ФИЗИКА

Часть 1

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. ЕГО СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ

♦ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ♦

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

ФИЗИКА

Часть 1

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. ЕГО СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ

Конспект лекций

Тамбов
Издательство ТГТУ
2005

УДК 535. 338(0765)
ББК В36я73-5
Б261

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент
В.М. Иванов

Автор-составитель

В.И. Барсуков

Б261 Физика. Электростатическое поле. Его свойства и характеристики : конспект лекций / авт.-сост. В.И. Барсуков. Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. Ч. 1. 64 с.

Представляет собой конспект лекций по разделу «Электромагнетизм» курса общей физики, читаемого в соответствии с Государственным стандартом для высших технических учебных заведений.

Предназначен для студентов первых курсов всех специальностей инженерного профиля дневной и заочной форм обучения.

УДК 535. 338(0765)
ББК В36я73-5

Учебное издание

ФИЗИКА

Часть 1

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ,
ЕГО СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ

Конспект лекций

Автор-составитель
БАРСУКОВ Владимир Иванович

Редактор Т.М. Г л и н к и н а
Инженер по компьютерному макетированию Т.А. С ы н к о в а

Подписано к печати 6.05.2005.
Формат 60 × 84 / 16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Объем: 3,72 усл. печ. л.; 3,8 уч.-изд. л.
Тираж 150 экз. С. 320^{М}

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

1 ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ – МАТЕРИАЛЬНЫЙ НОСИТЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

1 В основе учения об электричестве лежит представление об *электромагнитном поле*.

Напомним, что термин «поле» в физике применяется для обозначения нескольких различных по своему содержанию понятий.

Во-первых, словом «поле» характеризуют пространственное распределение какой-либо физической величины, векторной или скалярной. Изучая, например, тепловое состояние в различных точках среды, говорят о скалярном поле температур, рассматривая процесс распространения механических колебаний в упругой среде, говорят о механическом волновом поле и т.д. В этих примерах термин «поле» описывает физическое состояние изучаемой материальной среды.

Во-вторых, полем называют особый вид материи. Понятие поля как особого вида материи возникло в связи с проблемой взаимодействия. Как передается действие сил – мгновенно или с конечной скоростью, через посредство промежуточной среды или без ее участия?

Теория, утверждающая, что действие сил передается через пустоту мгновенно, носит название теории дальнодействия.

Теория, утверждающая, что действие сил передается с конечной скоростью через посредство промежуточной материальной среды, называется теорией близкодействия.

Современная физика признает только близкодействие и отвергает дальнодействие.

2 Как уже говорилось ранее (в механике), в настоящее время известны следующие типы взаимодействия: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое.

Каждый тип взаимодействия с механической точки зрения характеризуют соответствующие силы: гравитационные, электромагнитные, ядерные.

Передачу того или иного взаимодействия, передачу сил современная физика мыслит как процесс распространения возмущений соответствующего поля, связанного с взаимодействующими объектами.

Электромагнитное поле – это особый вид материи, посредством которого осуществляется электромагнитное взаимодействие между частицами, обладающими электрическим зарядом.

Говоря кратко, это особый вид материи, передающий действие электромагнитных сил.

Электромагнитное поле отличается непрерывным распределением в пространстве (доказательством тому служит существование электромагнитных волн). Вместе с тем, электромагнитное поле обнаруживает дискретность структуры, о чем говорит существование *фотонов*. Электромагнитное поле обладает способностью распространяться в вакууме со скоростью $3 \cdot 10^8$ м/с и оказывать на заряженные частицы силовое воздействие, зависящее от их заряда и скорости.

Опытом установлено, что электромагнитное поле обладает массой, энергией, импульсом и т.д. Все это – неоспоримые доказательства физической реальности этого вида материи.

3 При исследовании электромагнитного поля обнаруживаются два его проявления, две неразрывно связанные стороны – электрическое и магнитное поля.

Электрическое поле – одна из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная электрическими зарядами и изменением магнитного поля и передающая действие электрических сил.

Электрическая сила – одна из двух составляющих электромагнитной силы. Величина и направление ее зависят от положения заряженного тела или частицы в электромагнитном поле.

Выявляется электрическое поле по силовому воздействию на неподвижные заряженные тела или частицы (хотя оно действует и на движущиеся заряженные частицы и тела).

Магнитное поле – одна из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная движением электрических зарядов и изменением электрического поля и передающая действие магнитных сил.

Магнитная сила **– другая составляющая электромагнитной силы. Особенностью этой силы является то, что она действует только на движущиеся заряды, ее величина и направление зависят от скорости движения заряженных частиц относительно электромагнитного поля.**

Обнаруживается магнитное поле по силовому воздействию на движущиеся заряженные тела или частицы, направленному нормально к направлению движения этих тел и частиц.

4 Электрические и магнитные явления обычно рассматриваются раздельно, хотя в действительности «чисто» электрических или «чисто» магнитных явлений не существует. Существует единый электромагнитный процесс. В связи с этим разделение электромагнитного взаимодействия на электрическое и магнитное, разделение единых электромагнитных сил на электрические и магнитные носит условный характер, и эта условность легко может быть доказана. Столь же условна и сама терминология – «элек-

трические», «магнитные» силы. Поэтому в последующем, как правило, будем говорить просто о силе, действующей на тот или иной заряд, не называя ее электрической или магнитной.

2 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ

1 *Электрический заряд* – неотъемлемое свойство, присущее некоторым «простейшим» частицам материи – так называемым «элементарным» частицам. Электрический заряд вместе с массой, энергией, спином и т.д. образуют «комплекс» фундаментальных свойств частиц.

Из известных в настоящее время элементарных частиц электрическим зарядом обладают электроны, позитроны, протоны, антипротоны, некоторые мезоны и гипероны и их античастицы. Не обладают электрическим зарядом нейтроны, нейтрино, нейтральные мезоны и гипероны и их античастицы, а также фотоны.

2 Известны только два рода электрических зарядов, условно называемых положительными и отрицательными (термины «положительное» и «отрицательное» электричество впервые введены В. Франклином (США) в XVIII в.).

3 Многочисленными опытами установлено, что абсолютная величина заряда всех заряженных элементарных частиц одинакова и равна $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Этот минимальный электрический заряд (положительный или отрицательный) называется элементарным зарядом или атомом электричества.

Любой заряд q состоит из целого числа элементарных зарядов:

$$q = \pm eN,$$

где e – абсолютная величина заряда; N – любое целое положительное число (1, 2, 3, …).

Изменение любого заряда может происходить только скачком, сразу на величину одного или нескольких элементарных зарядов.

Идея о дискретном, атомистическом строении электричества была выдвинута В. Вебером и Г. Гельмгольцем (Германия) во второй половине XIX в. Опытным обоснованием этой идеи было открытие законов электролиза (М. Фарадей, Англия) и исследование свойств катодных и анодных лучей (Крукс, Англия).

4 Если заряд q содержит весьма большое число элементарных зарядов, его называют макроскопическим. Изменение такого заряда можно считать непрерывным, так как элементарный заряд по сравнению с ним весьма мал.

5 Прямое экспериментальное определение величины элементарного заряда (заряда электрона) было впервые осуществлено в 1909 – 1914 гг. Р.Э. Милликеном (США) и А.Ф. Иоффе (Россия). После опытов Милликена и Иоффе была отвергнута выдвинутая было гипотеза о существовании субэлектронов, т.е. зарядов, меньших заряда электрона.

6 Электрический заряд неотделим от частиц, которым он принадлежит. Неуничтожимость материи влечет за собой неуничтожимость электрического заряда. К известным из механики и теоретической механики законам сохранения массы, импульса, момента импульса, энергии следует добавить **закон сохранения электрического заряда: в замкнутой системе тел или частиц алгебраическая сумма зарядов есть величина постоянная, какие бы процессы не происходили в системе**. Закон сохранения заряда был установлен экспериментально Ф. Эпинусом (Россия) и М. Фарадеем (Англия).

7 Все элементарные заряженные частицы всегда находятся в состоянии движения. Рассматриваемые в электростатике «неподвижные» заряды есть результат макроскопического усреднения: если геометрическая сумма скоростей всех элементарных зарядов, образующих данный макроскопический заряд q, в среднем равна нулю, то такой заряд проявляет себя в окружающем пространстве как «неподвижный».

8 Элементарные заряды, имеющиеся в телах, будем называть свободными, если заряженные частицы могут перемещаться по всему объему тела, и связанными, если они прочно связаны со своими атомами или молекулами.

9 Макроскопический заряд будем называть свободным, если он состоит из свободных элементарных зарядов, и связанным, если он состоит из связанных элементарных зарядов.

10 С движением любого элементарного заряда связано наличие электромагнитного микрополя. Электрическое и магнитное поля, изучаемые электростатикой и макроскопической электродинамикой, являются усредненными: они представляют собой наложение (суперпозицию) микрополей, создаваемую большой совокупностью движущихся элементарных зарядов.

Опыт показывает, что усредненное электрическое поле может быть отлично от нуля не только тогда, когда его «источник» – макрозаряд неподвижен, но и тогда, когда он движется. Усредненное магнитное поле отлично от нуля только тогда, когда создающий его макрозаряд находится в движении. Если макрозаряд неподвижен, то магнитные поля элементарных зарядов компенсируют друг друга, поэтому суммарное магнитное поле не обнаруживается и наблюдаемые явления выглядят как «чисто» электрические.

11 Предметом электростатики является изучение взаимодействия макроскопических зарядов, находящихся в условии равновесия, а также свойств электрических полей, связанных с такими зарядами. Электрические поля, связанные с неподвижными зарядами, называются электростатическими, а электрические силы, характеризующие взаимодействие таких зарядов, – электростатическими или кулоновскими.

ЗАКОН КУЛОНА

3 Закон Кулона

1 Наличие у тела электрического заряда проявляется в том, что такое тело оказывает (через посредство электрического поля) силовое воздействие на другие заряженные тела.

Французский ученый Ш. Кулон установил (1785 г.) закон взаимодействия неподвижных точечных электрических зарядов.

Заряд называется точечным, если размеры тела, обладающего этим зарядом, малы по сравнению с расстояниями до других заряженных тел.

Согласно закону Кулона **сила электростатического взаимодействия между двумя точечными зарядами в вакууме прямо пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по прямой, соединяющей эти заряды**:

$$F_0 = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}, \tag{3.1}$$

где q_1 и q_2 – величины зарядов; r_{12}^2 – расстояние между ними; k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения q, F, r_{12}.

2 Сила взаимодействующих зарядов в безгранично однородной и изотропной среде уменьшается в ε раз:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r_{12}^2}, \tag{3.2}$$

ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды, показывающая во сколько раз уменьшается силовое взаимодействие зарядов в среде по сравнению с взаимодействием этих же зарядов в вакууме:

$$\varepsilon = \frac{F_0}{F}.$$

3 Чтобы формуле Кулона придать векторный вид, правую часть (3.2) надо умножить на единичный вектор $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$:

$$\vec{F}_{12} = -k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}; \tag{3.3}$$

$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \tag{3.4}$$

где $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на первый заряд со стороны второго; $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на второй заряд со стороны первого; $\vec{r}_{12}$ – вектор, проведенный от первого заряда ко второму.

Направления силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ на рис. 1 и знаки «минус» и «плюс» в формулах (3.3), (3.4) соответствуют одноименным зарядам.

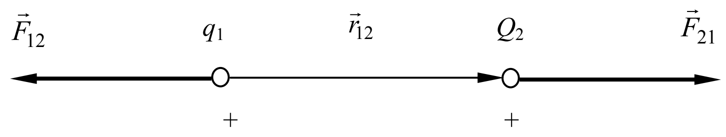


Рис. 1

Как видно из формул (3.3) и (3.4), направление $\vec{F}_{21}$ совпадает с направлением $\vec{r}_{12}$, а направление $\vec{F}_{12}$ противоположно $\vec{r}_{12}$.

Напомним, что силы притяжения принято считать отрицательными, а силы отталкивания – положительными.

На рис. 2 изображена зависимость силы взаимодействия одноименных (кривая *а*) и разноименных (кривая *б*) точечных зарядов.

4 Закон Кулона выражает силу взаимодействия между неподвижными электрическими зарядами, т.е. является, в сущности, электростатическим законом. Для движущихся зарядов этот закон перестает быть точным.

5 Силы электростатического взаимодействия подчиняются третьему закону Ньютона: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

6 Нетрудно подметить формальную аналогию между законом Кулона и законом всемирного тяготения Ньютона. И электрические, и гравитационные силы являются центральными – направлены по прямой, соединяющей взаимодействующие тела. И те, и другие силы обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними. Однако между этими законами есть и принципиальное различие: электростатические силы могут быть как силами притяжения, так и силами отталкивания, гравитационные – только притяжения; на электростатическое взаимодействие существенное влияние оказывает среда, на гравитационное – нет.

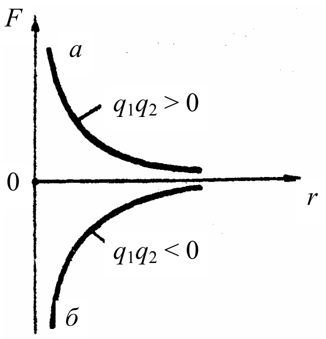


Рис. 2

7 Закон Кулона справедлив только для точечных зарядов. Чтобы вычислить силу взаимодействия между зарядами q_1 и q_2, сосредоточенными на телах конечных размеров, поступают следующим образом. Каждый из зарядов разбивают на столь малые порции dq, что их можно считать точечными, затем по формуле (3.4) находят силы взаимодействия между всеми парами, после чего геометрически складывают эти силы:

$$\vec{F}_{21} = \int d\vec{F}_{ki}\,, \qquad (3.5)$$

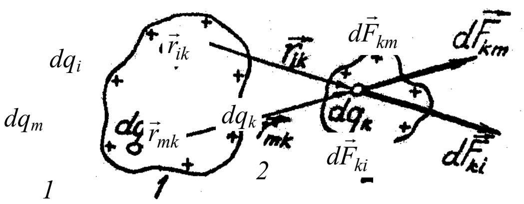
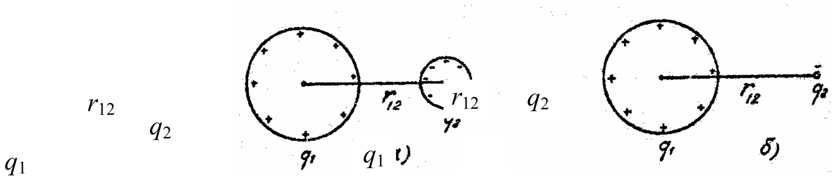


Рис. 3

здесь $d\vec{F}_{ki} = k\dfrac{q_i\, q_k}{\varepsilon\, r_{ik}^2}\dfrac{\vec{r}_{ik}}{r_{ik}}$ – сила, с которой i-й заряд первого тела действует на k-й заряд второго тела (рис. 3), а $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на второе тело со стороны первого.

Можно показать теоретически и убедиться на опыте, что если заряды распределены равномерно по поверхности или объему тел сферической формы, то сила электростатического взаимодействия между ними такова, как если бы заряды были сосредоточены в геометрических центрах этих тел. В этом случае силу можно рассчитывать по закону Кулона (3.2), понимая под r_{12} расстояние между центрами сфер (рис. 4, *а*).

Наконец, формулу Кулона (3.2) можно применять в случае, когда один из зарядов точный, а другой сосредоточен на сфере и распределен по ней равномерно (рис. 4, *б*).



а) *б*)

Рис. 4

4 СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ В ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ. Рационализация формул

1 Единица измерения заряда может быть установлена на основе закона Кулона, а может быть введена независимо от него.

Если единица заряда устанавливается из закона Кулона, то ее разумно выбрать такой, чтобы коэффициент пропорциональности в формуле (3.1) оказался равным 1 (при этом используются единицы силы и расстояния, установленные в механике).

Если единицей силы является дина, расстояния – сантиметр, то единица заряда, соответствующая k = 1 в законе Кулона, называется абсолютной электростатической единицей заряда (сокращенное обозначение СГСЭq).

Абсолютная электростатическая единица заряда – это такой заряд, который действует на равный ему заряд, расположенный на расстоянии 1 см в вакууме, с силой в 1 дину.

Система единиц, в которой за основные единицы приняты сантиметр, грамм, секунда и в которой заряд измеряется в абсолютных электростатических единицах, называется СГСЭ-системой (абсолютной электростатической системой).

Закон Кулона в системе СГСЭ имеет вид:

$$F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}. \qquad (4.1)$$

2 В системе СИ единица заряда, называемая кулоном, устанавливается не из закона Кулона, а из других закономерностей.

Кулон определяется через четвертую основную единицу системы СИ: единицу тока – ампер (напомним, что первыми тремя основными единицами этой системы являются метр, килограмм, секунда). Определяющим уровнем для единицы заряда в системе СИ является выражение $q = It$.

Кулон (Кл) – заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за 1 с при токе в проводнике, равном 1 А:

1 Кл = 1 А · 1с.

Определение ампера будет дано позднее.

Опытом установлено, что

$$1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ}q.$$

3 Введение единицы заряда в системе СИ независимо от закона Кулона приводит к тому, что в формуле (3.2) сохраняется размерный коэффициент пропорциональности k :

$$F = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}. \qquad (4.2)$$

Как видно из этой формулы, коэффициент k в системе СИ численно равен силе, с которой взаимодействовали бы в вакууме два точечных заряда величиной по 1 кулону каждый, расположенные на расстоянии 1 м друг от друга, т.е. если $q_1 = q_2 = 1$ Кл, $r = 1$ м, $\varepsilon = 1$, то $|k| = |F|$.

Коэффициент k может быть найден из опыта. Для этого необходимо измерить силу F, с которой взаимодействуют два точечных заряда q_1 и q_2, расположенных на некотором расстоянии r друг от друга в вакууме (практически в воздухе или, лучше, молекулярном вакууме). Не следует думать при этом, что заряды обязательно должны быть единичными (кстати, заряд в 1 Кл не удержится даже на шаре радиусом несколько метров: он пробьет любую изоляцию!), что расстояние между зарядами должно быть 1 м. И заряды, и расстояния, в принципе, могут быть любыми.

Подставив F (в ньютонах), q_1 и q_2 (в кулонах) и r (в метрах) в формулу (4.2), можно вычислить k. Многочисленные измерения дают для k значение:

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Таким образом, при вычислении силы взаимодействия зарядов в системе СИ можно пользоваться формулой (4.2), понимая под $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$.

4 Было замечено, что во многие важные формулы электродинамики входит множитель 4π, делающий расчеты неудобными. Чтобы избавиться от этого множителя в наиболее важных формулах, О. Хевисайд (Англия) предложил ввести его искусственно в закон Кулона, представив коэффициент пропорциональности k в виде произведения двух сомножителей – безразмерного $\frac{1}{4\pi}$ и размерного $\frac{1}{\varepsilon_0}$:

$$k = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon_0}, \tag{4.3}$$

где ε_0 – новый коэффициент пропорциональности, называемый электрической постоянной.

Тогда закон Кулона в системе СИ примет вид:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}. \tag{4.4}$$

5 Введение в закон Кулона вместо коэффициента k равного ему коэффициента $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ видоизменяет все формулы электростатики: из наиболее употребительных формул множитель 4π исчезает (в результате сокращения), и это делает формулы более простыми, в других же формулах, наоборот, он появляется, что, к сожалению, приводит к усложнению их вида.

«Исправленные» указанным образом формулы называются рационализированными, а система единиц, построенная на использовании рационализированных формул – рационализованной.

Система СИ является рационализованной системой, система СГСЭ – нерационализованной.

Как и предыдущих разделах курса, в электростатике будем пользоваться только системой СИ. Будет, однако, полезным самостоятельным упражнением переход от системы СИ к системе СГСЭ. Этот переход осуществляется просто: если в формуле, записанной в системе СИ, электрическая постоянная ε_0 стоит в знаменателе, то для перехода к нерационализованной СГСЭ-системе числитель надо умножить на $4\pi\varepsilon_0$, если ε_0 стоит в числителе, то на $4\pi\varepsilon_0$ умножается знаменатель.

6 Найдем теперь численное значение и наименование величины ε_0 в системе СИ.

Из формулы (4.3) $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$, а так как $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$, то

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 Что такое электромагнитное поле?
2 Что называется магнитным полем?
3 Что называется электрическим полем?
4 Какой заряд называется элементарным и какой – макроскопическим?
5 Какой заряд называется свободным и какой – связанным?
6 Сформулируйте закон сохранения электрического заряда?
7 Какой заряд называется точечным и какой – протяженным?
8 Сформулируйте закон Кулона.

9 В чем заключается сходство и различие между законом электростатического взаимодействия зарядов и гравитационного взаимодействия материальных тел?

10 В каких единицах измеряется заряд в системе СИ?

11 Объясните, почему в законе Кулона, записанном в системе СИ, имеется размерный коэффициент пропорциональности.

12 В чем состоит рационализация формул электростатики и чем она вызвана?

НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

5 НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Перейдем к описанию свойств электрического поля

1 Следует различать две разновидности электрического поля: электростатическое, или безвихревое и вихревое, или соленоидальное.

Электростатическое поле характеризуется тем, что оно не изменяется с течением времени. Кроме того, такое поле не может существовать в отрыве от электрических зарядов: электрические заряды являются его «источником».

Вихревое электрическое поле характеризуется тем, что оно может изменяться с течением времени и может существовать в отрыве от электрических зарядов.

2 Электрическое поле оказывает силовое воздействие на вносимые в него электрические заряды.

Заряженное тело, при помощи которого обнаруживается и исследуется электрическое поле, называется *пробным зарядом*. Пробный заряд должен отвечать некоторым вполне определенным требованиям.

1) Пробный заряд должен быть достаточно малым по величине.

С пробным зарядом связано его собственное электрическое поле. Это поле, воздействуя на заряды, создающие исследуемое поле, вызывает их перераспределение. В результате исследуемое поле «искажается», оно становится не таким, каким было раньше, до внесения пробного заряда. Чем меньше величина пробного заряда, тем меньше он искажает исследуемое поле.

2) Пробный заряд должен быть точечным.

Сила, действующая на пробный заряд, характеризует свойства поля, усредненные по тому объему, который занимает этот заряд. Чем меньше объем, занимаемый пробным зарядом, тем ближе найденные средние характеристики поля к истинным «точечным» характеристикам.

3) Условились в качестве пробного заряда выбирать положительный заряд, чтобы отразить это, будем обозначать пробный заря индексом «+»: q_+.

3 Как показывает опыт, сила $\vec{F}$, действующая на пробный заряд q_+, помещенный в данную точку поля, зависит как от свойств поля в этой точке, так и от величины пробного заряда.

Сила же, отнесенная к единице заряда (чтобы найти эту силу, достаточно взять отношение $\frac{F}{q_+}$), зависит только от свойств поля в рассматриваемой точке и, следовательно, может служить его характеристикой в этой точке. Эта векторная величина характеризует силовое действие поля на вносимые в него заряды и называется напряженностью (ее часто называют просто «полем», иногда электрическим вектором).

Таким образом, напряженность электрического (и статического, и вихревого) поля есть векторная физическая величина, характеризующая силовое действие поля на вносимые в него электрические заряды и численно равная силе, с которой поле действовало бы на единичный точечный заряд, помещенный в данную точку. Направление вектора напряженности совпадает с направлением силы, действующей на положительный пробный заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_+}. \tag{5.1}$$

4 Заметим: напряженность характеризует любую точку поля независимо от того, есть в ней пробный заряд или нет.

5 За единицу напряженности в системе СИ принимается напряженность такой точки поля, в которой на заряд в 1 Кл действует сила в 1 Н:

$$1\ \text{СИ}_E = \frac{1\ \text{Н}}{1\ \text{Кл}}.$$

6 Если вектор напряженности во всех точках поля одинаков по величине и имеет одно и то же направление, то такое поле называется однородным:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \ldots \; . \tag{5.2}$$

7 Найдем выражение для напряженности поля, созданного точечным зарядом. Силу, действующую на пробный заряд со стороны заряда, создающего поле, можно найти по формуле Кулона (так как оба заряда точечные):

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q q_+}{\varepsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки, где находится заряд q, создающий поле, в точку, где находится пробный заряд q_+.

Разделив силу $\vec{F}$ на величину пробного заряда, найдем величину и направление векторов напряженности:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_+} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2} \right) \frac{\vec{r}}{r} . \tag{5.3}$$

Величина, стоящая в формуле (5.3) в скобках, определяет численное значение напряженности:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2} . \tag{5.4}$$

Из формулы (5.3) видно, что векторы $\vec{E}$ электрического поля во всех точках направлены радиально от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен (рис. 5).

8 Из определяющего уравнения для напряженности (5.1) следует, что на всякий точечный заряд в электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$ действует сила

$$\vec{F} = q\vec{E} . \tag{5.5}$$

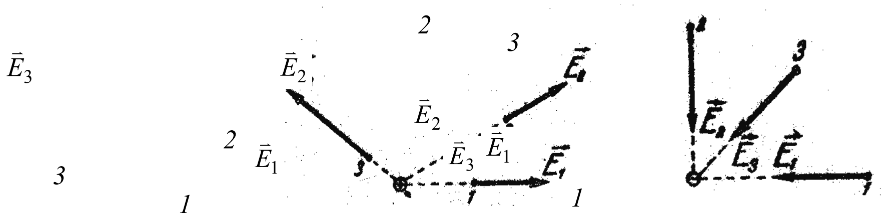


Рис. 5

Если $q > 0$, направление $\vec{F}$ совпадает с направлением $\vec{E}$, если $q < 0$, направление $\vec{F}$ противоположно направлению $\vec{E}$.

9 Наряду с напряженностью для описания электрического поля вводится вспомогательная, чисто расчетная характеристика, называемая электростатической индукцией или электрическим смещением $\vec{D}$ (подробнее об этой величине речь пойдет в п. 19).

Если среда изотропна, то связь между индукцией $\vec{D}$ и напряженностью $\vec{E}$ в любой точке поля выражается формулой:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} , \tag{5.6}$$

где ε_0 – электрическая постоянная; ε – относительная проницаемость среды.

10 Найдем индукцию для точечного заряда. Для этого в формулу (5.6) подставим выражение для $\vec{E}$ по (5.3). Получим:

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r}\,. \qquad (5.7)$$

Численное значение индукции в этом случае:

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}\,. \qquad (5.8)$$

Существенно подчеркнуть, что по формулам (5.7) и (5.8) можно находить величину и направление индукции только в случае, если поле создано в однородной, изотропной и безграничной среде.

6 Принцип суперпозиции полей

1 «Источники» электростатических полей обычно представляют собой систему сосредоточенных (точечных) или распределенных (непрерывных) макроскопических зарядов.

2 Пусть поле создано в вакууме системой точечных зарядов q_1, q_2, …, q_n. Каждый из этих зарядов, взятый в отдельности (т.е. в отсутствие других зарядов), действует на пробный заряд q_+ соответственно с силой F_1, F_2, …, F_n. Измерения показывают, что результирующая сила $\vec{F}$, действующая со стороны всех зарядов, равна геометрической сумме сил F_1, F_2, …, F_n:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n\,. \qquad (6.1)$$

Разделив левую и правую части этого соотношения на величину пробного заряда q_+, мы получим выражение для напряженности:

$$\frac{\vec{F}}{q_+} = \frac{\vec{F}_1}{q_+} + \frac{\vec{F}_2}{q_+} + \ldots + \frac{\vec{F}_n}{q_+}\,,$$

т.е. $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n$, или кратко

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i\,, \qquad (6.2)$$

где $\vec{E}_i$ – напряженность электрического поля, которую создавал бы заряд q_i в данной точке, если бы он был одиночным, т.е. если бы всех других зарядов не было; $\vec{E}$ – напряженность результирующего поля, т.е. поля, которое существует при наличии всех зарядов системы.

Таким образом, напряженность электростатического поля, созданного в вакууме системой точечных зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности.

Соотношение (6.2) выражает весьма важный принцип независимости действия полей или принцип суперпозиции (наложения) полей.

3 Принцип суперпозиции справедлив и для поля, созданного системой непрерывно распределенных зарядов. Только в этом случае суммирование (6.2) заменяется интегрированием:

$$\vec{E} = \int_q d\vec{E}\,, \qquad (6.3)$$

где $d\vec{E}$ – напряженность, создаваемая в данной точке бесконечно малым зарядом dq, а символ «q» означает, что интегрирование распространяется на весь непрерывно распределенный заряд q.

4 При наличии среды соотношения (6.2) и (6.3) будут иметь место только при условии, если диэлектрическая проницаемость среды ε не зависит от напряженности поля.

В самом деле, если ε зависит от напряженности поля (такие среды называют сегнетоэлектрическими), то один и тот же заряд при наличии других зарядов создаст в данной точке напряженность $E_i' = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon' r_i^2}$, отличную от напряженности $E_i'' = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon'' r_i^2}$, которую он создавал бы, будучи одиночным (так как в этом случае $\varepsilon' \neq \varepsilon''$).

7 РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ

1 Одной из важных прикладных задач электростатики является расчет электрических полей, имеющихся в различных приборах и аппаратах (конденсаторах, электронных лампах, кабелях и т.д.).

Рассчитать поле – это значит определить в любой его точке величину и направление вектора напряженности.

Эта задача в общем случае может быть решена на основе закона Кулона и принципа суперпозиции.

2 Схема решения задачи в случае системы точечных зарядов такова.

1) По формуле поля точечного заряда находят напряженности $\vec{E}_1, ..., \vec{E}_i, ...$, создаваемые каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}\frac{\vec{r}_1}{r_1}, ..., \vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_i^2}\frac{\vec{r}_i}{r_i}, \ldots, \tag{7.1}$$

где $\vec{r}_1, ..., \vec{r}_i, ...$ – радиус-векторы, проведенные из точек, где находятся заряды $q_1, ..., q_i, ...$ в точку, где определяется напряженность.

2) Напряженности, создаваемые отдельными зарядами, геометрически складываются:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i \tag{7.2}$$

(на рис. 6 вектор результирующей напряженности не показан).

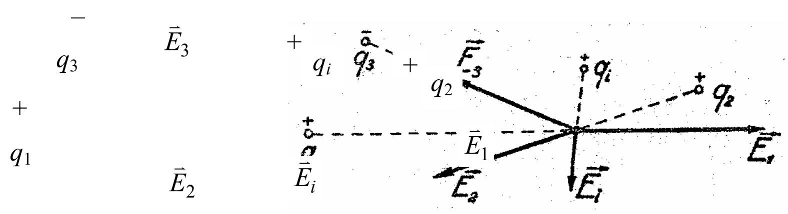


Рис. 6

3 Схема решения в случае непрерывно распределенных зарядов.

1) Протяженный заряд q разбивается на достаточно малые порции dq с тем, чтобы каждую такую порцию можно было рассматривать как точечный заряд. Чтобы вычислить dq, надо знать закон распределения зарядов в пространстве. Вводятся понятия объемной (ρ), поверхностной (σ)и линейной плотности (τ) зарядов. Объемная плотность $\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$ измеряется зарядом единицы объема тела, поверхностная $\sigma = \lim\limits_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$ – зарядом единицы поверхности и линейная $\tau = \lim\limits_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$ – зарядом единицы длины тела.

Закон распределения зарядов известен, если известна зависимость ρ, σ, τ от соответствующих координат. Малые пропорции dq выражаются через объемную, поверхностную или линейную плотности зарядов следующим образом:

$$dq = \rho\, dV; \quad dq = \sigma\, dS; \quad dq = \tau\, dl .$$

2) По формуле поля точечного заряда рассчитывается напряженность $d\vec{E}$, создаваемая каждой отдельной порцией dq:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{7.3}$$

3) Геометрически складываются напряженности, создаваемые отдельными точечными зарядами:

$$\vec{E} = \int\limits_q d\vec{E}\,. \tag{7.4}$$

4 В качестве простейшего примера расчета поля, созданного системой точечных зарядов, рассмотрим поле электрического диполя (дипольное строение имеют многие молекулы, например, молекулы воды, спиртов, органических кислот и т.д.).

Электрический диполь – это система двух равных по величине и противоположных по знаку точечных зарядов q_+ и q_- смещенных на небольшое расстояние друг относительно друга.

Ориентацию диполя в пространстве указывает его плечо $\vec{l}$.

Плечо диполя $\vec{l}$ – это вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между ними (рис. 7).

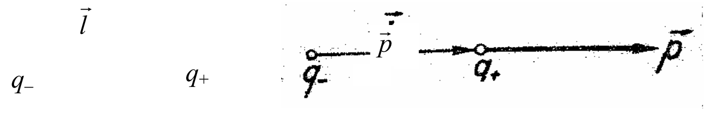


Рис. 7

Вектор, численно равный произведению величины плеча на абсолютную величину одного из зарядов диполя и совпадающий по направлению с $\vec{l}$, называется *электрическим моментом диполя*:

$$\vec{p} = q\vec{l}\,. \tag{7.5}$$

В соответствии с принципом суперпозиции напряженность, создаваемая диполем в любой точке пространства, равна

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-\,, \tag{7.6}$$

где $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ – напряженности, создаваемые зарядами диполя q_+ и q_- (предполагается при этом, что диэлектрическая проницаемость среды не является функцией напряженности поля, в противном случае принцип суперпозиции не будет справедлив).

Найдем сначала напряженность поля в точке *M*, лежащей на оси диполя, т.е. на прямой, проходящей через заряд. Пусть интересующая нас точка отстоит от центра диполя на расстоянии *r*, при чем $r >> l$ (рис. 8). Так как во всех точках на оси диполя (не между зарядами) векторы $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ направлены в противоположные стороны, модуль результирующей напряженности в выбранной нами точке будет равен разности модулей $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$

$$E_{//} = E_+ - E_-\,. \tag{7.7}$$

$\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ находим по формуле напряженности точечного заряда:

$$\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(r - \dfrac{l}{2}\right)^2} \quad \text{и} \quad \vec{E}_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(r + \dfrac{l}{2}\right)^2}\,.$$

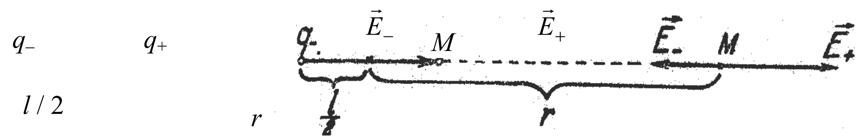


Рис. 8

Тогда

$$E_{//}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left[\frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\right]=\frac{2qlr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2}.$$

Пренебрегая в знаменателе величиной $\frac{l^2}{4}$ по сравнению с r^2 и сокращая числитель и знаменатель на r, получим $E_{//}=\frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}$. Но $ql=p$ – электрический момент диполя.

Следовательно,

$$E_{//}=\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}. \tag{7.8}$$

Таким образом, напряженность поля на оси диполя прямо пропорциональна электрическому моменту диполя и обратно пропорциональна кубу расстояния от диполя до точки наблюдения.

Найдем теперь напряженность в точке, лежащей на перпендикуляре к оси диполя, проходящем через центр диполя. Пусть точка наблюдения *N* отстоит от центра диполя на расстоянии r (рис. 9), причем снова $r>>l$.

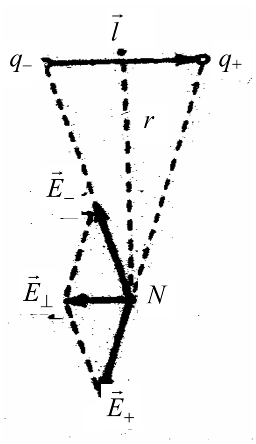


Рис. 9

Так как точка *N* отстоит от заряда q_+ и q_- на одинаковых расстояниях, то $\vec{E}_+=\vec{E}_-$, а треугольники, опирающиеся на вектор $\vec{E}_\perp$ и плечо $\vec{l}$, равнобедренные и подобны друг другу. Из подобия треугольников

$$\frac{E_\perp}{E_+}=\frac{l}{\sqrt{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}$$

или

$$E_\perp=E_+\frac{l}{r},$$

так как $l<<r$.

$$E_+=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)^2}\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \tag{7.9}$$

Подставив (7.9) в формулу для $\vec{E}_\perp$, получим

$$E_\perp=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}. \tag{7.10}$$

Поле в точках, лежащих на перпендикуляре к оси диполя, в два раза слабее поля в точках на оси диполя (при условии, что соответствующие точки отстоят от центра диполя на одинаковых расстояниях).

Можно показать, что напряженность, создаваемая диполем в произвольной точке A, положение которой определяется радиусом-вектором $\vec{r}$ (рис. 10), численно равна

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^3}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}\,, \quad (7.11)$$

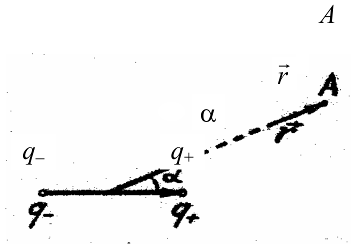


Рис. 10

где r – модуль радиуса-вектора; α – угол между направлением радиуса-вектора $\vec{r}$ и плечом диполя.

5 Рассмотрим теперь пример расчета поля, созданного непрерывно распределенным зарядами. Найдем напряженность поля на оси равномерно заряженного проволочного кольца на расстоянии h от его центра (рис. 11). Пусть радиус кольца r_0, линейная плотность зарядов τ_+, величина полного заряда кольца $q = 2\pi r_0 \tau$.

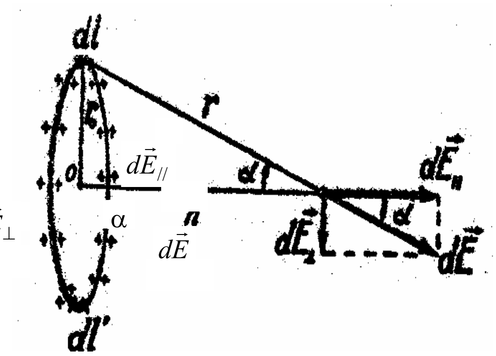


Рис. 11

Разобьем все кольцо на малые элементы dl. Каждый из таких элементов несет заряд τdl и создает в интересующей нас точке напряженность, численное значение которой равно:

$$dE = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}\,,$$

где r – расстояние от элемента dl до точки наблюдения.

Разложим каждый из векторов $d\vec{E}$ на две составляющие: $d\vec{E}_{//}$, направленную вдоль оси кольца, и $d\vec{E}_\perp$, направленную перпендикулярно этой оси (см. рис. 11). При суммировании полей, создаваемых всеми элементами кольца, составляющие $d\vec{E}_\perp$ в сумме дадут нуль ($d\vec{E}_\perp$ на нашем чертеже скомпенсируется такой же составляющей напряженности $d\vec{E}_\perp$, созданной диаметрально противоположным элементом dl'). Результирующее поле E будет складываться лишь из суммы составляющих $dE_{//}$:

$$E = \int dE_{//}\,. \quad (7.13)$$

Как видно из чертежа, $dE_{//} = dE\cos\alpha$.

Выразим r и $\cos\alpha$ через h и r_0:

$$r = \sqrt{h^2 + r_0^2}\,; \qquad \cos\alpha = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r_0^2}}\,.$$

Таким образом,

$$dE_{//} = \frac{\tau h\, dl}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(h^2 + r_0^2)^{3/2}}\,.$$

Интегрируя по l от 0 до $2\pi r_0$, получим:

$$E = \int_0^{2\pi r_0} \frac{\tau h\, dl}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(h^2 + r_0^2)^{3/2}} = \frac{\tau h r_0}{2\varepsilon_0\varepsilon(h^2 + r_0^2)^{3/2}}\,. \qquad (7.14)$$

Таким образом, напряженность пропорциональна h – расстоянию от центра кольца.
В центре кольца (h = 0) напряженность поля получается равной нулю.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 В чем заключается различие между электростатическим и электрическим вихревым полем?
2 Что такое пробный заряд? Какие требования предъявляются к пробному заряду?
3 Что называется напряженностью электрического поля?
4 Что принимается за направление вектора напряженности?
5 Запишите выражение для напряженности поля точечного заряда в системе СИ.
6 Какова связь между электрической индукцией и напряженностью электрического поля?
7 Сформулируйте принцип суперпозиции полей.
8 Что такое электрический диполь?
9 Что определяет ориентацию электрического диполя в пространстве?
10 Чему равна напряженность электростатического поля, создаваемая электрическим диполем в произвольной точке?
11 Как рассчитывается напряженность электростатического поля в случае непрерывно распределенных зарядов?

ТЕОРЕМА ГАУССА

8 ЛИНИИ ВЕКТОРОВ НАПРЯЖЕННОСТИ И ИНДУКЦИИ

1 Электрическое поле можно описать аналитически, задав формулы, выражающие зависимость вектора напряженности от координат.

2 Электрическое поле можно представить графически, изобразив для некоторых точек величину и направление вектора напряженности $\vec{E}$. Однако такой способ графического представления электрического поля весьма неудобен, так как стрелки, изображающие напряженность, накладываются друг на друга, пересекаются и тем самым запутывают картину распределения $\vec{E}$.

3 Фарадеем М. был предложен более наглядный метод изображения электрического поля при помощи линий вектора напряженности (их называют также силовыми линиями или линиями поля).

Линией вектора напряженности называется линия, проведенная в поле так, что касательная в каждой ее точке совпадает с направлением вектора напряженности в этой же точке (рис. 12). При помощи линий вектора напряженности удается охарактеризовать не только направление вектора $\vec{E}$, но и его численное значение. Линии поля обычно проводят так, чтобы число их через единичную площадку, перпендикулярную линиям, было равно или пропорционально напряженности в этом месте. Чем «гуще», «плотнее» идут линии вектора $\vec{E}$, тем больше здесь напряженность поля.

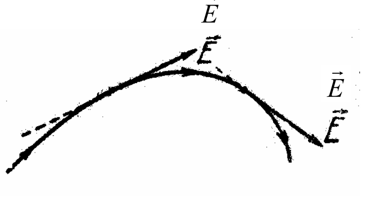


Рис. 12

Итак, мы нашли, что поток вектора $\vec{D}$ через произвольную замкнутую поверхность S равен q, где q – свободный заряд, заключенный внутри объема, ограниченного этой поверхностью. «Источниками» линий индукции являются свободные заряды.

3 Формулу (10.2) нетрудно обобщить на случай поля, созданного любой системой точечных или протяженных зарядов. В этом случае под q в формуле (10.2) следует понимать алгебраическую сумму свободных зарядов, попадающих внутрь объема, ограниченного поверхностью S. Покажем это. Пусть в объеме, ограниченном выбранной поверхностью, находится n точечных зарядов: $q_1, q_2, ..., q_n$. Поток индукции сквозь эту поверхность, обусловленный наличием заряда q_1, согласно (10.2) равен

$$N_1 = q_1,$$

поток, обусловленный зарядом q,

$$N_2 = q_2,$$

и т.д.

Полный поток индукции, пронизывающий рассматриваемую поверхность, равен алгебраической сумме потоков $N_1, N_2, ..., N_n$:

$$N = N_1 + N_2 + \ ... + N_n \ .$$

Подставим вместо $N_1, N_2, ..., N_n$ заряды $q_1, q_2, ..., q_n$.

Получим:

$$N = q_1 + q_2 + ... + q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i \ . \qquad (10.3)$$

Обратим внимание на то, что суммирование здесь распространяется только на те заряды, которые охватываются поверхностью, находятся внутри объема, ограниченного поверхностью.

4 Если заряды распределены непрерывно, то $q = \int\limits_{V'} \rho dV$ или $q = \int\limits_{S'} \sigma dS$, или $q = \int\limits_{l'} \tau dl$, где ρ, σ, τ – соответственно объемная, поверхностная и линейная плотности зарядов, а V', S', l' – объем, поверхность, линия, по которым распределены заряды, попадающие внутрь поверхности S.

5 Если замкнутая поверхность S не охватывает заряд, то поток вектора $\vec{D}$ через такую поверхность равен нулю.

Убедимся в этом. Построим коническую поверхность, касательную к поверхности S и с вершиной в точке, где находится заряд q (рис. 17).

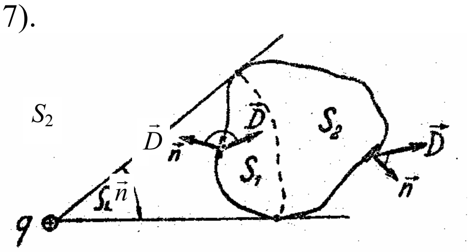


Рис. 17

Точки касания конической поверхности образуют линию, которая рассекает всю поверхность S на две части – S_1 и S_2. Обе эти части видны из точки, где находится заряд, под одним и тем же телесным углом Ω. Следовательно, потоки, пронизывающие S_1 и S_2 по (10.1) равны по величине: $|N_1| = |N_2|$.

Легко видеть однако, что эти потоки противоположны по знаку: $N_1 < 0,\ N_2 > 0$ (углы между $\vec{D}$ и $\vec{n}$ во всех точках поверхности S_2 – острые, а во всех точках поверхности S_1 – тупые). Поэтому

$$N = N_1 + N_2 = 0 \ .$$

Если привлечь «геометрическое» определение потока, то рассуждения будут еще проще: так как внутри поверхности S свободных зарядов нет, линии индукции не начинаются, не обрываются внутри объема, ограниченного поверхностью, т.е. идут, не разрываясь. Число линий, входящих в объем, равно числу линий, выходящих из него. Поток, образованный выходящими линиями, положителен, поток, образованный входящими линиями – отрицателен. Следовательно, полный поток сквозь такую поверхность равен нулю.

6 Если поток рассчитывается через замкнутую поверхность, то записывается так:

$$N = \oint_S D_n dS . \qquad (10.4)$$

Кружок у знака интеграла означает, что суммирование ведется по всем элементам поверхности S.

7 Теперь можно дать окончательную формулировку теоремы Гаусса и ее математическую запись.

Поток вектора индукции электростатического (и только электростатического!) поля через произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью:

$$N = \oint_S D_n dS = q , \qquad (10.5)$$

где q – полный свободный заряд, находящийся в объеме, ограниченном поверхностью S.

8 Как видно из формулы (10.5), единицей потока индукции в системе СИ является кулон.

Кулон – это полный поток вектора $\vec{D}$, проходящий через произвольную замкнутую поверхность, если внутри ее сосредоточен свободный заряд в 1 кулон.

11 ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАУССА К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

1 Как уже отмечалось, теорема Гаусса облегчает математическое решение задачи расчета полей, т.е. нахождение характеристик $\vec{E}$ и $\vec{D}$. Заметим, однако что она действительно облегчает эту задачу только в том случае, если

а) электрическое поле обладает симметрией;

б) вспомогательная замкнутая поверхность выбрана правильно (форма поверхности должна быть такова, чтобы ее элементы dS были либо параллельны, либо перпендикулярны линиям поля. Численное значение индукции на всех площадках, перпендикулярных полю, должно быть одинаковым. Последнее достигается выбором поверхности, симметричной относительно заряда, попадающего внутрь поверхности).

2 Расчет индукции и напряженности поля на основе теоремы Гаусса проводится по следующей схеме:

- в зависимости от формы поля выбирается симметричная замкнутая поверхность, причем так, чтобы точка, в которой рассчитывается $\vec{D}$, принадлежала этой поверхности;
- вычисляется поток индукции через эту поверхность (заметим, что в основе вычисления лежит только определение потока);
- определяется величин заряда, попавшего внутрь выбранной поверхности;
- в соответствии с теоремой Гаусса найденный поток приравнивается заряду, попавшему внутрь поверхности;
- составленное уравнение решается относительно D;
- разделив найденное значение индукции на произведение $\varepsilon\varepsilon_0$, находят напряженность поля: $E = \dfrac{D}{\varepsilon\varepsilon_0}$.

Рассмотрим ряд примеров.

3 Поле сферы, равномерно заряженной по поверхности (радиус сферы r_0, заряд q).

Электрическое поле равномерно заряженной сферы симметрично относительно ее центра, значит, геометрическое место точек, в которых численное значение индукции одинаково, представляет собой тоже сферу, центр которой совпадает с центром заряженной сферы. Поэтому в качестве вспомогательной поверхности следует выбрать сферу.

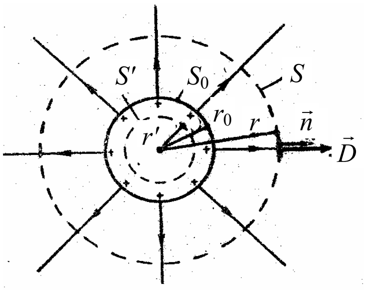


Рис. 18

Найдем поток, пронизывающий мысленную сферу радиуса $r > r_0$ (рис. 18). Во всех точках этой сферы вектор $\vec{D}$ перпендикулярен к ее поверхности. Полный поток N через нее равен

$$N = DS = D4\pi r^2 , \qquad (11.1)$$

так как площадь поверхности сферы $S = 4\pi r^2$.

Внутрь сферы попадает весь заряд q, создающий поле. По теореме Гаусса этот же поток N равен

$$N = q . \qquad (11.2)$$

Приравнивая правые части выражений (11.1) и (11.2), получим:

$$D4\pi r^2 = q .$$

Откуда

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} . \qquad (11.3)$$

Разделив D на $\varepsilon_0\varepsilon$, получим выражение для напряженности:

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} . \qquad (11.4)$$

Напряженность поля в точках на поверхности самой сферы $(r = r_0)$ равна:

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_0^2} . \qquad (11.5)$$

Формулы (10.4) и (10.5) в точности совпадают с формулой поля точечного заряда.

Электрическое поле равномерно заряженной сферы во внешнем пространстве таково, как если бы весь заряд был сосредоточен в центре этой сферы.

Поток индукции через вспомогательную сферу S' радиуса r', меньшего радиуса заряженной сферы, равен нулю, так как внутри этой сферы нет зарядов: все они, по условию задачи, распределены по поверхности сферы S_0:

$$N = DS' = 0 .$$

Из этого соотношения следует, что во всех точках поверхности S' индукция D равна нулю.

Таким образом, мы приходим к выводу: внутри сферы, равномерно заряженной по поверхности, индукция и напряженность равны нулю:

$$D_{\text{вн}} = 0, \qquad E_{\text{вн}} = 0. \qquad (11.6)$$

Позднее (п. 26) мы выясним, что электрическое поле отсутствует внутри любого заряженного проводника, если только заряды, сосредоточенные в нем, находятся в равновесии.

На рис. 19 изображена зависимость напряженности E от расстояния r до центра заряженной сферы. При переходе через поверхность сферы напряженность поля меняется скачком от нуля до

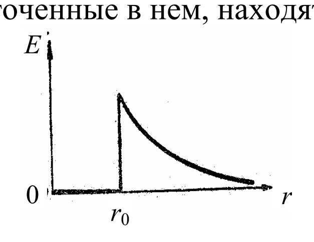


Рис. 19

$\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$.

4 Поле безграничной равномерно заряженной плоскости.

Пусть имеется бесконечно протяженная плоскость с поверхностной плотностью зарядов σ_+.

Электрическое поле такой плоскости симметрично относительно ее поверхности. Вследствие симметрии линии вектора $\vec{D}$ идут в обе стороны от плоскости перпендикулярно к ней. Следовательно, в качестве замкнутой вспомогательной поверхности можно выбрать прямой цилиндр, образующие которого параллельны линиям поля. Можно выбрать также прямой параллелепипед или прямую призму.

Пусть вспомогательной поверхностью будет прямой цилиндр с площадью основания S (рис. 20).

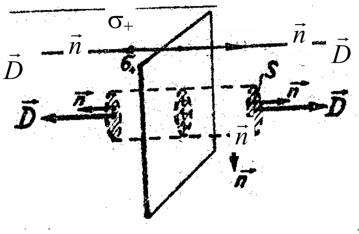


Рис. 20

Полный поток, пронизывающий этот цилиндр, складывается из потоков через торцы: $N = DS + DS = 2DS$ (поток через боковую поверхность равен нулю, так как образующие цилиндра параллельны вектору $\vec{D}$, поэтому $\cos(\vec{D}, \vec{n}) = 0$).

Внутри цилиндра оказывается заряд $q = \sigma S$. По теореме Гаусса $N = q = \sigma S$. Следовательно, $2DS = \sigma S$, откуда

$$D = \frac{\sigma}{2} \tag{11.7}$$

и

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}. \tag{11.8}$$

5 Поле двух параллельных бесконечно протяженных разноименно заряженных плоскостей.

Пусть поверхностные плотности зарядов плоскостей равны по величине и противоположны по знаку

$$|\sigma_+| = |\sigma_-|.$$

Результирующее поле, создаваемое обеими плоскостями, найдем, основываясь на принципе суперпозиции.

Положительно заряженная плоскость создает в окружающем пространстве однородное поле с напряженностью

$$E_+ = \frac{|\sigma_+|}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

В свою очередь, отрицательно заряженная плоскость создает поле с напряженностью

$$E_- = \frac{|\sigma_-|}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Так как поверхностные плотности σ_+ и σ_- численно равны, то равны и численные значения напряженностей $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$, т.е. $\vec{E}_+ = \vec{E}_-$.

В пространстве между плоскостями оба поля имеют одинаковое направление (рис. 21), поэтому результирующая напряженность здесь равна сумме напряженностей $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$, создаваемых плоскостями:

$$E = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{|\sigma_+|}{2\varepsilon_0\varepsilon} + \frac{|\sigma_-|}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}, \tag{11.9}$$

где σ – абсолютная величина поверхностной плотности зарядов любой из плоскостей.

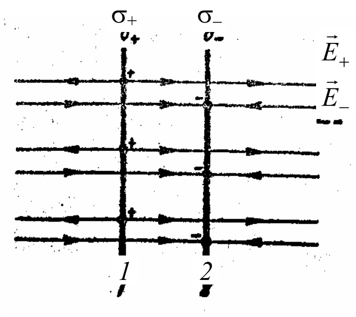


Рис. 21

В пространстве за плоскостями оба поля имеют противоположное направление, поэтому при наложении они взаимно скомпенсируют друг друга. Результирующая напряженность здесь равна нулю:

$$E = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 0\,. \qquad (11.10)$$

Таким образом, поле отлично от нуля только в пространстве между плоскостями.

На рис. 22 изображен ход напряженности поля двух плоскостей.

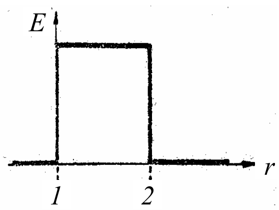


Рис. 22

6 Поле бесконечно длинного цилиндра, равномерно заряженного по поверхности (радиус цилиндра r_0, поверхностная плотность зарядов σ).

Электрическое поле бесконечно протяженного равномерно заряженного цилиндра симметрично относительно оси цилиндра.

Линии индукции представляют собой радиальные прямые, перпендикулярные к поверхности цилиндра. Геометрическое место точек, в которых величина $\vec{D}$ одинакова, представляет собой цилиндр. Следовательно, в качестве замкнутой поверхности следует выбрать прямой цилиндр.

Размеры вспомогательного цилиндра: высота – h, радиус оснований – $r > r_0$, ось совпадает с осью заряженного цилиндра (рис. 23). Полный поток вектора индукции через этот цилиндр складывается из потока через боковую поверхность: $N = D2\pi r\,h$ (потоки через основания цилиндра равны нулю, так как во всех точках этих оснований $\vec{D} \perp \vec{n}$ и $\cos(\vec{D}, \vec{n}) = 0$).

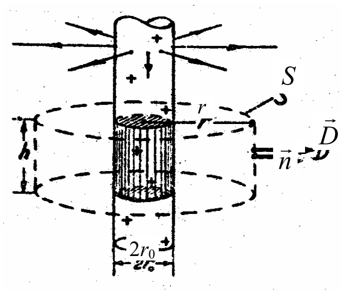


Рис. 23

Вспомогательный цилиндр отсекает заряд $q = \sigma 2\pi r_0 h$. По теореме Гаусса $N = q = \sigma 2\pi r_0 h$.

Приравнивая выражения для N, получим, $D2\pi rh = \sigma 2\pi r_0 h$,

откуда
$$D = \frac{\sigma r_0}{r}\,. \qquad (11.11)$$

Для E получается выражение:

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\sigma r_0}{\varepsilon_0 \varepsilon r}\,. \qquad (11.12)$$

Напряженность поля заряженного цилиндра во внешнем пространстве изменяется обратно пропорционально расстоянию от оси цилиндра.

В заключении еще раз подчеркнем, что теорема Гаусса позволяет рассчитывать электрическое поле только тогда, когда известна симметрия поля, когда заранее известно направление линий поля, когда есть возможность выделить мысленную поверхность, во всех точках которой численное значение вектора $\vec{D}$ одинаково. Универсального практического применения эта теорема не имеет.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 Что называется потоком вектора индукции? Какая это величина – векторная или скалярная?

2 Сформулируйте и докажите теорему Гаусса.

3 Какова методика расчета напряженности электростатического поля на основе теоремы Гаусса?

4 Рассчитайте напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью, двумя равноименно заряженными плоскостями, равномерно заряженным бесконечным цилиндром.

ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Изучая механику и молекулярную физику, мы не раз обращали внимание на то, что при решении целого ряда теоретических и прикладных задач физики можно не вдаваться в вопросы строения изучаемого объекта, а изучать только изменение его энергетического состояния.

Энергетическое описание допустимо и при изучении свойств электростатического поля.

12 РАБОТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СИЛ

1 В механике было установлено, что силы любого потенциального поля консервативны.

Напомним о том, что сила называется консервативной, если совершаемая ею работа не зависит от формы пути.

Выясним, являются ли силы электростатического поля консервативными.

2 Пусть поле создано неподвижным точечным зарядом q. В поле этого заряда по произвольной траектории перемещается другой точечный заряд q' (для определенности будем считать, что оба заряда положительны).

Вычислим работу, совершаемую силами поля при перемещении заряда q' из произвольной точки *1* в точку *2* (положение точек *1* и *2* относительно заряда, создающего поле, определяется соответственно радиусами-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – рис. 24).

Так как величина и направление силы, действующей на заряд q' при его перемещении, изменяются, расчет работы на пути S_{12} сведется к алгебраическому суммированию элементарных работ, совершаемых на всех бесконечно малых перемещениях между точками *1* и *2*:

$$A_{12} = \int_1^2 dA .$$

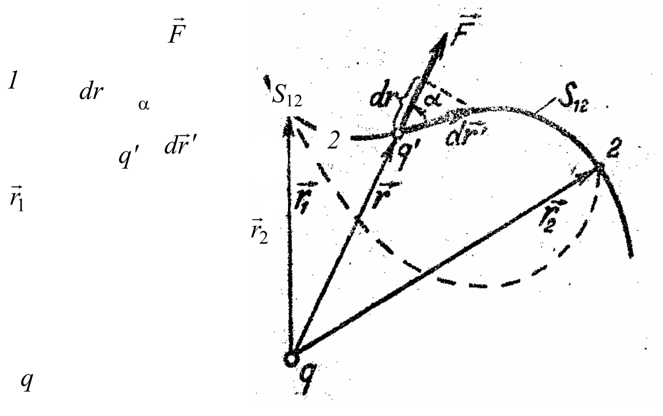


Рис. 24

Элементарная работа, совершаемая на бесконечно малом перемещении $d\vec{r}'$, равна

$$dA = Fdr'\cos\alpha ,$$

где α – угол между направлением силы и направлением перемещения.

Силу F найдем по закону Кулона (так как оба заряда – и создающий поле, и перемещаемый – точечные):

$$F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} .$$

Произведение $dr'\cos\alpha = dr$ есть проекция элементарного перемещения dr' на направление действия силы $\vec{F}$. Величина dr – алгебраическая. Она определяет приращение модуля радиуса-вектора $\vec{r}$, т.е.

$$dr = \left|\vec{r} + d\vec{r}'\right| - \left|\vec{r}\right| .$$

Итак, элементарная работа равна

$$dA = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{dr}{r^2} . \qquad (12.1)$$

Работа на участке *1 – 2* равна

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2} . \qquad (12.2)$$

Мы видим, что работа, совершаемая электростатическими силами при перемещении заряда, зависит от заряда q, создающего поле, и перемещаемого заряда q', от электрических свойств среды, в которой происходит перемещение (ε), от положения начальных и конечных точек пути (r_1 и r_2), но не зависит от формы пути (в выражении (12.2) отсутствуют величины, характеризующие форму пути, например, кривизна траектории). Если бы перемещение из точки *1* в точку *2* осуществлялось по другому пути (на рис. 24 этот путь изображен пунктиром), то и в этом случае величина работы определялась бы соотношением (12.2).

3 Утверждение, что работа электростатических сил не зависит от формы пути, справедливо не только для поля точечного заряда. Оно справедливо для электрических полей, созданных любой статической системой зарядов. Этот вывод непосредственно вытекает из принципа суперпозиции полей.

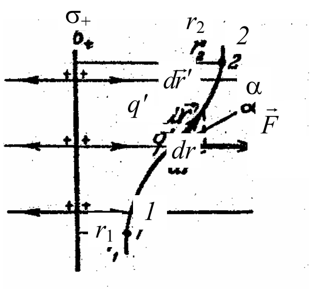
В самом деле, результирующее поле, созданное системой зарядов (и сосредоточенных, и распределенных), равно сумме полей точечных зарядов, образующих систему.

Работа по перемещению заряда в результирующем поле равна алгебраической сумме работ по перемещению в поле каждого из зарядов системы. Так как работа по перемещению в каждом из полей не зависит от форм пути, то она не зависит от формы пути и для суммарного поля.

4 Проиллюстрируем сказанное еще одним расчетом.

Пусть поле создано равномерно заряженной бесконечной плоскостью (заряды на плоскости распределены непрерывно с поверхностной плотностью σ_+).

Положительный точечный заряд q' перемещается в этом поле по произвольной криволинейной траектории (рис. 25). Найдем работу, которую совершают электростатические силы при перемещении заряда из точки *1* в точку *2*. В начальном положении (1) перемещаемый заряд отстоит от плоскости на расстоянии r_1, в конечном – на расстоянии r_2. Поле, созданное равномерно заряженной плоскостью, однородно, но так как переход заряда из точки *1* в точку *2* совершается по криволинейному пути, нам снова придется находить сначала элементарную работу, а затем ее интегрировать.



Элементарная работа равна

$$dA = Fdr'\cos\alpha .$$

Рис. 25

Силу, действующую на перемещаемый заряд, в рассматриваемом случае вычислять по формуле Кулона нельзя, так как заряд, создающий поле, протяженный.

Силу можно выразить через напряженность: $F = q'E$. Напряженность, создаваемая равномерно заряженной плоскостью, численно равна $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$.

Из рис. 25 видно, что $dr'\cos\alpha = dr$. Таким образом, элементарная работа равна

$$dA = \frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}dr\,. \tag{12.3}$$

Работа, совершаемая при перемещении заряда из точки *1* в точку *2*:

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_1^2 dA = \frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2} dr = \frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}\, r\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}r_2 - \frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}r_1 = \\ &= \left(-\frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}r_1\right) - \left(-\frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}r_2\right). \end{aligned} \tag{12.4}$$

Мы снова убеждаемся в том, что работа, совершаемая электростатическими силами, зависит от положения начальной и конечной точек пути, но не зависит от формы пути.

Так как работа электростатических сил не зависит от формы пути, можно заключить, что электростатические силы консервативны, а их материальный носитель – электростатическое поле – потенциально.

Независимость работы сил электростатического поля от формы пути и есть признак его потенциальности.

5 Условие потенциальности электростатического поля можно сформулировать иначе, введя понятие о циркуляции вектора напряженности (или индукции).

Легко показать, что работа, совершаемая электростатическими силами при перемещении заряда по любому замкнутому пути *L*, тождественно равна нулю: $A_{\bigcirc} \equiv 0$.

В самом деле, если заряд перемещается из точки *1* в точку *2* по одному пути, например *1B2* (рис. 26), а затем снова возвращается в точку *1*, но уже по другому пути *2C1*, то согласно (12.2) или (12.3) работы, совершаемые при этом на участках *1B2* и *2C1*, будут равны по величине, но противоположны по знаку:

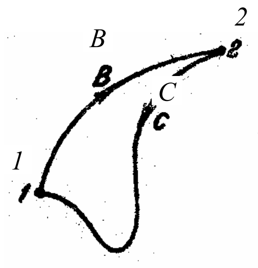


Рис. 26

$$A_{1B2} = -A_{2C1}\,.$$

Отсюда следует, что полная работа, совершаемая при перемещении заряда по замкнутому пути, равна нулю:

$$A_{\bigcirc} = A_{1B2C1} = A_{1B2} + A_{2C1} = 0\,.$$

Эту работу можно выразить обычным образом – через сумму всех элементарных работ: $A_{\bigcirc} = \oint\limits_L dA$.

Где кружок у знака интеграла означает, что интегрирование производится по всем элементам выбранного замкнутого контура *L*.

Элементарная работа dA равна:

$$dA = F\,dl\cos\alpha = qE\,dl\cos\alpha = qE_l\,dl,$$

так как $F = qE$ (q – перемещаемый заряд, E – напряженность поля), а $E\cos\alpha = E_l$ (E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление перемещения $d\vec{l}$).

Итак, $A_{\bigcirc} = \oint\limits_L dA = \oint\limits_L qE_l dl = q\oint\limits_L E_l dl = 0$.

Сократив на q ($q \neq 0$), окончательно получим:

$$\oint\limits_L E_l dl = 0. \qquad (12.5)$$

Интеграл (12.5) численно равен работе, совершаемой силами поля при перемещении единичного заряда по замкнутому пути L.

Этот интеграл называется *циркуляцией вектора напряженности*.

Таким образом, циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

Выражение (12.5) является условием потенциальности поля в интегральной форме.

13 СВЯЗЬ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СИЛ С ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ЗАРЯДА

1 В механике было установлено, что работа, совершаемая консервативными силами, однозначно связана с некоторой функцией состояния, зависящей от положения взаимодействующих тел и характеризующей интенсивность этого взаимодействия. Эта функция была названа потенциальной энергией.

Было показано, что работа консервативных сил, действующих на тело, равна убыли потенциальной энергии тела:

$$dA = -dW_{\text{п}} \qquad (13.1)$$

если перемещение бесконечно мало,

и $$A_{12} = -\Delta W_{\text{п}}, \qquad (13.2)$$

если перемещение конечно. Обратим внимание на обозначения:

$\Delta W_{\text{п}} = W_{\text{п}2} - W_{\text{п}1}$ – приращение величины $W_{\text{п}}$;

$-\Delta W_{\text{п}} = W_{\text{п}1} - W_{\text{п}2}$ – убыль величины $W_{\text{п}}$.

И приращение ($\Delta W_{\text{п}}$) и убыль ($-\Delta W_{\text{п}}$) – величины алгебраические.

2 Вычисляя работу электростатических сил, мы обнаружили, что она равна разности двух значений некоторой функции, зависящей от взаимного расположения зарядов – перемещаемого и создающего поле, причем вид этой функции и разность ее значений не зависят от того, каким способом, по какому пути заряд переходит из начального положения в конечное.

Это дает основание утверждать, что электрический заряд, помещенный в электростатическом поле, обладает потенциальной энергией, зависящей от положения заряда, и что ее убыль при изменении положения заряда равна работе сил поля, действующих на заряд. Следовательно, полученные нами выражения для работы электростатических сил (12.2) и (12.4) следует рассматривать как разность двух значений потенциальной энергии, которыми обладает перемещаемый заряд в начальном и конечном состояниях:

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2} = W_{\text{п}1} - W_{\text{п}2}; \qquad (13.3)$$

$$A_{12} = \left(-\frac{q'\sigma}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} r_1\right) - \left(-\frac{q'\sigma}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} r_2\right) = W_{\text{п}1} - W_{\text{п}2}. \qquad (13.4)$$

3 Формулы (13.3) и (13.4) позволяют найти лишь изменение потенциальной энергии заряда, но не ее абсолютное значение. Иначе говоря, как и в механике, потенциальная энергия заряда в электростатике определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной *C*. Любое из слагаемых $W_п$ в выражениях (13.3) и (13.4) должно быть представлено в виде:

$$W_п = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} + C_1; \tag{13.5}$$

$$W_п = \frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} r + C_2, \tag{13.6}$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные.

Постоянные неопределенного интегрирования C_1 и C_2 зависят от начала отсчета потенциальной энергии, т.е. от выбора точки (или геометрического места точек) поля, в которой потенциальная энергия заряда условно полагается равной нулю (эту точку или геометрическое место точек иногда называют нулевым уровнем). Поэтому правильнее говорить не вообще о потенциальной энергии, а о потенциальной энергии относительно такой-то точки такого-то уровня.

4 Наличие произвольной постоянной в выражении потенциальной энергии заряда не играет существенной роли, ибо мы всегда имеем дело не с самой величиной, а с ее изменениями. При нахождении разности двух значений энергии эта постоянная исключается:

$$W_{п1} - W_{п2} = \left(\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} + C\right) - \left(\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2} + C\right) = \\ = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}.$$

5 Если все-таки интересуются величиной потенциальной энергии (хотя бы условной величиной), то необходимо договориться, какое значение следует приписать постоянной *C*.

Найдем постоянные C_1 и C_2 в выражениях для потенциальной энергии (13.5) и (13.6). Определение постоянной *C* (или выбор нулевого уровня $W_п$) называется нормировкой констант, нормировкой потенциальной энергии.

Нулевой уровень обычно выбирают таким образом, чтобы константа *C* обратилась в нуль (хотя вообще говоря, необязательно).

В случае поля точечного заряда будем считать потенциальную энергию заряда равной нулю, когда он удален в бесконечность.

Подставив в (13.5) $r = \infty$ и $W_{п\infty} = 0$, найдем, что $C = 0$. При таком выборе нулевого уровня потенциальная энергия заряда q', находящегося на расстоянии r от заряда q, создающего поле, равна

$$W_п = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \tag{13.7}$$

Полученное выражение определяет потенциальную энергию заряда относительно бесконечности. С равным успехом мы могли бы отсчитать ее от другого начала, но тогда $C_1 \neq 0$ и численное значение энергии будет другим.

В случае поля заряженной плоскости нулевой уровень потенциальной энергии выбирать в бесконечности бессмысленно, ибо при таком выборе постоянная $C_2 = \infty$. Будем считать потенциальную энергию заряда в этом случае равной нулю, когда $r = 0$ (r – кратчайшее расстояние от заряда q' до плоскости). Подставив в (13.6) $r = 0$ и $W_п = 0$, получим $C_2 = 0$. При таком выборе нулевого уровня потенциальная энергия заряда, находящегося на расстоянии *r* от положительно заряженной плоскости, равна

$$W_п = -\frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} r. \tag{13.8}$$

6 Потенциальная энергия заряда может быть и положительной и отрицательной.

Если заряд переносится из данной точки на нулевой уровень, то работа, совершаемая силами поля, равна

$$A_{10} = W_{п1} - 0 = W_{п1} . \tag{13.9}$$

Из этой формулы видно, что потенциальная энергия заряда отрицательна, если при переносе его из данной точки на нулевой уровень электростатические силы совершают отрицательную работу, и наоборот, соответственно.

7 Формулы (13.7) и (13.8) характеризуют, в сущности, энергию системы зарядов: заряда q' и заряда, создающего поле. Поэтому величину $W_п$ правильно было бы назвать взаимной потенциальной энергией этих зарядов.

8 Еще раз обратимся к выражениям для потенциальной энергии (13.7) и (13.8):

$$W_п = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r};$$

$$W_п = -\frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} r .$$

Знак «+» в первой формуле и знак «–» во второй получены в предположении, что заряды q, q' и поверхностная плоскость σ положительны. Не составляет труда показать, что если бы заряд q' был отрицательным, то знаки в обеих формулах сменились бы на противоположные. Иначе говоря, знак потенциальной энергии будет автоматически учтен, если под q, q' и σ в этих формулах понимать алгебраические величины.

Если произведение зарядов в первой формуле положительно (заряды одноименные, $qq' > 0$), то взаимная потенциальная энергия этих зарядов положительна, если $qq' < 0$, то энергия отрицательна.

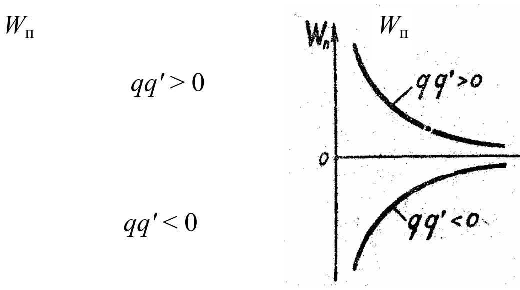


Рис. 27

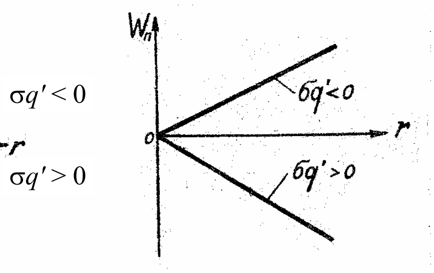


Рис. 28

В случае поля заряженной плоскости энергия положительна, если $q'\sigma < 0$, и отрицательна, если $q'\sigma > 0$ (так как в формулу входит знак минус). Графики потенциальной энергии, соответствующие (13.7) и (13.8), приведены на рис. 27 и 28.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 Докажите, что силы электростатического поля являются консервативными.

2 Сформулируйте условие потенциальности силового поля.

3 Каков физический смысл циркуляции вектора напряженности электростатического поля?

4 Как связана работа, совершаемая электростатическими силами при перемещении заряда, с потенциальной энергией этого заряда?

5 Как выражается потенциальная энергия точечного заряда, находящегося в поле другого точечного заряда, в системе СИ?

6 Изобразите графически взаимную потенциальную энергию одноименных и разноименных точечных зарядов.

14 ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1 Будем изучать энергетическое состояние электростатического поля. Для этого вновь воспользуемся пробным зарядом.

Согласно (13.7) и (13.8) потенциальная энергия заряда, внесенного в электростатическое поле, зависит:

1) от положения точки, в которую помещен пробный заряд;
2) от свойств поля в рассматриваемой точке;
3) от величины заряда.

Разные по величине пробные заряды $q_+, q'_+, q''_+, \ldots$ обладают в одной и той же точке поля разными потенциальными энергиями $W_п, W'_п, W''_п, \ldots$.

Разделим потенциальную энергию одного из зарядов на величину этого заряда, например, $W_п$ на q_+: $\frac{W_п}{q_+}$.

Величина, численно равная этому соотношению, показывает, какова потенциальная энергия единичного пробного заряда, если бы мы поместили его в данную точку (в действительности этого делать нельзя: такой большой заряд необычайно исказил бы исследуемое поле!).

Составленное отношение зависит от величин, характеризующих свойства поля в рассматриваемой точке, но не зависит от величины пробного заряда. Следовательно, это отношение может служить характеристикой поля в данной точке. Величина, численно равная $\frac{W_п}{q_+}$, называется электрическим потенциалом или просто потенциалом данной точки поля (понятие потенциала впервые было введено в 1777 г. Ж.Л. Лагранжем как добавление к закону всемирного тяготения, применительно к электрическому полю это понятие введено в 1811 г. С. Пуассоном).

Для обозначения потенциала используется буква φ, иногда *V*.

Потенциал данной точки электростатического поля – скалярная физическая величина, характеризующая энергетическое состояние поля в рассматриваемой точке и численно равная потенциальной энергии единичного точечного положительного заряда, помещенного в данную точку:

$$\varphi = \frac{W_п}{q_+}. \qquad (14.1)$$

2 Из соотношения (14.1) вытекает, что потенциальная энергия любого точечного заряда q (не обязательно положительного), помещенного в точку поля с потенциалом φ, равна

$$W_п = q\varphi. \qquad (14.2)$$

Как известно, работа сил поля равна убыли потенциальной энергии перемещаемого заряда:

$$A_{12} = W_{п1} - W_{п2}. \qquad (14.3)$$

Но согласно (14.2) $W_{п1} = q\varphi_1,\ W_{п2} = q\varphi_2$.

Следовательно, $$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (14.4)$$

Важный практический результат: работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда, равна произведению величины этого заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек пути.

3 Как и численное значение потенциальной энергии, численное значение потенциала определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной, зависящей от выбора нулевого уровня. Нулевой уровень потенциала, начало отсчета φ – это геометрическое место точек поля, потенциал которых условно принимается равным нулю: $\varphi_0 = 0$, где φ_0 – потенциал нулевого уровня.

Нулевой уровень потенциала может быть выбран в бесконечности (так поступают в случае полей, созданных пространственно ограниченными зарядами, и это оправдано, так как поле таких зарядов исчезает в бесконечности). Нулевой уровень может быть выбран на поверхности Земли и, вообще говоря, где угодно. Если заряд q из точки с потенциалом φ_1 перемещается в точку нулевого уровня, то работа сил поля будет равна

$$A_{10} = q_+(\varphi_1 - 0_2) = q_+\varphi_1 . \tag{14.5}$$

Следовательно, потенциал данной точки поля численно равен работе, которую совершают силы поля при перемещении единицы положительного заряда из данной точки в точку нулевого уровня.

Говоря о потенциале какой-либо точки, следует обязательно подчеркивать, относительно какого уровня определен этот потенциал. В противном случае говорить о потенциале бессмысленно.

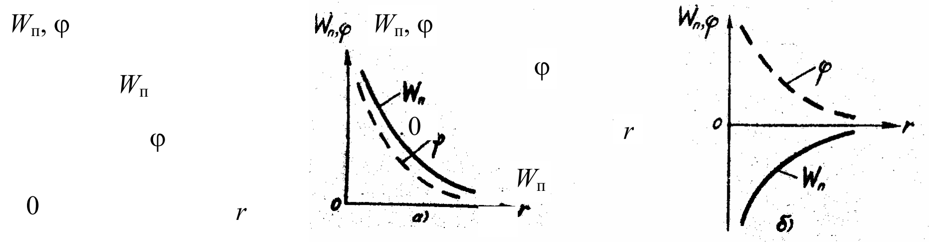
Заметим, что определение потенциала при помощи понятия потенциальной энергии следует предпочесть определению его через работу. По своему смыслу потенциал и потенциальная энергия характеризуют состояние поля и заряда, в то время как работа – процесс изменения этого состояния.

4 Потенциал – величина, характеризующая каждую точку электростатического поля независимо от того, есть в ней пробный заряд или нет.

5 Потенциал – величина алгебраическая. Он может быть и положительным, и отрицательным. Из формулы $\varphi_1 = \dfrac{A_{10}}{q_+}$ ясно, что потенциал какой-либо точки поля отрицателен, если при перемещении положительного заряда из данной точки на поверхность нулевого уровня потенциала силы поля совершают отрицательную работу. Легко понять, что если поле создано отрицательным зарядом, то потенциал любой точки такого поля отрицательный, если же поле создано положительным зарядом, то потенциалы точек этого поля – положительны.

6 Еще раз обратимся к формуле $W_п = \varphi q$.

Из формулы видно, что знак потенциальной энергии положительного заряда совпадает, а отрицательного противоположен знаку потенциала той точки поля, в которую заряд помещен (с вопросом о знаках потенциала и потенциальной энергии нам придется столкнуться при изучении энергетических состояний электронов в металлах).



а) *б*)

Рис. 29

На рис. 29, *а* и *б* пунктирной кривой изображено изменение потенциала φ, созданного положительным точечным зарядов. Сплошной кривой изображено изменение потенциальной энергии заряда q, внесенного в поле этого заряда: график *а*) соответствует $q > 0$; *б*) – $q < 0$.

7 Если поле создано системой точечных или протяженных зарядов, то потенциал результирующего поля в данной точке равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности (принцип суперпозиции):

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i \tag{14.6}$$

в случае точечных зарядов и

$$\varphi = \int_q d\varphi \tag{14.7}$$

в случае непрерывно распределенных зарядов.

8 Электрическое поле графически может быть изображено не только линиями вектора напряженности (или индукции), но и поверхностями равного потенциала – *эквипотенциальными поверхностями*. Как следует из самого названия, эквипотенциальная поверхность – это мысленная поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал. Работа при перемещении заряда между двумя точками одной и той же эквипотенциальной поверхности равна нулю:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \text{, так как } \varphi_1 = \varphi_2 .$$

Легко показать, что вектор $\vec{E}$, а следовательно, и линии поля перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям.

Выразим элементарную работу при перемещении заряда вдоль эквипотенциальной поверхности через напряженность поля, заряд и перемещение:

$$dA = qEdr\cos\alpha ,$$

где α – угол между направлением напряженности $\vec{E}$ и направлением перемещения (т.е. между вектором $\vec{E}$ и эквипотенциальной поверхностью).

Но $dA = 0$, следовательно,

$$qEdr\cos\alpha = 0 ,$$

$$E \neq 0, \quad q \neq 0, \quad dr \neq 0 .$$

Значит, $\cos\alpha = 0$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Эквипотенциальные поверхности обычно проводят так, чтобы разность потенциалов между любыми двумя соседними поверхностями была одна и та же.

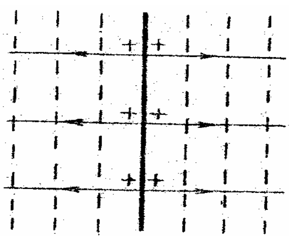


Рис. 30

На рис. 30 изображен вид линий напряженности (сплошные линии) и эквипотенциальных поверхностей (пунктиры) поля бесконечно протяженной равномерно заряженной плоскости.

9 Соотношение (14.4) может быть использовано в качестве определяющего уравнения при установлении единиц измерения потенциала и разности потенциалов.

За единицу потенциала в системе СИ (эта единица называется вольтом) принимается потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 кулон обладает энергией в 1 джоуль:

$$1\ \text{В} = \frac{1\ \text{Дж}}{1\ \text{Кл}} .$$

Часто используется единица энергии, называемая электронвольтом (эВ). Электронвольт – это энергия, которую приобретает частица, обладающая элементарным зарядом ($1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл), при прохождении разности потенциалов в 1 вольт:

$$1\ \text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} \cdot 1\ \text{В} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж} .$$

10 Найдем потенциал поля точечного заряда. Для этого подставим в (14.1) значение потенциальной энергии точечного заряда q_+ (пробный заряд), находящегося в поле другого точечного заряда q (см. (13.7)):

$$\varphi = \frac{W_п}{q_+} = \frac{qq_+}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r q_+} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \tag{14.8}$$

Здесь r – расстояние от заряда, создающего поле, до данной точки.

15 СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕННОСТЬЮ И ПОТЕНЦИАЛОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1 Электростатическое поле в каждой своей точке может быть описано либо с помощью векторной величины $\vec{E}$ (силовое описание), либо с помощью скалярной величины φ (энергетическое описание). Несомненно, что между этими величинами существует вполне определенная связь. Установим эту связь.

2 Рассмотрим в неоднородном электрическом поле две произвольные бесконечно близкие точки *1* и *2*, лежащие на оси x. Пусть разность потенциалов между этими точками равна $d\varphi$, а расстояние dx (рис. 31).

Работа сил поля над зарядом *q* при перемещении его из точки *1* в точку *2* может быть выражена, с одной стороны, через напряженность и перемещение:

$$dA = qEdx\cos\alpha = qE_x dx \tag{15.1}$$

($E\cos\alpha = E_x$ – проекция вектора $\vec{E}$ на направление x), с другой стороны, через убыль потенциальной энергии заряда:

$$dA = -dW_п = -qd\varphi, \tag{15.2}$$

приравнивая правые части (15.1) и (15.2) и сокращая на *q*, получим $E_x dx = -d\varphi$, откуда

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}. \tag{15.3}$$

Производная, стоящая в правой части этого равенства, выражает быстроту изменения потенциала вдоль оси *x*. Мы видим, что проекция вектора напряженности на ось *x* равна быстроте изменения потенциала вдоль этой оси, взятой с обратным знаком.

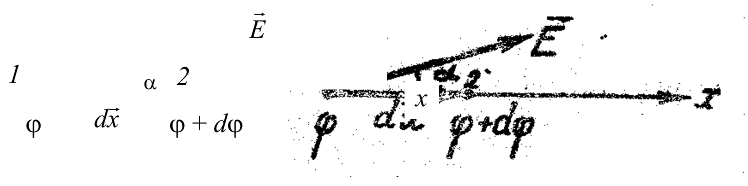


Рис. 31

Так как потенциал поля может изменяться не только в направлении *x*, но и любом другом направлении, то правильнее было бы писать частную производную $\frac{\partial}{\partial x}$:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

В общем случае потенциал может изменяться в направлении всех трех координатных осей *x*, *y*, *z*. Следовательно,

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x};\quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y};\quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\,. \qquad (15.4)$$

Как известно, для нахождения вектора по его проекциям необходимо каждую из проекций умножить на единичный вектор соответствующей оси и затем сложить полученные векторы:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}\,, \qquad (15.5)$$

принимая во внимание (15.4):

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}\right). \qquad (15.6)$$

Векторная величина, стоящая в скобках, называется *градиентом потенциала* и обозначается $\operatorname{grad}\varphi$ или $\nabla\varphi$. Таким образом,

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi\,. \qquad (15.7)$$

Вектор напряженности электростатического поля в каждой точке численно равен градиенту потенциала в этой же точке и противоположен ему по направлению (рис. 32).

Градиент потенциала – это вектор, указывающий направление наиболее быстрого возрастания потенциала и численно равный изменению потенциала на единицу длины этого направления.

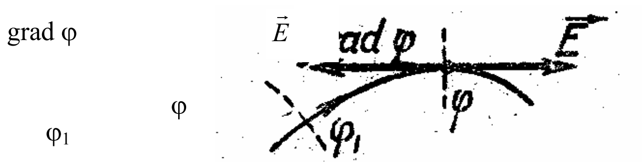


Рис. 32

3 Градиент потенциала так же, как и вектор напряженности, направлен по касательной к силовой линии. Следовательно, вдоль касательных к линиям поля потенциал изменяется (растет или убывает) с наибольшей скоростью. Полезно запомнить, что направление вектора $\vec{E}$ в каждой точке поля указывает направление, в котором потенциал с наибольшей быстротой уменьшается.

Если r – направление быстрейшего изменения потенциала, то модуль градиента потенциала равен $\frac{d\varphi}{dr}$. Таков же будет и модуль вектора напряженности:

$$E = \left|\frac{d\varphi}{dr}\right|. \qquad (15.8)$$

Если поле однородно, напряженность численно равна разности потенциалов, приходящейся на единицу длины линии поля:

$$E = \left|\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r}\right|, \qquad (15.9)$$

где r – расстояние между эквипотенциальными поверхностями φ_1 и φ_2, отсчитанное вдоль линии поля.

4 Из (15.9) видно, что в системе СИ напряженность измеряется в «вольтах на метр» $\left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\right)$.

Один вольт на метр – напряженность такого однородного поля, потенциал которого изменяется на 1 В при перемещении вдоль силовой линии на расстояние, равное 1 м.

5 Умножим обе части равенства (15.7) на q (q – произвольный точечный заряд, внесенный в поле):

$$q\vec{E} = q(-\text{grad } \varphi).$$

$q\vec{E} = \vec{F}$ – есть сила, действующая на заряд q в точке поля с напряженностью $\vec{E}$.

$q \text{ grad } \varphi = \text{grad } q\varphi$, так как q – величина постоянная, поэтому ее можно внести под знак производной.

$q\varphi = W_n$, следовательно,

$$\vec{F} = -\text{grad } W_п . \tag{15.10}$$

Формула (15.10) выражает связь между силой, действующей на заряд, и его потенциальной энергией.

Сила, действующая на точечный заряд в данной точке электростатического поля, равна градиенту его потенциальной энергии в этой же точке, взятому с обратным знаком.

Из формулы (15.10) видно, что направление силы, действующей на заряд, и направление быстрейшего возрастания потенциальной энергии заряда всегда противоположны. Если r – направление быстрейшего изменения потенциальной энергии, то

$$F = \left|\frac{dW_п}{dr}\right|, \tag{15.11}$$

где F и $\left|\frac{dW_п}{dr}\right|$ – модули $\vec{F}$ и $\text{grad } W_п$.

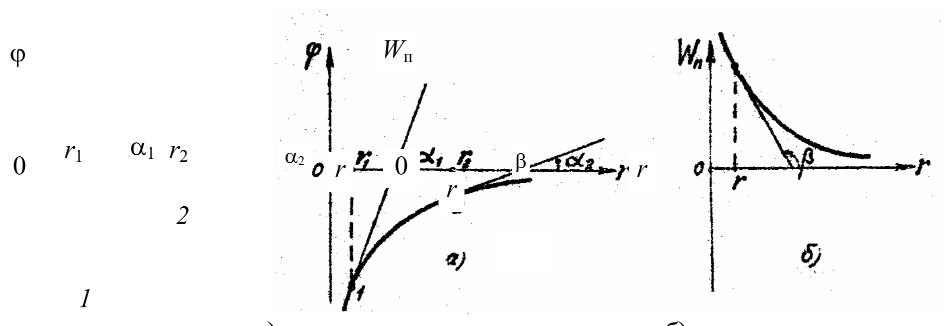
6 Напряженность поля и силу, действующую на заряд, можно найти из графиков зависимости потенциала $\varphi(r)$ и потенциальной энергии $W_п(r)$. На рис. 33, *а* изображен график зависимости потенциала $\varphi(r)$ для поля отрицательного точечного заряда, на рис. 33, *б* – график зависимости потенциальной энергии $W_п(r)$ двух одноименных точечных зарядов.

Легко видеть, что $\frac{d\varphi}{dr}$ и $\frac{dW_п}{dr}$ есть тангенсы углов наклона касательных к графикам $\varphi(r)$ и $W_п(r)$ в соответствующих точках:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \text{tg } \alpha , \qquad \frac{dW_п}{dr} = \text{tg } \beta .$$

Но $\frac{d\varphi}{dr} = E_r$ и $\frac{dW_п}{dr} = -F_r$ – проекции напряженности $\vec{E}$ и силы $\vec{F}$ на направление r. Следовательно,

$$-\text{tg } \alpha = \vec{E}_r , \qquad -\text{tg } \beta = \vec{F}_r .$$



а) *б*)

Рис. 33

По наклону касательных к графикам $\varphi(r)$ и $W_п(r)$ можно судить о величине и направлении (относительно оси r) напряженности поля и силы, действующей на заряд. Чем круче идет соответствующий график, тем больше численное значение силы и напряженности.

Так, в точке с координатой r_1 (рис. 33, *а*) напряженность E_1 больше, чем напряженность E_2 в точке с координатой r_2 (так как касательная в точке r_1 наклонена под большим углом к оси r). Направление $\vec{E}$

противоположно направлению r (угол α – острый, $\operatorname{tg}\alpha > 0$; проекция вектора напряженности на ось r, равная $E_r = -\operatorname{tg}\alpha$ – отрицательна, следовательно, направления $\vec{E}$ и оси r противоположны).

В случае *б*) сила $\vec{F}$ совпадает с направлением оси r и уменьшается по величине с увеличением r.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 Что называют потенциалом электростатического поля?

2 Дайте определение единицы измерения потенциала в системе СИ.

3 Как связан потенциал какой-либо точки поля с потенциальной энергией точечного заряда, помещенного в эту точку?

4 Запишите формулу для потенциала точечного заряда в системе СИ.

5 Какова связь между напряженностью и потенциалом в случае неоднородного и однородного поля?

6 Что называется градиентом потенциала?

7 Верно ли утверждение, что направление вектора напряженности в каждой точке электростатического поля указывает направление наибольшей быстроты падения потенциала? Объясните почему.

8 Как связана сила, действующая в электростатическом поле на точечный заряд, с потенциальной энергией этого заряда?

16 РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛА И РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1 В общем случае расчет потенциала и разности потенциалов основывается на применении закона Кулона и принципа суперпозиции.

2 Схема расчета в случае поля, созданного системой точечных зарядов, следующая. Сначала находят потенциалы, создаваемые в данной точке определенными зарядами системы (вычисление этих потенциалов требует применения закона Кулона):

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1},\ \ldots,\ \varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_i},\ \ldots \tag{16.1}$$

где r_1 – расстояние от заряда q_1 до данной точки; r_i – то же от заряда q_i.

Сложив потенциалы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i, \ldots$ (с учетом их знака), находят потенциал результирующего поля:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_i}. \tag{16.2}$$

3 Если заряд, создающий поле, распределен непрерывно, то прибегают к обычному приему: разбивают этот заряд на малые порции dq, определяют потенциал, создаваемый в данной точке каждым таким зарядом, после чего интегрируют:

$$\varphi = \int d\varphi = \int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \tag{16.3}$$

4 Найдем потенциал в произвольной точке поля, созданного электрическим диполем (рис. 34), причем ограничимся случаем, когда точка наблюдения отстоит от диполя на расстоянии r, значительно превышающем размеры диполя: $r >> l$ (l – плечо диполя).

Согласно принципу суперпозиции потенциал в точке наблюдения равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых положительным и отрицательным зарядами диполя:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-; \tag{16.4}$$

$$\varphi_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}, \quad \varphi_- = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1}, \tag{16.5}$$

где q – абсолютная величина каждого из зарядов диполя; r_1 и r_2 – расстояния от отрицательного и положительного зарядов диполя до точки наблюдения.

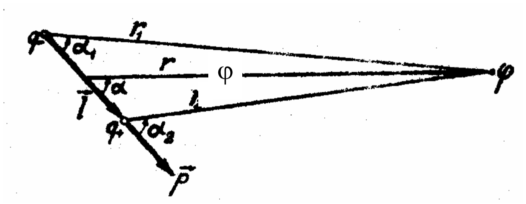


Рис. 34

Выражения для потенциалов φ_+ и φ_- подставим в (16.4):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}. \tag{16.6}$$

Так как плечо диполя l значительно меньше расстояния от центра диполя до рассматриваемой точки, то можно приближенно считать, что $r_1 \approx r_2 \approx r$ и $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx \alpha$.

Тогда можно записать:

$$r_1 - r_2 = l\cos\alpha;$$

$$r_1 r_2 = r^2.$$

Подставив все это в формулу для суммарного потенциала, получим:

$$\varphi = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cos\alpha. \tag{16.7}$$

Произведение ql есть электрический момент диполя.

Окончательная формула, таким образом, имеет вид:

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cos\alpha, \tag{16.8}$$

где α – угол между направлением электрического момента диполя и направлением к точке наблюдения.

5 Пусть поле создано равномерно заряженным тонким кольцом радиуса r_0 с линейной плотностью зарядов τ. Найдем потенциал (относительно бесконечности) в точке, лежащей на оси этого кольца на расстоянии h от его центра (рис. 35).

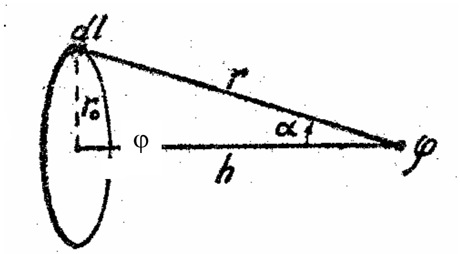


Рис. 35

Так как заряды распределены непрерывно, то при расчете результирующего потенциала нам придется интегрировать. Найдем в точке наблюдения потенциал, созданный зарядом бесконечно малого элемента dl:

$$d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r},$$

где τdl – заряд, сосредоточенный на элементе dl; r – расстояние от точки наблюдения до выделенного элемента.

$$r = \sqrt{r_0^2 + h^2} .$$

При интегрировании учтем, что все элементы dl находятся от точки наблюдения на одинаковых расстояниях, следовательно, суммировать придется по l от 0 до $2\pi r_0$:

$$\varphi = \int d\varphi = \int_0^{2\pi r_0} \frac{\tau\, dl}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{r_0^2 + h^2}} = \frac{\tau\, r_0}{2\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{r_0^2 + h^2}} . \tag{16.9}$$

Потенциал в центре кольца $(h = 0)$ равен

$$\varphi_c = \frac{\tau}{2\varepsilon_0\varepsilon} . \tag{16.10}$$

6 При вычислении потенциалов на основе принципа суперпозиции встречаются трудности физического и математического характера. Сложность вычислений с физической точки зрения заключается в том, что необходимо знать точное распределение зарядов во всем пространстве. Математические трудности – в достаточно громоздком интегрировании.

7 Другой метод расчета потенциала и разности потенциалов основан на применении теоремы Гаусса и формулы связи потенциала с напряженностью.

При симметричном распределении зарядов напряженность поля оказывается зависящей только от r – кратчайшего расстояния от точки наблюдения до соответствующего элемента симметрии (оси, центра и т.д.), причем линия вектора $\vec{E}$ в данном случае совпадает с этой радиальной прямой, поэтому численное значение радиальной проекции напряженности E_r совпадает с полной величиной E:

$$\left|E_r\right| = E . \tag{16.11}$$

Это обстоятельство упрощает расчеты.

Пусть поле создано каким-либо симметричным распределением зарядов, например, равномерно заряженным шаром, длинной нитью, плоскостью и т.д.; r – радиальное направление, проведенное через точку наблюдения и совпадающее с $\vec{E}$. Только из общего соотношения между напряженностью и потенциалом имеем:

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr},$$

откуда убыль потенциала $(-d\varphi)$ на бесконечно малом отрезке dr радиальной прямой будет равна

$$-d\varphi = E_r dr . \tag{16.12}$$

Разность потенциалов между любыми двумя точками *1* и *2* будет равна интегральной сумме выражений (16.12):

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} -d\varphi = \int_1^2 E_r dr \qquad \text{или} \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_r dr .$$

В соответствии с (16.11) под E_r в этой формуле следует понимать численное значение напряженности, т.е. E:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dr\,. \qquad (16.13)$$

Зависимость E от r находим, пользуясь теоремой Гаусса.

Такова схема расчета. Рассмотрим примеры.

8 Найдем разность потенциалов между двумя разноименно заряженными бесконечными плоскостями (полученный вывод потребуется для расчета емкости плоского конденсатора).

Обозначим: φ_1 – потенциал одной плоскости (например, левой); φ_2 – потенциал другой плоскости (рис. 36). Согласно (16.13) $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_r dr$. Если поверхностные плотности зарядов обеих плоскостей одинаковы по величине $|\sigma_+| = |\sigma_-|$, то поле в пространстве между плоскостями численно равно $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$.

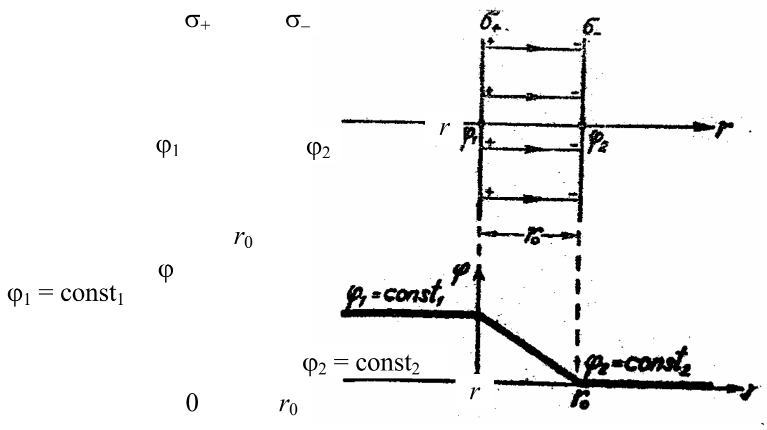


Рис. 36

Если расстояние r отсчитывать от левой плоскости, то нижний предел интегрирования будет равен нулю, а верхний r_0 (r_0 – расстояние между плоскостями):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^{r_0} \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} dr = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} r_0\,. \qquad (16.14)$$

Таким образом, разность потенциалов между двумя бесконечными плоскостями тем больше, чем больше расстояние между ними.

Так как во всем пространстве за плоскостями поле равно нулю $(\vec{E} = 0)$, то из связи потенциала с напряженностью $-d\varphi = E_r dr$ следует, что во всех точках слева от плоскости (σ_+)потенциал одинаков и равен φ_1. На том же основании потенциал одинаков и равен φ_2 во всех точках, лежащих правее плоскости (σ_-). График $\varphi = \varphi(r)$ изображен на рис. 36. За начало отсчета потенциалов условно принята правая плоскость. В пространстве между плоскостями происходит падение потенциала.

9 Рассчитаем разность потенциалов между двумя концентрическими сферами радиусами r_1 и r_2, равномерно заряженными по поверхности (вывод потребуется для расчета емкости сферического конденсатора).

В соответствии с (16.13)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dr\,,$$

где φ_1 – потенциал внутренней сферы; φ_2 – потенциал внешней сферы.

Поле в зазоре между сферами создается только теми зарядами, которые сосредоточены на внутренней сфере (это вытекает из теоремы Гаусса: достаточно представить замкнутую поверхность, лежащую между сферами, чтобы согласиться с этим).

По (11.4) $$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Интегрировать будем в пределах от r_1 (радиус внутренней сферы) до r_2 (радиус внешней сферы):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2} = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1 r_2}. \qquad (16.15)$$

Легко убедиться в том, что если заряды сфер одинаковы по величине и противоположны по знаку $|q_+| = |q_-|$, то электрическое поле отлично от нуля только в пространстве между сферами. Отсутствие поля внутри малой сферы вытекает из теоремы Гаусса (там нет зарядов). За пределами внешней сферы суммарное поле равно нулю, так как поля, создаваемые зарядами внутренней и внешних сфер, компенсируют друг друга (эти поля таковы, как если бы заряды сфер были сосредоточены в одном общем центре. Так как заряды сфер равны по величине и противоположны по знаку, то в любой точке за пределами внешней сферы они создают напряженности, равные по величине и противоположные по направлению).

Из связи напряженности с потенциалом следует, что потенциал всех точек, лежащих внутри меньшей сферы, одинаков и равен φ_1, потенциал всех точек, лежащих за пределами внешней сферы, также одинаков и равен φ_2. Между сферами происходит падение потенциала (от внутренней сферы к внешней, если заряд внутренней сферы положителен).

График $\varphi = \varphi(r)$ для этого случая изображен на рис. 37.

Потенциал внешней сфера условно принят равным нулю.

10 Найдем разность потенциалов между двумя равномерно заряженными коаксиальными цилиндрами бесконечной длины. Пусть r_1 – радиус внутреннего цилиндра, r_2 – радиус внешнего цилиндра. Поверхностные плотности зарядов обоих цилиндров равны по величине и противоположны по знаку: $|\sigma_+| = |\sigma_-|$.

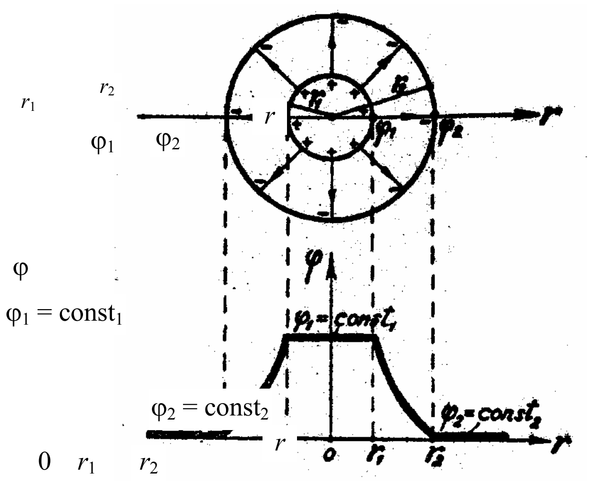


Рис. 37

В соответствии с (16.13)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dr,$$

где φ_1 – потенциал внутреннего цилиндра; φ_2 – потенциал внешнего цилиндра.

Электрическое поле в пространстве между цилиндрами создается только теми зарядами, которые распределены по внутреннему цилиндру, поэтому

$$E = \frac{\sigma r_1}{\varepsilon_0 \varepsilon r}.$$

Разность потенциалов между цилиндрами

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma r_1}{\varepsilon \varepsilon_0 r} dr = \frac{\sigma r_1}{\varepsilon \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{16.16}$$

Если $|q_+| = |q_-|$, то как и в предыдущем случае, поле отлично от нуля только в зазоре между цилиндрами. Следовательно, только в пространстве между цилиндрами происходит падение потенциала, во всех точках за пределами внешнего цилиндра потенциал одинаков. Аналогично потенциал одинаков и внутри малого цилиндра.

11 Обратим внимание на следующую примечательную особенность.

Напряженность поля в пространстве между двумя концентрическими сферами не зависит ни от радиуса, ни от заряда внешней сферы: она зависит только от заряда внутренней сферы.

Что же касается разности потенциалов между внутренней и внешней сферами, то она зависит от радиусов обеих сфер и заряда внутренней сферы, но опять-таки не зависит от заряда, сосредоточенного на внешней сфере. Следовательно, внешняя сфера, в принципе, может быть не заряжена: разность потенциалов между сферами от этого не изменится. Для чего же обычно заряжают внешнюю сферу (например, в случае сферического конденсатора), да еще зарядом, равным по величине и противоположным по знаку заряду внутренней сферы? Только для того, чтобы уничтожить во внешнем пространстве поле, созданное зарядом внутренней сферы.

То же самое можно сказать и о коаксиальных цилиндрах.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 Как рассчитывается потенциал поля, созданного системой сосредоточенных зарядов?

2 Рассчитайте разность потенциалов между двумя произвольными точками следующих полей:

а) поля, созданного точечным зарядом;

б) поля, созданного бесконечной равномерной заряженной плоскостью;

в) поля, созданного бесконечным равномерно заряженным цилиндром.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Савельев И.В. Курс общей физики. М.: Наука, 1989. Т. 2.

2 Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. М.: Наука, 1971. Т. 2.

3 Яворский Б.М., Детлаф А.А. Курс физики. М.: Наука, 1989. Т. 2.

4 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М.: Высшая школа, 1989. Т. 2.