием доказанных выше теорем 3.2. – 3.4.

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 \to \max,$$

и

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,$$
$$j = 1, 2, 3, 4.$$

Р е ш е н и е. Составляем расширенную задачу. В левые части уравнений системы ограничений вводим неотрицательные искусственные переменные с коэффициентом +1 (всегда). Удобно справа от уравнений записать вводимые искусственные переменные. В первое уравнение вводим переменную x_5, во второе – переменную x_6. Данная задача – задача на нахождение максимума, поэтому x_5 и x_6 в целевую функцию вводятся с коэффициентом –*M*. Получаем

$$\overline{Z}(\overline{X}) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 - Mx_5 - Mx_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Задача имеет начальное опорное решение $\overline{X}_1 = (0, 0, 0, 0, 10, 2)$ с базисом $Б_1 = (A_5, A_6)$. Вычисляем оценки векторов условий по базису опорного решения и значение целевой функции на опорном решении:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} -M \\ -M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 = -5M - 3, \qquad \Delta_2 = \begin{pmatrix} -M \\ -M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = -4M - 2,$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} -M \\ -M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = -5M - 1, \qquad \Delta_4 = \begin{pmatrix} -M \\ -M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} - (-8) = 9M + 8,$$

$$\Delta_5 = \Delta_6 = 0, \qquad \overline{Z}(\overline{X}_1) = \begin{pmatrix} -M \\ -M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = -12M.$$

Записываем исходные данные в симплексную таблицу (табл. 3.1). При этом оценки Δ'_k и $\overline{Z}(\overline{X}_1)$ для удобства вычислений записываем в две строки: в первую – слагаемые Δ'_k, не зависящие от M, во вторую – слагаемые $\Delta''_k(M)$, зависящие от M. Значения $\Delta''_k(M)$ удобно указывать без M, имея в виду однако, что оно там присутствует.

Таблица 3.1

			3	2	↓1	–8	$-M$	$-M$			
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Q_1	Q_2	Q_3
A_5	$-M$	10	3	3	4	–7	1	0	10/3	10/3	5/2
$\leftarrow A_6$	$-M$	2	2	1	1	–2	0	1	**1**	**2**	**2**
Δ'_k		0	–3	–2	–1	8	0	0			
$\Delta''_k(M)$		–12	–5	–4	–5	9	0	0			

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как в задаче на максимум имеются отрицательные оценки (см. теорему 3.1).

Выбираем номер вектора A_k, вводимого в базис опорного решения, и вектора A_l, выводимого из базиса. Для этого вычисляем приращения целевой функции ΔZ_k при введении в базис каждого из векторов с отрицательной оценкой и находим максимум этого приращения. При этом слагаемыми оценок Δ'_k (без M) пренебрегаем до тех пор, пока хотя бы одно слагаемое $\Delta''_k(M)$ (с M) отлично от нуля. В связи с этим со слагаемыми оценок Δ'_k может отсутствовать в таблице до тех пор, пока присутствует строка $\Delta''_k(M)$. Находим

$$\max_{k=1,2,3}\{-1\cdot(-5),-2\cdot(-4),-2\cdot(-5)\}=\max_{k=1,2,3}\{5,8,10\}=10 \quad \text{при} \quad k=3.$$

В столбце «A_3» (см. табл. 3.1.1) за разрешающий элемент выбираем коэффициент 1 во второй строке и выполняем преобразование Жордана.

Вектор A_6, выводимый из базиса, исключаем из рассмотрения (вычеркиваем). Получаем опорное решение $\overline{X_2}=(0,0,2,0,2,0)$ с базисом $\overline{Б_2}=(A_3,A_5)$ (табл. 3.2). Решение не является оптимальным, так как имеется отрицательная оценка $\Delta''_4(M)=-1$.

В столбце «A_4» единственный положительный элемент принимаем за разрешающий и переходим к новому опорному решению $\overline{X}_3=(0,0,6,2,0,0)$ с базисом $\overline{Б}_3=(A_3,A_4)$ (табл. 3.3).

Таблица 3.2

						↓			
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Q_3
$\leftarrow A_5$	$-M$	2	–5	–1	0	$\boxed{1}$	1		2
A_3	1	2	2	1	1	–2	0		–
Δ'_k		2	–1	–1	0	6	0		
$\Delta''_k(M)$		–2	5	1	0	–1	0		

Таблица 3.3

Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	–8	2	–5	–1	0	1		
A_3	1	6	–8	–1	1	0		
Δ_k		–10	29	5	0	0		

Данное опорное решение является единственным оптимальным решением расширенной задачи, так как в задаче на максимум оценки для всех векторов, не входящих в базис, положительны. По теореме 3.2 исходная задача также имеет оптимальное решение, которое получается из оптимального решения расширенной задачи отбрасыванием нулевых искусственных переменных, т.е. $X^* = (0, 0, 6, 2)$.

О т в е т: $\max Z(X) = -10$ при $X^* = (0, 0, 6, 2)$.

4 ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

4.1 Виды математических моделей двойственных задач

Любой задаче линейного программирования (исходной или прямой) можно поставить в соответствие другую задачу, которая называется двойственной, или сопряженной. Обе эти задачи образуют пару двойственных (или сопряженных) задач линейного программирования.

Для ряда практических задач линейного программирования целесообразно заменить решение исходной прямой задачи решением соответствующей двойственной задачи, симметричной исходной. Для любой прямой задачи линейного программирования можно сформулировать двойственную задачу следующим образом.

Составим двойственную задачу к задаче использования сырья.

Имеется m видов сырья в количестве b, b_2, b_3, …, b_m, которые используются для изготовления n видов продукции. Известно: a_{ij} – расход i-го вида сырья на единицу j-ой продукции; c_j – прибыль при реализации единицы j-го вида продукции.

Математическая модель данной задачи имеет вид:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max(\min), \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, & \Big| \; y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, & \Big| \; y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \Big| \; y_3 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, & \Big| \; y_4 \end{cases} \tag{4.2}$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1,2, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Здесь $x_j, j = 1,2, ..., n$ – объем производства j-го вида продукции.

Предположим, что второй производитель хочет перекупить сырье. Составим двойственную задачу, решение которой позволит определить условия продажи сырья. Введем вектор оценок (цен) видов сырья $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$. Затраты на приобретение i-го вида сырья в количестве b_i равны $b_i y_i$. Второму производителю будет выгодно минимизировать суммарные затраты на приобретение всех видов сырья, поэтому целевая функция имеет вид:

$$F(Y) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min. \tag{4.4}$$

Первому производителю невыгодно продавать сырье, если суммарная стоимость всех видов сырья, расходуемых на каждое изделие j-ой продукции, т.е. $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{mj}y_m$.

Меньше прибыли c_j и система огрничений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_{n.} \end{cases} \tag{4.5}$$

Очевидно, что оценки видов сырья должны удовлетворять условиям неотрицательности $y_i \geq 0, \; i = 1, 2, ..., m.$ (4.6).

Таким образом, связь исходной и двойственной задач состоит в том, что коэффициенты c_j целевой функции исходной задачи являются свободными членами системы ограничений двойственной задачи, свободные члены b_i системы ограничений исходной задачи служат коэффициентами целевой функции двойственной задачи, а матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи является транспонированной матрицей коэффициентов системы ограничений двойственной задачи.

Рассмотренная пара задач относится к симметричным парам двойственных задач. В теории двойственности используются четыре пары двойственных задач. Приведем их в матричной форме записи.

	Исходная задача	Двойственная задача	
	Симметричные пары		
1	$Z(X)=CX\to\max,$ $AX\le A_0,$ $X\ge Q;$	$F(Y)=YA_0\to\min,$ $YA\ge C,$ $Y\ge Q;$	(4.6)
2	$Z(X)=CX\to\min,$ $AX\ge A_0,$ $X\ge Q;$	$F(Y)=YA_0\to\max,$ $YA\le C,$ $Y\ge Q.$	(4.7)
	Несимметричные пары		
3	$Z(X)=CX\to\max,$ $AX=A_0,$ $X\ge Q;$	$F(Y)=YA_0\to\min,$ $YA\ge C,$	(4.8)
4	$Z(X)=CX\to\min,$ $AX=A_0,$ $X\ge Q;$	$F(Y)=YA_0\to\max,$ $YA\le C.$	(4.9)

Здесь $C=(c_1,c_2,...,c_n),$ $Y=(y_1,y_2,...,y_m),$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix},\qquad A_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

4.1 Общие правила составления двойственных задач

При составлении двойственных задач используют следующие правила:

Правило 1 Во всех ограничениях исходной задачи свободные члены должны находиться в правой части, а члены с неизвестными – в левой.

Правило 2 Ограничения-неравенства исходной задачи должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств у них были направлены в одну сторону.

Правило 3 Если знаки неравенств в ограничениях исходной задачи «≥», то целевая функция $Z(X)=c_0+c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$ должна максимизироваться, а если «≤», то минимизироваться.

Правило 4 Каждому ограничению исходной задачи соответствует неизвестное в двойственной задаче; при этом неизвестное, отвечающее ограничению-неравенству, должно удовлетворять условию неотрицательности, а неизвестное, отвечающее ограничению-неравенству, может быть любого знака.

Правило 5 Целевая функция двойственной задачи имеет вид: $F(Y)=c_0+b_1y_1+...+b_my_m$, где c_0 – свободный член целевой функции $Z(X)$ исходной задачи; $b_1,b_2,...,b_m$ – свободные члены в ограничениях исходной задачи, при этом b_i – свободный член именно того ограничения, которому соответствует неизвестная y_i; $y_1,y_2,...,y_m$ – неизвестные в двойственной задаче.

Правило 6 Целевая функция $F(Y)$ двойственной задачи должна оптимизироваться противоположным по сравнению с $Z(X)$ образом, т.е. если $Z(X)\to\max$, то $F(Y)\to\min$, и если $Z(X)\to\min$, то $F(Y)\to\max$.

Правило 7 Каждому неизвестному $x_j, j=1,2,...,n$ исходной задачи соответствует ограничение в двойственной задаче. Совокупность этих n ограничений (вместе с условиями неотрицательности неизвестных y_i, соответствующих ограничениям-неравенствам исходной задачи) образует систему ограничений двойственной задачи. Все ограничения двойственной задачи имеют вид неравенств, свободные члены которых находятся в правых частях, а члены с неизвестными $y_1,y_2,...,y_m$ – в левых. Все знаки неравенств имеют вид «≥», если $F(Y)\to\min$, и «≤», если $F(Y)\to\max$.

Коэффициенты, с которыми неизвестные $y_1,y_2,...,y_m$ входят в ограничение, соответствующее неизвестному x_j, совпадают с коэффициентами при этом неизвестном x_j в ограничениях исходной задачи, а именно: коэффициент при y_i совпадает с тем коэффициентом при x_j, с которым x_j входит в ограничение исходной задачи, соответствующее неизвестному y_i.

Взаимная симметрия прямой и двойственной задач определяет существование определенного соответствия между их оптимальными решениями, которое устанавливают **теоремы двойственности:** если прямая и двойственная задачи линейного программирования имеют оптимальные решения, то экстремальные значения их целевых функций равны, т.е. справедливо равенство

$$\min CX = \max YB \quad \text{(первая теорема двойственности)}.$$

Не менее важное соответствие оптимальных решений прямой и двойственных задач устанавливают условия **дополняющей нежесткости,** которые связывают необходимые и достаточные условия оптимальности допустимых решений X и Y обеих задач со следующими соотношениями

$$Y(AX - B) = 0 \; (C - YA)X = 0 \quad \text{(вторая теорема двойственности)} .$$

Таким образом всегда имеется возможность выбора: решать прямую или двойственную задачу, используя модификацию задачи, для которой легче найти решение.

Пример. Составить задачу, двойственную к данной:

$$Z(X) = 3 - 2x_1 + x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le -5, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \le 8, \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \; j = 1, 2, 3.$$

Р е ш е н и е. Используем общие правила составления двойственных задач. Умножим ограничения-неравенства на –1, так как в задаче на минимум они должны иметь вид «≥» (см. правило 3). Исходная задача запишется в виде:

$$Z(X) = 3 - 2x_1 + x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + x_3 \ge -3, & \| \; y_1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 5, & \| \; y_2 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge -8, & \| \; y_3 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6, & \| \; y_4 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \; j = 1, 2, 3.$$

Составим двойственную задачу:

$$F(Y) = 3 - 3y_1 + 5y_2 - 8y_3 + 6y_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 - 4y_3 + y_4 \le -2, \\ -3y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 5y_4 \le 0, \\ y_1 + y_2 + 3y_3 + 4y_4 \le 1, \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0.$$

Неизвестная y_4, соответствующая ограничению-неравенству, может быть любого знака (см. правило 4).

5 ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ОБЩЕЙ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

5.1 Общая характеристика распределительной задачи

Распределительные задачи связаны с распределением ресурсов по работам, которые необходимо выполнить. Задачи этого класса возникают тогда, когда имеющихся в наличии ресурсов не хватает для выполнения каждой работы наиболее эффективным образом. Поэтому целью решения задачи является отыскание такого распределения ресурсов по работам, при котором либо минимизируются общие затраты, связанные с выполнением работ, либо максимизируется получаемый в результате общий доход.

Большинство распределительных задач можно представить в виде матриц, приведенных в таблице 5.1.

Элементы $C_{i,j}$, стоящие в клетках матрицы, соответствуют затратам или доходу, отвечающим выделению, одной единицы ресурса R_i на работу J_j . Величины $C_{i,j}$ могут быть **зависимыми и независимыми**. Так, например, затраты, обусловленные назначением одной автомашины на некоторый маршрут доставки грузов, не зависят от того какие машины назначены на обслуживание других маршрутов. В то же время при распределении средств между подразделениями фирмы доход от затрат определенного количества денег одним ее подразделением (скажем производством) обычно зависит от того, какие средства будут затрачены другими подразделениями (скажем отделом сбыта). В теории распределения рассматриваются преимущественно задачи с независимыми затратами и доходами. Это объясняется не тем, что такие задачи более важны, а лишь тем, что для них значительно легче строить модели и получать решения.

Таблица 5.1

Ресурсы	Работы, которые нужно выполнить						Объем имеющихся ресурсов
	J_1	J_2	…	J_j	…	J_n	
R_1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	…	$C_{1,j}$	…	$C_{1,n}$	b_1
R_2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	…	$C_{2,j}$	…	$C_{2,n}$	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…
R_i	$C_{i,1}$	$C_{i,2}$	…	$C_{i,j}$	…	$C_{i,n}$	b_i
…	…	…	…	…	…	…	…
R_m	$C_{m,1}$	$C_{m,2}$	…	$C_{m,j}$	…	$C_{m,n}$	b_m
Объем требуемых ресурсов	a_1	a_2	…	a_j	…	a_n	

Если затраты (или доход), определяемые объемом $X_{i,j}$ ресурса I, выделенного на выполнение работы J_i, равны $X_{i,j}C_{i,j}$, то имеем линейную распределительную задачу.

Основные методы решения распределительных задач, в частности линейного программирования, построены на допущении, что объемы, имеющихся в наличии ресурсов (b_i), требуемые объемы (a_j) и затраты ($C_{i,j}$) точно известны.

Если общий объем наличных ресурсов $\sum b_i$ (i = 1…m) равен общей потребности в них $\sum a_j$ (i = 1…n), то имеет место сбалансированная (закрытая) распределительная задача. Если же $\sum a_j \neq \sum b_i$, то задача называется несбалансированной (открытой). Если ресурсы можно разделить между работами, то некоторые работы можно выполнять с помощью различных комбинаций ресурсов. Если работы и ресурсы измеряются в единицах одной и той же шкалы, то такие задачи обычно называют **транспортными** или задачами разложения. Если же работы и ресурсы выражаются в различных единицах измерения, то задача называется **общей разделительной задачей.** ***Таким образом транспортная задача является частным случаем общей распределительной задачи.***

5.2 Транспортная задача

Транспортная задача ставится следующим образом: имеется m пунктов отправления A_1, A_2, …, A_m, в которых сосредоточены запасы каких-то однородных грузов в количестве соответственно a_1, a_2, …, a_m единиц. Имеется n пунктов назначения B_1, B_2, …, B_n, подавших заявки соответственно на b_1, b_2, …, b_n единиц груза. Известны стоимости $C_{i,j}$ перевозки единицы груза от каждого пункта отправления A_i до каждого пункта назначения B_j. Все числа $C_{i,j}$, образующие прямоугольную таблицу заданы. Требуется составить такой план перевозок (откуда, куда и сколько единиц поставить), чтобы все заявки были выполнены, а общая стоимость всех перевозок была минимальна.

Рассмотрим сначала решение **закрытой** транспортной задачи, т.е. когда сумма всех заявок равна сумме всех запасов.

Решение транспортной задачи начинается с нахождения опорного плана. Для этого существуют различные способы. Например, способ **северо-западного угла,** способ **минимальной стоимости по строке**, способ **минимальной стоимости по столбцу** и способ **минимальной стоимости таблицы.** Рассмотрим простейший, так называемый способ северо-западного угла. Пояснить его проще всего будет на конкретном примере:

Условия транспортной задачи заданы транспортной таблицей 5.2.

Будем заполнять таблицу перевозками постепенно начиная с левой верхней ячейки («северо-западного угла» таблицы). Будем рассуждать при этом следующим образом. Пункт B_1 подал заявку на 18 единиц груза. Удовлетворим эту заявку за счет запаса 48, имеющегося в пункте A_1, и запишем перевозку 18 в клетке (1,1). После этого заявка пункта B_1 удовлетворена, а в пункте A_1 осталось еще 30 единиц груза. Удовлетворим за счет них заявку пункта B_2 (27 единиц), запишем 27 в клетке (1,2); оставшиеся 3 единицы пункта A_1 назначим пункту B_3. В составе заявки пункта B_3 остались неудовлетворенными 39 единиц. Из них 30 покроем за счет пункта A_2,

Таблица 5.2

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	10	8	5	6	9	**48**
A_2	6	7	8	6	5	**30**
A_3	8	7	10	8	7	**27**
A_4	7	5	4	6	8	**20**
Заявки b_j	**18**	**27**	**42**	**12**	**26**	**125**

чем его запас будет исчерпан, и еще 9 возьмем из пункта A_3. Из оставшихся 18 единиц пункта A_3 12 выделим пункту B_4; оставшиеся 6 единиц назначим пункту B_5, что вместе со всеми 20 единицами пункта A_4 покроет его заявку. На этом распределение запасов закончено; каждый пункт назначения получил груз согласно своей заявки. Это выражается в том, что сумма перевозок в каждой строке равна соответствующему запасу, а в столбце – заявке. Таким образом, нами сразу же составлен план перевозок, удовлетворяющий балансовым условиям. Полученное решение (табл. 5.3) является опорным решением транспортной задачи.

Таблица 5.3

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	10 **18**	8 **27**	5 **3**	6	9	**48**
A_2	6	7	8 **30**	6	5	**30**
A_3	8	7	10 **9**	8 **12**	7 **6**	**27**
A_4	7	5	4	6	8 **20**	**20**
Заявки b_j	**18**	**27**	**42**	**12**	**26**	**125**

Составленный нами план перевозок, не является оптимальным по стоимости, так как при его построении мы совсем не учитывали стоимость перевозок $C_{i,j}$.

Другой способ – способ минимальной стоимости по строке – основан на том, что мы распределяем продукцию от пункта A_i не в любой из пунктов B_j, а в тот, к которому стоимость перевозки минимальна. Если в этом пункте заявка полностью удовлетворена, то мы убираем его из расчетов и находим минимальную стоимость перевозки из оставшихся пунктов B_j. Во всем остальном этот метод схож с методом северо-западного угла. В результате опорный план, составленный способом минимальной стоимости по строке выглядит как показано в таблице 5.3.

При этом методе может получиться, что стоимости перевозок $C_{i,j}$ и $C_{i,k}$ от пункта A_i к пунктам B_j и B_k равны. В этом случае, с экономической точки зрения, выгоднее распределить продукцию в тот пункт, в котором заявка больше. Так, например, в строке 2: $C_{2,1} = C_{2,4}$, но заявка b_1 больше заявки b_4, поэтому 4 единицы продукции мы распределим в клетку (1, 2).

Таблица 5.4

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	10	8	5 **42**	6 **6**	9	**48**
A_2	6	7	8	6	5 **26**	**30**
A_3	8	7 **27**	10	8	7 **0**	**27**
A_4	7 **14**	5	4	6 **6**	8	**20**
Заявки b_j	**18**	**27**	**42**	**12**	**26**	**125**

Способ минимальной стоимости по столбцу аналогичен предыдущему способу. Их отличие состоит в том, что во втором способе мы распределяем продукцию от пунктов B_i к пунктам A_j по минимальной стоимости $C_{j,i.}$ Опорный план, составленный способами минимальных стоимостей, обычно более близок к оптимальному решению. Так в нашем примере общие затраты на транспортировку по плану, составленному первым способом $Z(x_0) = 1039$, а по второму – $Z(x_0) = 723$.

Клетки таблицы, в которых стоят ненулевые перевозки, являются **базисными**. Их число должно равняться $m + n - 1$. Необходимо отметить также, что встречаются такие ситуации, когда количество перевозок равное нулю. Так, например, в таблице 5.4:

$$m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8,$$

а базисных клеток 7 , поэтому нужно в одну из клеток строки 3 или столбца 2 поставить значение «0». Например в клетку (3,5).

Составляя план по способам минимальных стоимостей в отличие от плана по способу северо-западного угла мы учитываем стоимости перевозок $C_{i,j}$, но все же не можем утверждать, что составленный нами план является оптимальным.

Теперь попробуем улучшить план, составленный способом северо-западного угла. Перенесем, например, 18 единиц из клетки (2, 3) в клетку (1, 3). Получим новый план. Подсчитав стоимость опорного плана (она равняется 1039) и стоимость нового плана 126 единиц меньше. Таким образом за счет циклической перестановки 18 единиц груза из одних клеток в другие нам удалось понизить стоимость плана.

Таблица 5.5

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	10	8 **27**	5 **21**	6	9	**48**
A_2	6 **18**	7	8 **12**	6	5	**30**
A_3	8	7	10 **9**	8 **12**	7 **6**	**27**
A_4	7	5	4	6	8 **20**	**20**
Заявки b_j	**18**	**27**	**42**	**12**	**26**	**125**

На этом способе уменьшения стоимости в дальнейшем и будет основан алгоритм оптимизации плана перевозок. **Циклом** в транспортной задаче мы будем называть несколько занятых клеток, соединенных замкнутой ломанной линей, которая в каждой клетке совершает поворот на 90°.

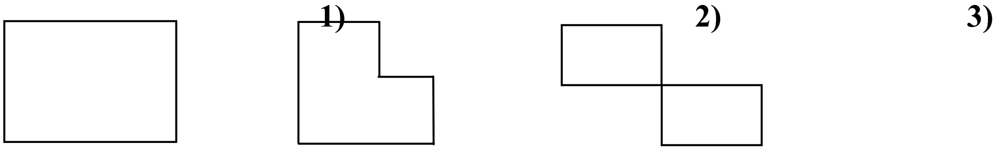


Рис. 5.1 Варианты цикла

Нетрудно убедиться, что каждый цикл имеет четное число вершин и значит, четное число звеньев (стрелок). Условимся отмечать знаком «+» те вершины цикла, в которых перевозки необходимо уменьшить. Цикл с отмеченными вершинами будем называть «означенными». Перенести какое-то количество единиц груза по означенному циклу – это значит увеличить перевозки, стоящие в положительных вершинах цикла, на это количество единиц, а перевозки, стоящие в отрицательных вершинах уменьшить на то же количество. Очевидно, при переносе любого числа единиц по циклу равновесие между запасами и заявками не меняется: по-прежнему сумма перевозок в каждой строке равна запасам этой строки, а сумма перевозок в каждом столбце – заявке этого столбца. Таким образом, при любом циклическом переносе, оставляющем перевозки неотрицательными допустимый план остается допустимым. Стоимость же плана при этом может меняться: увеличиваться или уменьшаться. Назовем ценой цикла увеличение стоимости перевозок при перемещении одной единицы груза по означенному циклу. Очевидно цена цикла равна алгебраической сумме стоимостей, стоящих в вершинах цикла, причем стоящие в положительных вершинах берутся со знаком «+», а в отрицательных со знаком «–». Обозначим цену цикла через γ. При перемещении одной единицы груза по циклу стоимость перевозок увеличивается на величину γ. При перемещении по нему k единиц груза стоимость перевозок увеличится на $k\gamma$. Очевидно, для улучшения плана имеет смысл перемещать перевозки только по тем циклам, цена которых отрицательна. Каждый раз, когда нам удается совершить такое перемещение стоимость плана уменьшается на соответствующую величину $k\gamma$. Так как перевозки не могут быть отрицательными, мы будем пользоваться только такими циклами, отрицательные вершины которых лежат в базисных клетках таблицы, где стоят положительные перевозки. Если циклов с отрицательной ценой в таблице больше не осталось, это означает, что дальнейшее улучшение плана невозможно, оптимальный план достигнут.

Метод последовательного улучшения плана перевозок и состоит в том, что в таблице отыскиваются циклы с отрицательной ценой, по ним перемещаются перевозки, и план улучшается до тех пор, пока циклов с отрицательной ценой уже не останется. При улучшении плана циклическими переносами, как правило, пользуются приемом, заимствованным из симплекс-метода: при каждом шаге (цикле) заменяют одну свободную переменную на базисную, то есть заполняют одну свободную клетку и взамен того освобождают одну из базисных клеток. При этом общее число базисных клеток остается неизменным и равным $m + n – 1$. Этот метод удобен тем, что для него легче находить подходящие циклы.

Можно доказать, что для любой свободной клетки транспортной таблицы всегда существует цикл, и притом единственный, одна из вершин которого лежит в этой свободной клетке, а все остальные в базисных клетках. Если цена такого цикла с плюсом в свободной клетке, отрицательна, то план можно улучшить перемещением перевозок по данному циклу. Количество единиц груза k которое можно переместить, определяется минимальным значением перевозок, стоящих в отрицательных вершинах цикла (если переместить большее число единиц груза, возникнут отрицательные перевозки).

Примененный выше метод отыскания оптимального решения транспортной задачи называется **распределенным**; он состоит в непосредственном отыскании свободных клеток с отрицательной ценой цикла и в перемещении перевозок по этому циклу.

Распределен метод решения транспортной задачи, с которым мы познакомились обладает одним недостатком: нужно отыскивать циклы для всех свободных клеток и находить их цены. От этой трудоемкой работы нас избавляет специальный метод решения транспортной задачи, который называется методом потенциалов.

Пример. Решить распределенным методом транспортную задачу, исходные данные которой приведены в табл. 5.6.

Таблица 5.6

b_j / a_i	20	40	40
20	1	3	2
30	4	5	7
50	6	8	15

Р е ш е н и е. Строим начальное опорное решение методом минимальной стоимости (табл. 5.7)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 15 \end{pmatrix}.$$

Затем вычисляем значения целевой функции на нем

$$Z(X_1) = 20 \cdot 1 + 30 \cdot 5 + 10 \cdot 8 + 40 \cdot 15 = 850.$$

Таблица 5.7

b_j / a_i	20	40	40
20	1 – 20	3	2 0 +
30	4 +	5 – 30	7
50	6	8 + 10	15 40 –

Находим цикл для свободной клетки (1,2) таблицы, он включает клетки (1,2), (1,3), (3,3), (3,2). Вычисляем оценку $\Delta_{12} = (3 + 15) – (2 + 8) = 8$. Так как $\Delta_{12} = 8 > 0$, переходим к следующей свободной клетке (2,1). Для нее цикл таков: (2, 1), (1, 1), (1, 3), (3, 3), (3, 2), (2, 2). Оценка $\Delta_{21} = (4 + 2 + 8) – – (1 + 15 + 5) = 14 – 21 = –7$. Так как $\Delta_{21} = – 7 < 0$, определяем величину груза, перераспределяемого по циклу, 0 = min {20, 40, 30} = 20. Приращение целевой функции $\Delta Z = –7 \cdot 20 = –140$. Получаем новое опорное решение X_2 (табл. 5.8). Значение целевой функции на нем

$$Z(X_2) = 20 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 30 \cdot 8 + 20 \cdot 15 = 710.$$

Таблица 5.8

b_j / a_i	20	40	40
20	1	3	2 20
30	4 20	5 – 10	7 +
50	6	8 + 30	15 20 –

Вычисляем $\Delta_{11} = (1 + 15 + 5) – (2 + 8 + 4) = 7 > 0$, $\Delta_{12} = (3 + 15) – (2 + 8) = = 8 > 0$, $\Delta_{23} = (7 + 8) – (5 + 15)= –5 < 0$, $\Delta_{31} = (6 + 5) – (4 + 8)= –1 < 0$. Оценки можно вычислять до первой отрицательной. Так как $\Delta_{23} =$

–5 < 0, осуществляем сдвиг по циклу (2, 3), (3, 3), (3, 2), (2, 2) на величину 0 = min {10, 20} = 10. Приращение целевой функции $\Delta Z = -5 \cdot 10 = -50$. Поучаем третье опорное решение X_3 (табл. 5.9).

Значение целевой функции на нем

$$Z(X_3) = 20 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 7 + 40 \cdot 8 + 10 \cdot 15 = 660.$$

Таблица 5.9

a_i \ b_j	20	40	40
20	1 	3 	2 20
30	4 20 –	5 	7 10 +
50	6 +	8 40	15 10 –

Вычисляем оценки для свободных клеток: $\Delta_{11} = (1 + 7) - (2 + 4) = 2 > 0$, $\Delta_{12} = (3 + 15) - (2 + 8) = 8 > 0$, $\Delta_{22} = (5 + 15) - (7 + 8) = 5 > 0$, $\Delta_{31} = (6 + 7) - - (4 + 15) = -6 < 0$. Так как $\Delta_{31} = -6 < 0$, осуществляем сдвиг по циклу (3, 1), (2, 1), (2, 3), (3, 3) на величину 0 = min {20, 10} = 10. Приращение целевой функции $\Delta Z = -6 \cdot 10 = -60$. Получаем четвертное опорное решение X_4 (табл. 5.10). Значение целевой функции на нем

$$Z(X_4) = 20 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 20 \cdot 7 + 10 \cdot 6 + 40 \cdot 8 = 600.$$

Таблица 5.10

a_i \ b_j	20	40	40
20	1 	3 	2 20
30	4 – 10	5 +	7 20
50	6 + 10	8 40 –	15

Вычисляем оценки для свободных клеток $\Delta_{11} = (1+7) - (2 + 4) = 2 > 0$, $\Delta_{12} = (3 + 7 + 6) - (2 + 4 + 8) = 2 > 0$, $\Delta_{22} = (5 + 6) - (4 + 8) = -1 < 0$. Так как $\Delta_{12} = -1 < 0$, осуществляем сдвиг по циклу (2, 2), (3, 2), (3, 1), (2, 1) на величину 0 = min {10, 40} = 10. Приращение целевой функции $\Delta Z = -1 \cdot 10 = -10$. Получаем пятое опорное решение X_5 (табл. 5.11).

Таблица 5.11

a_i \ b_j	20	40	40
20	1 	3 	2 20
30	4 0	5 10	7 20
50	6 20	8 30	15

Значение целевой функции на нем

$$Z(X_5) = 20 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 20 \cdot 7 + 20 \cdot 6 + 30 \cdot 8 = 590.$$

Вычисляем оценки для свободных клеток: $\Delta_{11} = (1 + 7) - (2 + 4) = 2 > 0$, $\Delta_{12} = (3 + 7) - (2 + 5) = 3 > 0$, $\Delta_{33} = (15 + 5) - (7 + 8) = 5 > 0$. Все оценки для свободных клеток положительные, следовательно, решение оптимально.

Ответ: $\min Z(X) = 590$ при $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & 20 \\ 20 & 30 & 0 \end{pmatrix}$.

Этот метод позволяет автоматически выделять циклы с отрицательной ценой и определять их цены.

Пусть имеется транспортная задача с балансовыми условиями

$$\sum x_{i,j} = a_i \ (i = 1\ldots m;\ j = 1...n);$$
$$\sum x_{i,j} = b_j \ (j = 1\ldots n;\ 1...m).$$

Причем $\sum a_i = \sum b_i$.

Стоимость перевозки единицы груза из A_i в B_j равна $C_{i,j}$; таблица стоимостей задана. Требуется найти план перевозок ($x_{i,j}$), который удовлетворял бы балансовым условиям и при этом стоимость всех перевозок была минимальна.

Идея метода потенциалов для решения транспортной задачи сводится к следующему. Представим себе, что каждый из пунктов оправления A_i вносит за перевозку единицы груза (все равно куда) какую-то сумму α_i; в свою очередь каждый из пунктов назначения B_j также вносит за перевозку груза (куда угодно) сумму β_j. Эти платежи передаются некоторому третьему лицу («перевозчику»). Обозначим $\alpha_i + \beta_j = c_{i,j}$ ($i = 1...m$; $j = 1...n$) и будем называть величину $c_{i,j}$ «псевдостоимостью» перевозки единицы груза из A_i в B_j. Заметим, что платежи α_i и β_j не обязательно должны быть положительными; не исключено, что «перевозчик» сам платит тому или другому пункту какую-то премию за перевозку. Также надо отметить, что суммарная псевдостоимость любого допустимого плана перевозок при заданных платежах (α_i и β_j) одна и та же и от плана к плану не меняется.

До сих пор мы никак не связывали платежи (α_i и β_j) и псевдостоимости $c_{i,j}$ с истинными стоимостями перевозок $C_{i,j}$. Теперь мы установим между ними связь. Предположим, что план ($x_{i,j,}$) невырожденный (число базисных клеток в таблице перевозок равно ($m + n - 1$). Для всех этих клеток $x_{i,j} > 0$. Определим платежи (α_i и β_j) так, чтобы во всех базисных клетках псевдостоимости были равны стоимостям

$$\alpha_i + \beta_j = C_{i,j} = c_{i,j},$$

а для всех свободных клеток ($X_{i,j} = 0$)

$$\alpha_i + \beta_j \le C_{i,j},$$

то план является **оптимальным** и никакими способами улучшен быть не может. Нетрудно показать, что это теорема справедлива также для выраженного плана, и некоторые из базисных переменных ровны нулю. План обладающий свойством для клеток:

$$\text{– базисных} \qquad C_{i,j} = c_{i,j}\ ; \tag{5.1}$$

$$\text{– свободных} \qquad C_{i,j},\ c_{i,j}\ ; \tag{5.2}$$

называется потенциальным планом, а соответствующие ему платежи (α_i и β_j) – потенциалами пунктов A_i в B_j ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$). Пользуясь этой терминологией вышеупомянутую теорему можно сформулировать так: **Всякий потенциальный план является оптимальным.** Итак, для решения транспортной задачи нам нужно одно – построить потенциальный план. Оказывается его можно построить методом последовательных приближений, задаваясь сначала какой-то произвольной системой платежей, удовлетворяющей условию (5.1). При этом в каждой базисной клетке получится сумма платежей, равная стоимости перевозок в данной клетке; затем, улучшая план следует одновременно менять систему платежей так, что они приближаются к потенциалам. При улучшении плана нам помогает следующее свойство платежей и псевдостоимостей: Какова бы ни была система платежей (α_i в β_j) удовлетворяющая условию (5.1), для каждой свободной клетки цена цикла перерасчета равна разности между стоимостью и псевдостоимостью в данной клетке: $\gamma_{i,j} = c_{i,j} - C_{i,j}$.

Таким образом при использовании методом потенциалов для решения транспортной задачи отпадает наиболее трудоемкий элемент распределительного метода: поиски циклов с отрицательной ценой.

Процедура построения потенциального (оптимального) плана состоит в следующем.

В качестве первого приближения к оптимальному плану берется любой допустимый план (например, построенный способом минимальной стоимости по строке). В этом плане $m + n - 1$ базисных клеток, где m – число строк, n – число столбцов транспортной таблицы. Для этого плана можно определить платежи (α_i в β_j), так, чтобы в каждой базисной клетке выполнялось условие

$$\alpha_i + \beta_j = c_{i,j}. \tag{5.3}$$

Уравнений (5.3) всего $m + n - 1$, а число неизвестных равно $m + n$. Следовательно, одну из этих неизвестных можно задать произвольно (например, равной нулю). После этого из $m + n - 1$ уравнений (5.3) можно найти остальные платежи α_i и β_j, а по ним вычислить псевдостоимости $C_{i,j} = \alpha_i + \beta_j$ для каждой свободной клетки.

Если оказалось, что все эти псевдостоимости не превосходят стоимостей $C_{i,j} \le c_{i,j}$, то план потенциален и, значит, оптимален. Если же хотя бы в одной свободной клетке псевдостоимотсь больше стоимости (как в нашем примере), то план не является оптимальным и может быть улучшен переносом перевозок по циклу, соответствующему данной свободной клетке. Цена этого цикла равна разности между стоимостью и псевдостоимостью в этой свободной клетке.

Таблица 5.12

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	10 **$c = 7$**	8 **$c = 6$**	5 **42**	6 **6**	9 **$c = 6$**	**0**
A_2	6 **4**	7 **$c = 5$**	8 **$c = 4$**	6 **$c = 5$**	5 **26**	**–1**
A_3	8 **$c = 8$**	7 **27**	10 **$c = 6$**	8 **$c = 7$**	7 **0**	**1**
A_4	7 **14**	5 **$c = 6$**	4 **$c = 5$**	6 **6**	8 **$c = 6$**	**0**
β_j	**7**	**6**	**5**	**6**	**6**	

Таблица 5.13

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	10	8	5 **42**	6 **6**	9	**0**
A_2	6 + **4**	7	8	6	5 – **26**	**–1**
A_3	8	7 – **27**	10	8	7 + **0**	**1**
A_4	7 – **14**	5 + ***x***	4	6 **6**	8	**0**
β_j	**7**	**6**	**5**	**6**	**6**	

В таблице 5.12 мы получили в двух клетках $C_{i,j} \le c_{i,j}$, теперь можно построить цикл в любой из этих двух клеток. Выгоднее всего строить цикл в той клетке, в которой разность $C_{i,j} - c_{i,j}$ максимальна. В нашем случае в обоих клетках разность одинакова (равна 1), поэтому, для построения цикла выберем, например, клетку (4, 2).

Теперь будем перемещать по циклу число 14, так как оно является минимальным из чисел, стоящих в клетках, помеченных знаком "–". При перемещении мы будем вычитать 12 из клеток со знаком "–" и прибавлять к клеткам со знаком "+".

После этого необходимо подсчитать потенциалы α_i и β_j и цикл расчетов повторяется.

Итак, мы приходим к следующему алгоритму решения транспортной задачи методом потенциалов:

– взять любой опорный план перевозок, в котором отмечены $m + n - 1$ базисных клеток (остальные клетки свободные);

– определить для этого плана платежи (α_i и β_j) исходя из условия, чтобы в любой базисной клетке псевдостоимости были равны стоимостям. Один из платежей можно назначить произвольно, например, положить равным нулю;

– подсчитать псевдостоимости $C_{i,j} = \alpha_i + \beta_j$ для всех свободных клеток. Если окажется, что все они не превышают стоимостей, то план оптимален. Если хотя бы в одной свободной клетке псевдостоимость превышает стоимость, следует приступить к улучшению плана путем переброски перевозок по циклу, соответствующему любой свободной клетке с отрицательной ценой (для которой псевдостоимость больше стоимости);

– после этого заново подсчитываются платежи и псевдостоимости, и, если план еще не оптимален, процедура улучшения продолжается до тех пор, пока не будет найден оптимальный план.

Так в нашем примере после двух циклов расчетов получим оптимальный план вида:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 42 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 26 \\ 0 & 27 & 0 & 0 & 0^x \\ 14 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

где 0^x – базисный нуль.

При этом стоимость всей перевозки изменялась следующим образом

$$Z(X_0) = 703,$$

$$Z(X) = 709,$$

$$Z(X_2) = Z_{\min} = 703.$$

Следует также отметить, что оптимальный план может иметь и другой вид, но его стоимость останется такой же $Z_{\min} = 703$.

Однако на практике чаще встречаются задачи с неправильным балансом.

1 Пусть суммарные запасы поставщиков превосходят суммарные запасы потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Очевидно, что в этом случае при составлении оптимального плана перевозок часть запасов поставщиков, равная

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

останется не вывезенной. Поэтому в системе ограничений транспортной задачи первую группу уравнений ($i \in \overline{1, m}$) следует заменить неравенствами вида «≤».

Вторая группа уравнений остается без имени, так как запросы всех потребителей удовлетворяются полностью. Для приведения к канонической форме в полученные неравенства вводят дополнительные переменные $x_{1(n+1)}, x_{2(n+1)}, \ldots, x_{m(n+1)}$. В результате первые m ограничений задачи принимают вид

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i(n+1)} = a_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

В целевую функцию дополнительные переменные не входят (входят с нулевыми коэффициентами). Математическая модель задачи принимает вид

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} 0 \ \ x_{i(n+1)} \to \min, \tag{5.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i(n+1)} = a_i, \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.6}$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n + 1. \tag{5.7}$$

Запишем необходимое и достаточное условие разрешимости задачи

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}(a_i - x_{i(n+1)}) = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

отсюда

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} x_{i(n+1)} = \sum_{j=1}^{n} b_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_{i(n+1)} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1} .$$

Следовательно, чтобы задача в рассматриваемом случае имела решение, необходимо ввести фиктивного потребителя с запросами b_{n+1} равными разности суммарных запасов поставщиков и запросов потребителей, и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза $c_{i(n+1)} = 0 \; \forall \, i$.

2 Аналогично в случае, когда суммарные запросы потребителей превосходят суммарные запасы поставщиков, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

часть запросов потребителей, равная

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

останется неудовлетворенной. Поэтому вторая группа уравнений системы ограничений ($j \in 1, \overline{n}$) транспортной задачи заменяется неравенствами вида «≤».

После введения дополнительных переменных $x_{(m+1)1}$, $x_{(m+1)2}$, …, $x_{(m+1)n}$ в эти неравенства математическая модель задачи примет вид

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} 0 \, x_{(m+1)j} \rightarrow \min, \tag{5.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + x_{(m+1)j} = b_i, \quad i = 1,2, \ldots, n. \tag{5.10}$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, m + 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.11}$$

Для того чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(b_j - x_{(m+1)j}) = \sum_{i=1}^{m} a_i ,$$

отсюда

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i - \sum_{j=1}^{n} x_{(m+1)j} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_{(m+1)j} = \sum_{i=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = a_{m+1} .$$

Следовательно, чтобы в этом случае задача имела решение, необходимо ввести фиктивного поставщика с запасами a_{m+1}, равными разности суммарных запросов потребителей и запасов поставщиков, и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза $c_{(m+1)j} = 0 \; \forall \, j$.

5.3 Транспортная задача с ограничениями на пропускную способность

Пусть требуется при решении транспортной задачи ограничить перевозки от поставщика с номером l к потребителю с номером k. Возможны ограничения двух типов: 1) $x_{lk} \geq a$; 2) $x_{lk} \leq b$, где a и b – постоянные величины.

1 Если $x_{lk} \geq a$, то необходимо прежде, чем решать задачу, сократить запасы l-го поставщика и запросы k-го потребителя на величину a (зарезервировать перевозку $x_{lk} \geq a$). После решения задачи в оптимальном решении следует увеличить объем перевозки x_{lk} на величину a.

2 Если $x_{lk} \leq b$, то необходимо вместо k-го потребителя с запросами b_k ввести двух других потребителей. Один из них с номером k должен иметь запросы $b_k = b$, а другой с номером $n + 1$ – запросы $b_{n+1} = b_k - b$. Стоимости перевозок для этих потребителей остаются прежними, за исключением стоимости $c_{l(n+1)}$, которая принимается равной сколь угодно большому числу M ($M >> 1$). После получения оптимального решения величины грузов, перевозимых к $(n + 1)$-му потребителю, прибавляются к величинам перевозок k-го потребителя. Так как $c_{l(n+1)} = M$ – самая большая стоимость перевозки, то в оптимальном решении клетка с номером $(l, n + 1)$ останется пустой, $x_{l(n+1)} = 0$ и объем перевозки x_{lk} не превзойдет b.

Пример. Решить транспортную задачу, исходные данные которой приведены в табл. 5.14, при дополнительных условиях: объем перевозки груза от l-го поставщика 2-му потребителю должен быть не менее 100 единиц ($x_{12} \geq 100$), а от 3-го 1-му не более 200 единиц ($x_{31} \leq 200$).

Таблица 5.14

b_j / a_i	500	400	300
200	1	5	6
300	2	6	7
500	3	7	8

Р е ш е н и е. Для того чтобы в оптимальном решении объем перевозки x_{12} был не менее 100 единиц, при решении задачи будем предполагать, что запасы 1-го поставщика a_1 и запросы 2-го потребителя b_2 меньше фактических на 100 единиц. После получения оптимального решения объем перевозки x_{12} увеличим на 100 единиц.

Для того чтобы удовлетворить требованию $x_{31} \leq 200$, вместо 1-го потребителя введем двух других. Один из них под прежним первым номером имеет запасы $b_1 = 200$ единиц и прежние стоимости перевозок единиц груза. Другому присвоим четвертый номер. Его запросы равны $b_4 = 500 - 200 = 300$ единиц и стоимости перевозок единиц груза те же, что и у 1-го потребителя за исключением c_{34}, которую примем равной сколь угодно большому числу M, т.е. $c_{34} = M$. После нахождения оптимального решения задачи объемы перевозок для 4-го потребителя необходимо прибавить к соответствующим объемам перевозок для 10-го потребителя.

В результате указанных преобразований таблица исходных данных задачи будет иметь вид, представленный в табл. 5.15.

Таблица 5.15

b_j / a_i	200	300	300	300
100	1	5	6	1
300	2	6	7	2
500	3	7	8	M

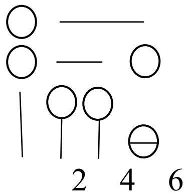
Далее задачу решаем обычным методом потенциалов. Проверяем выполнение необходимого и достаточного условия существования решения задачи. Находим суммарные запасы поставщиков и запросы потребителей:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 100 + 300 + 500 = 900;$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 200 + 300 + 300 + 300 = 1100.$$

Задача с неправильным балансом. Вводим фиктивного поставщика с запасами $a_4 = 1100 - 900 = 200$.

Составляем начальное опорное решение X_1 методом минимальной стоимости. Записываем матрицу стоимостей C:



$$C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 7 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{array}$$

Кружочками в матрице C отмечены минимальные элементы, а цифрами рядом со строками и столбцами – порядок исключения из рассмотрения поставщиков и потребителей.

Таблица 5.16

X_1 $v_1 = 1$ $v_2 = 0$ $v_3 = 1$ $v_4 = 1$

	a_i \ b_j	200	300	300	300
$u_1 = 0$	100	1 100	5 –	6 –	1 0
$u_2 = 1$	300	2 100 –	6 –	7 –	2 200 +
$u_3 = 7$	500	3 5 +	7 300	8 200 –	**M** –
$u_4 = -1$	200	0 0	0 –	0 100 +	0 100 –

Полученное решение X_1 имеет $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$ базисных переменных. Вычисляем значение целевой функции на этом опорном решении:

$$Z(X_1) = 100 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + 200 \cdot 2 + 300 \cdot 7 + 200 \cdot 8 + 100 \cdot 0 + 100 \cdot 0 = 4400.$$

Для проверки оптимальности опорного решения находим потенциалы. Записываем систему уравнений для нахождения потенциалов и решаем ее:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_2 = 7, \\ u_3 + v_3 = 8, \\ u_4 + v_3 = 0, \\ u_4 + v_4 = 0. \end{cases}$$

Система состоит из семи уравнений и имеет восемь переменных. Так одно число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то одному из потенциалов можно задать значение произвольно, пусть $u_1 = 0$. Остальные потенциалы однозначно находятся из системы уравнений:

$$u_1 = 0;$$

$$v_1 = 1 - u = 1 - 0 = 1;$$

$$u_2 = 2 - \text{v}_1 = 2 - 1 = 1;$$

$$v_4 = 2 - u_2 = 2 - 1 = 1;$$

$$u_4 = 0 - v_4 = 0 - 1 = -1;$$

$$v_3 = 0 - u_4 = 0 - (-1) = 1;$$

$$u_3 = 8 - v_3 = 8 - 1 = 7;$$

$$v_3 = 7 - u_3 = 7 - 7 = 0.$$

Находим оценки для свободных клеток таблицы:

$\Delta_{12} = 0 + 0 - 5 = -5 < 0$; $\Delta_{13} = 0 + 1 - 6 = -5 < 0$; $\Delta_{14} = 0 + 1 - 1 = 0$;

$\Delta_{22} = 1 + 0 - 6 = -5 < 0$; $\Delta_{23} = 1 + 1 - 7 = -5 < 0$; $\Delta_{31} = 7 + 1 - 3 = 5 > 0$;

$\Delta_{34} = 7 + 1 - \text{M} < 0$; $\Delta_{41} = -1 + 1 - 0 = 0$; $\Delta_{42} = -1 + 0 - 0 = -1 < 0$.

Опорное решение неоптимальное, так как имеется положительная оценка $\Delta_{31} = 5$ для клетки (3,1). Отмечаем эту клетку знаком «+». Находим цикл для улучшения опорного решения (см. табл. 5.16). Определяем величину груза для перераспределения по циклу 0 = min{11, 200, 100} = 100. Осуществляем сдвиг по циклу на величину 0 = 100. Получаем второе опорное решение X_2 (табл. 5.17).

Таблица 5.17

X_1		$v_1 = 1$	$v_2 = 5$	$v_3 = 6$	$v_4 = 1$
	a_i \ b_j	200	300	300	300
$u_1 = 0$	100	1 100	5 0	6 0	1 0
$u_2 = 1$	300	2 0	6 0	7 0	2 300
$u_3 = 2$	500	3 100	7 300	8 100	**M** –
$u_4 = -6$	200	0 –	0 –	0 200	0 –

В табл. 5.3.4 также записаны потенциалы и оценки для свободных клеток. Решение X_2 оптимальное, так как все оценки неположительные. Запишем оптимальное решение исходной задачи. Для этого увеличим объем перевозки x_{12} на 100 единиц и объединим объемы перевозок 4-го потребителя с объемами перевозок 1-го потребителя.

Получим

$$X^* = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \\ 100 & 300 & 100 \end{pmatrix}.$$

Вычислим значение целевой функции на этом решении

$$Z(X^*) = 100 \cdot 1 + 100 \cdot 5 + 300 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + 300 \cdot 7 + 100 \cdot 8 = 4400.$$

Ответ: $\min Z(X) = 4400$ при $X^* = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \\ 100 & 300 & 100 \end{pmatrix}$.

В некоторых задачах требуется запретить перевозки от отдельных поставщиков отдельным потребителям. В таких случаях либо зачеркивают клетку таблицы транспортной задачи, либо назначают соответствующую этой клетке стоимость перевозки единицы груза сколь угодно большой, равной $M >> 1$. В остальном задача решается обычным способом. Для разрешимости данной задачи необходимо существование начального опорного решения.

5.4 Транспортная задача по критерию времени

Задача по критерию времени возникает при перевозке срочных грузов. Как и в обычной транспортной задаче, имеется m поставщиков с запасами однородного груза в количестве $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и n потребителей, которым этот груз должен быть доставлен в объеме $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Известно t_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$ – время, за которое груз доставляется от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок груза, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью и наибольшее время доставки всех грузов является минимальным.

Составим математическую модель этой задачи. Обозначим x_{ij} – объем перевозимого груза от i-го поставщика j-му потребителю. Система ограничений задачи не отличается от системы ограничений обычной транспортной задачи. Пусть $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$ – некоторое опорное решение задачи. Запишем целевую функцию задачи. Обозначим через $T(X)$ наибольшее значение элементов матрицы $T = (t_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$, соответствующих клеткам таблицы, занятым опорным решением: $T(X) = = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\}$. Таким образом, за время $T(X)$ план перевозок будет выполнен полностью. Математическая модель имеет вид:

$$T(X) = \max_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} \to \min, \tag{5.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.13}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.14}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.15}$$

Задача решается в следующем порядке. Находится начальное опорное решение X_1. Определяется значение целевой функции $T(X_1) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} = t_{l_1k_1}$. Все свободные клетки, которым соответствуют значения $t_{ij} > T(X_1)$, исключаются из рассмотрения (перечеркиваются). Занимать эти клетки нецелесообразно, так как повысится значение целевой функции. Чтобы понизить ее значение, необходимо освободить клетку (l_1, k_1), в которой t_{ij} достигает максимума. Для этого строят так называемые разгрузочные циклы, которые могут включать в свой состав несколько свободных клеток. В каждом разгрузочном цикле, начиная с разгружаемой клетки (l_1, k_1), расставляются поочередно знаки «–» и «+» и осуществляется сдвиг на величину $0 = \max\{x_{ij}\}$. Если удается эту клетку разгрузить, то она исключается из рассмотрения (зачеркивается). Получается новое опорное решение X_2, на котором значение целевой функции меньше, чем на X_1. Далее снова пытаются разгрузить клетку, соответствующую $T(X_2) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} = t_{l_2k_2}$. Процесс продолжается до тех пор, пока возможность разгрузить соответствующую клетку не исчезнет.

Пример. Найти минимальное время на осуществление всех перевозок для задачи, исходные данные которой приведены в табл. 5.18.

Р е ш е н и е. Составим начальное опорное решение X_1 по методу северо-западного угла (см. табл. 5.18). Базисные нули не записываем. Максимум целевой функции $T(X_1) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{10, 8, 5, 12, 4\} = 12$ достигается в клетке (3, 4). Перечеркнем клетку (4, 1), в которой время доставки груза $t_{41} = 15$ больше $T(X_1) = 12$.

Таблица 5.18

a_i \ b_j	20	30	40	60
20	10 20	6	3	2
30	5	8 – 30	7	4 +
	2	4	5	12

50		+	40	– 10
50	15	5	9	4 50

Таблица 5.19

a_i \ b_j	20	30	40	60
20	10 – 20	6 +	3	2
30	5 +	8 20 –	7	4 10
50	2	4 10	5 40	12
50	15	5	9	4 50

Для улучшения решения разгрузим клетку (3, 4) с помощью цикла (3, 4), (2, 4), (2, 2), (3, 2). Обозначим цикл, найдем 0 = min{10, 30} = 10. Осуществив сдвиг по циклу, получим второе опорное решение X_2 (табл. 5.19). Максимум целевой функции на этом опорном решении $T(X_2) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{10, 8, 4, 5, 4\} = 10$ достигается в клетке (1, 1). Перечеркнем клетку (3, 4), так как время $t_{34} = 12$ больше, чем $T(X_2) = 10$. Разгрузим клетку (1, 1) с помощью цикла (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1). Означим цикл, найдем 0 = min{20, 20} = 20. Осуществив сдвиг по циклу, получим третье опорное решение X_3 (табл. 5.20).

Таблица 5.20

a_i \ b_j	20	30	40	60
20	10	6 20 –	3 +	2
30	5 20	8	7	4 10
50	2	+ 4 10	– 5 40	12
50	15	5	9	4 50

Таблица 5.21

a_i \ b_j	20	30	40	60
20	10	6	3 20	2
30	5 20	8	7	4 10
50	2	4 30	5 20	12
50	15	5	9	4 50

Максимум целевой функции на этом опорном решении $T(X_3) = = \max\limits_{x_{ij}>0} \{6, 5, 4, 4, 5, 4\} = 6$ и достигается в клетке (1, 2). Перечеркнем клетки (1, 1), (2, 2), (2, 3) и (4, 3): в них время $t_{11} = 10$, $t_{22} = 8$, $t_{23} = 7$ и $t_{43} = 9$ больше, чем $T(X_3) = 6$. Разгрузим клетку (1, 2) с помощью цикла (1, 2), (1, 3), (3, 3), (3, 2). Означим цикл, найдем 0 = min {20,20} = 20. Осуществив сдвиг по циклу, получим четвертое опорное решение

X_4 (табл. 5.21). Максимум целевой функции на этом опорном решении $T(X_4)=\max\limits_{x_{ij}>0}\{5, 4, 4, 5, 4\} = 5$ и достигается в клетках (2, 1) и (3, 3). Перечеркнем клетки (1, 2) и (4, 2), в которых время перевозок не менее $t_{21} = 5$. С помощью оставшихся невычеркнутых клеток разгрузить клетки (2, 1) и (3, 3) не удается, поэтому X_4 является оптимальным решением.

Ответ: $\min T(X) = 5$ при $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 30 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$.

6 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

6.1 Классическое и статистическое определение вероятности события

Чтобы каким-то образом оценить событие, необходимо учесть или специально организовать условия, в которых оно происходит. Выполнение определенных условий или действий для выявления рассматриваемого события носит название **опыта** или **эксперимента.**

Событие называется **случайным,** если оно обязательно появляется в результате данного опыта, и **невозможным**, если оно не может либо произойти, либо не произойти.

Например, выпадение снега в Москве 30 ноября является случайным событием. Ежедневный восход солнца можно считать достоверным событием, а выпадение снега на экваторе – невозможным событием.

Одной из главных задач в теории вероятностей является задача определения количественной меры возможности появления события.

События называются **несовместными**, если они вместе не могут наблюдаться в одном и том же опыте. Так продажа двух и трех автомашин в одном магазине одновременно – это два несовместных события.

Суммой событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_r .$$

В качестве примера суммы событий можно назвать продажу в магазине хотя бы одного из двух товаров.

Произведением событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие, состоящее в одновременном появлении всех этих событий

$$A_1\, A_2\, ...\, A_n = \prod_{i=1}^{n} A_r .$$

Событие, состоящее в одновременной продаже в магазине двух товаров, является произведением событий A_1 и A_2, где A_1 – продажа одного товара, A_2 – продажа другого товара.

События $B_1, B_2, \dots, B_k$ образуют *полную группу* событий, если хотя бы одно из них обязательно произойдет в опыте.

Пример. В порту имеется два причала для приема судов. Можно рассмотреть три события: B_1 – отсутствие судов у причалов, B_2 – присутствие одного судна у одного из причалов, B_3 – присутствие двух судов у двух причалов. Эти три события образуют полную группу.

Противоположными называются два единственно возможных события, образующих полную группу.

Если одно из двух противоположных события обозначить через A, то другое обычно обозначают через $\overline{A}$.

Каждый из равновозможных результатов испытаний (опытов) называется **элементарным исходом**. Их обычно обозначают буквами $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Например, подбрасывая игральную кость, можно получить шесть элементарных исходов (по числу очков на гранях). Из элементарных исходов можно составить более сложное событие. Так событие выпадения четного числа очков определяется тремя исходами: 2, 4 ,6.

Количественной мерой возможности появления рассматриваемого события является вероятность. Наиболее широкое распространение получили два определения вероятности события: классическое и статическое.

Классическое определение вероятности связано с понятием благоприятствующего исхода. Исход называется **благоприятствующим** данному событию, если его появление влечет за собой наступление этого события.

Вероятность события A равна отношению числа благоприятствующих исходов к общему числу возможных исходов:

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{6.1}$$

где m – число благоприятствующих событию A исходов; n – общее число возможных исходов.

Рассматриваемое событие – четное число очков на выпавшей грани имеет три благоприятствующих исхода. В данном случае известно и общее количество возможных исходов. Значит, здесь можно использовать классическое определение вероятности события.

В рассмотренном примере

$$P(A)=\frac{3}{6}=0{,}5.$$

Статистическое определение вероятности связано с понятием относительной частоты появления события A в опытах. **Относительная частота появления** события A вычисляется по формуле

$$P^*(A)=\frac{m_1}{n_1}, \tag{6.2}$$

где m_1 – число появлений события A в серии из n_1 опытов (испытаний).

Вероятностью события A называется число, относительно которого стабилизируется (устанавливается) относительная частота $P^*(A)$ при неограниченном увеличении числа опытов.

В практических задачах за вероятность события A принимается относительная частота $P^*(A)$ при достаточно большом числе испытаний.

Из определений вероятности события A следует, что всегда выполняются неравенства

$$0 < P(A) < 1.$$

Для того, чтобы вычислить вероятность события на основе формулы (6.1), часто используют формулы комбинаторики.

Пример. Известно, что в поступившей партии из 30 швейных машинок 10 имеют внутренний дефект. Определить вероятность того, что из пяти наудачу взятых машинок три окажутся бездефектными.

Р е ш е н и е. Введем следующие обозначения: N – общее число машинок, n – число бездефектных машинок, m – число отобранных в партию машинок, k – число бездефектных машинок в отобранной партии.

Общее число комбинаций по m машинок, т.е. общее число возможных исходов, будет равно числу сочетаний из N элементов по m, т.е. C_N^m. Но в каждой отобранной комбинации должно содержаться по три бездефектные машинки. Число таких комбинаций равно числу сочетаний из n элементов по k, т.е. C_n^k.

Оставшиеся дефектные машинки (элементы) тоже образуют множество комбинаций, число которых равно числу сочетаний из $N-n$ элементов по $m-k$, т.е. C_{N-n}^{m-k}.

Это значит, что общее число благоприятствующих исходов определяет произведение $C_n^k\ C_{N-n}^{m-k}$. Откуда

$$P(A)=\frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

Поставив в эту формулу численные значения данного примера получим

$$P(A)=\frac{C_{20}^3 C_{10}^2}{C_{30}^5}=0{,}36.$$

Пример. Магазин в целях рекламы нового товара проводит лотерею, в которой один главный приз, 5 – вторых, 100 – третьих и 1000 – четвертых. В конце рекламного дня выяснилось, что лотерейные билеты получили 10 000 покупателей. По правилам розыгрыша после извлечения выигрышного билета он возвращается в урну, и покупатель не может получить более одного выигрыша. Чему равна вероятность того, что покупатель, который приобрел рекламируемый товар:

а) выиграет первый приз;

б) выиграет хотя бы один приз;

в) не выиграет ни одного приза?

Р е ш е н и е

а) Определим событие A: «Покупатель выиграл первый приз». Согласно условию задачи, в лотерее участвовало 10 000 покупателей, отсюда общее число испытаний $N = 10\ 000$, а число интересующих нас исходов $M = 1$. Все исходы являются равновероятными. Следовательно, по формуле классической вероятности: $P(A) = 1/10\ 000$.

б) определим событие B: «Покупатель выиграл хотя бы один приз». Для этого события М = 1 + 5 + 100 + 1000 = 1106.

$P(B) = M/N = 1106/10000 = 0{,}1106$;

в) событие «Покупатель не выигрывает ни одного приза» – противоположное событию B, обозначим его C, тогда

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - 01106 = 0{,}8894.$$

Ответ:

Вероятность того, что покупатель выиграет первый приз равна 0,0001, один приз – 0,1106, не выиграет ни одного приза – 0,8894.

6.2 Теоремы сложения и умножения вероятностей

6.2.1 ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Теорема 6.2.1 Вероятность суммы конечного числа несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна сумме вероятностей этих событий

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\ . \qquad (6.3)$$

Пример. Для отправки груза со склада может быть выделена одна из двух машин различного вида. Известны вероятности выделения каждой машины: $P(A_1) = 0{,}2$; $P(A_2) = 0{,}4$. Тогда вероятность того, что к складу будет подана хотя бы одна из этих машин

$$P(A_1 + A_2) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6.$$

Пример. Компания производит 40 000 холодильников в год, которые реализуются в различных регионах России. Из них 10 000 экспортируются в страны СНГ, 800 продаются в регионах Европейской части России, 7000 продаются в страны дальнего зарубежья, 6000 в Западной Сибири, 5000 в Восточной Сибири, 4000 в Дальневосточном районе. Чему равна вероятность того, что определенный холодильник будет: а) произведен на экспорт; б) продан в России?

Р е ш е н и е

Обозначим события: A – «Холодильник будет продан в странах СНГ»;

$$P(A) = 10\ 000/40\ 000 = 0{,}25;$$

B – «Холодильник будет продан в Европейской части России»;

$$P(B) = 8000/40\ 000 = 0{,}2;$$

C – «Холодильник будет продан в страны дальнего зарубежья»;

$$P(C) = 7000/40\ 000 = 0{,}175;$$

D – «Холодильник будет продан в Восточной Сибири»;

$$P(D) = 6000/40\ 000 = 0{,}15;$$

E – «Холодильник будет продан в Западной Сибири»;

$$P(E) = 5000/40\ 000 = 0{,}125;$$

F – «Холодильник будет продан в Дальневосточном районе»;

$$P(F) = 4000/40\ 000 = 0{,}1.$$

События A, B, C, D, E, F – несовместные.

а) P (холодильник произведен на экспорт) = $P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}25 + 0{,}175 = 0{,}425$.

б) P (холодильник будет продан в России) = $P(B + D + E + F) = P(B) + + P(D) + P(E) + P(E) = 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}125 + 0{,}1 = 0{,}575$.

Ответ:
P (холодильник произведен на экспорт) = 0,425.
P (холодильник будет продан в России) = 0,575.

6.2.2 УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Во многих случаях вероятности появления одних событий зависят от того произошло другое событие или нет. Например, вероятность своевременного выпуска машины зависят от поставки комплектующих изделий. Если эти изделия уже поставлены, то значение искомой вероятности будет одним. Если же она определяется до поставки комплектующих, то ее значение, очевидно, будет другим.

Вероятность события A, вычисленная при условии, что имело место событие B, называется **условной вероятностью** события A и обозначается $P(A/B)$.

В тех случаях, когда вероятность события A рассматривается при условии, что произошли два других события B и C, используется условная вероятность относительно произведения событий B и C:

$$P(A/BC).$$

Пример. В семье 4 ребенка. Известно, что один из них мальчик. Какова вероятность, что в семье два мальчика?

Р е ш е н и е
Событие B: «В семье есть мальчик».
Событие A: «В семье есть 2 мальчика».
Нам нужно найти $P(A/B)$.
Упорядочим по дате рождения.
Всего 16 вариантов.
$P(B) = 15/16$ – вероятность того, что в семье есть мальчик.
$P(A) = 6/16$ – вероятность того, что в семье есть 2 мальчика.
$P(A/B) = P(AB)/P(B) = 2/5$
$A \subset B \Rightarrow AB = A$.

Ответ: 2/5.

6.2.3 ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема 6.2.2 Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(\mathrm{A/B}). \tag{6.4}$$

Пример. На склад поступило 35 холодильников. Известно, что пять холодильников с дефектами, но неизвестно – какие. Найти вероятность того, что два взятых наугад холодильника будут с дефектами.

Р е ш е н и е. Вероятность того, что первый выбранный холодильник будет с дефектом, находится как отношение числа благоприятствующих исходов к общему числу возможных исходов:

$$P(A) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.$$

Если первый холодильник оказался с дефектом, условная вероятность того, что и второй будет с дефектом, определяется на основе соотношения:

$$P(B/A) = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}.$$

Искомая вероятность

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{7}\frac{2}{17} = 0{,}02.$$

Если при наступлении события A вероятность события B не меняется, то события A и B называются **независимыми.**

В случае независимых событий вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{6.5}$$

Теорему умножения вероятностей легко обобщить на любое конечное число событий.

Теорема 6.2.3 Вероятность произведения конечного числа событий равна произведению их условных вероятностей относительно произведения предшествующих событий, т.е.

$$P(ABC \cdots LM) = P(A)P(B/A)P(C/AB) \cdots P(M/AB \cdots L). \tag{6.6}$$

Для доказательства этой теоремы можно использовать метод математической индукции.

6.2.4 ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Два события называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же опыте.

Пример. Поступление в магазин одного вида товара – событие A, поступление второго вида товара – событие B. Поступить эти товары могут и одновременно. Поэтому A и B – совместные события.

Теорема 6.2.4 Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{6.7}$$

Для случая трех событий

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(\mathrm{C}) - P(AB) - P(BC) + P(ABC).$$

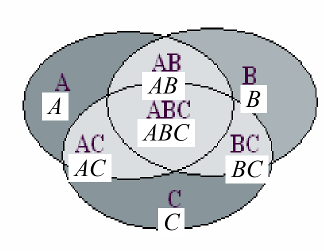


Рис. 6.2.1

Пример. Если вероятность поступления в магазин одного вида товара $P(A) = 0{,}4$, а второго вида $P(B) = 0{,}5$ и если допустить, что эти события независимы, но совместны, то вероятность суммы событий

$$P(A + B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}7.$$

Пример. Опыт состоит в случайном извлечении карты из колоды в 52 листа. Чему равна вероятность того, что это будет или туз, или карта масти треф?

Р е ш е н и е

Определим события: A – «Извлечение туза», $И$ – «Извлечение карты трефовой масти». $P(A) = 4/15$, $P(B) = 13/52$; вероятность их пересечения – извлечение трефового туза – $P(AB) = 1/52$

Треф	Бубны	Пики	Червы
Туз	Туз	Туз	Туз
Король Дама Валет 10 ... 2	Король Дама Валет 10 ... 2	Король Дама Валет 10 ... 2	Король Дама Валет 10 ... 2

Событие B →

Нас интересует вероятность суммы событий A и B.

$$P(A + B) = 4/52 + 13/51 – 1/52 = 16/52 = 1/2.$$

Ответ: 1/2.

6.3 Основные формулы для вероятностей событий

6.3.1 ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Предположим, что событие B может произойти только с одним из несовместных событий A_1, A_2, ..., A_n. Например, в магазин поступает одна и та же продукция от трех предприятий и в разном количестве. Вероятность выпуска некачественной продукции на этих предприятиях различна. Случайным образом отбирается одно из изделий. Требуется определить вероятность того, что это изделие некачественное (событие B). Здесь события A_1, A_2, A_3 – это выбор изделия из продукции соответствующего предприятия.

В этом случае вероятность события B можно рассматривать как сумму произведений событий

$$B = \sum_{i=1}^{n} BA_i .$$

По теореме сложения вероятностей несовместных событий (см. теорему 6.2.1) получаем

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) .$$

Используя теорему умножения вероятностей, находим

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B / A_i) . \tag{6.8}$$

Формула (6.8) носит название **формулы полной вероятности.**

Пример. Для рассмотренного выше случая с поступлением товара в магазин от трех предприятий зададим численные значения. Пусть от первого предприятия поступило 20 изделий, от второго – 10 и от третьего – 70. Вероятности некачественного изготовления изделия на предприятиях соответственно равны 0,02; 0,03 и 0,05.

Определить вероятность получения некачественного изделия.

Р е ш е н и е

Вероятности событий A_1, A_2, A_3 будут соответственно $P(A_1) = 0,2$; $P(A_2) = 0,1$; $P(A_3) = 0,7$. Используя формулу (6.8) находим

$$P(B) = 0,2 \cdot 0,02 + 0,1 \cdot 0,03 + 0,7 \cdot 0,05 = 0,042.$$

Пример. Имеются три урны. В одной 2 белых и 1 черный шар. Во второй 1 белый и 1 черный шар. В третьей 3 белых и 2 черных шара. Выбирается одна из урн и из нее 1 шар. Какова вероятность, что шар черный?

A – черный шар. $P(A) = ?$

Пусть A_1, A_2, A_3 события, соответствующие извлечению шара из первой, второй или третьей урны. Очевидно, что они равновероятны.

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3;$$

$$P(A/A_1) = 1/3, \quad P(A/A_2) = 1/2, \quad P(A/A_3) = 2/5;$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(A/A_i)\,;$$

$$P(A) = 1/3\ \frac{37}{90} = 0{,}41.$$

6.3.2. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть событие B происходит одновременно с одним из n несовместных событий A_1, A_2, ..., A_n. Требуется найти вероятность события A_i, если известно, что событие B произошло.

На основании теоремы о вероятности произведения двух событий (см. теорему 6.2.2)

$$P(A_i B) = P(B)P(A_i/B) = P(A_i)P(B/A_i),$$

откуда

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}. \tag{6.9}$$

Формула (6.9) носит название **Формулы Байеса.**

Пример. Три организации представили в контрольное управление счета для выборочной проверки: первая – 15 счетов, вторая – 10, третья – 25. Вероятности правильного оформления счетов у этих организаций соответственно таковы: 0,9; 0,8; 0,85. Был выбран один счет, и он оказался правильным. Определить вероятность того, что этот счет принадлежит второй организации.

Р е ш е н и е

Пусть A_1, A_2, A_3 – события выбора счета соответственно у первой, второй и третьей организации. Вероятности этих событий таковы:

$$P(A_1)=\frac{15}{50},\quad P(A_2)=\frac{10}{50},\quad P(A_3)=\frac{25}{50}.$$

По формуле полной вероятности (см. формулу 6.8) определяем вероятность выбора правильно оформленного счета:

$$P(B) = 0{,}9\frac{15}{50} + 0{,}8\frac{10}{50} + 0{,}85\frac{25}{50} = 0{,}855.$$

По формуле Байеса находим искомую вероятность:

$$P(A_2/B)=\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{0{,}855} = 0{,}19.$$

Пример. Поставили урну с шаром, добавили в нее белый шар, перемешали и вытащили белый шар. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?

Определим события:

A_1 – поставили урну с белым шаром;

A_2 – поставили урну с черным шаром;

B – вытащили белый шар.

Априорные вероятности равны 1/2.

$$P(A_1/B) = P(B/A_1)P(A_1)/(P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2)) =$$

$$= 1\cdot 1/2(1\cdot 1/2 + 1/21/2) = 2/3.$$

Ответ: 2/3.

Пример. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60 % деталей отличного качества, а второй – 84 %. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение

Обозначим через A событие – деталь отличного качества. Можно сделать два предположения (гипотезы): B_1 – деталь произведена первым автоматом, причем (поскольку первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй) $P(B_1) = 2/3$; B_2 – деталь произведена вторым автоматом, причем $P(B_2) = 1/3$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом, $P_{B_1}(A) = 0,6$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена вторым автоматом, $P_{B_2}(A) = 0,84$.

Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна

$$P(A) = P(B_1)\, P_{B_1}(A) + P(B_2)\, P_{B_2}(A) = 2/3 \cdot 0,6 + 1/3 \cdot 0,84 = 0,68.$$

Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена первым автоматом, по формуле Байеса равна

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{2/3 \cdot 0,6}{0,68} = \frac{10}{17}.$$

6.3.3 ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Предположим, что несколько одинаковых машин в одних и тех же условиях перевозят груз. При этом любая машина может выйти из строя. Пусть вероятность выхода из строя одной машины не зависит от выхода из строя других машин. Это значит, что рассматриваются независимые события (испытания). Вероятности выхода из строя каждой из этих машин примем одинаковыми (p).

Пусть в общем случае проводится n независимых испытаний. Задача такова: определить вероятность того, что в m испытаниях наступит событие A, если вероятность его наступления в каждом испытании равна p. В нашем примере это может быть вероятность выхода из строя одной машины, двух машин и т.д.

Определим вначале вероятность того, что в первых m испытаниях событие A наступит, а в остальных $n - m$ испытаниях не наступит. Вероятность такого события можно получить по формуле вероятности произведения независимых событий

$$p = p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$.

Заметим, что это лишь одна из возможных комбинаций, когда событие A произошло только в первых m испытаниях. Для определения искомой вероятности нужно перебрать все возможные комбинации. Их число равно числу сочетаний из n элементов по m, т.е. C_n^m.

Таким образом, вероятность того, что событие A наступит в любых m испытаниях, определяется по формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{6.10}$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$.

Формула (6.10) носит название **формулы Бернулли**.

Пример. В четырех попытках разыгрываются некоторые предметы. Вероятность выигрыша в каждой попытке равна 0,5. Какова вероятность выигрыша трех предметов?

Решение

По формуле Бернулли находим

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5 = \frac{4!}{3!} 0,5^3 \cdot 0,5 = 0,25.$$

6.3.4 ФОРМУЛА ПУАССОНА

Формула Бернулли удобна для вычислений лишь при сравнительно большом числе испытаний n. При больших значениях n пользоваться этой формулой неудобно. Чаще всего в этих случаях используют формулу Пуассона. Эта формула определяется теоремой Пуассона.

Теорема 6.3.1 Если вероятность p наступления событий A в каждом испытании постоянна и мала, а число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что событие A наступит m раз, приближенно равна

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \tag{6.11}$$

где $\lambda = np$.

Пример. Предприятие изготовило и отправило заказчику 100 000 бутылок пива. Вероятность того, что бутылка может оказаться битой равна 0,0001. Найти вероятность того, что в отправленной партии будет три и пять битых бутылок.

Решение

Дано: $n = 100\ 000$, $p = 0{,}0001$, $m = 3$ ($m = 5$).

Находим $\lambda = np = 10$.

Воспользуемся формулой Пуассона:

$$P_{100000}(3) = 10^3 \frac{e^{-10}}{3!} = 10^3 \frac{0{,}000045}{6} = 0{,}0075,$$

$$P_{100000}(5) = 10^5 \frac{e^{-10}}{5!} = 10^5 \frac{0{,}000045}{120} = 0{,}0375.$$

6.4 Дискретные случайные величины

6.4.1 ВИДЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Одним из важнейших понятий в теории вероятностей является понятие случайной величины.

Величина называется **случайной**, если в результате опыта она может принимать любые заранее неизвестные значения.

Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные.

Величина называется **дискретной**, если она может принимать значение, сколь угодно мало отличающееся друг от друга. Примером непрерывной случайной величины является время заправки автомашины на автозаправочной станции.

Случайная величина обычно обозначается прописной буквой латинского алфавита (X, Y), ее конкретные значения – строчными буквами (x, y). Для дискретных случайных величин при решении конкретных задач указываются их возможные числовые значения. Например, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$.

6.4.2 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть дискретная случайная величина X может принимать n значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для полной характеристики этой случайной величины должны быть заданы еще и вероятности появления указанных значений $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Дискретные значения случайной величины и вероятности их появления удобно записывать в следующем виде:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Для дискретной случайной величины, так же как и для непрерывной, вводится понятие *функции распределения*, которая представляет собой вероятность событий $X < x$, где x – задаваемые непрерывно изменяющиеся значения, т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Если дискретные значения случайной величины x_1, x_2, …, x_n расположены в порядке возрастания, то каждому значению x_1 этих величин ставится в соответствие сумма вероятностей всех предыдущих значений и вероятности P_i:

x_1	x_2	x_3	…
p_1	$p_1 + p_2$	$p_1 + p_2 + p_3$	…

Так как до значения x_1 случайная величина X не встречалась, то и вероятность события $X < x_1$ равна нулю. Для всех значений $x_1 < x \le x_2$ вероятность события $X < x$ совпадает с вероятностью значения x_1, т.е. p_1. Но при $x > x_2$ случайная величина уже может принимать два возможных значения x_1 и x_2, поэтому вероятность события $X < x$ для $x_2 < x \le x_3$ будет равна сумме вероятностей p_1 и p_1 и т.д. Нанося на график возможные дискретные значения случайной величины x и соответствующие суммы вероятностей, получаем ступенчатую фигуру, которая и является графиком функции распределения вероятностей (рис. 6.4.1).

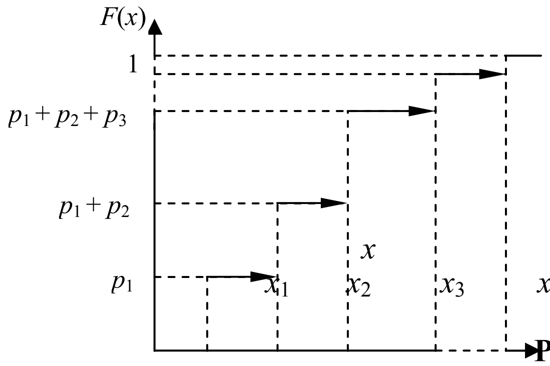


Рис. 6.4.1

6.4.3 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

В некоторых случаях целесообразно использовать не таблицу или функцию распределения для представления случайной величины, а так называемые числовые характеристики ее распределения, в частности математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие вероятности

$$M(X) = \mathrm{M_x} = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (6.12)$$

Математическое ожидание называют также средним значением случайной величины, учитывая то, что каждое возможное значение x_1 входит в выражение (6.12) с соответствующим «весом», которым и является вероятность p_i. В частном случае, когда все значения x_i равновероятны, т.е. $p_i = 1/n$, математическое ожидание будет равно среднему арифметическому всех возможных значений

$$M_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,.$$

Пример. В магазин ежедневно поступает не более пяти радиоприемников. Известны вероятности их поступления

$$p_0 = 0{,}1, \quad p_1 = 0{,}2, \quad p_2 = 0{,}1, \quad p_3 = 0{,}15, \quad p_4 = 0{,}2, \quad p_5 = 0{,}25.$$

Найти математическое ожидание числа поступлений радиоприемников.

Решение

Математическое ожидание

$$M_x = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}25 = 2{,}9.$$

Математическое ожидание случайной величины – это постоянная величина, которая показывает, какое значение случайной величины можно ожидать в среднем при проведении серии опытов.

Существует ряд свойств математического ожидания, которые формулируются в виде теорем.

Теорема 6.4.1 Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной.

Теорема 6.4.2 Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.
Прежде чем формулировать следующую теорему, дадим определение суммы случайных величин.

Суммой случайных величин X и Y называется новая случайная величина, обозначаемая $X + Y$, которая принимает все значения вида $x_i + y_j$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$) с вероятностями p_{ij} выражающими вероятность того, что случайная величина X принимает значение x_i, а случайная величина Y – значение y_j, т.е.

$$P_{ij} = P(X = x_i,\ \ Y = y_i) = P(X = x_i)\ P(Y = y_j\,/X = x_i).$$

Для удобства записи будем обозначать

$$P(X = x_i) = p_i;\ P(X = x_I\,/\ Y = y_j) = p_{i\,/j};$$

$$P(Y = y_j) = p_j;\ P(\mathrm{Y} = y_j\,/\ X = x_i) = p_{j/i}.$$

Для независимых случайных величин $p_{ij} = p_i\, p_j$.

Теорема 6.4.3 Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

Следствие Математическое ожидание отклонения случайной величины X от ее математического ожидания равно нулю.

Теорема 6.4.4 Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

Пример Пусть X и Y – независимые случайные величины с математическими ожиданиями $M(X)$ = 3, $M(Y) = 4$. Найти математическое ожидание случайной величины $2X + 3Y – 2XY$.

Р е ш е н и е. Используя свойства математического ожидания, находим

$$M(2X + 3Y - 2XY) = M(2X) + M(3Y) - M(2XY) = 2M(X) + 3M(Y) - 2M(X)M(Y) = = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = -6.$$

6.4.4 ДИСПЕРСИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Рассмотрим две дискретные случайные величины X и Y. Первая принимает значения –1 и 1 с вероятностями 0,5. Вторая принимает значения –5 и 5 с теми же вероятностями 0,5. Математические ожидания этих величин одинаковы и равны нулю

$$M(X) = -1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = 0$$

$$M(Y) = -5 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,5 = 0.$$

Однако очевидно, что вторая величина сильнее отклоняется от своего математического ожидания в конкретных реализациях, чем первая. Чтобы учесть и оценить эти отклонения, можно в качестве меры взять математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения ее от математического ожидания самой величины

$$D(X) = D_x = M(X - M_x)^2.$$

В рассмотренном выше случае

$$D_x = (-1)2 \cdot 0,5 + 1^2 \cdot 0,5 = 1,$$

$$D_y = (-5)^2 \cdot 0{,}5 + 5^2 \cdot 0{,}5 = 25.$$

Средним квадратичным отклонением случайной величины X называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсий

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}\ .$$

Так же как и для математического ожидания, свойства дисперсии обычно формулируются в виде теорем.

Теорема 6.4.5 Дисперсия постоянной величины равна нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматривая постоянную как случайную величину, замечаем, что отклонение ее от математического ожидания всегда равно нулю. Значит, и дисперсия равна нулю.

Теорема 6.4.6 Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его при этом в квадрат

$$D(kX) = k^2 D(X).$$

Теорема 6.4.7 Дисперсия случайной величины равна разности математического ожидания самой величины

$$D_x = M(X^2) - M_x^2.$$

Теорема 6.4.8 Дисперсия суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Пример. Дано следующее распределение дискретной случайной величины

X	1	2	4	5
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти ее дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Р е ш е н и е
Находим сначала математическое ожидание M_x и $M(X^2)$.

$$M_x = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5,$$

$$M(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}1 + 4^2 \cdot 0{,}4 + 5^2 \cdot 0{,}3 = 14{,}5.$$

Теперь определяем дисперсию и среднее квадратичное отклонение

$$D_x = M(X^2) - M_x^2 = 14{,}5 - 3{,}5^2 = 2{,}25,$$

$$\sigma_x = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5.$$

6.4.5 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ ЧИСЛА ПОЯВЛЕНИЙ СОБЫТИЯ В НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЯХ

Если вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания являются *независимыми.* Пусть эти вероятности одинаковы и равны p. Тогда вероятность ненаступления события A в испытании $q = 1 - p$.

Теорема 6.4.9 Математическое ожидание числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события A в каждом испытании.

Теорема 6.4.10 Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании

$$D_x = npq.$$

Пример. В пяти торговых точках проверяется годовой баланс. Вероятность правильного оформления баланса в каждой точке равна 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию правильно оформленных балансов.

Решение
Дано: $n = 5$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$.
Тогда

$$M_x = 5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5,$$

$$D_x = 5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 1{,}05.$$

6.4.6 НАЧАЛЬНЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ

Кроме математического ожидания и дисперсии, для оценки случайной величины используются и другие числовые характеристики. Все эти числовые характеристики носят общее название моментов случайной величины. Различают начальные и центральные моменты.

Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k.

$$\nu_k = M(X^k).$$

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - M_x)^k$

$$\mu_k = M(X - M_x)^k.$$

Начальный момент первого порядка

$$\nu_1 = M(X)$$

представляет математическое ожидание самой случайной величины X.

Центральный момент первого порядка равен нулю

$$\mu_1 = M(X - M_x) = 0.$$

Центральный момент второго порядка представляет собой дисперсию случайной величины

$$\mu_2 = M(X - M_x)^2 = D_x.$$

Для дискретных случайных величин

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i; \qquad \mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M_x)^k p_i .$$

Пример. Среднее число инкассаторов, прибывающих утром на автомобиле в банк в 15-минутный интервал, равно 2. Прибытие инкассаторов происходит случайно и независимо друг от друга.

1) Составьте ряд распределения числа инкассаторов, прибывающих утром на автомобиле в банк в течение 15 мин.

2) Найдите числовые характеристики этого распределения.

3) Напишите функцию распределения числа инкассаторов прибывающих утром на автомобиле в банк в течение 15 мин, и постройте ее график.

4) Определите, чему равна вероятность того, что в течение 15 мин в банк прибудут хотя бы 2 инкассатора.

5) Определите верность того, что в течение 15 мин число прибывших инкассаторов окажется меньше 3.

Решение. Пусть X – число инкассаторов, прибывающих утром на автомобиле в банк в 15-минутный интервал. Все возможные значения случайной величины X: 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, n.

Это дискретная случайная величина.

По условию, прибытие инкассаторов происходит случайно и независимо друг от друга. Следовательно, мы имеем дело с независимыми испытаниями.

Если мы предложим, что вероятность прибытия инкассаторов на автомобиле одинакова в любые 2 периода времени равной длины и что прибытие или неприбытие автомобиля в любой период времени не зависит от прибытия или неприбытия в любой другой период времени, то последовательность прибытия инкассаторов в банк может быть описана распределением Пуассона.

Если число испытаний велико, а вероятность события p в каждом испытании очень мала, то используется Пуассоновское распределение

$$P = \lambda^m e^{-\lambda}/m!,$$

где m – число появлений события в n независимых испытаниях

$$\Lambda = np.$$

Распределение Пуассона часто используется, когда мы имеем дело с числом событий, появляющихся в промежутке времени или пространства. Например, число машин, прибывших на автомойку в течение часа, число остановок станков в неделю, число дорожных происшествий.

Закон распределения Пуассона

m	0	1	2	…	m	…	n
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\lambda^2 e^{-\lambda}/2!$	…	$\lambda^m e^{-\lambda}/m!$	…	$\lambda^n e^{-\lambda}/n!$

$$M(X) = D(X) = \lambda.$$

По условию задачи $\lambda = np = 2$; $X = m$.

1) Составим ряд распределения.

Вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений, и запишем полученные результаты в таблицу.

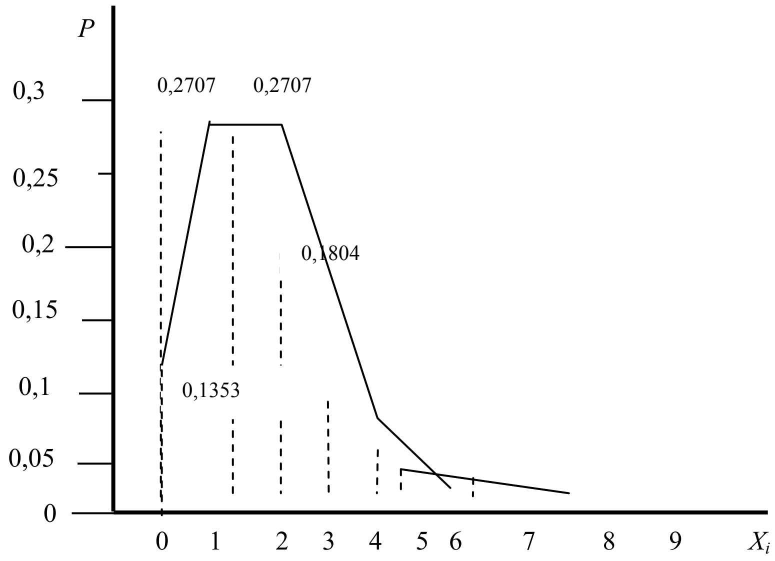
$$P(X = 0) = 2^0 e^{-2}/0! = 0{,}1353.$$

Однако расчет вероятностей распределения Пуассона легче осуществлять, пользуясь специальными таблицами вероятностей распределения Пуассона. В этих таблицах содержатся значения вероятностей при заданных m и λ.

Воспользуемся таблицей распределения Пуассона.

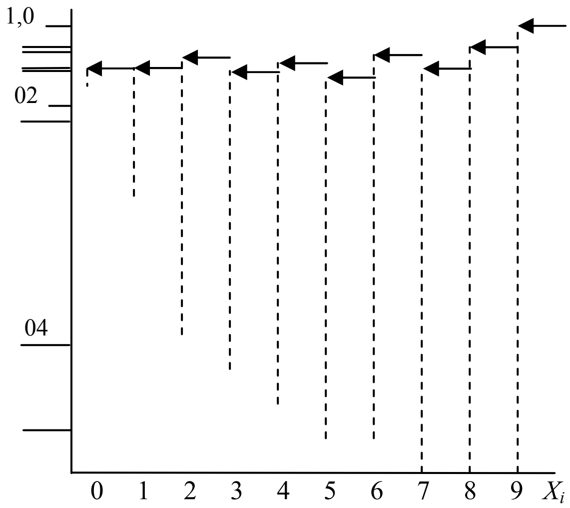
P	$P(X)$	P	$P(X)$
0	0,1315	5	0,0361
1	0,2707	6	0,0120
2	0,2707	7	0,0034
3	0,1804	8	0,0009
4	0,0902	9	0,0002

График полученного ряда распределения дискретной случайной величины X – полигон распределения вероятностей.



2) Найдем основные числовые характеристики полученного распределения случайной величины X.
Математическое ожидание $M(X = m) = np = \lambda$.
$M(X = m) = 2$ (инкассатора).
Дисперсия $D(X = m) = \lambda = 2$.
Зададим теперь дискретную случайную величину в виде функции распределения.
$F(X = m) = P(X < x) = \Sigma 2^m e^{-2}/m!$, где суммирование по i, x_i меньше x.

X	$F(X)$
$x <= 0$	0
$x <= 1$	0,1353
$x <= 2$	0,4060
$x <= 3$	0,6767
$x <= 4$	0,8571
$x <= 5$	0,9473
$x <= 6$	0,9834
$x <= 7$	0,9954
$x <= 8$	0,9988
$x <= 9$	0,9997
$x > 9$	1



3) Определим вероятность того, что в течение 15 мин в банк прибудут хотя бы 2 инкассатора. «Хотя бы 2» – это значит «или 2, или 3, или 4, или ...»

$$P(X >= 2) = 1 - P(X <= 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 0,594.$$

Определим вероятность того, что в течение 15 мин число прибывших в банк инкассаторов окажется меньше 3.

$$P(X< 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,6767.$$

Ответ: 4) 0,594; 5) 0,6767.

6.5 Непрерывные случайные величины

6.5.1 ФУНКЦИЯ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. КВАНТИЛЬ

Непрерывная случайная величина, в отличие от дискретной, не может характеризоваться вероятностью ее конкретного значения, так как таких значений бесконечное множество.

Для характеристики непрерывной случайной величины используется **функция распределения вероятностей,** которая так же, как и для дискретной случайной величины, представляет собой вероятность события $X < x$

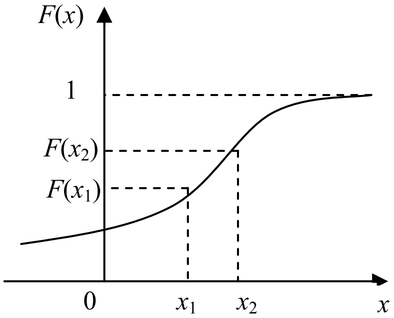


Рис. 6.5.1

$$F(x) = P(X < x).$$

Однако в отличие от дискретной случайной величины в данном случае X пробегает все непрерывное множество значений, а сама функция $F(x)$ возрастает монотонно. График такой функции часто имеет вид, представленный на рис. 6.5.1. Здесь предполагается, что x меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

В некоторых случаях на значения случайной величины могут быть наложены ограничения. Например, если случайная величина представляет собой время выполнения некоторой операции (T), то с учетом неравенства $T > 0$ функция распределения вероятностей будет располагаться лишь в правой полуплоскости.

Из рис. 6.5.1 видно, что вероятность события $X < x_2$ равна $F(x_2)$. Значит, вероятность того, что случайная величина X заключена между x_1 и x_2, равна разности соответствующих значений функции распределения

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Кроме функции распределения для непрерывных случайных величин вводится понятие плотности распределения вероятностей, или плотности вероятности.

Плотностью распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная от ее функции распределения вероятностей

$$f(x) = F'(x).$$

Значит, можно найти функцию распределения вероятностей, интегрируя плотность вероятности в общем случае от $-\infty$ до рассматриваемого значения x, т.е.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx\,.$$

Аналитические выражения для функций распределения вероятностей или плотности вероятности носят название *законов распределения.*

Для любого значения x на основании функции распределения

$$F(x) = P(X < x)$$

можно определить вероятность события $X < x$.

В некоторых случаях по заданной вероятности p требуется найти такие значения x_p, для которых выполняется равенство

$$F(x_p) = p. \tag{6.13}$$

Значение x_p, для которого равенство (6.13) выполняется, называется **квантилью**, отвечающей заданному уровню вероятности. Ее иногда называют 100-процентной квантилью.

6.5.2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ. МОДА И МЕДИАНА. МОМЕНТЫ

Для непрерывных случайных величин так же, как и для дискретных используются понятия математического ожидания и дисперсии.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется значение интеграла

$$M(X) = M_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \qquad (6.14)$$

где $f(x)$ – плотность вероятности.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называется значение интеграла

$$D(X) = D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^2 f(x)dx. \qquad (6.15)$$

Среднее квадратное отклонение случайной величины X вычисляется как корень квадратный из дисперсии

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Модой (Мо) непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, которому соответствует максимальное значение ее плотности вероятности.

Медианой (Ме) непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, которое определяется равенством

$$P(X < \mathrm{Me}(X)) = P(X > \mathrm{Me}(X)).$$

Основные свойства математического ожидания и дисперсии для непрерывных случайных величин остаются такими же, как и для дискретных случайных величин.

Начальные и центральные моменты для непрерывной случайной величины находятся по формулам

$$\nu_k = M(x^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(X)dx, \qquad (6.16)$$

$$\mu_k = M(X - M_x)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^k f(x)dx. \qquad (6.17)$$

Пример. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = 2x$ в интервале (0, 1), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение

Подставим в выражение математического ожидания

$$M_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

выражение плотности

$$M_x = \int_0^1 x \cdot 2xdx = 2\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Дисперсию найдем по формуле $D_x = M(X^2) - M_x^2$ или для непрерывных величин

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M_x^2.$$

Вычислим интеграл с учетом заданной плотности вероятности

$$\int_0^1 x^2 \cdot 2xdx = \left.\frac{2x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Откуда получим значение дисперсии

$$D_x = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

6.5.3 РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Непрерывная случайная величина считается **равномерно распределенной**, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le x_1; \\ \dfrac{1}{x_2 - x_1}, & \text{если } x_1 < x \le x_2; \\ 0, & \text{если } x > x^2. \end{cases} \tag{6.18}$$

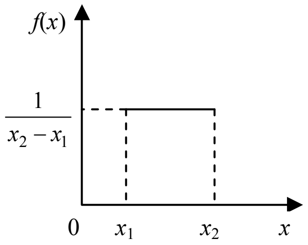


Рис. 6.5.2

График плотности вероятности равномерного распределения изображен на рис. 6.5.2.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей равномерное распределение,

$$M_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x}{x_2 - x_1} dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} \frac{1}{2} = \frac{x_2 + x_1}{2}.$$

Дисперсия может быть вычислена следующим образом:

$$D_x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2}{x_2 - x_1} dx - M_x^2 = \frac{1}{x_2 - x_1} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{x_1}^{x_2} - M_x^2 =$$

$$= \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} \frac{1}{3} - M_x^2 = \frac{1}{3}(x_1^2 + x x_2 + x_2^2) - \frac{(x_2 + x_1)^2}{4} =$$

$$= \frac{4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 3x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2}{12} = \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{12} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}.$$

Среднее квадратичное отклонение будет иметь вид

$$\sigma_x = \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}.$$

Пример. Случайная величина X распределена равномерно в интервале (2, 8). Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Р е ш е н и е

Используя формулы математического ожидания и дисперсии равномерно распределенной случайной величины, получаем

$$M_x = \frac{2 + 8}{2} = 5, \qquad D_x = \frac{(8 - 2)^2}{12} = 3.$$

6.5.4 ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Экспоненциальным (показательным) распределением непрерывной случайной величины X называется такое распределение, которое описывается следующим выражением для плотности вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{если } x \ge 0, \end{cases} \tag{6.19}$$

где λ – постоянная положительная величина.

Функция распределения вероятностей в этом случае имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{если } x \geq 0. \end{cases} \qquad (6.20)$$

График функции плотности вероятности для экспоненциального распределения представлен на рис. 6.5.3.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение, получаем на основании общей формулы с учетом того, что $f(x) = 0$ при $x < 0$:

$$M_x = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx .$$

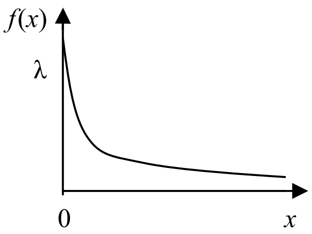


Рис. 6.5.3

Интегрируя это выражение по частям, находим

$$M_x = \frac{1}{\lambda}.$$

Дисперсию для экспоненциального распределения можно получить, используя выражение

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - M_x^2 .$$

Подставляя выражение для плотности вероятности, находим

$$D_x = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - M_x^2 .$$

Вычисляя интеграл по частям, получаем

$$D_x = \frac{1}{\lambda^2}.$$

6.5.5 НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ФУНКЦИЯ ЛАПЛАСА

Нормальным называется такое распределение случайной величины X, плотность вероятности которой описывается функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - M_x)^2}{2\sigma_x^2} \right), \qquad (6.21)$$

где σ_x и M_x – среднее квадратичное отклонение и математическое ожидание случайной величины.

Нормальный закон распределения называют так же законом Гаусса. График функции плотности вероятности нормального распределения представлен на рис. 6.5.4.

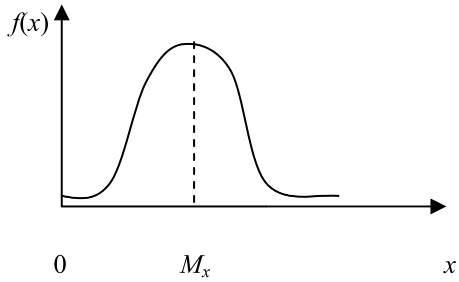


Рис. 6.5.4

В некоторых случаях приходится рассматривать распределения случайной величины, имеющие определенные отличия от нормального. Для оценки этого отличия введены специальные характеристики. К ним относятся, в частности, асимметрия и эксцесс.

Асимметрией распределения случайной величины называется отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратичного отклонения

$$\mathrm{As} = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}.$$

Графики функций плотности вероятности представлены на рис. 6.5.5, *а* (с положительной асимметрией) и на рис. 6.5.5, *б* (с отрицательной асимметрией).

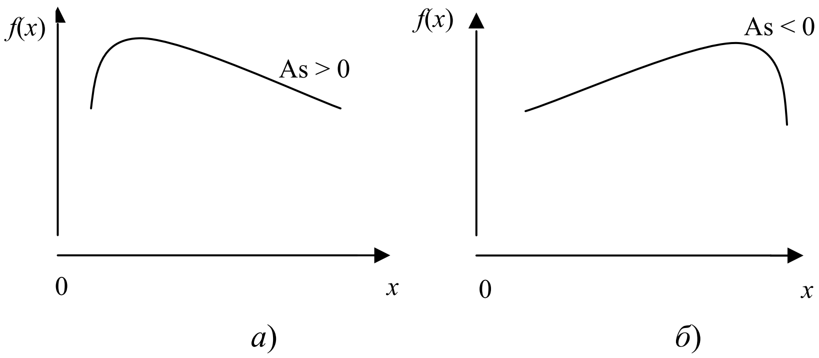


Рис. 6.5.5

Эксцессом распределения случайной величины называют число, определяемое выражением

$$\mathrm{Ek} = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3.$$

Для нормального распределения $\frac{\mu_4}{\sigma_x^4}-3$, поэтому эксцесс равен нулю.

Графики функции плотности вероятности с положительным и отрицательным эксцессом представлены на рис. 6.5.6. Для сравнения на рис. 6.5.5 изображены также кривые нормального распределения (штриховыми линиями).

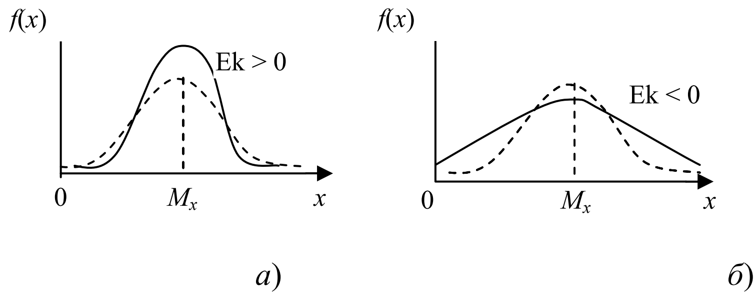


Рис. 6.5.6

Во многих практических заданиях требуется определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал. Эта вероятность может быть выражена в виде разности значений функции распределения вероятности в граничных точках этого интервала

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

В случае нормального распределения

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)dx.$$

Сделаем замену переменной

$$t = \frac{x - M_x}{\sigma_x}, \qquad x = t\sigma_x + M_x, \qquad dx = \sigma_x dt.$$

Тогда

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

где $z_1 = \frac{x_1 - M_x}{\sigma_x}$, $z_2 = \frac{x_2 - M_x}{\sigma_x}$.

Разобьем полученный интеграл на два

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{z_1}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_{0}^{z_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{0}^{z_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \int_{0}^{z_1} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right].$$

Интегралы от функции $e^{-\frac{t^2}{2}}$ нельзя выразить через элементарные функции, поэтому определяют их численные значения, которые помещают в специальные таблицы.

Интеграл вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{6.22}$$

носит название **нормированной функции Лапласа** или просто **функции Лапласа.**

Искомая вероятность через функцию Лапласа запишется в виде

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - M_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - M_x}{\sigma_x}\right). \tag{6.23}$$

Функция Лапласа является нечетной функцией, для нее $\Phi(-z) = -\Phi(z)$.

Примеры

1 Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно 10, а среднее квадратичное отклонение равно.

2 Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, лежащее в интервале (9, 12).

Р е ш е н и е

Воспользуемся формулой (6.23)

$$P(9 < \mathrm{X} < 12) = \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{9-10}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(1) + \Phi(0{,}5).$$

По таблице Лапласа находим

$$\Phi(1) = 0{,}3413, \qquad \Phi(0{,}5) = 0{,}1915.$$

Тогда $P\,(9 < X < 12) = 0{,}5328$.

Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно 18, а вероятность ее попадания в интервал (16, 20) равна 0,98. Найти среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Р е ш е н и е

Вероятность

$$P(16 < X < 20) = \Phi\left(\frac{20-18}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{16-18}{\sigma_x}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{2}{\sigma_x}\right).$$

Откуда $\Phi\left(\frac{2}{\sigma_x}\right) = 0{,}49$.

Найдем замечание аргумента z функции Лапласа. В нашем примере $z = \frac{2}{\sigma_x}$. Значит $\sigma_x = \frac{2}{2{,}33} = 0{,}86.$

6.6 Системы случайных величин

При исследовании случайных явлений часто приходится рассматривать одновременно несколько случайных величин. Их совокупность можно представить как многомерную случайную величину.

Пример. На фабрике в конце рабочего дня ежедневно фиксируются количество изготовленных стиральных машин X и пылесосов Y. Очевидно, что каждое наименование является случайной величиной, а вместе они образуют двумерную случайную величину (X, Y). Законом распределения такой величины является перечень пар чисел (x_i, y_j), где x_i и y_j (i = 1, 2, …, n; j = 1, 2, …, m) – возможные значения величин X и Y и вероятностей их совместного появления $P(x_i, y_j)$.

Эти значения можно внести в таблицу, которая носит название таблицы распределения двумерной случайно величины.

Таблица 6.1

Y	X			
	x_1	x_2	…	X_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	…	$p(x_n, y_1)$,
...	…	….	…	…
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	…	$p(x_n, y_m)$

Для непрерывной двумерной случайно величины функция распределения записывается в виде интеграла

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y) dx dy, \tag{6.24}$$

где $f(x, y)$ – плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины.

Функция распределения $F(x, y)$ представляет собой вероятность события ($X < x$, $Y < y$), т.е.

$$F(x, y) = (X < x,\ Y < y). \tag{6.25}$$

Вероятность совместного появления дискретных случайных величин x_i, y_j можно выразить в виде

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)\, p\ (y_j / x_i), \tag{6.26}$$

где $p(x_i, y_j)$ – условная вероятность.

Аналогично можно представить плотность распределения вероятностей для непрерывных величин

$$F(x, y) = f(x) f(\ y / x). \tag{6.27}$$

Практически важным при рассмотрении системы случайных величин является понятие условного математического ожидания.

Условным математическим ожиданием *дискретной* случайной величины Y при $X = x$ называют сумму произведений возможных значений Y на их условные вероятности

$$M\ (Y / X = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j / x). \tag{6.28}$$

Условное математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется интегралом

$$M(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y / x) dy. \tag{6.29}$$

Как видно из выражений для условных математических ожиданий, их значения являются функциями от x. Такую функцию называют **функцией регрессии** Y на X

$$M\ (Y/X = x) = M(Y / x) = \varphi\ (x).$$

Аналогично определяется функция регрессии X на Y

$$M\ (X / Y = y) = M(X / y) = \varphi\ (y). \tag{6.30}$$

Если на плоскости в системе Оху отметить значения случайного вектора (X, Y), то получим множество случайно расположенных точек.

Для каждого фиксированного значения $x = x_i$ величина Y является случайной. Ее математическое ожидание представляет собой условное математическое ожидание $M(Y / x_i)$. Задавая различные значения x, можно построить *кривую регрессии* Y на X.

Ковариацией, или **корреляционным моментом**, случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин от их математических ожиданий, т.е. смешанный центральный момент второго порядка

$$\mu_{xy} = M((X - M_x)(Y - M_y)). \tag{6.31}$$

Для дискретных случайных величин ковариация принимает вид

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - M_x)(y_j - M_y)p(x_i, y_j). \tag{6.32}$$

Для непрерывных случайных величин она записывается через интеграл

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - M_x)(y - M_y)p(x, y)dxdy. \tag{6.33}$$

Ковариацию можно представить в виде

$$\mu_{xy} = M(XY - M_xY - M_yY + M_xM_y) = M(XY) - M_xM_y - M_yM_x + M_xM_y$$

или

$$\mu_{xy} = M(XY) - M_xM_y. \tag{6.34}$$

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называют отношение ковариации к произведении средних квадратичных отклонений этих величин

$$r_{xy} = \frac{\mu_{чн}}{\sigma_ч\sigma_н}, \tag{6.35}$$

где $-1 \le r_{xy} \le 1$.

Две случайные величины называют **коррелированными,** если их ковариация или коэффициент корреляции отличны от нуля, и некоррелированными, если они равны нулю.

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y). Предположим, что некоторая величина $\overline{Y}$ приближенно представляет величину Y и может быть записана как функция от X, чаще всего в виде линейной зависимости.

$$\overline{Y} = g(X) = \alpha(X) + \beta, \tag{6.36}$$

где α и β – неизвестные пока параметры.

Требуется так подобрать параметры α и β, чтобы функция $g(X)$ была наилучшим приближением к случайным значениям Y.

В качестве меры отклонения множества случайных значений величины Y от значений $\overline{Y}$ можно взять математическое ожидание квадрата разности $Y - \overline{Y}$, т.е. $M(Y - g(X))^2$.

Минимизация этого выражения позволяет получить соотношения для определения параметров α и β. Полученную таким способом функцию $g(X) = \alpha X + \beta$ называют наилучшим приближением Y по методу наименьших квадратов, а функцию $y_x = M(Y/X = x) = \alpha x + \beta$ называют линейной средней квадратической регрессией Y на X.

Теорема 6.6.1 Линейная средняя квадратическая регрессия Y и X имеет вид

$$y_x = r_{xy}\sigma_y\frac{x - m_x}{\sigma_x} + m_y, \tag{6.37}$$

где $\sigma_x = \sqrt{D_x}$, $\sigma_y = \sqrt{D_y}$, $r_{xy} = \dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$, $m_x = M(X)$, $m_y = M(Y)$.

Пример. Найти линейную среднюю квадратическую регрессию Y при следующих исходных данных: математическое ожидание $m_x = 3$, $m_y = 6$, ковариация $\mu_{xy} = -10$, средние квадратичные отклонения $\sigma_x = 5$, $\sigma_y = 8$.

Р е ш е н и е

Находим коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{x - m_x}{\sigma_x} = -\frac{10}{5\cdot 8} = -0{,}25.$$

Подставим все известные значения в выражение (6.37)

$$Y_x = -\frac{0{,}25 \cdot 8(x-3)}{5} + 6 = -0{,}4x + 7{,}2.$$

6.7 Предельные теоремы теории вероятностей

Под законом больших чисел в теории вероятностей понимается ряд теорем, в каждом из которых устанавливается факт асимптотического приближения среднего значения большого числа опытных данных к математическому ожиданию случайной величины.

В основе доказательства этих теорем лежит неравенство, установленное известным русским математиком Чебышевым. Это неравенство можно получить, рассматривая дискретную случайную величину, имеющую n возможных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Дисперсия такой величины

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M_x)^2 p_i . \tag{6.38}$$

Пусть α – любое положительное число. Исключим из суммы (6.38) все члены, для которых $| x_i - M_x | \le \alpha$.

В этом случае сумма уменьшится

$$D_x > \sum_{j=1}^{k} (xj - M_x)^2 p_j , \tag{6.39}$$

где $k < n$.

Если теперь в правой части неравенства (6.39) все значения $(x_j - M_x)$ заменить на меньшее значение α^2, то неравенство усилится

$$D_x > \alpha^2 \sum_{j=1}^{k} p_j . \tag{6.40}$$

В неравенстве (6.40) p_j – это вероятности таких значений x_j, для которых $| x_j - M_x| > \alpha$, а вся сумма $\sum_{j=1}^{k} p_j$ представляет собой вероятность того, что случайная величина $| X - M_x|$ больше α, т.е.

$$D_x > \alpha^2 P\ (| X - M_x| > \alpha).$$

Откуда

$$P(|X - M_x| > \alpha) < \frac{D_x}{\alpha^2} . \tag{6.41}$$

Неравенство (6.41) называется неравенством Чебышева. Это неравенство позволяет оценить вероятность того, что $|X - M_x| > \alpha$.

З а м е ч а н и е. Если рассмотреть противоположное событие $|X - M_x| < \alpha$, то вероятность такого события

$$P(| X - M_x| < \alpha) > 1 - \frac{D_x}{\alpha^2} . \tag{6.42}$$

Неравенство (6.42) используется, в частности, для доказательства теоремы Чебышева.

Теорема 6.7.1 (теорема Чебышева). Пусть имеется конечная последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимых случайных величин с одним и тем же математическим ожиданием m и дисперсиями, ограниченными одной и той же постоянной C

$$M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_n) = m,$$

$$D(X_1) \le C, \quad D(X_2) \le C, \ldots, \quad D(X_n) \le C.$$

Тогда каково бы ни было положительное число α, вероятность события

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - m \right| < \alpha$$

стремится к единице при $n \to \infty$.

Теорема Чебышева устанавливает связь между теорией вероятностей, которая рассматривает средние характеристики всего множества значений случайной величины, и математической статистикой, оперирующей ограниченным множеством значений этой величины. Она показывает, что при достаточно большом числе измерений некоторой случайной величины среднее арифметическое значений этих измерений приближается к математическому ожиданию.

Многие непрерывные случайные величины имеют нормальное распределение. Это обстоятельство во многом определяется тем, что суммирование большого числа случайных величин с самыми разными законами распределения приводит к нормальному распределению этой суммы.

Указанное свойство подтверждается доказанной русским математиком Ляпуновым интегральной предельной теоремой. Приведем эту теорему без доказательства.

Теорема 6.7.2

Центральная предельная теорема.

Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, $M\ \xi_i = m$; $D\ \xi_i = \sigma^2$. Тогда выполняется следующее: $P[(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) - nm/\sigma n^{1/2} < x] \to \Phi(x)$ при $n \to$ бесконечн., где $\Phi(x) = 1/(2\pi)^{1/2} \int e\text{^}(-y^2/2)dy$.

П р и м е ч а н и е

1) Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

2) Для расчета вероятности попадания нормально распределенной случайной величины ξ в промежуток от α до β используется формула

$$P(X < \xi < \beta) = \Phi[(\beta - a)/\sigma] - \Phi[(\alpha - a) / \sigma].$$

Пример. На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения, $a = 950$ кг, $\sigma = 150$кг.

Определите вероятность того, что вес случайно отобранной туши

а) окажется больше 1250 кг;

б) отклонится от математического ожидания меньше, чем за 50 кг.

Р е ш е н и е

а) Вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется больше 1250 кг, можно понимать как вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется в интервале от 1250 кг до бесконечности.

$$\Phi(X > 1250) = \Phi(\text{бескон.}) - \Phi[(1250 - 950) / 150].$$

Найдем по таблице функции Лапласа значение $\Phi(z)$.

Φ(бескон.) – величина, близкая к 0,5.

$\Phi(2) = 0{,}47725$.

Отсюда $P(X > 1250) = 0{,}5 - 0{,}47725 = 0{,}02275$.

б) Найдем вероятность того, что вес случайно отобранной туши отклонится от математического ожидания меньше, чем на 50 кг, т.е.

$$P(|\ X - 950| < 50) = P(900 < X < 1000) =$$

$$= \Phi[(1000 - 950)/150] - \Phi[(900 - 950)/150] = \Phi(0{,}33) - \Phi(-0{,}33)$$

$$\Phi(-z) = -\Phi(z).$$

$$\Phi(0{,}33) = 0{,}1293.$$

Следовательно, $P(|X - 950| < 50) = 0{,}2586$.

Ответ: а) 0,02275; б) 0,2586.

Центральная предельная теорема имеет огромное значение для практики.

Допустим, определяется некоторый экономический показатель, например потребление электроэнергии в городе за год. Величина суммарного потребления складывается из потребления энергии отдельными потребителями, которое имеет случайные значения с разными распределениями. Теорема утверждает, что в отдельном случае, какое бы распределение ни имели отдельные составляющие, распределение результирующего потребления будет близко к нормальному.

Однако следует иметь в виду, что при усилении влияния отдельных факторов могут появляться отклонения от нормального распределения результирующего параметра, например может возникать асимметрия или эксцесс. Поэтому большое значение на практике уделяется экспериментальной проверке выдвинутых гипотез, в том числе и гипотезы о нормальном распределении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 *Ермаков В.И.* Общий курс высшей математики для экономистов: Учеб. для экон. спец. вузов / Под ред. В.И. Ермакова. М.: ИНФРА-М., 1999. 656 с.

2 *Зайцев М.В.* Прикладная математика: Сб. задач: В 2 ч. / М.В. Зайцев, А.А. Беляев. М.: Изд-во МГУК, 199. 32 с.

3 *Плотникова С.В.* Математика в экономике: Метод. разработки и контр. задания / С.В. Плотникова. Тамбов: Изд-во Тамб.гос. техн. ун-та, 1997. 52 с.

4 *Матвеев В.И.* Курс линейного программирования: Учеб. пособие / В.И. Матвеев, Р.В. Сачитов, В.Г. Шершнев. М.: Изд-во «Менеджер», 1998. 102 с.

5 *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. М.: Изд-во «Высшая школа», 1977. 360 с.

6 *Гнеденко Б.В.* Элементарное введение в теорию вероятностей / Б.В. Гнеденко, А.Я. Хинчан. М.: Изд-во «Наука», 1976. 180 с.

7 *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей / В.П. Чистяков. М.: Изд-во «Наука», 1982. 380 с.