

# ФИЗИКА

## ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

• ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ •

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Тамбовский государственный технический университет»

**ФИЗИКА**

**ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ**

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ,  
МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА,  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Часть 2

Конспект лекций



---

Тамбов  
Издательство ТГТУ  
2005

УДК 535.338 (0765)  
ББК В 36 я 73-5  
Б261

Рецензент  
Доктор технических наук, профессор  
*Т.И. Чернышова*

Автор-составитель  
*В.И. Барсуков*

Б261 Физика. Электромагнетизм (электромагнитная индукция, магнитные свойства вещества, электромагнитные колебания и волны) : конспект лекций / авт.-сост. В.И. Барсуков. Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. Ч. 2. 68 с.

Предлагаемое учебное издание представляет собой конспект лекций по разделу «Электромагнетизм» курса общей физики, читаемого в соответствии с Государственным стандартом для высших технических учебных заведений.

Предназначено для студентов первого – второго курсов всех специальностей инженерного профиля дневного и заочного отделений.

УДК 535. 338 (0765)  
ББК В36я 73-5

© Тамбовский государственный  
технический университет (ТГТУ),  
2005

Учебное издание

**ФИЗИКА**

**ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ**

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ,  
МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА,  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

Часть 2

Автор-составитель  
БАРСУКОВ Владимир Иванович

Конспект лекций

Редактор В.Н. Митрофанова  
Компьютерное макетирование Е.В. Кораблевой

Подписано к печати 14.12.2005

Гарнитура Times New Roman. Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Объем: 3,95 усл. печ. л.; 3,9 уч.-изд. л.

Тираж 100 экз. С. 885<sup>М</sup>

Издательско-полиграфический центр ТГТУ  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

## 1 ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

1 Явление электромагнитной индукции (открыто М. Фарадеем в 1831 г.) состоит в том, что при всяком изменении магнитного потока, сцепленного с проводящим контуром, в контуре возникает ЭДС индукции.

Магнитный поток, сцепленный с пронизывающей любую поверхность  $S$ ,

2 Опыт показывает, что абсолютная равна абсолютной величине скорости сцепленного с контуром

$$|\varepsilon_i| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|. \quad (1.1)$$



Рис. 1

контуром, — это поток, опирающуюся на контур (рис. 1).

величина ЭДС индукции в системе СИ изменения магнитного потока,

3 Если контур замкнут, то ЭДС индукции вызывает в нем *индукционный ток*.

В незамкнутом контуре индукционный ток возникает только тогда, когда магнитный поток, сцепленный с контуром, изменяется с переменной скоростью, т.е. когда  $d\Phi/dt \neq \text{const}$ .

4 Изменение магнитного потока, сцепленного с контуром, может быть обусловлено изменением:

- а) пронизывающего контур магнитного поля;
- б) формы контура;
- в) положения контура в магнитном поле.

На рис. 2 изображены схемы опытов, позволявших обнаружить индукционный ток за счет указанных изменений:

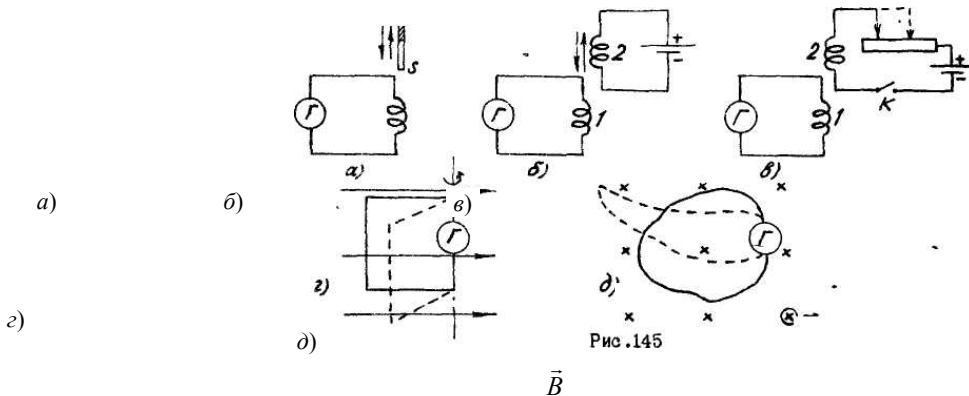


Рис. 145

$\vec{B}$

Рис. 2

- а) ток в контуре возникает при движении магнита относительно катушки;
- б) ток в контуре  $I$  возникает при движении катушки 2 с током;
- в) ток в контуре  $I$  возникает при замыкании и размыкании цепи 2 или при изменении в ней тока;
- г) ток в контуре возникает при повороте контура вокруг оси, не параллельной  $\vec{B}$  и не перпендикулярной к плоскости контура;
- д) ток в контуре возникает при изменении площади, охватываемой контуром.

5 Ленц Э.Х. установил закон, согласно которому *индукционный ток всегда имеет такое направление, что создаваемый им магнитный поток сквозь поверхность, опирающуюся на контур, противодействует изменениям того магнитного потока, который вызывает этот индукционный ток*. Закон Ленца в формуле для ЭДС индукции отражен знаком минус

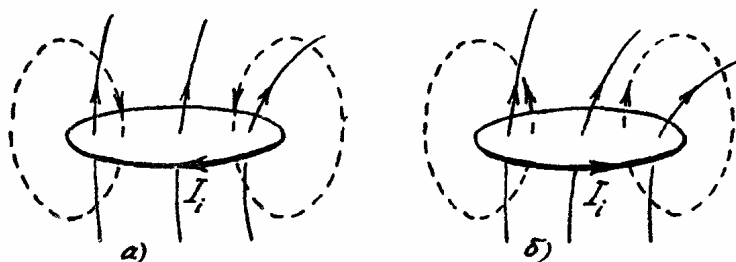
$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.2)$$

*Пример.* Контур находится в изменяющемся магнитном поле (рис. 3).

Если  $\vec{B}$  (модуль индукции) возрастает, то  $\frac{d\Phi}{dt} > 0$  и по (1.2)  $\varepsilon_i < 0$ . ЭДС индукции отрицательна – это означает, что магнитный поток, создаваемый индукционным током и пронизывающий контур, *противоположен по знаку* внешнему магнитному потоку, сцепленному с контуром (рис. 3, а). Если  $\vec{B}$  уменьшается, то  $\frac{d\Phi}{dt} < 0$  и  $\varepsilon_i > 0$ : магнитный поток индукционного тока и внешний магнитный поток совпадают по знаку (рис. 3, б).

а)

б)



**Рис. 3**

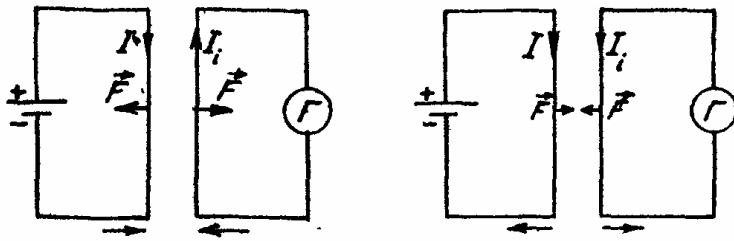


Рис. 4

Из закона Ленца следует, что внешнее магнитное поле всегда *тормозит* движение проводника с индукционным током. Рис. 4 поясняет сказанное: при сближении цепей возникают силы отталкивания, при удалении

– силы притяжения.

Тормозящее действие магнитного поля применяется в магнитных успокоителях (демпферах) некоторых измерительных приборов.

## 2 ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА ИНДУКЦИИ

1 Закон электромагнитной индукции Фарадея-Ленца (1.2) – одно из проявлений закона изменения энергии. Поместим цепь с источником  $\varepsilon$  и подвижным участком  $ab$  (рис. 5) в магнитное поле (поле направлено за чертеж).

За счет работы источника тока в контуре выделяется ленц-джоулево тепло и осуществляется перемещение проводника  $ab$ .

По закону изменения энергии работа источника за время  $dt$  равна количеству выделившегося за это время тепла и работе, затраченной на перемещение проводника  $ab$ .

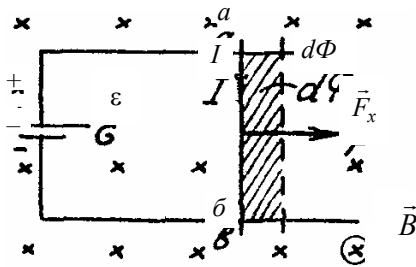


Рис. 5

$$\varepsilon I dt = I^2 R dt + I d\Phi, \quad (2.1)$$

где  $I$  – ток в контуре;  $R$  – сопротивление контура;  $d\Phi$  – магнитный поток, пронизывающий поверхность, которую описывает проводник  $ab$  при своем движении, иначе – приращение, которое получает магнитный поток, сцепленный с контуром.

Из (2.1) получаем

$$I = \frac{\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad (2.2)$$

Таким образом, при изменении магнитного потока, сцепленного с контуром, в последнем возникает дополнительная ЭДС, равная

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.3)$$

2 Рассмотрим механизм возникновения ЭДС индукции. Наличие в контуре ЭДС означает, что на носители заряда в контуре действует сторонние силы. Что это за силы?

В проводнике, движущемся в магнитном поле, – это *сила Лоренца*. Пусть прямолинейный проводник движется со скоростью  $\vec{v}$  в направлении, перпендикулярном к проводнику и к вектору  $\vec{B}$  (рис. 6).

Сила Лоренца разделяет разноименные заряды, смещая их к противоположным концам проводника. В проводнике возникает электростатическое поле. Разделение зарядов продолжается до тех пор, пока лоренцева сила и сила электростатического поля не уравновесятся.

*Замечание.* В процессе разделения зарядов, как известно, сторонние силы совершают работу. На первый взгляд может показаться, что сила Лоренца не может создавать ЭДС, поскольку она работы не совершает. Но это кажущееся противоречие. Все объясняется тем, что сила, создающая ЭДС – не полная сила Лоренца, а только ее составляющая. Действительно, в процессе установления в проводнике равновесного распределения зарядов, заряды перемещаются не только вместе с проводником, но и вдоль проводника. Следовательно, полная скорость каждого носителя заряда равна  $\vec{v} + \vec{u}$ , где  $\vec{v}$  – скорость проводника;  $\vec{u}$  – скорость носителей относительно проводника (рис. 7).

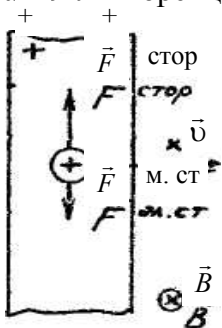


Рис. 6

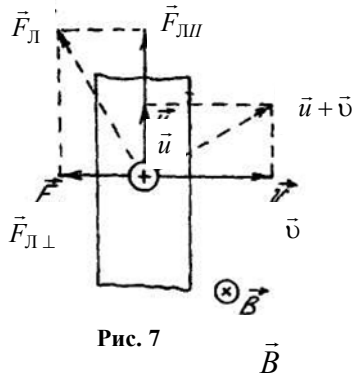


Рис. 7

Рис. 7

Полная сила Лоренца перпендикулярна к результирующей скорости  $\vec{v} + \vec{u}$ . Разложим эту силу на две составляющие:  $\vec{F}_{L||} = q[\vec{v}\vec{B}]$ , параллельную проводнику и обусловленную скоростью  $\vec{v}$  и  $\vec{F}_{L\perp} = q[\vec{u}\vec{B}]$ , перпендикулярную к проводнику и обусловленную скоростью  $\vec{u}$ .

Составляющая  $\vec{F}_{L||}$  играет роль сторонней силы, составляющая  $\vec{F}_{L\perp}$  тормозит движение проводника. Модули этих составляющих равны соответственно

$$F_{L||} = qvB, F_{L\perp} = quB.$$

Элементарная работа, совершаемая силой  $F_{L||}$  за время  $dt$  равна

$$dA' = F_{L||} u dt \cos 0^\circ = qvBudt.$$

Элементарная работа, совершаемая силой  $\vec{F}_{L\perp}$  за этот же промежуток времени, равна

$$dA'' = F_{L\perp} v dt \cos 180^\circ = -quBudt.$$

Работа полной силы Лоренца равна

$$dA = dA' + dA'' = qvBudt - quBudt = 0.$$

Источником энергии, которая запасается в проводнике и за его пределами в виде энергии электростатического поля, а также энергии, за счет которой совершается работа тока, является, в конечном счете, тело, перемещающее проводник и совершающее работу против тормозящей силы  $F_{L\perp}$ . После установления в проводнике равновесия,

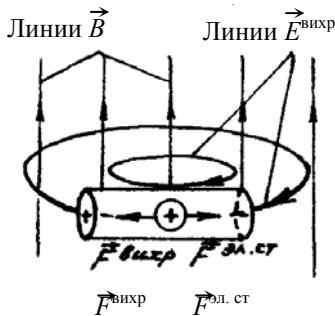


Рис. 8 Направление  $\vec{E}^{\text{вихр}}$  соответствует возрастанию  $B$

движение зарядов вдоль проводника прекратится, следовательно,  $F_{L\perp} = 0$ , и полная сила Лоренца будет направлена вдоль проводника.



3 Роль сторонних сил в случае неподвижного проводника, находящегося в изменяющемся магнитном поле, играют *силы вихревого электрического поля*. Вихревое электрическое поле возникает в тех областях пространства, где имеется изменяющееся магнитное поле (подробнее об этом – в п. 16). Вихревое электрическое поле непотенциально, его линии замкнуты, силы неконсервативны. Если проводник разомкнут, а вихревое поле с течением времени не изменяется, то силы этого поля уравниваются внутри проводника силами электростатического поля, возникшего в результате разделения зарядов (рис. 8).

Если же проводник образует замкнутый контур, вихревое электрическое поле вызовет в нем ток. Этот ток будет существовать до тех пор, пока существует вихревое поле.

### 3 РАСЧЕТ ЭДС ИНДУКЦИИ

Чтобы найти ЭДС индукции, действующую в данной цепи, нужно найти магнитный поток  $\Phi$ , сцепленный с цепью, и продифференцировать этот поток по времени.

*Пример 1.* ЭДС индукции в прямолинейном проводнике, движущемся в однородном магнитном поле (рис. 9).

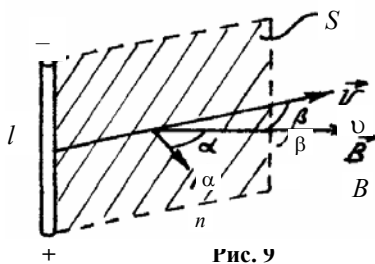


Рис. 9

Пусть  $B$  – модуль индукции магнитного поля;  $l$  – длина проводника;  $v$  – модуль скорости движения проводника.

Магнитный поток, сцепленный с движущимся линейным проводником, – это поток, пронизывающий площадь  $S$ , которую описывает проводник при своем движении. Нетрудно видеть, что при прямолинейном поступательном движении проводника

$$\Phi = BS \cos \alpha = BS \sin \beta,$$

где  $\alpha$  – угол между  $\vec{B}$  и нормалью к  $S$ ;  $\beta$  – угол между  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$  ( $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ),  $S = lv t$ , следовательно,

$\Phi = Blvt \sin \beta$  и ЭДС индукции равна

$$\xi_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv \sin \beta. \quad (3.1)$$

*Пример 2.* ЭДС индукции в витке, вращающемся в однородном магнитном поле (рис. 10).

$B$  – модуль индукции магнитного поля;  $S$  – площадь витка;  $\omega$  – угловая скорость вращения витка.

Пусть виток вращается вокруг оси, перпендикулярной  $\vec{B}$  и лежащей в плоскости витка. Мгновенное значение магнитного потока, сцепленного с витком, равно

$$\Phi = BS \cos \alpha.$$

Угол  $\alpha$  между нормалью к витку и направлением  $\vec{B}$  в момент времени  $t$  равен

$$\alpha = \omega t + \varphi_0,$$

где  $\varphi_0$  – угол между  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$  в начальный момент времени.

Следовательно,

$$\Phi = BS \cos(\omega t + \varphi_0).$$

ЭДС

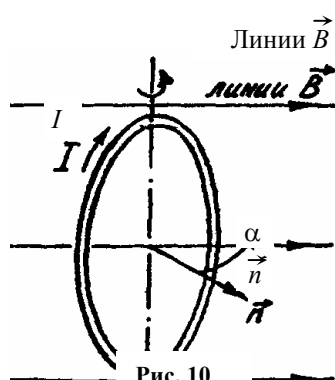


Рис. 10

индукции

$$\begin{aligned} \xi_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} [BS \cos(\omega t + \varphi_0)] = \\ &= BS\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = \xi_m \sin(\omega t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $BS\omega$  –  
Из (3.2)

амплитуда ЭДС.

видно, что ЭДС, возникающая в витке, равномерно вра-

шающемся в однородном магнитном поле, изменяется со временем по гармоническому закону.

ЭДС в витке не возникает, если виток движется в однородном магнитном поле поступательно (в этом случае  $B = \text{const}$ ,  $S = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{const}$  и, следовательно,  $\Phi = BS\cos\alpha = \text{const}$ , если виток вращается вокруг оси, параллельной  $\vec{B}$ , или вокруг оси, перпендикулярной к плоскости витка (и в этих случаях  $\Phi = \text{const}$ ).

Если в магнитном поле вращается контур, состоящий из  $N$  витков, то действующая в нем ЭДС равна сумме ЭДС, возникающих в каждом из витков

$$\varepsilon_i = -\sum_{i=1}^N \frac{d\Phi_i}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \Phi_i. \quad (3.3)$$

Величину  $\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i$  называют магнитным потокосцеплением или полным магнитным потоком. Если все  $N$  витков пронизываются одним и тем же потоком  $\Phi_i$ , то

$$\Psi = N\Phi_i. \quad (3.4)$$

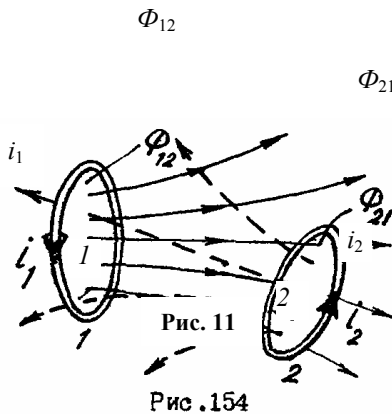
Например, ЭДС в соленоиде, равномерно вращающемся в однородном магнитном поле вокруг оси, не параллельной  $\vec{B}$  и осевой линии соленоида, равна

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt} = N\varepsilon_m \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3.5)$$

где  $N$  – число витков соленоида;  $\varepsilon_m$  – амплитуда ЭДС в одном витке.

#### 4 ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ

1 Рассмотрим два контура 1 и 2, расположенные на некотором расстоянии друг от друга (рис. 11). При наличии тока во втором контуре ( $i_2$ ) и при соответствующем взаимном расположении контуров, первый контур будет пронизываться некоторым магнитным потоком  $\Phi_{12}$ .



Этот поток  
индукция  
контур

В вакууме и в неферромагнитной среде  $B_2 \sim i_2$ . Следовательно,

при прочих равных условиях тем больше, чем больше  $\vec{B}_2$ , создаваемая током ( $i_2$ ) в том месте, где находится I.

$$\Phi_{12} = L_{12}i_2. \quad (4.1)$$

Аналогично поток, создаваемый током  $i_1$  и сцепленный со вторым контуром, пропорционален  $i_1$

$$\Phi_{21} = L_{21}i_1. \quad (4.2)$$

Если потоки  $\Phi_{12}$  и  $\Phi_{21}$  существуют, то говорят, что между контурами имеет место магнитная связь.

2 Коэффициенты пропорциональности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называются взаимной индуктивностью контуров.

*Взаимная индуктивность – физическая величина, характеризующая свойство двух (или более) контуров образовывать общие потокосцепления, когда по одному из них течет ток.*

Взаимная индуктивность  $L_{21}$  численно равна магнитному потоку, сцепленному с контуром 2 при единичном токе в первом контуре. Взаимная индуктивность  $L_{12}$  численно равна магнитному потоку, сцепленному с контуром 1 при единичном токе во втором контуре.

Взаимная индуктивность зависит от формы, размеров и относительного расположения контуров. При наличии среды – от магнитных свойств этой среды.

Покажем, что  $L_{12} = L_{21}$ . Найдем работу, совершаемую магнитными силами при сближении контуров 1 и 2 (рис. 11) из бесконечности до рассматриваемого положения. Если считать, что перемещается первый контур в магнитном поле второго контура, то совершаемая при этом работа равна

$$A' = I_1(\Phi_{12} - 0) = I_1 L_{12} I_2.$$

Если считать, что перемещается второй контур в магнитном поле первого, то

$$A'' = I_2(\Phi_{21} - 0) = I_2 L_{21} I_1.$$

Но  $A' = A''$  (это следует из относительности движения). Следовательно

$$I_1 L_{12} I_2 = I_2 L_{21} I_1;$$

$$L_{12} = L_{21}. \quad (4.3)$$

3 Явление взаимной индукции заключается в возникновении ЭДС индукции в одном из контуров при изменении магнитного потока, сцепленного с этим контуром.

Пусть в контуре 2 (рис. 11) течет ток. При наличии магнитной связи между контурами 1 и 2 с контуром 1 сцеплен магнитный поток  $\Phi_{12} = L_{12} i_2$ . При всяком изменении потока в контуре 1 возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_{12} i_2).$$

Изменение  $\Phi_{12}$  может быть обусловлено:

- а) изменением тока  $i_2$  (когда  $L_{12} = \text{const}$ );
- б) изменением взаимной индуктивности контуров  $L_{12}$  (когда  $i_2 = \text{const}$ );
- в) одновременным изменением  $i_2$  и  $L_{12}$ . ЭДС индукции в этих случаях будут равны соответственно:

$$\varepsilon_{i1} = -L_{12} \frac{di_2}{dt}; \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_{i1} = -i_2 \frac{dL_{12}}{dt}; \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_{i1} = -\left( L_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{dL_{12}}{dt} \right). \quad (4.6)$$

Аналогично при наличии тока в первом контуре во втором контуре возникает ЭДС, если этот ток изменяется или изменяется взаимное расположение контуров:

$$\varepsilon_{i2} = -L_{21} \frac{di_1}{dt}; \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{i2} = -i_1 \frac{dL_{21}}{dt}; \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_{i2} = -\left( L_{21} \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{dL_{21}}{dt} \right). \quad (4.9)$$

## 5 САМОИНДУКЦИЯ

1 Ток  $i$ , текущий в цепи, создает магнитное поле, магнитный поток которого сквозь поверхность, ограниченную контуром цепи, в неферромагнитной среде пропорционален этому току (это следует из закона Био-Савара-Лапласа и из определения магнитного потока)

$$\Phi = Li, \quad (5.1)$$

где  $L$  – коэффициент пропорциональности, называемый индуктивностью цепи.

*Индуктивность* – скалярная физическая величина, характеризующая свойство цепи создавать собственный магнитный поток, когда по цепи течет ток, и численно равная магнитному потоку, создаваемому единичным током: если  $|i|=1$ , то  $|L|=|\Phi|$ .

Индуктивность зависит от формы и размеров цепи и не зависит (в отсутствие ферромагнетиков) от тока в цепи. При наличии среды  $L$  зависит от магнитных свойств этой среды. Если среда ферромагнитная, то  $L$  зависит и от тока в цепи, поскольку от  $i$  в этом случае зависит магнитная проницаемость среды  $\mu$ . Соотношение (5.1) формально можно распространять и на случай ферромагнитной среды, но следует помнить, что при прочих равных условиях  $L = L(i)$ .

В СИ индуктивность измеряется в генри (Гн). Генри – индуктивность такой цепи, собственный магнитный поток которой равен 1 Вб при токе в цепи 1 А

$$1 \text{ Гн} = \frac{1 \text{ Вб}}{1 \text{ А}}.$$

2 Одна из возможных (но не единственных) схем расчета индуктивности такова. По контуру мысленно пропускают ток  $i$ . Зная форму и размеры контура, вычисляют магнитный поток  $\Phi$ , сцепленный с контуром. Сопоставляя  $\Phi$  с формулой (5.1), находят  $L$ .

*Пример.* Вычислим индуктивность длинного соленоида с неферромагнитным сердечником. При пропускании по соленоиду тока  $i$  в нем создается однородное магнитное поле с индукцией  $B = \mu_0 \mu n i$ . Магнитный поток, пронизывающий один виток, равен  $\Phi = BS$ , а потокосцепление соленоида равно

$$\Psi = \Phi N = BSnl = \mu_0 \mu n^2 l S i = \mu_0 \mu n^2 V i, \quad (5.2)$$

где  $l$  – длина соленоида;  $S$  – площадь поперечного сечения;  $n$  – число витков на единицу длины;  $V$  – объем соленоида.

Сопоставляя (5.2) с (5.1), получим

$$L = \mu_0 \mu n^2 V. \quad (5.3)$$

*Замечание.* Из (5.3) видно, что магнитная постоянная в СИ измеряется в  $\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ :  $\mu_0 = \frac{L}{n^2 V \mu} \rightarrow$

$$\frac{\text{Гн}}{\frac{1}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

3 Явление самоиндукции заключается в возникновении дополнительной ЭДС (ЭДС самоиндукции) и обусловленного ею тока (тока самоиндукции) в цепи, по которой течет изменяющийся ток или индуктивность которой изменяется (при наличии в цепи тока).

ЭДС самоиндукции зависит от скорости изменения собственного магнитного потока

$$\varepsilon_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li). \quad (5.4)$$

При  $L = \text{const}$  (контур цепи жесткий, отсутствуют ферромагнетики) и  $I = i(t)$

$$\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt}. \quad (5.5)$$

При  $I = \text{const}$  и  $L = L(t)$

$$\varepsilon_s = -i \frac{dL}{dt}. \quad (5.6)$$

Если одновременно изменяется и  $i$ , и  $L$ , то ЭДС самоиндукции равна

$$\varepsilon_s = -\left( L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} \right). \quad (5.7)$$

Знак минус указывает на то, что при увеличении тока или индуктивности цепи полярности ЭДС самоиндукции и ЭДС источника, создающего ток, противоположны; при уменьшении тока или индуктивности – одинаковы.

Соотношение (5.5) позволяет дать динамическое определение индуктивности. Если  $\left| \frac{di}{dt} \right| = 1$ , то  $|L| = |\varepsilon_s|$ . Индуктивность численно равна абсолютной величине ЭДС самоиндукции, возникающей в цепи при единичной скорости изменения тока. Приведенное определение справедливо в отсутствие ферромагнетиков, когда  $L$  не зависит от тока.

Самоиндукция в электромагнетизме играет такую же роль, как и инерция в механике. Вследствие самоиндукции установление и исчезновение тока в цепи, а также любое его изменение происходит не мгновенно, а постепенно.

## 6 УСТАНОВЛЕНИЕ И ИСЧЕЗНОВЕНИЕ ТОКА В ЦЕПИ

1 На рис. 12 дана схема опыта по наблюдению токов самоиндукции. В этой схеме  $\varepsilon$  – источник тока;  $i$  – катушка индуктивности;  $\Gamma$  – нуль-гальванометр;  $K$  – ключ.

При замкнутом ключе ток от источника  $\varepsilon$  проходит через катушку гальванометр в направлениях, указанных на рисунке сплошными стрелками. После отключения источника  $\varepsilon$ , катушке возникает ток самоиндукции направленный согласно закону Лен

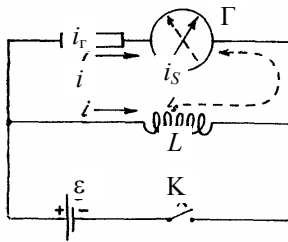


Рис. 12

в ту же сторону, что и ток от источника  $\varepsilon$ .

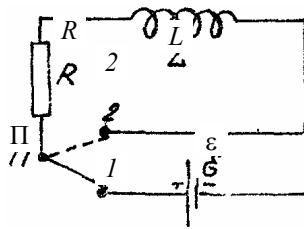
Этот ток целиком проходит через гальванометр, где его направление противоположно первоначальному току  $i_\Gamma$  (ответвляться в источник ток самоиндукции не может, так как ключ  $K$  разомкнут). В результате гальванометр дает отброс в противоположную сторону. Ток самоиндукции при замыкании на этой схеме заметен гораздо хуже, так как он делится между источником тока и гальванометром, причем направление его в гальванометре совпадает с направлением тока от источника  $\varepsilon$ .

2 Найдем закон исчезновения тока в цепи (рис. 13).  $\varepsilon$  – ЭДС источника тока;  $L$  – индуктивность цепи;  $R$  – сопротивление цепи;  $\Pi$  – переключатель.

Если переключатель поставить в положение 1, то в цепи установится ток

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}.$$

Перебросим переключатель в источник  $\varepsilon$ . Ток в цепи начнет



положение 2, отклонив тем самым исчезать. Возникнет ЭДС самоиндукции.

Рис. 13

По второму правилу Кирхгофа

$$iR = \varepsilon_s,$$

где  $i$  – мгновенное значение тока;  $\varepsilon_s$  – мгновенное значение ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt} \quad (\text{полагаем, что } L = \text{const}).$$

Следовательно,  $iR = -L \frac{di}{dt}$ .

Разделив переменные  $i$  и  $t$ , получим уравнение, которое легко интегрируется

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt. \quad (6.1)$$

Проинтегрировав (6.1), получим  $\ln i = -\frac{R}{L}t + \ln C$  (константы интегрирования левой и правой частей (6.1) мы объединили в одну постоянную и представили ее в виде  $\ln C$ ). После потенцирования получим

$$i = Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Константу  $C$  определим из начальных условий. При  $t = 0$ ,  $i = I_0$ , следовательно,  $C = I_0$  и

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (6.2)$$

Таким образом, ток в цепи исчезает не мгновенно, а постепенно, уменьшаясь со временем по экспоненциальному закону. Быстрота убывания тока определяется величиной

$$\tau = \frac{L}{R}, \quad (6.3)$$

имеющей размерность времени  $\left( \frac{\text{Гн}}{\text{С (А/с)}} = \frac{\text{ВА}}{\text{АА/с}} = \text{с} \right)$ . Она называется – «постоянная времени». Учитывая обозначение (6.3), формуле (6.2) можно придать вид

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (6.4)$$

где  $\tau$  – есть время, в течение которого ток уменьшается в  $e$  раз.

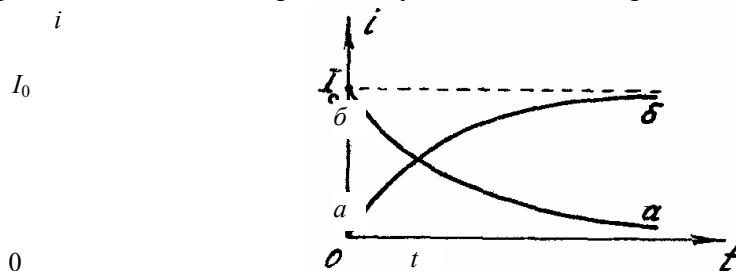


Рис. 14

Чем больше  $\tau$ , тем медленнее уменьшается ток. График тока изображен на рис. 14 (кривая  $a$ ).

3 Найдем закон установления тока. Перебросим переключатель в положение  $l$ . Начнется процесс установления тока, при котором в цепи, кроме ЭДС источника будет действовать ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_s$ . По второму правилу Кирхгофа

$$iR = \varepsilon + \varepsilon_s = \varepsilon - L \frac{di}{dt}.$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\frac{di}{iR - \varepsilon} = -\frac{dt}{L}. \quad (6.5)$$

Возьмем неопределенные интегралы от левой и правой частей, объединив при этом константы интегрирования и умножив обе части на  $R$

$$\ln(iR - \varepsilon) = -\frac{R}{L}t + \ln C.$$

Потенцируем:  $iR - \varepsilon = Ce^{-\frac{R}{L}t}$ .

Константу  $C$  находим из начальных условий. В момент времени  $t = 0$ ,  $I = 0$  следовательно,  $C = -\varepsilon$

$$iR - \varepsilon = -\varepsilon e^{-\frac{R}{L}t},$$

откуда

$$i = \frac{\varepsilon}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (6.6)$$

или

$$i = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad (6.7)$$

где  $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$  – установившееся значение тока.

Таким образом, нарастание тока в цепи происходит также, как и исчезновение, постепенно (рис. 14, кривая б).

4 Полученные выводы справедливы при  $L = \text{const}$ . Если  $L \neq \text{const}$ , то ЭДС самоиндукции может оказаться больше ЭДС источника тока, и ток может значительно превзойти установившийся.

## 7 ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

1 Вновь рассмотрим цепь, изображенную на рис. 13. Установим переключатель в положение 1. В цепи установится ток  $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$  – этот ток создаст в окружающем пространстве магнитное поле. Если переключатель поставить в положение 2, то ток, а вместе с ним и магнитное поле начнут исчезать. Найдем работу тока за время исчезновения. Элементарная работа за время  $dt$  равна

$$dA = \varepsilon_s i dt, \quad (7.1)$$

где  $\varepsilon_s$  и  $i$  – значения ЭДС самоиндукции и тока в момент времени  $t$ . Если  $L = \text{const}$ , то  $\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt}$ .

Следовательно,

$$dA = -L i di. \quad (7.2)$$

Проинтегрировав это выражение по  $i$  от  $I_0$  до 0, мы получим полную работу, совершенную током за время, в течение которого исчезает магнитное поле

$$A = -\int_{I_0}^0 L i di = \frac{L I_0^2}{2}. \quad (7.3)$$

За счет работы (7.3) происходит увеличение внутренней энергии проводников, из которых образована цепь. Термодинамические соображения и эксперименты с электромагнитными волнами позволяют заключить, что носителем энергии, за счет которой совершается работа (7.3), является магнитное поле. Таким образом, энергия магнитного поля  $W$ , созданного током  $i$ , текущим в цепи с индуктивностью  $L$ , равна

$$W = \frac{Li^2}{2}. \quad (7.4)$$

2 Энергию (7.4) можно выразить через характеристики магнитного поля. Пусть цепь, изображенная на рис. 13, содержит длинный соленоид с сердечником из однородного неферромагнитного магнетика. Индуктивность цепи примем равной индуктивности соленоида (индуктивность всех других элементов цепи мала по сравнению с индуктивностью соленоида). Индуктивность длинного соленоида равна

$$L = \mu_0 \mu n^2 V.$$

Магнитное поле соленоида сосредоточено внутри соленоида. Индукция этого поля равна

$$B = \mu_0 \mu n i, \text{ откуда } i = \frac{B}{\mu_0 \mu n}.$$

Подставив выражения для  $L$  и  $i$  в (7.4), получим

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V. \quad (7.5)$$

Магнитное поле длинного соленоида однородно. Следовательно, плотность энергии этого поля  $\omega$  (энергия единицы объема) равна

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \quad (7.6)$$

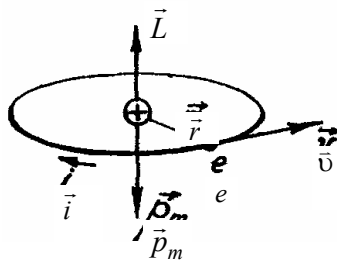
Формула (7.6) справедлива для любого поля – и однородного, и неоднородного. Если известна зависимость  $\omega$  от координат, то для нахождения энергии магнитного поля, распределенного в объеме  $V$ , нужно вычислить интеграл

$$W = \int_V \omega dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} dV. \quad (7.7)$$

## МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

### 8 МАГНИТНЫЕ МОМЕНТЫ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

1 Согласно представлениям классической физики электроны в атомах движутся по замкнутым орбитам. Следовательно, каждый электрон создает замкнутый микроток, магнитное поле которого можно охарактеризовать магнитным моментом.



Ри 5

Магнитный момент  $\vec{p}_m$ , обусловленный движением электрона по орбите, называется орбитальным магнитным моментом электрона.

Величина орбитального магнитного момента электрона равна



$$\vec{p}_m = iS,$$

где  $i$  – ток, создаваемый электроном;  $S$  – площадь орбиты.

Будем считать орбиту круговой. Через любое сечение электронной орбиты за единицу времени переносится заряд  $ev$ , где  $e$  – заряд электрона;  $v$  – число оборотов в секунду. Следовательно, созданный электроном ток равен  $i = ev$ . Частоту обращения  $\nu$  можно выразить через линейную скорость  $v$

$$\nu = \frac{v}{2\pi r},$$

где  $r$  – радиус орбиты. Площадь орбита равна  $S = \pi r^2$ .

Таким образом

$$p_m = iS = \frac{evr}{2}. \quad (8.1)$$

Так как заряд электрона отрицателен, направление движения электрона и направление создаваемого им тока противоположны. Направление вектора  $\vec{p}_m$  образует с направлением тока правовинтовую, а с направлением движения электрона левовинтовую систему (рис. 15).

Движущийся по орбите электрон обладает моментом импульса, который принято называть орбитальным механическим моментом

$$\vec{L} = [\vec{r}m\vec{v}], \quad (8.2)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор электрона (рис. 15).

Модуль вектора  $\vec{L}$  равен

$$L = rmv, \quad (8.3)$$

так как угол между  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$  все время прямой.

Отношение модулей векторов орбитального магнитного и орбитального механического моментов называется орбитальным *гиромагнитным отношением электрона*

$$\frac{p_m}{L} = g. \quad (8.4)$$

Учитывая направления  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}$

$$\vec{p}_m = -g\vec{L}. \quad (8.5)$$

Подставив в (8.4) выражения для  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}$ , получим

$$g = \frac{e}{2m}. \quad (8.6)$$

Соотношение (8.6) справедливо для любых орбит.

Сумма орбитальных магнитных моментов всех электронов в атоме образует орбитальный магнитный момент атома, сумма всех орбитальных механических моментов – орбитальный механический момент атома.

Гиромагнитное отношение не зависит от числа электронов, по которым производится суммирование механических и магнитных моментов, т.е. для любого числа электронов (в атоме, в магнетике в целом) выполняются соотношения:

$$\frac{\left| \sum \vec{p}_{mi} \right|}{\left| \sum \vec{L}_i \right|} = g$$

$$\sum \vec{p}_{mi} = -g \sum \vec{L}_i. \quad (8.7)$$

2 Из (8.7) следует, что намагничивание магнетика должно сопровождаться его вращением, а вращение – намагничиванием. Первое явление было открыто Эйнштейном и де Гаазом (1915 г.), Второе – Барнеттом (1909 г.).

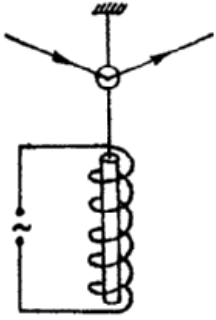


Рис. 16  
Если магнетик не намагничен, то суммарный магнитный момент, а, следовательно, и суммарный механический момент всех его электронов равен нулю. При намагничивании магнетик приобретает некоторый магнитный момент  $\sum \vec{p}_i$ . Следовательно, электроны приобретают и некоторый механический момент  $\sum \vec{L}_i$ . Но поворот электронных токов происходит под действием внутренних сил, поэтому должен выполняться закон сохранения момента импульса: сам магнетик должен приобрести момент импульса –  $\sum \vec{L}_i$ , т.е. прийти во вращение. При изменении направления намагничивания направление вращения изменяется.

Схема опыта Эйнштейна и де Гааза изображена на рис. 16. Железный стержень, подвешенный на кварцевой нити с зеркальцем, помещается в соленоид. По соленоиду пропускается переменный ток. При изменении направления тока в соленоиде направление поворота стержня изменяется на противоположное (поворот стержня фиксируется с помощью светового зайчика, отражающегося от зеркальца).

Если частота изменений тока совпадает с частотой собственных крутильных колебаний стержня, то повороты стержня будут заметными и их можно зафиксировать. Измерив магнитный и механический моменты стержня, можно определить гиромагнитное отношение.

Барнетт производил в быстрое вращение железный стержень и измерял возникающую при этом намагниченность. По данным опыта также определялось гиромагнитное отношение.

3 Гиромагнитное отношение в опытах Эйнштейна и Барнетта оказалось в два раза больше теоретически ожидаемого значения. Это расхождение эксперимента с теорией оставалось загадкой вплоть до 1925 г.

В 1925 г. С. Гоудсмит и Г. Уленбек выдвинули предположение о том, что электрон независимо от орбитального движения обладает собственным моментом импульса  $\vec{L}_s$  и собственным магнитным моментом  $\vec{p}_{ms}$ . Собственный момент импульса электрона был назван спином, собственный магнитный момент – спиновым магнитным моментом. Предположение Гоудсмита и Уленбека в последующем полностью подтвердилось и надежно доказано экспериментально.

Первоначально наличие у электрона спина связывали с вращением электрона вокруг собственной оси (англ. spin – вращение). Однако, такая чисто механическая модель спина противоречит теории относительности (линейная скорость внешних частей электрона должна превышать скорость света) и от нее отказались. Спин – это такое свойство электрона, которое нельзя представить наглядно.

Спиновый магнитный момент характеризует собственное магнитное поле электрона. На расстоянии это поле подобно полю контура с током. Во внешнем магнитном поле на спиновый магнитный момент  $\vec{p}_{ms}$  действует вращательный момент.

Спином и спиновым магнитным моментом обладают не только электроны, но и многие другие элементарные частицы. Отношение модулей спинового магнитного момента и спина электрона называется спиновым гиромагнитным отношением электрона

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = g_s. \quad (8.8)$$

Измерения показали, что

$$g_s = \frac{e}{m}, \quad (8.9)$$

т.е. спиновое гиромагнитное отношение в два раза больше орбитального гиромагнитного отношения.

Из (8.8) и (8.9):

$$p_{ms} = \frac{e}{m} L_s. \quad (8.10)$$

Найденное Эйнштейном, де Гаазом и Барнеттом значение гиромагнитного отношения совпадает со спиновым гиромагнитным отношением. Следовательно, магнетизм железа обусловлен не орбитальными, а спиновыми магнитными моментами.

Спин в СИ измеряется в Дж·с, спиновый магнитный момент – в Дж/Тл.

Спин электрона равен .....  $L_S = 0,53 \cdot 10^{-34}$  Дж·с;

спиновый магнитный момент .....  $p_{mS} = 0,927 \cdot 10^{-23}$  Дж/Тл.

Величина спинового магнитного момента электрона, т.е.  $0,927 \cdot 10^{-23}$  Дж/Тл принимается за единицу намерения магнитных моментов атомов и называется магнетоном Бора.

4 Таким образом, магнитный момент атома складывается из орбитальных и спиновых магнитных моментов всех электронов атома, а также из спиновых моментов входящих в состав атомного ядра протонов и нейтронов.

Спины электронов, протонов и нейтронов по абсолютной величине одинаковы. Что касается спиновых магнитных моментов, то у протонов и нейтронов они значительно меньше, чем у электронов (при нахождении  $\bar{p}_{mS}$  протона в (8.10) нужно подставлять массу протона, которая почти в 2000 раз больше массы электрона). Поэтому магнитным моментом ядра можно пренебречь.

## 9 ДИАМАГНЕТИЗМ

Все вещества в магнитном отношении делятся на диамагнетики, парамагнетики и магнетики с упорядоченной магнитной структурой – ферро-, антиферро- и ферримагнетики.

С макроскопической точки зрения диамагнетики – это вещества, имеющие отрицательную магнитную восприимчивость и меньшую единицы магнитную проницаемость

$$\chi < 0, \mu < 1.$$

Диамагнетиками являются инертные газы, многие органические соединения, некоторые металлы (Bi, Zn, Au, Cu, Ag, Hg), смолы, молекулярный водород, стекло, мрамор и др.

Вектор намагниченности в диамагнетиках антипараллелен намагничивающему полю  $\vec{B}_0$ , поэтому результирующее поле в диамагнетиках  $\vec{B}$  всегда слабее внешнего поля  $\vec{B}_0$ .

Восприимчивость диамагнетиков не зависит от температуры и намагничивающего поля (в не очень сильных полях) и весьма мала по величине. Так у меди  $\chi = -0,84 \cdot 10^{-7}$ , у висмута  $\chi = -1,7 \cdot 10^{-4}$ .

Вектор намагниченности диамагнетиков пропорционален намагничивающему внешнему полю  $\vec{B}_0$ . На рис. 17 изображен график зависимости  $J_x$  от  $B_{0x}$  ( $J_x$  и  $B_{0x}$  – проекции векторов  $\vec{J}$  и  $\vec{B}_0$  на ось  $x$ , направленную по вектору  $\vec{B}_0$ ).

С микроскопической точки зрения диамагнетики – это вещества, состоящие из атомов и молекул, магнитные моменты которых (сумма орбитальных и спиновых моментов) в отсутствие внешнего поля равны нулю.

Рассмотрим механизм намагничивания диамагнетиков.

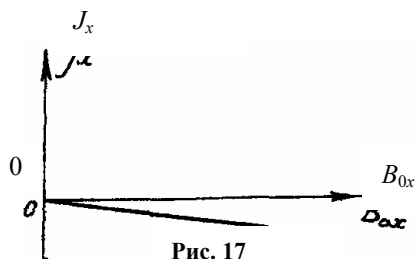


Рис. 17

## Атомный диамагнетизм (диамагнетизм связанных электронов)

Во внешнем магнитном поле в каждом атоме диамагнетика индуцируется магнитный момент, направленный против поля. Индуцированные магнитные моменты обусловлены изменением угловой скорости обращения электронов. Рассмотрим одну из электронных орбит.

В отсутствие магнитного поля на электрон действует кулоновская сила, играющая роль центростремительной силы. По второму закону Ньютона

$$F_{\text{эл}} = m\omega_0^2 r,$$

где  $m$  – масса электрона;  $\omega_0^2$  – угловая скорость обращения электрона;  $r$  – радиус орбиты.

При наличии магнитного поля на электрон действует еще сила Лоренца. Если магнитное поле перпендикулярно к плоскости электронной орбиты и направлено так, как на рис. 18 (за чертеж), то электрическая сила и сила Лоренца противоположны друг другу.

Модуль центростремительной силы равен  $F_{\text{эл}} - F_{\text{Л}}$  и, следовательно,  $F_{\text{эл}} - F_{\text{Л}} = m\omega_1^2 r$ .

Радиус электронной орбиты при этом не изменяется (объяснение этому факту дает квантовая механика). Так как величина центростремительной силы уменьшается, то уменьшается и угловая скорость обращения электрона:  $\omega_1 < \omega_0$ .

Уменьшение угловой скорости эквивалентно возникновению дополнительного кругового тока  $\Delta i$ , направленного против электронного орбитального тока.

Ток  $\Delta i$  создает дополнительный магнитный момент  $\Delta \vec{p}_{mS}$ , направленный против внешнего поля.

Если магнитное поле то сила Лоренца и кулоновская угловая скорость обращения

Возрастание угловой дополнительной кругового электронным током. Этот ток направленный опять-таки

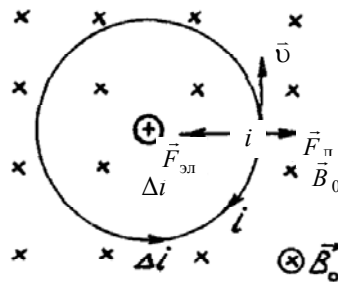


Рис. 18

направлено так, как на рис. 19 (к нам), сила направлены в одну сторону и электрона возрастает:  $\omega_2 > \omega_0$ .

скорости эквивалентно возникновению тока  $\Delta i$ , совпадающего с орбитальным создает магнитный момент  $\Delta \vec{p}_{mS}$ , против внешнего магнитного поля.

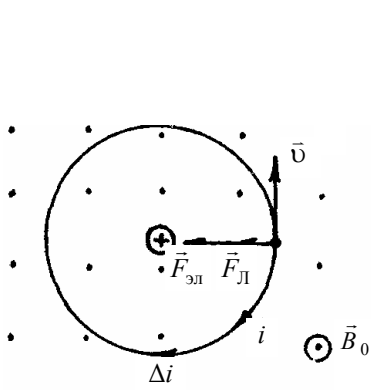


Рис. 19

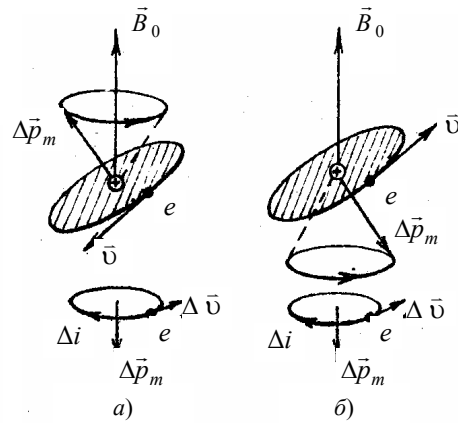


Рис. 20

Электронная орбита, не перпендикулярная к магнитному полю под действием поля прецессирует – совершает такое движение, при котором орбитальный магнитный момент  $\vec{p}_{mS}$  описывает конус, осью которого служит направление  $\vec{B}_0$ . Направление прецессии связано с направлением  $\vec{B}_0$  правилом правого винта: если поступательное движение винта совпадает с  $\vec{B}_0$ , то вращение винта совпадает с направлением прецессии. При этом направление обращения электрона по орбите противоположно направлению прецессии, если угол между  $\vec{p}_{mS}$  и  $\vec{B}_0$ , острый, и совпадает с направлением прецессии, если этот угол тупой (рис. 20, а, б).

Прецессия орбиты обуславливает дополнительное движение электрона в плоскости, перпендикулярной к  $\vec{B}_0$ . За счет этого движения возникает магнитный момент  $\vec{p}_{mS}$ , направленный против поля. Просуммировав магнитные моменты, приобретаемые всеми электронами атома, можно найти индуцированный магнитный момент атома.

Приобретение атомом магнитного момента во внешнем магнитном поле называется атомным диамагнетизмом или диамагнетизмом связанных электронов. Этот эффект имеет место во всех без исключения веществах.

### Диамагнетизм свободных электронов (диамагнетизм Ландау)

Вещества, в которых имеются свободные электроны (металлы, полупроводники, ионизованные газы), кроме атомного диамагнетизма, обладают диамагнетизмом Ландау (по имени советского физика Л.Д. Ландау).

Как известно, заряженная частица, влетающая в магнитное поле под произвольным углом, движется по винтовой траектории. Это движение складывается из движения по окружности в плоскости, перпендикулярной к полю, и из равномерного прямолинейного движения вдоль (или против) поля. За счет движения по окружности создается магнитный момент, направленный против поля.

Таким образом, в магнитном поле свободные электроны металлов и других веществ создают диамагнитные моменты. Этот диамагнетизм свободных электронов и называется диамагнетизмом Ландау.

## 10 ПАРАМАГНЕТИЗМ

1 С макроскопической точки зрения парамагнетики – вещества, для которых  $\chi$ , как и у диамагнетиков, невелика, но положительна, а  $\mu$  несколько больше единицы

$$\chi > 0, \mu > 1.$$

Парамагнетиками являются Na, K, Rb, Cs, Mg, Al, Mn, Pt, O растворы солей железа и др. Восприимчивость парамагнетиков при обычных температурах лежит в пределах от  $10^{-3}$  до  $10^{-6}$ . Так, у алюминия  $\chi = 2 \cdot 10^{-5}$ , у платины  $\chi = 3 \cdot 10^{-4}$ , у хлористого железа ( $\text{FeCl}_3$ )

$$\chi = 2,5 \cdot 10^{-3}.$$

Опыт показывает, что  $\chi$  парамагнетиков зависит от температуры (закон Кюри)

$$\chi = \frac{C}{T}, \quad (10.1)$$

где  $C$  – постоянная Кюри, зависящая от рода вещества.

Закон Кюри справедлив при не слишком низких температурах.

Вектор намагничивания в изотропных парамагнетиках в не очень сильных постоянных внешних полях пропорционален намагничивающему полю и совпадает с ним по направлению. В очень сильных полях ( $10^2$  Тл и более) пропорциональность между  $J$  и  $B_0$  нарушается и при некотором  $B_0$  наступает насыщение:  $J$  перестает зависеть от  $B_0$  (рис. 21).

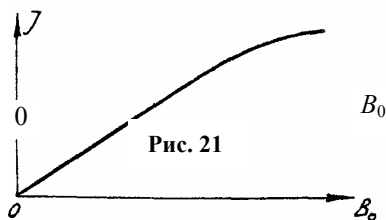


Рис. 164

2 С микроскопической точки зрения парамагнетики – это вещества, атомы и молекулы которых в отсутствие внешнего магнитного поля обладают магнитными моментами, т.е. являются магнитными диполями.

В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов парамагнетика вследствие теплового движения, ориентируются беспорядочно, поэтому суммарный магнитный момент атомов равен нулю.

При наличии магнитного поля магнитные моменты ориентируются преимущественно по полю, в результате чего возникает намагниченность (Изменение ориентации магнитных моментов атомов происходит только при столкновениях атомов друг с другом). Интенсивность намагничивания пропорциональна намагничивающему полю  $B_0$  и обратно пропорциональна температуре парамагнетика  $T$ : тепловое движение оказывает на магнитные диполи дезориентирующее действие.

Заметим, что в парамагнетиках наряду с поворотом электронных орбит имеет место и прецессия орбит, т.е. на парамагнитный эффект накладывается диамагнитный эффект. Парамагнитный эффект, как правило, перекрывает диамагнитный, поэтому в парамагнетиках внутреннее магнитное поле усиливает внешнее поле.

Классическая теория парамагнетизма была развита П. Ланжевром (Франция) в 1905 г.

*Парамагнетизм свободных электронов (парамагнетизм Паули).*

Электронный газ благодаря наличию спиновых магнитных моментов является парамагнитным. В магнитном поле собственные магнитные моменты электронов ориентируются преимущественно, по полю, создавая тем самым определенную намагниченность. С классической точки зрения в намагничивании должны принимать участие все свободные электроны. Это означает, что восприимчивость электронного газа должна зависеть от температуры. Опыт, однако, показывает, что восприимчивость электронного газа (в металлах) практически не зависит от температуры и, кроме того, значительно меньше того значения, которое предсказывает классическая теория. Дело, однако, в том, что парамагнетизм свободных электронов – эффект квантовый.

Как известно, все глубокие энергетические уровни зоны проводимости металлов заполнены парами электронов с противоположно направленными спинами. Частично или полностью свободные уровни имеются только вблизи уровня Ферми и выше уровня Ферми. Электрон, изменяющий ориентацию своего спина, должен покинуть уровень, который он до этого занимал (в противном случае на этом уровне окажутся два электрона с одинаково направленными спинами – принципом Паули это запрещено). Для перехода на новый уровень требуется энергия. Та энергия, которую электроны получают при включении магнитного поля, невелика. Это приводит к тому, что переходят на новые энергетические уровни и ориентируют свои магнитные моменты по полю лишь электроны, заполняющие уровни вблизи уровня Ферми. Подавляющее же большинство электронов не меняет ориентации своих моментов и не вносит вклада в намагниченность. Вот почему парамагнитная восприимчивость электронного газа невелика. Поскольку уровень Ферми почти не зависит от температуры, практически от температуры не зависит и восприимчивость электронного газа

## 11 ФЕРРОМАГНЕТИЗМ

1 Ферромагнетики – вещества, способные намагничиваться очень сильно (внутреннее поле в таких веществах может в  $10^2 \dots 10^6$  раз превышать внешнее магнитное поле)

$$\chi \gg 0, \mu \gg 1.$$

Ферромагнетиками являются Fe, Co, Ni, Gd, сплавы и соединения этих элементов, а также некоторые сплавы и соединения Mn и Cr с неферромагнитными элементами, например MnAlCu, MnBi, CrTe и др.

Ферромагнетики, кроме способности сильно намагничиваться, обладают рядом свойств, существенно отличающих их от других магнетиков.

А. *Нелинейная зависимость намагниченности  $\vec{J}$ , а, следовательно, и индукции результирующего поля  $\vec{B}$  от намагничивающего внешнего поля  $\vec{B}_0$ .*

Обычно на графиках предпочитают изображать зависимость намагниченности и индукции в ферромагнетиках не от  $\vec{B}_0$ , а от  $\vec{H}$  ( $\vec{H}$ , как известно, так же как и  $\vec{B}_0$ , пропорционально макротоку, создающему намагничивающее поле).

На рис. 22 изображены графики зависимости  $J$  от  $H$  и  $B$  от  $H$  ферромагнетика (железо), магнитный момент которого первоначально был равен нулю.

Как видно из графиков, намагниченность при некотором значении  $H$  достигает насыщения. По достижении насыщения  $B$  растет с увеличением  $H$  по линейному закону.

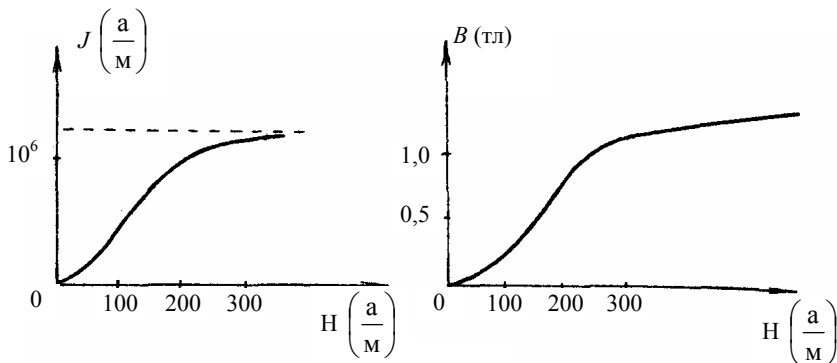


Рис. 22

**Б. Магнитный гистерезис.** Намагниченность ферромагнетика определяется не только существующим внешним магнитным полем, но и предысторией намагничивания. При изменении величины и направления внешнего поля намагниченность отстает от изменений этого поля. Это явление называется магнитным гистерезисом.

Если ферромагнетик намагнитить до насыщения, а затем уменьшать напряженность намагничивающего поля, то намагниченность  $J_x$  будет следовать не первоначальной кривой 1 (она называется основной кривой намагничивания), а новой кривой 2 (рис. 23). При  $H_x = 0$  ферромагнетик не утрачивает намагниченности. Намагниченность  $J_x^{ост}$ , которой ферромагнетик обладает в отсутствие внешнего магнитного поля, называется остаточной. Чтобы снять остаточную намагниченность, нужно включить внешнее поле, направление которого противоположно первоначальному полю, вызвавшему намагничивание.

Поле  $\vec{H}^{коэр}$  обратного направления, которое полностью снимает остаточную намагниченность, называется коэрцитивной силой. При дальнейшем увеличении обратного намагничивающего поля вновь происходит насыщение ферромагнетика.

В ненамагниченном состоянии ферромагнетик возвращается в соответствии с кривой 3.

При циклическом изменении величины и направления намагничивающего поля получается петлеобразная кривая, называемая петлей гистерезиса. Если максимальные значения  $\vec{H}$  таковы, что достигается насыщение, получается максимальная петля гистерезиса (сплошная кривая на рис. 23), если насыщение не достигается, получается петля, называемая частным циклом (пунктирная кривая на рис. 23).

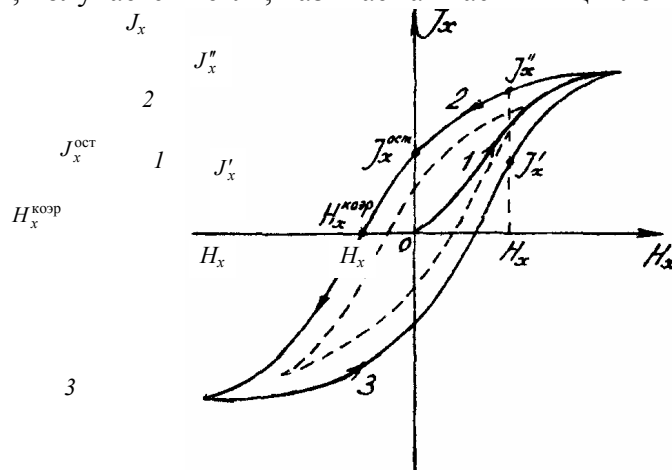


Рис. 23

Рис. 166

Частных циклов можно получить сколько угодно и все они лежат внутри максимальной петли.



Наличие гистерезиса означает, что намагниченность  $\vec{J}$  (и индукция результирующего поля  $\vec{B}$ ) ферромагнетика не являются однозначной функцией  $\vec{H}$ . При одном и том же значении  $\vec{H}$  намагниченность может принимать любые значения, лежащие в некотором интервале (от  $J'_x$  до  $J''_x$  при  $H_x$  в случае петли, изображенной на рис. 23).

В связи с неоднозначностью зависимости  $\vec{B}$  от  $\vec{H}$  понятие магнитной проницаемости применимо только к основной кривой намагничивания. Магнитная проницаемость ферромагнетиков зависит от внешнего магнитного поля (рис.24). Максимальная остаточная намагниченность  $\vec{J}_{\max}^{\text{ост}}$ , максимальная коэрцитивная сила  $\vec{H}_{\max}^{\text{коэр}}$  и максимальная магнитная проницаемость  $\mu_{\max}$  – основные характеристики ферромагнетика.

Ферромагнетики с узкой петлей гистерезиса (с малой  $\vec{H}_{\max}^{\text{коэр}}$ ) называются магнитно-мягкими. Такие ферромагнетики используются в качестве сердечников в трансформаторах и электрических машинах. Ферромагнетики с широкой петлей гистерезиса называется магнитно-жесткими. Они используются для изготовления постоянных магнитов.

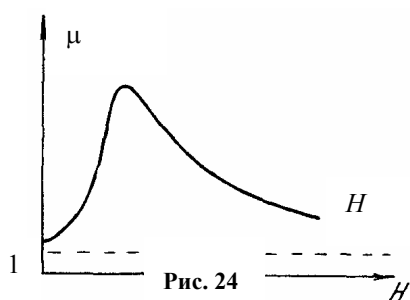


Рис. 24

Рис. 167

**В. Точка Кюри.** Точка Кюри – температура, при которой ферромагнетик утрачивает свои особые свойства. Точка Кюри для чистого железа составляет 1043 К (770 °С), для никеля 633 К (360 °С), для кобальта 1422 К (1149 °С)

При температуре выше точки Кюри ферромагнетик превращается в обычный парамагнетик.

## Природа ферромагнетизма

В ферромагнетиках между атомами имеет место так называемое обменное взаимодействие, благодаря которому энергетически выгодным оказывается состояние с параллельной ориентацией электронных спинов и, следовательно, спиновых магнитных моментов.

Силы, ориентирующие спины электронов параллельно друг другу, – немагнитные.

Области ферромагнетика, в которых спины параллельны, называются доменами. В пределах каждого домена ферромагнетик самопроизвольно (спонтанно) намагничен до насыщения.

Число нескомпенсированных спинов у разных ферромагнетиков различно. Так, у железа 4 нескомпенсированных спина на атом, у кобальта – 3, у никеля – 2.

Размеры доменов, как правило, невелики – порядка  $10^{-3} \dots 10^{-4}$  см. Наличие доменов непосредственно обнаруживается на опыте методом Акулова – Биттера. Тонкий порошок ферромагнитного вещества напыляется на полированную и протравленную поверхность ферромагнетика. Частицы порошка концентрируются в тех местах, где поверхность образца пересекается со стенками доменов (здесь магнитное поле весьма неоднородно). Полученные порошковые фигуры Акулова – Биттера наблюдаются в микроскоп. Существуют и другие методы изучения доменной структуры ферромагнетиков. Если бы ферромагнетик состоял из одного домена, то он создавал бы сильное внешнее магнитное поле и обладал бы значительной магнитной энергией. Энергия, затрачиваемая на создание внешнего поля, существенно уменьшится если вместо одного домена возникнет два или четыре домена, как это показано на рис. 25 (стрелками показаны направления магнитных моментов доменов).

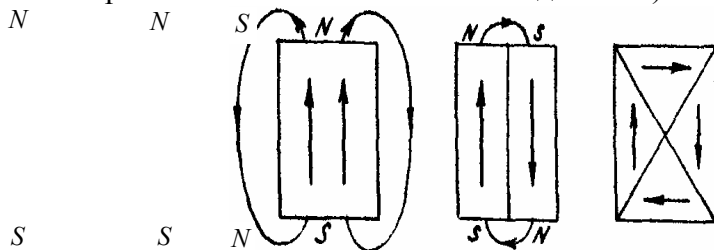


Рис. 25

Рис. 168

Энергия затрачивается также на создание стенок между доменами. Наконец, существует разница в энергиях одного и того же монокристалла, намагниченного в разных кристаллографических направлениях (эта разность называется энергией анизотропии).

Таким образом, форма и размеры доменов определяются минимумом энергии внешнего магнитного поля, энергии границ доменов и энергии анизотропии.

В отсутствие намагничивающего внешнего поля ферромагнетик разбивается на домены таким образом, что его результирующий магнитный момент равен нулю. При наличии внешнего магнитного поля энергия доменов оказывается неодинаковой: она меньше для тех доменов, в которых вектор намагниченности образует с направлением поля острый угол, и больше в том случае, когда этот угол тупой.

Действие магнитного поля на ферромагнетик первоначально проявляется в смещении границ между доменами: объем доменов с благоприятной ориентировкой спинов увеличивается за счет энергетически невыгодных доменов. Пока намагничивающее поле невелико смещение границ обратимо и точно следует за изменениями этого поля (рис. 26, область  $OA$ ).

При дальнейшем увеличении поля смещение границ доменов становится необратимым ( $AB$ ). В достаточно сильном поле происходит поворот магнитных моментов доменов. В состоянии насыщения ферромагнетик представляет собой один гигантский домен, магнитный момент которого совпадает с направлением внешнего намагничивающего поля.

При уменьшении намагничивающего поля намагниченность не следует первоначальному ходу, а несколько отстает из-за необратимости смещения границ между доменами.

Превращение ферромагнетика в парамагнетик в точке Кюри объясняется тем, что при этой температуре энергии теплового движения атомов достаточно для того, чтобы разрушились области спонтанной намагниченности.

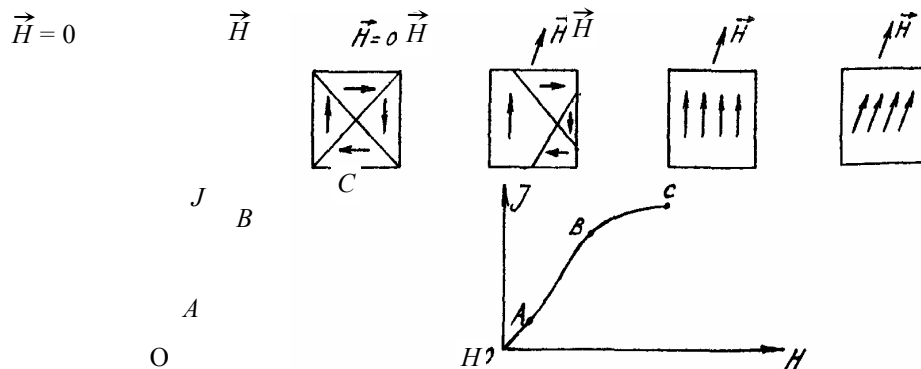


Рис. 26

Рис. 169

Ферромагнетики получили весьма широкое практическое применение. Они используются в качестве сердечников в электрических машинах (генераторы, электродвигатели, трансформаторы), они применяются в качестве элементов памяти в счетно-решающих устройствах, их используют для записи звуковых и видеосигналов (магнитофоны, видеоманитофоны) и т.д.

## 12 АНТИФЕРРОМАГНЕТИЗМ. ФЕРРИМАГНЕТИЗМ

Силы обменного взаимодействия могут приводить к упорядоченной структуре, при которой спины электронов соседних атомов антипараллельны. Вещества с такой упорядоченной магнитной структурой называются антиферромагнетиками.

Антиферромагнетик можно представить состоящим из двух подрешеток, спонтанно намагниченных во взаимно противоположных направлениях и вставленных одна в другую (рис. 27). Как и в случае ферромагнетиков, спонтанная намагниченность антиферромагнетиков возникает ниже некоторой температуры, называемой антиферромагнитной точкой Кюри или точкой Нееля. Выше этой температуры нескомпенсированные спины ориентированы беспорядочно, и вещество является парамагнетиком.

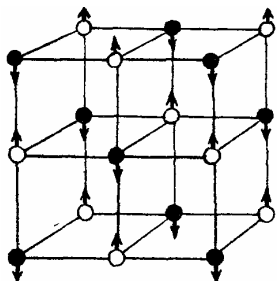


Рис. 170

Во внешнем магнитном поле антиферромагнетик слабо намагничивается, обнаруживая положительную восприимчивость.

**ПРИМЕРЫ** антиферромагнитных веществ: Cr, MnO, MnS, NiCr, Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, FeO.

Существуют вещества, в которых магнитные моменты соседних атомов антипараллельны, но не одинаковы по абсолютной величине. Это приводит к образованию областей спонтанного намагничивания. Вещества с такой магнитной структурой называются ферримагнетиками. Примером ферримагнетиков могут служить ферриты. С химической точки зрения ферриты представляют собой твердые растворы, состоящие из окиси железа (Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) и окислов одного или нескольких металлов (Mn, Co, Cu, Zn, Ni и др.). Ферриты намагничиваются не так сильно, как ферромагнетики, но, обладая большим удельным сопротивлением, они практически не имеют потерь энергии на вихревые токи, это делает их незаменимыми в технике высоких частот.

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### 13 СОБСТВЕННЫЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

1 Периодические колебания величин, характеризующих электрические и магнитные поля, называются электромагнитными колебаниями.

2 Различают колебания полей, связанных с зарядами и токами, и колебания полей, существующих в отрыве от зарядов и токов. Первые имеют место в электрических цепях, вторые – в электромагнитных волнах.

3 Электрическая цепь, в которой могут происходить электромагнитные колебания, называется колебательным контуром.

Колебательным контуром может служить любая цепь, даже простой отрезок провода, необходимо только определенное соотношение между электроемкостью, индуктивностью и сопротивлением цепи ( $R, L, C$  – свойства, присущие любой цепи, любому проводнику).

4 Если электрическое и магнитное поля в колебательном контуре пространственно разобщены и локализованы в сравнительно небольших областях, контур называется закрытым (контур с сосредоточенными параметрами). В противном случае контур называется открытым (контур с распределенными параметрами).

5 Простейший закрытый колебательный контур – это соединенные между собой конденсатор и катушка индуктивности. Хотя катушка обладает некоторой емкостью, а конденсатор – индуктивностью, будем полагать, что емкость сосредоточена только в конденсаторе, индуктивность – только в катушке и, кроме того, омическое сопротивление контура равно нулю (такой закрытый контур называется идеальным).

6 Чтобы в контуре возникли электромагнитные колебания контур необходимо вывести из состояния равновесия. Для этого достаточно зарядить конденсатор (или возбудить ток в катушке) и предоставить контур самому себе. Присоединим конденсатор к источнику постоянного напряжения (рис. 28).

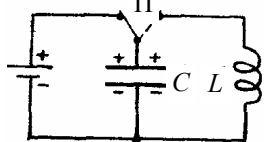


Рис. 28

В процессе зарядки обкладки конденсатора приобретут разноименные заряды  $\pm q_0$ , в результате чего в конденсаторе возникнет электрическое поле с энергией

$$W_E = \frac{q_0^2}{2C},$$

где  $C$  – емкость конденсатора.

7 Переключим конденсатор на катушку. Концы катушки приобретут потенциалы обкладок, внутри провода катушки возникнет электростатическое поле. Это поле приведет в направленное движение свободные заряды катушки. Начнется нейтрализация зарядов на обкладках конденсатора – разрядка конденсатора. Разрядный ток будет нарастать, но постепенно вследствие самоиндукции: ЭДС самоиндукции будет препятствовать мгновенному нарастанию тока. Напряжение, приложенное к катушке, ускоряет носители тока, ЭДС самоиндукции, напротив, тормозит их.

На рис. 29, а изображена часть витка катушки. Ток течет в сторону убыви потенциала. В этом направлении действуют на положительные заряды силы электростатического поля. Виток пронизывается нарастающим магнитным полем (ток в катушке растет). Изменяющееся магнитное поле соз-

даст в катушке и за ее пределами вихревое электрическое поле. Силы этого поля вызовут в витке ток самоиндукции такого направления, что магнитное поле этого тока будет препятствовать нарастанию магнитного потока пронизывающего виток. Чтобы магнитное поле тока самоиндукции было противоположно магнитному полю тока в катушке, необходимо, чтобы линии вихревого электрического поля были направлены так, как это показано на рисунке (это направление соответствует направлению тока самоиндукции).

8 В процессе разрядки конденсатора разность потенциалов на обкладках, заряд обкладок, напряженность электрического поля уменьшаются, соответствующие характеристики магнитного поля возрастают. Энергия электрического поля конденсатора постепенно превращается в энергию магнитного поля катушки. В момент, когда конденсатор полностью разрядится, энергия электрического поля будет равна нулю, а энергия магнитного поля максимальна

$$W_B = \frac{LI_0^2}{2},$$

где  $L$  – индуктивность катушки;  $I_0$  – максимальный ток в катушке.

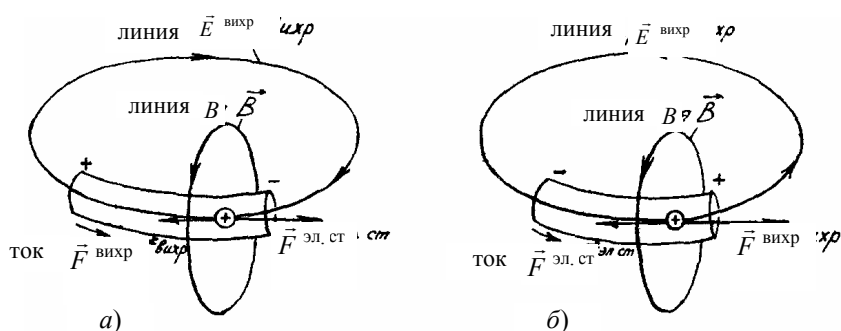


Рис. 29 72

Этим мгновением заканчивается первая стадия колебательного процесса.

9 Если бы контур не был разорван обкладками конденсатора, то ток  $I_0$  существовал бы в нем сколько угодно долго, не нуждаясь ни в напряжении, ни в ЭДС: ведь сопротивление контура равно нулю (в момент, когда ток в контуре достигает максимального значения  $I_0$ , и напряжение, и ЭДС самоиндукции равны нулю). Наличие в контуре конденсатора приводит к тому, что ток на его обкладках обрывается, заряды здесь тормозятся и накапливаются: на той обкладке, по направлению к которой течет ток, накапливаются положительные заряды, на другой обкладке – отрицательные. Это приводит к тому, что в конденсаторе и в катушке вновь возникает электростатическое поле, но теперь уже противоположного направления. Это поле тормозит движение зарядов катушки. Ток, а, следовательно, и его магнитное поле начинают убывать. Уменьшение магнитного поля сопровождается возникновением ЭДС самоиндукции, возникновением вихревого электрического поля, которые препятствуют уменьшению тока и поддерживают его первоначальное направление (проанализируйте рис. 29, б). Благодаря совместному действию вихревого и кулоновского полей ток постепенно уменьшается до нуля. Энергия магнитного поля снова переходит в энергию электрического поля. Этим завершается вторая стадия цикла. На третьей и четвертой стадиях повторятся те же процессы, что и на первой и второй стадиях, но в обратном направлении. Пройдя все эти четыре стадии, контур вернется в исходное состояние. Последующие циклы будут в точности повторяться.

Таким образом, в колебательном контуре периодически изменяются (колеблются) следующие физические величины:  $q$  – заряд на обкладках конденсатора;  $U$  – разность потенциалов на конденсаторе и, следовательно, на концах катушки;  $i$  – ток в катушке;  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля;  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля;  $W_E$  – энергия электрического поля;  $W_B$  – энергия магнитного поля.

10 Сопоставляя электромагнитные колебания с механическими, например, с колебаниями пружинного маятника, нетрудно подметить, что каждой величине, характеризующей механические колебания, соответствует электрическая или магнитная величина, играющая в электромагнитных коле-

баниях аналогичную роль. Так, координате  $x$  соответствует заряд  $q$ , скорости  $\bar{v}$  – ток  $i$ , потенциальной энергии пружины  $\frac{kx^2}{2}$  – энергия электрического поля конденсатора  $\frac{q^2}{2C}$ , и т.д.

Приводим список таких величин.

Механические колебания		Электромагнитные колебания	
Инерция		Самоиндукция	
Масса	$m$	Индуктивность	$L$
Коэффициент упругости	$k$	Величина, обратная емкости	$\frac{1}{C}$
Координата	$x$	Заряд конденсатора	$q$
Скорость	$\bar{v}$	Ток	$i$
Потенциальная энергия	$\frac{kx^2}{2}$	Энергия электрического поля	$\frac{q^2}{2C}$
Кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2}$	Энергия магнитного поля	$\frac{Li^2}{2}$
Коэффициент трения	$r$	Омическое сопротивление	$R$
Внешняя сила	$\vec{F}$	Электродвижущая сила	$\varepsilon$
		Напряжение	$U$

11 Найдем вид зависимости от времени колеблющихся физических величин. Будем полагать, что процессы в контуре происходят достаточно медленно: мгновенные значения тока одинаковы во всех сечениях контура и, следовательно, к контуру применимы законы постоянного тока.

Чтобы найти закон изменения данной переменной величины, нужно составить для нее дифференциальное уравнение и найти решение этого уравнения.

Начнем с заряда конденсатора. Так как контур не излучает волн и не выделяет тепла, его энергия, складывающаяся из энергии магнитного поля  $\frac{Li^2}{2}$  и энергии электрического поля  $\frac{q^2}{2C}$ , остается неизменной

$$\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \text{const}, \quad (13.1)$$

где  $I$  и  $q$  – мгновенные значения тока и заряда.

Продифференцируем (13.1) по времени

$$Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0. \quad (13.2)$$

(Мы полагаем, что среда, в которой находится контур, неферромагнитная, и, следовательно,  $L \neq L(i)$ ). Производные по времени будем обозначать точкой над дифференцируемой величиной

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad \frac{di}{dt} = \dot{i}.$$

Учтем, что  $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ ,  $\dot{i} = \ddot{q}$ . Разделим обе части уравнения (13.2) на  $Li$  и воспользуемся введенными обозначениями

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Обозначив

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad (13.3)$$

получим искомое дифференциальное уравнение для заряда

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (13.4)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (13.5)$$

где  $q_m$  – амплитудное значение заряда;  $\varphi_0$  – начальная фаза;  $\omega_0$  – циклическая частота колебаний.

Как видно из (13.5), заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону. Частота  $\omega_0$  называется собственной. Период собственных колебаний контура равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Подставив в эту формулу выражение для  $\omega_0$  по (13.3), получим формулу Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (13.6)$$

Частота собственных колебаний равна

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (13.7)$$

Разделив уравнение (13.5) на  $C$ , найдем закон изменения напряжения на конденсаторе

$$U = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (13.8)$$

где  $U_m = \frac{q_m}{C}$  – амплитуда напряжения.

Закон изменения тока

$$i = \dot{q} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (13.9)$$

где  $I_m = \omega_0 q_m$  – амплитуда тока.

Закон изменения ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -Li = L\omega_0^2 q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \varepsilon_{sm} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (13.10)$$

где  $\varepsilon_{sm} = L\omega_0^2 q_m$  – амплитуда ЭДС самоиндукции. Закон изменения энергии электрического поля

$$W_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = W_{Em} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (13.11)$$

где  $W_{Em} = \frac{q_m^2}{2C}$  – амплитуда энергии электрического поля.

Закон изменения энергии магнитного поля

$$W_B = \frac{Li^2}{2} = \frac{L\omega_0^2 q_m^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = W_{Bm} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (13.12)$$

где  $W_{Bm} = \frac{L\omega_0^2 q_m^2}{2}$  – амплитуда энергии магнитного поля.

В выражения для амплитуд всех изменяющихся величин входит амплитуда заряда  $q_m$ . Эта величина, а также начальная фаза колебаний  $\varphi_0$  определяются начальными условиями – зарядом конденсатора и током в контуре в начальный момент времени  $t = 0$ . Если отсчет времени вести с момента замыкания контура, то при  $t = 0$ ,  $q = q_0$  и  $i = 0$ . Подставив эти значения в уравнений (13.5) и (13.9), получим:

$$q_0 = q_m \cos \varphi_0;$$

$$0 = -\omega_0 q_m \sin \varphi_0.$$

Из второго уравнения получаем:  $\varphi_0 = 0$ .

Подставив  $\varphi_0 = 0$  в первое уравнение, найдем, что

$$q_m = q_0,$$

т.е. амплитуда заряда равна первоначальному заряду конденсатора. Если время отсчитывать от другого мгновения, связь между  $q_m$  и  $q_0$  будет иной и  $\varphi_0 \neq 0$ .

Сопоставляя (13.5), (13.8) – (13.12), заключаем, что колебания заряда, напряжения, ЭДС самоиндукции совершаются в одинаковых фазах. Ток опережает по фазе эти величины на  $\pi/2$ . Частота колебаний энергии электрического и магнитного полей в два раза больше частоты колебаний всех других величин.

На рис. 30 изображены графики всех этих величин.

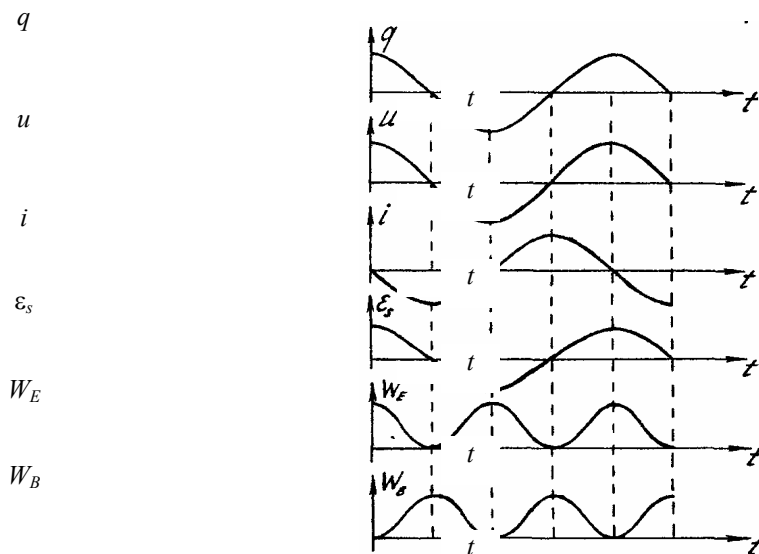


Рис. 30

Рис. 173

## 14 СОБСТВЕННЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Любой реальный контур обладает омическим сопротивлением.

В реальном контуре электромагнитная энергия, запасенная в начале колебаний, постепенно превращается в тепло. Колебания вследствие этого затухают.

Составим дифференциальное уравнение собственных затухающих колебаний. Из закона изменения энергии следует, что убыль энергии электрического и магнитного полей контура за время  $dt$  равна количеству выделившегося в контуре тепла

$$-d\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = i^2 R dt. \quad (14.1)$$

Найдем дифференциал величины, стоящей в скобках, и разделим обе части уравнения на  $dt$ . Получим

$$-L\ddot{q} - \frac{q\dot{q}}{C} = i^2 R.$$

Перенесем  $i^2 R$  в левую часть, умножим обе части уравнения на  $(-1)$  и разделим все слагаемые на  $Li$

$$i + \frac{R}{L}i + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Обозначим  $i = \ddot{q}$ ,  $i = \dot{q}$ ,  $\frac{R}{L} = 2\beta$ ,  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ .

Получим искомое дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (14.2)$$

Решение этого уравнения при  $\beta < \omega_0$  имеет вид

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (14.3)$$

где  $q_{m0}$  – начальная амплитуда заряда;  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – циклическая частота колебаний.

3 Как видно из (14.3), собственные затухающие колебания не являются гармоническими: амплитуда таких колебаний с течением времени уменьшается по закону:  $A = q_{m0} e^{-\beta t}$ .

Показатель  $\beta$  называется коэффициентом затухания.

На рис. 31 изображен график  $q = q(t)$  собственных затухающих колебаний.

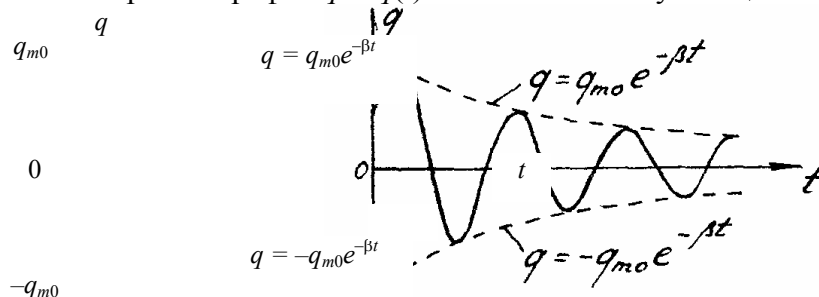


Рис. 31

Рис. 174

4 Разделив (14.3) на  $C$ , найдем закон изменения напряжения

$$U = U_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (14.4)$$

где  $U_{m0}$  – амплитуда заряда в начальный момент времени.

5 Чтобы найти закон изменения тока, продифференцируем (14.3) по времени

$$i = \dot{q} = q_{m0} e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega \sin(\omega t + \varphi_0)]. \quad (14.5)$$

Умножим и разделим правую часть этого выражения на  $\omega_0$

$$i = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t} \left[ -\frac{\beta}{\omega_0} \cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega t + \varphi_0) \right].$$

Введем величину  $\psi$ , удовлетворяющую условиям:

$$\cos \psi = -\frac{\beta}{\omega_0}, \quad \sin \psi = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Обозначим также  $\omega_0 q_{m0} = I_{m0}$ . Тогда выражение для тока приобретет вид

$$i = I_{m0} e^{-\beta t} [\cos \psi \cos(\omega t + \varphi_0) - \sin \psi \sin(\omega t + \varphi_0)].$$



Воспользовавшись известной тригонометрической формулой сложения, получим

$$i = I_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0 + \psi). \quad (14.6)$$

Так как  $\cos \psi < 0$ , а  $\sin \psi > 0$ , то  $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$ .

Величина  $\psi$  – определяет фазовый сдвиг между током и напряжением: ток в катушке индуктивности опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на  $\pi/2$ .

6 Циклическая частота затухающих колебаний меньше собственной частоты контура:  $\omega < \omega_0$ .  
Условный период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (14.7)$$

7 Логарифм отношения двух последующих амплитуд называется логарифмическим декрементом затухания

$$\lambda = \ln \frac{q_{m0} e^{-\beta t}}{q_{m0} e^{-\beta(t+T)}} = \beta T. \quad (14.8)$$

8 Время релаксации затухающих колебаний  $\tau$  – время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Из условия

$$\frac{q_{m0} e^{-\beta t}}{q_{m0} e^{-\beta(t+\tau)}} = e$$

находим

$$\tau = \frac{1}{\beta} \quad (14.9)$$

и

$$\beta = \frac{1}{\tau}. \quad (14.10)$$

Таким образом, коэффициент затухания – это величина, обратная времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

9 Подставим выражение для  $\beta$  в (14.8):  $\lambda = \frac{T}{\tau}$ .

Но  $\frac{\tau}{T} = N$  – число колебаний, совершаемых за время релаксации.

Следовательно,  $\lambda = \frac{1}{N}$ . (14.11)

Таким образом, логарифмический декремент затухания – величина, обратная числу колебаний, совершаемых за время релаксации.

10 Для характеристики затухания колебаний вводят также добротность  $Q$ , связанную с логарифмическим декрементом соотношением

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (14.12)$$

Так как  $\lambda = \frac{1}{N}$ , то  $Q = \pi N$ . (14.13)

Добротность контура есть умноженное на  $\pi$  число полных колебаний, по истечении которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

11 Если параметры контура таковы, что  $\beta^2 = \omega_0^2$ , то период  $T$ , определяемый формулой (14.7), будет мнимым. Это значит, что уравнение (14.3) перестает быть решением уравнения (14.2), разряд конденса-

тора становится аperiodическим. Сопротивление  $R_k$ , при котором процесс переходит в аperiodический, называется *критическим*.

Из условия  $\beta^2 = \omega_0^2$ , т.е.  $\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ , находим:

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (14.14)$$

При  $R \geq R_k$  колебания в контуре невозможны. Величина  $\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{\text{волн}}$  называется волновым сопротивлением контура.

## 15 ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

1 Вынужденные электромагнитные колебания – это колебания, происходящие в колебательном контуре под действием внешней периодической ЭДС или внешнего напряжения.

Внешнюю ЭДС (напряжение) можно приложить к контуру различными способами. Можно, например, включить источник ЭДС непосредственно в контур (рис. 32, а, б). Можно связать цепь, содержащую переменную ЭДС, с колебательным контуром индуктивно (рис. 32, в). Можно воздействовать на контур электромагнитными волнами. Рассмотрим случай, соответствующий рис. 32, а.

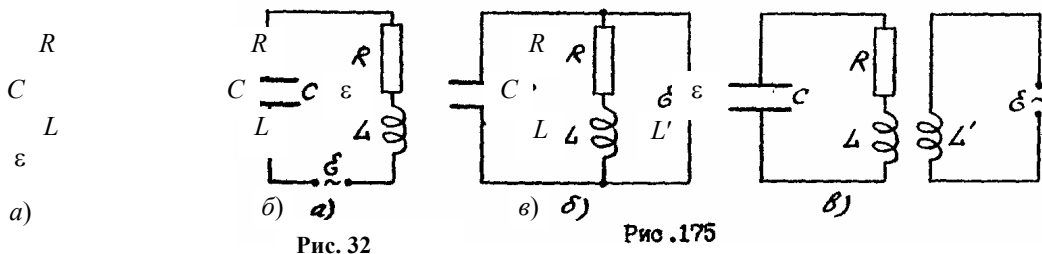
$R, L, C$  – параметры контура. Пусть переменная ЭДС изменяется по гармоническому закону

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos \Omega t, \quad (15.1)$$

где  $\varepsilon_m$  – амплитуда ЭДС;  $\Omega$  – циклическая частота изменений этой ЭДС.

Составим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Из закона сохранения энергии следует, что тепло в контуре выделяется не только за счет убыли энергии магнитного и электрического полей контура, но и за счет работы источника внешней ЭДС

$$i^2 R dt = -d \left( \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) + \varepsilon i dt. \quad (15.2)$$



Перенесем слагаемое  $-d \left( \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right)$  в левую часть уравнения, произведем дифференцирование, разделим все слагаемые на  $Li dt$  и воспользуемся обозначениями, введенными в предыдущем параграфе.

Получим: 
$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon}{L}.$$

Или 
$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_m}{L} \cos \Omega t. \quad (15.3)$$

Общее решение этого неоднородного линейного дифференциального уравнения складывается из двух слагаемых: из общего решения однородного уравнения

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

определяющего собственные затухающие колебания, и частного решения уравнения (15.3).

Колебания в рассматриваемом контуре представляют собой суперпозицию собственных и вынужденных колебаний. Первые постепенно вымирают из-за затухания, так что по истечении некоторого

промежутка времени в контуре останутся практически только вынужденные колебания. Установившиеся вынужденные колебания описываются уравнениями:

$$q = q_m \cos(\Omega t + \alpha_0); \quad (15.4)$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\Omega t + \alpha_0) = U_m \cos(\Omega t + \alpha_0); \quad (15.5)$$

$$i = \dot{q} = -\Omega q_m \sin(\Omega t + \alpha_0) = I_m \cos\left(\Omega t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right); \quad (15.6)$$

где 
$$q_m = \frac{\varepsilon_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}; \quad (15.7)$$

$$U_m = \frac{\varepsilon_m}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}; \quad (15.8)$$

$$I_m = \frac{\Omega\varepsilon_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \quad (15.9)$$

$q_m$ ,  $U_m$ ,  $I_m$  – амплитуды заряда, напряжения и тока;  $\alpha_0$  – начальная фаза, определяемая из выражения

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (15.10)$$

Подставив  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $\beta^2 = \frac{R^2}{4L^2}$ , преобразуем формулы (15.7) – (15.10):

$$q_m = \frac{\xi_m}{\Omega\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}}; \quad (15.11)$$

$$U_m = \frac{\xi_m}{\Omega C\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}}; \quad (15.12)$$

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}}; \quad (15.13)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{R}{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}. \quad (15.14)$$

*Вывод.* Если внешняя ЭДС изменяется по гармоническому закону, вынужденные колебания являются также гармоническими. Их частота совпадает с частотой внешней ЭДС.

Амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде внешней ЭДС и зависит от ее частоты. При некоторой определенной для данного контура  $RLC$  частоте  $\Omega_{\text{рез}}$  амплитуда колебаний достигает максимума. Это соответствует резонансу.

Чтобы найти резонансную частоту для заряда (для напряжения она будет точно такой же), достаточно найти минимум выражения, стоящего под корнем в формуле (15.7) (проделайте самостоятельно). Получим

$$\Omega_{\text{рез},q} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (15.15)$$

Как видно из этой формулы, резонансная частота для заряда несколько меньше частоты собственных незатухающих колебаний контура. Из (15.7) следует, что при  $\Omega \rightarrow 0$ ,  $q_m \rightarrow \frac{\varepsilon_m}{L\omega_0^2} = \frac{\varepsilon}{C}$ .

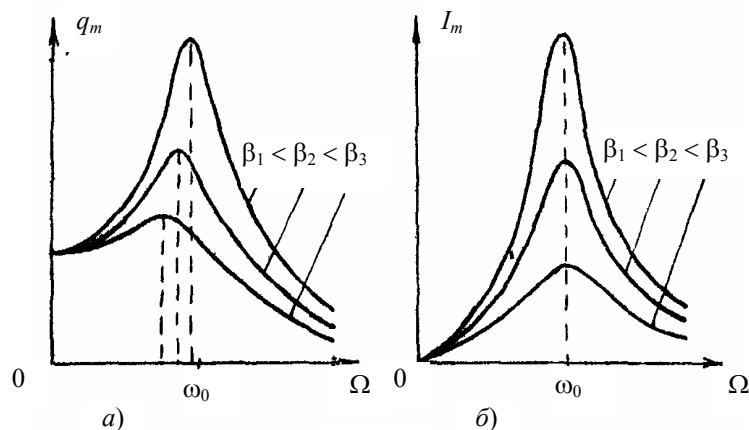
Такой заряд конденсатор получает при подключении его к источнику с постоянной ЭДС  $\varepsilon_m$ .

При  $\Omega \rightarrow \infty$ ,  $q_m \rightarrow 0$ .

Высота резонансного пика и его «острота» тем больше, чем меньше  $\beta$ , т.е. чем меньше омическое сопротивление и больше индуктивность контура. Резонансные кривые для  $q_m$ , соответствующие равным  $\beta$ , приведены на рис. 33, а.

Резонансную частоту для тока легко найти из (15.13): амплитуда тока максимальна при  $\frac{1}{\Omega_{\text{рез}}C} - \Omega_{\text{рез}}L = 0$ , откуда

$$\Omega_{\text{рез},i} = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0. \quad (15.16)$$



Резонансная частота **Рис. 33** а совпадает с собственной частотой контура. При  $\Omega \rightarrow 0$ ,  $i \rightarrow 0$ ; при  $\Omega \rightarrow \infty$ ,  $i \rightarrow 0$ .

Первое означает, что при постоянной ЭДС установившийся ток в цепи с конденсатором течь не может. Резонансные кривые для амплитуды тока приведены на рис. 33, б.

Из формул (15.1), (15.4) – (15.6) видно, что колебания заряда, напряжения и тока сдвинуты по фазе относительно ЭДС. Этот сдвиг тем больше, чем больше  $R$  и чем меньше разность  $\Omega L - \frac{1}{\Omega C}$ .

Явление резонанса используется для выделения из сложного напряжения нужной составляющей. Пусть, например, к контуру приложено напряжение

$$U = U_{m1} \cos(\Omega_1 t + \alpha_{01}) + U_{m2} \cos(\Omega_2 t + \alpha_{02}).$$

Настроив контур в резонанс с одной из частот, можно получить на конденсаторе напряжение, значительно превышающее величину данной составляющей, в то время как напряжение, создаваемое другими составляющими, будет мало. Такой процесс осуществляется, например, при настройке радиоприемника на нужную длину волны.

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Между электрическими зарядами и токами, с одной стороны, и создаваемыми ими электрическими и магнитными полями, с другой, существует связь. Связь существует и между самими электрическими и магнитными полями. Эта связь проявляется в том, что электрическое и магнитное поля способны породить друг друга. При всяком изменении магнитного поля возникает электрическое поле и, наоборот, при всяком изменении электрического поля возникает магнитное поле. Уравнения Максвелла в сжатой математической форме отражают все эти связи и все эти процессы.

1 Следуя Максвеллу, обобщим явление электромагнитной индукции.

Как известно, при изменении магнитного потока, пронизывающего неподвижный проводящий контур, в последнем *возникает вихревое электрическое поле*, которое и создает ЭДС индукции.

Максвелл установил, что проводящий контур в этом процессе не играет принципиальной роли, а является лишь прибором, обнаруживающим вихревое электрическое поле. Переменное магнитное поле создает вихревое электрическое поле независимо от того, имеются или нет проводники в той области пространства, где существует переменное магнитное поле.

Таким образом, *переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле*.

2 Придадим выражению закона электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (16.1)$$

несколько иной вид. По определению ЭДС есть циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}^{\text{стор}} d\vec{l}.$$

В рассматриваемом случае  $\vec{E}^{\text{стор}} \equiv \vec{E}^{\text{вихр}}$  где  $\vec{E}^{\text{вихр}}$  – напряженность вихревого электрического поля. Следовательно

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}^{\text{вихр}} d\vec{l}. \quad (16.2)$$

Подставив (16.2) в (16.1), получим первое интегральное уравнение Максвелла

$$\oint_L \vec{E}^{\text{вихр}} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (16.3)$$

Циркуляция вектора напряженности вихревого электрического поля по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна по абсолютной величине и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь любую поверхность  $S$  опирающуюся на контур  $L$  (рис. 34).

*Замечание.* При вычислении  $\Phi$  сквозь  $S$  необходимо выбирать нормали к отдельным элементам  $S$ .

Условимся придерживаться правила: нормали должны «смотреть» в ту сторону, куда направлено поступательное движение правого буравчика, вращаемого в направлении обхода  $L$ .

3 Итак, существуют две разновидности электрического поля – потенциальное электростатическое (кулоновское) и непотенциальное вихревое. Электростатическое поле  $\vec{E}^{\text{эл.ст}}$  порождается электрическими зарядами – свободными и поляризованными. Чтобы найти  $\vec{E}^{\text{эл.ст}}$ , нужно воспользоваться теоремой Гаусса.

Вихревое электрическое поле  $\vec{E}^{\text{вихр}}$  порождается изменяющимся магнитным полем. Чтобы найти  $\vec{E}^{\text{вихр}}$ , нужно воспользоваться уравнением Максвелла (16.3).

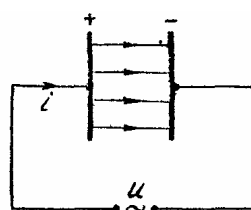
Полное электрическое поле в любой точке пространства в общем случае равно сумме полей  $\vec{E}^{\text{эл.ст}}$  и  $\vec{E}^{\text{вихр}}$

$$\vec{E} = \vec{E}^{\text{эл.ст}} + \vec{E}^{\text{вихр}}. \quad (16.4)$$

## 17 ВТОРОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Другое фундаментальное положение теории Максвелла гласит, что переменное электрическое поле создает магнитное поле.

Рассмотрим вакуумный переменное напряжение (рис. 35). Это конденсатора переменное электриче-



конденсатор, к которому приложено напряжение создает между обкладками ское поле.

Переменное электрическое поле, по Максвеллу, создает в окружающем пространстве магнитное поле так, как если бы между обкладками протекал вполне определенный ток проводимости.

Линии магнитного поля, порождаемого изменяющимся электрическим полем, замыкаются вокруг линий  $\vec{E}$  направление этих линий связано с направлением, вектора  $\frac{d\vec{E}}{dt}$  (обратим внимание – с направлением  $\frac{d\vec{E}}{dt}$ , а не с  $\vec{E}$ ) правилом правого буравчика: если поступательное движение буравчика совпадает с  $\frac{d\vec{E}}{dt}$ , то вращение его рукоятки указывает направление линий вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ . Рис. 36 поясняет это правило.

Если вектор  $\vec{E}$ , не изменяясь по направлению, — стает по модулю, то приращение  $\vec{E}$  и, следовательно,  $\frac{d\vec{E}}{dt}$  совпадает с  $\vec{E}$ .

Линия  $\vec{B}$  направлена так, как на рис. 35. При уменьшении модуля  $\vec{E}$  приращение  $\vec{E}$ , а, следовательно, и  $\frac{d\vec{E}}{dt}$  противоположно  $\vec{E}$ . Одна из линий  $\vec{B}$  изображена на рис. 36, б.

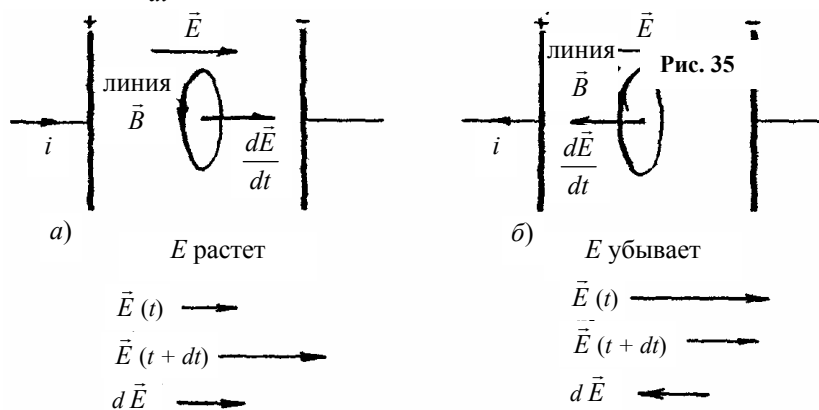


Рис. 36

2 Таким образом, магнитное поле в неферромагнитной среде создается: 1) любыми электрическими токами и 2) изменяющимся электрическим полем. Токами, создавшими магнитное поле, могут быть:

- а) токи проводимости (а также конвекционные токи и токи в вакууме);
- б) микротоки (атомные электронные токи);
- в) поляризационные токи.

Поляризационные токи возникают в диэлектриках при наличии переменного электрического поля. Как известно, поляризация диэлектриков заключается либо в смещении зарядов в пределах каждой отдельной молекулы (неполярные диэлектрики), либо в повороте электрических диполей (полярные диэлектрики). Если электрическое поле, вызывающее поляризацию, — переменное, то заряды, ответственные за поляризацию, под действием поля смещаются то в одну, то в другую сторону, и тем самым создают ток, который и называется поляризационным. Каждый из осциллирующих зарядов вносит в ток свой вклад, равный  $q\upsilon$  ( $\upsilon$  — средняя скорость). Если число таких зарядов в единице объема  $n$ , то они создают плотность тока

$$\vec{j}_{\text{поляризация}} = nq\vec{\upsilon}.$$

Поскольку  $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , где  $d\vec{r}$  — приращение среднего смещения заряда, то

$$\vec{j}_{\text{поляризация}} = \frac{nqd\vec{r}}{dt}.$$

Величина  $nqd\vec{r} = d\vec{P}$  — приращение электрического момента единицы объема диэлектрика за время  $dt$ . Таким образом

$$\vec{j}_{\text{поляризация}} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

В случае неоднородной поляризации следует брать частную производную

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}; \quad \vec{J}_{\text{поляризация}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (17.1)$$

Полный поляризационный ток, протекающий через некоторую поверхность  $S$ , равен

$$I_{\text{поляризация}} = \int_S \vec{J}_{\text{поляризация}} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{P} d\vec{S}. \quad (17.2)$$

3 Второе интегральное уравнение Максвелла выражает теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$  в самом общем случае: циркуляция  $\vec{B}$  по произвольному контуру интегрирования  $L$  в неферромагнитной среде равна

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial N_E}{\partial t} + \mu_0 I_{\text{пров}} + \mu_0 I_{\text{микро}} + \mu_0 I_{\text{поляризация}}, \quad (17.3)$$

где  $\mu_0, \varepsilon_0$  – магнитная и электрическая постоянные;  $\frac{\partial N_E}{\partial t}$  – скорость изменения потока вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  сквозь произвольную поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $L$ ;  $I_{\text{пров}}, I_{\text{микро}}, I_{\text{поляризация}}$  – соответственно полные токи проводимости, микротоки и поляризационные, протекающие сквозь  $S$  (охватываемые контуром  $L$ ).

Второе уравнение Максвелла называют иногда теоремой полного тока.

Уравнение (17.3), так же как и (16.3), не выводится. Оно – обобщение опыта.

## 18 ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Итак, электрическое и магнитное поля существуют в неразрывном единстве. Они образуют единое электромагнитное поле.

Согласно принципу относительности Эйнштейна (все физические законы инвариантны относительно инерциальных систем отсчета) разделение электромагнитного поля на электрическое и магнитное относительно и зависит от выбора системы отсчета. В этом нетрудно убедиться.

Пусть некоторая совокупность зарядов в данной инерциальной системе отсчета покоится. В этой системе существует только электрическое поле, магнитное поле отсутствует. Но эти же заряды по отношению к другим инерциальным системам отсчета движутся и, следовательно, создают не только электрическое, но и магнитное поле.

Если провод с постоянным током покоится в данной системе отсчета, то он создает постоянное магнитное поле. Но этот же провод по отношению к другим инерциальным системам движется. Следовательно, порождаемое им магнитное поле в этих системах будет изменяться и создавать вихревое электрическое поле. Короче говоря, поле, которое относительно некоторой системы отсчета выглядит как «чисто» электрическое или как «чисто» магнитное, относительно других систем будет представлять собой совокупность электрического и магнитного полей.

## 19 ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Полная система уравнений Максвелла при наличии некоторых дополнительных условий позволяет решать с определенной степенью точности любую задачу, связанную с электрическими и магнитными процессами.

*Замечание.* Уравнения Максвелла, вообще говоря, следовало бы записывать в дифференциальной форме, ибо интегральные уравнения при решении конкретных задач приносят пользу только в самых простых случаях, например при наличии симметрии зарядов и токов и при условии, что среда безгранична, однородна, изотропна и неферромагнитна. Однако уравнения Максвелла в дифференциальной форме выходят за рамки нашей программы и, поэтому мы ограничимся интегральными уравнениями.

Первые два уравнения мы уже записывали. Это – закон электромагнитной индукции и закон полного тока:

$$1) \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}; \quad (19.1)$$

$$2) \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 E_0 \frac{\partial N_E}{\partial t} + \mu_0 I_{\text{пров}} + \mu_0 I_{\text{микро}} + \mu_0 I_{\text{поляр}}. \quad (19.2)$$

Уравнение (19.2) можно записать в более краткой форме.

Поток вектора  $\vec{E}$  равен  $N_E = \int_S \vec{E} d\vec{S}$

Следовательно,  $\frac{\partial N_E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S}$ .

Согласно (17.2)

$$I_{\text{поляр}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{P} d\vec{S}.$$

Ранее было показано, что суммарный микроток, пронизывающий поверхность  $S$ , опирающуюся на замкнутый контур  $L$ , равен циркуляции вектора намагниченности  $\vec{J}$  по этому контуру

$$I_{\text{микро}} = \oint_L \vec{J} d\vec{l}.$$

Введем эти замены в (19.2), перенесем слагаемое с  $\vec{J}$  в левую часть, объединим слагаемые с  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$  и разделим обе части на  $\mu_0$ . Получим

$$\oint_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I_{\text{пров}} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) d\vec{S}.$$

Вектор  $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \vec{H}$  – напряженность магнитного поля.

Вектор  $\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D}$  – индукция электрического поля.

Интеграл  $\int_S (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) d\vec{S} = N_D$  – поток электрической индукции сквозь  $S$ .

Величина  $\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} = \frac{\partial N_D}{\partial t}$  – скорость изменения потока  $\vec{D}$  сквозь  $S$ .

Таким образом,

$$2)' \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{пров}} + \frac{\partial N_D}{\partial t} \quad (19.3)$$

Циркуляция вектора  $\vec{H}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна суммарному току проводимости, охватываемому контуром  $L$ , плюс скорость изменения потока электрической индукции сквозь произвольную поверхность  $S$ , опирающуюся на  $L$ .

Как видно из (19.3), величина  $\frac{\partial N_D}{\partial t}$  имеет размерность тока.

И  $I_{\text{пров}}$ , и  $\frac{\partial N_D}{\partial t}$  действуют одинаковым образом: создают магнитное поле. Величину  $\frac{\partial N_D}{\partial t}$  Максвелл назвал *током смещения*: (Причины, по которым переменное электрическое поле было названо током смещения, носят чисто исторический характер, и мы его касаться не будем. Заметим только, что с современной точки зрения термин не относится к числу удачных.)

$$I_{\text{смещ}} = \frac{\partial N_D}{\partial t}. \quad (19.4)$$

Производную от  $\vec{D}$  по  $t$  Максвелл назвал плотностью тока  $\vec{j}_{\text{смещ}}$

$$\vec{j}_{\text{смещ}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (19.5)$$

Учитывая (19.4), перепишем (19.3):



$$2)'' \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{пров}} + I_{\text{смещ}}. \quad (19.6)$$

Циркуляция вектора напряженности  $\vec{H}$  магнитного поля по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна алгебраической сумме тока проводимости и тока смещения, охватываемых контуром  $L$ .

Третье и четвертое уравнения выражают теорему Гаусса для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

Для вектора  $\vec{E}$ : поток вектора  $\vec{E}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен  $\frac{1}{\epsilon_0}$ , умноженной на алгебраическую сумму свободных и поляризационных зарядов, заключенных внутри объема, ограниченного поверхностью  $S$

$$3) \quad \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{своб}}}{\epsilon_0} + \frac{q_{\text{поляр}}}{\epsilon_0}, \quad (19.7)$$

где  $q_{\text{своб}}$ ,  $q_{\text{поляр}}$  – алгебраические сумма свободных и поляризационных зарядов, охватываемых поверхностью интегрирования  $S$ .

Для вектора  $\vec{B}$

$$4) \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (19.8)$$

Пятое и шестое уравнения связывают  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$

$$5) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}; \quad (19.9)$$

$$6) \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}). \quad (19.10)$$

В изотропных несегнетоэлектрических неферромагнитных средах эти уравнения переходят в более простые:

$$5)' \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} + \vec{P}; \quad (19.11)$$

$$6)' \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (19.12)$$

И, наконец,

$$7) \quad \vec{j}_{\text{пров}} = \sigma \vec{E} \quad (19.13)$$

где  $\vec{j}_{\text{пров}}$  – плотность тока проводимости;  $\sigma$  – электропроводность;  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля.

Уравнения Максвелла играют в электромагнетизме такую же роль, как законы Ньютона в механике или начала термодинамики в молекулярной физике.

## 20 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

1 Из дифференциальных уравнений Максвелла следует, что возможно существование электромагнитного поля в виде электромагнитных волн. Рассмотрим качественную сторону этого вопроса.

Пусть в точке  $O$  безграничного диэлектрика создано каким-либо способом электрическое поле  $\vec{E}$  (рис. 37). Если нет электрических зарядов, поддерживающих это поле, оно будет исчезать.

Но изменяющееся электрическое поле создает магнитное поле  $\vec{B}$ , линии которого направлены по часовой стрелке, если смотреть на вектор  $\vec{E}$  сверху (рис. 37). Следовательно,  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  направлен вертикально вниз).



Рис. 181

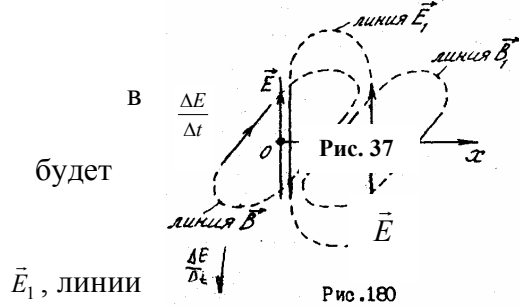


Рис. 180

будет  $\vec{E}_1$ , линии стрелки.

поле в точке  $O$ , но зато появится  $\vec{B}$

более удаленной точке. Описанный процесс называется электромагнитной волной.

2 Поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в каждой точке электромагнитной волны перпендикулярны друг к другу и к направлению распространения волны. Направления векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$  связаны между собой правилом правого буравчика: если вращать рукоятку буравчика от  $\vec{E}$  к  $\vec{B}$  (по кратчайшему пути), то поступательное движение буравчика будет совпадать с направлением  $\vec{v}$  (рис. 38).

3 Существование электромагнитных волн Д. Максвелл предсказал теоретически в 1863 г. Но только в 1888 г. они были обнаружены экспериментально (Г. Герц).

Герц первым осуществил переход от закрытого колебательного контура, слабо излучающего электромагнитные волны, к открытому. В закрытом контуре электрическое и магнитное поля сосредоточены в небольших, отделенных друг от друга областях пространства.

Чтобы контур излучал сильно, необходимо области, где создаются электрическое и магнитное поля, сделать менее обособленными как друг от друга, так и от окружающего контур пространства. Этого можно достигнуть, раздвигая обкладки конденсатора и увеличивая расстояние между витками катушки (рис. 39, а - г).

Открытый контур Герца, называемый диполем или вибратором Герца представляет собой два проводящих стержня, снабженных искровым промежутком (рис. 40).

Для возбуждения колебаний вибратор подключался к источнику напряжения (индуктор Румкорфа). По достижении пробивного напряжения в искровом промежутке возникала искра, закорачивающая стержни вибратора. В вибраторе возникали свободные затухающие колебания, которые продолжались до тех пор, пока не погасла искра.

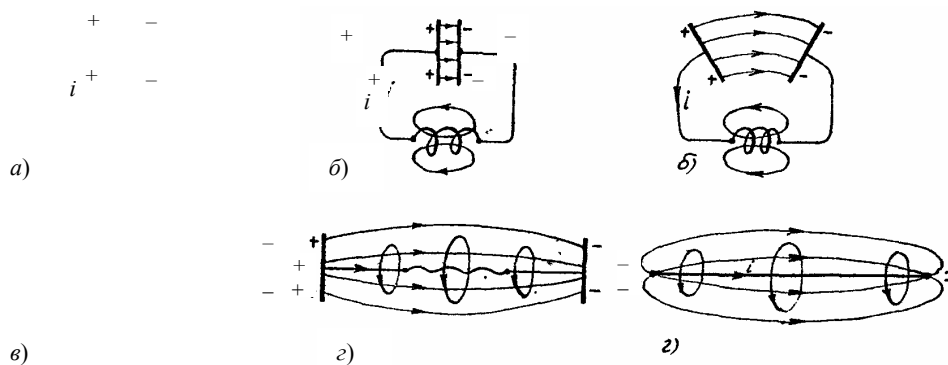
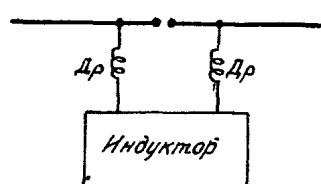


Рис. 39

Рис. 182

Чтобы высокочастотные токи не уходили в обмотку индуктора, между вибратором и индуктором включались дроссели  $Dp$  (дроссель - катушка с большой индуктивностью). В процессе колебаний вибратор излучал электромагнитные волны.

Для обнаружения излучаемых волн Герц использовал другой вибратор, тождественный излучающему (но с меньшим вынужденных колебаний в искоркам, возникающим в



рассматриваемой среде нет токов, поддерживающих поле  $\vec{B}$ , то оно также исчезает.

Исчезающее магнитное поле вызовет появление вихревого электрического поля которого направлены против часовой

Поле  $\vec{E}_1$  скомпенсирует первоначальное седней точке  $I$ . Исчезая в точке  $I$ , поле  $\vec{E}_1$ ,

приведет к появлению поля  $\vec{B}_1$ , которое уничтожит поле  $\vec{B}$ , но обнаружится в бо-

лее удаленной точке. Описанный процесс называется электромагнитной волной.

Электрическое и магнитное поле, взаимно превращаясь и поддерживая друг друга, будут распространяться в пространстве.

Максвелл предсказал теоретически в 1863 г. Но только в 1888 г. они были обнаружены экспериментально (Г. Герц).

В закрытом контуре электрическое и магнитное поля сосредоточены в небольших, отделенных друг от друга областях пространства.

Чтобы контур излучал сильно, необходимо области, где создаются электрическое и магнитное поля, сделать менее обособленными как друг от друга, так и от окружающего контур пространства. Этого можно достигнуть, раздвигая обкладки конденсатора и увеличивая расстояние между витками катушки (рис. 39, а - г).

Открытый контур Герца, называемый диполем или вибратором Герца представляет собой два проводящих стержня, снабженных искровым промежутком (рис. 40).

Для возбуждения колебаний вибратор подключался к источнику напряжения (индуктор Румкорфа). По достижении пробивного напряжения в искровом промежутке возникала искра, закорачивающая стержни вибратора. В вибраторе возникали свободные затухающие колебания, которые продолжались до тех пор, пока не погасла искра.

Чтобы высокочастотные токи не уходили в обмотку индуктора, между вибратором и индуктором включались дроссели  $Dp$  (дроссель - катушка с большой индуктивностью). В процессе колебаний вибратор излучал электромагнитные волны.

Для обнаружения излучаемых волн Герц использовал другой вибратор, тождественный излучающему (но с меньшим вынужденных колебаний в искоркам, возникающим в приемном вибраторе Герц фиксировал по зазору вибратора.

4 Герцу удалось определить длину электромагнитных волн, измерить скорость их распространения (правда, с ошибкой почти в 100 000 км/с), установить поперечный характер волн, обнаружить их отражение и преломление.

5 Опыты Герца были продолжены П.Н. Лебедевым, которому удалось измерить давление света – один из самых тонких эффектов. Этот эффект предсказывала теория Максвелла, но его довольно долго не могли обнаружить экспериментально.

Опыты Герца, Лебедева и их последователей доказали тождество световых и электромагнитных волн. Важную роль в этом доказательстве сыграли сближение на частотной шкале наиболее длинных световых (инфракрасных, тепловых) волн и волн, излучаемых вибраторами типа вибраторов Герца. Решающие опыты здесь принадлежат А.А. Глаголевой-Аркадьевой, которая в 1922 г. с помощью специального устройства, называемого «магнетрон», получила электромагнитные волны, почти смыкающиеся с инфракрасными световыми волнами (длинами в миллимикрон).

В 1896 г. А.С. Попов впервые осуществил с помощью электромагнитных волн передачу сообщения на расстояние (были переданы слова «Генератор»), положив тем самым начало радиосвязи.

## 21 СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

1 Из уравнений Максвелла следует, что электромагнитные волны поперечны; векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  перпендикулярны к направлению распространения волны.

2 Закон изменения векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в электромагнитной волне задается характером электромагнитных колебаний в излучающей антенне.

3 Электромагнитная волна называется плоской, если ее фазовая поверхность – плоскость.

Фазовая поверхность – поверхность, во всех точках которой векторы  $\vec{E}$  (или  $\vec{B}$ ) колеблются в одинаковых фазах.

Если величина и направление вектора  $\vec{E}$  (равно как и вектора  $\vec{B}$ ) во всех точках фазовой поверхности одинакова, то волна называется однородной.

Если векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в плоской волне изменяются по гармоническому закону, волна называется гармонической.

4 Фазовая скорость волны – скорость перемещения данной фазовой поверхности.

Фазовая скорость волны зависит от диэлектрической и магнитной проницаемости среды

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} \quad (21.1)$$

Для вакуума ( $\epsilon = 1, \mu = 1$ ) по этой формуле получается

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot 4,314 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}} = c.$$

Мы видим, что в вакууме фазовая скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света. Окончательная формула для фазовой скорости электромагнитных волн в среде такова

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} c \quad (21.2)$$

5 Пусть плоская однородная гармоническая электромагнитная волна распространяется вдоль положительного направления оси  $x$ . Уравнения этой волны в векторном виде записываются следующим образом:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right); \quad (21.3)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_m \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right), \quad (21.4)$$

где  $\vec{E} = E_m \vec{j}$ ,  $\vec{B}_m = E_m \vec{k}$  ( $E_m, B_m$  – амплитуды  $\vec{E}, \vec{B}$ ;  $\vec{j}, \vec{k}$  – орты осей  $y, z$ );  $\omega$  – циклическая частота колебаний  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ ,  $x$  – координата точки наблюдения;  $v$  – фазовая скорость волны.

Уравнениям (21.3) – (21.4) обычно придают следующий вид:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx); \quad (21.5)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_m \cos(\omega t - kx), \quad (21.6)$$

где  $k = \frac{\omega}{v}$  – волновое число.

На рис. 41 изображена «мгновенная фотография» плоской гармонической электромагнитной волны. Как видно из рисунка и из уравнений (21.5), (21.6), колебания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  происходят в фазе:  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  одновременно достигают максимума и одновременно проходят через нуль.

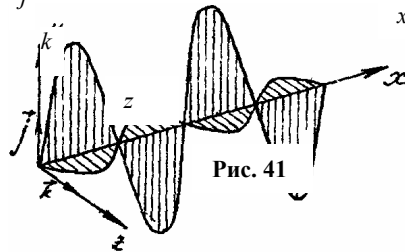
6 Гармоническая электромагнитная волна характеризуется частотой, периодом и длиной.

Период  $T$  – время, в течение которого вектор  $\vec{E}$  (или  $\vec{B}$ ) в электромагнитной волне совершает одно полное колебание.

Частота  $\nu$  – число полных колебаний за единицу времени.

Длина волны  $\lambda$  – расстояние, на которое волна распространяется за один период

$$\lambda = vT = \frac{cT}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\nu \sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (21.7)$$



7 Электромагнитная волна материальна. Она обладает массой, энергией, импульсом.

Энергия электромагнитной волны складывается из энергии электрического и магнитного полей. Плотность энергии электрического поля в среде равна

$$w_E = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}; \quad (21.8)$$

плотность энергии магнитного поля:

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}; \quad (21.9)$$

плотность энергии электромагнитной волны

$$w = w_E + w_B = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \quad (21.10)$$

Можно доказать что в любой точке электромагнитной волны (в случае непроводящей среды) в любой момент времени плотности  $w_E$  и  $w_B$  одинаковы:  $w_E = w_B$

или 
$$\frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu},$$

откуда

$$E = \frac{B}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}}. \quad (21.11)$$

Так как  $w_E = w_B$  плотность  $w$  равна

$$w = 2w_E = \epsilon_0 \epsilon E^2$$

или

$$w = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} BE. \quad (21.12)$$

Для характеристики переноса энергии электромагнитной волной вводят понятие потока энергии.

Поток энергии  $\Phi_w$  сквозь поверхность  $S$  – энергия, протекающая через  $S$  за единицу времени.

Распределение потока энергии по  $S$  характеризует плотность потока энергии.

Плотность потока энергии  $\vec{\Pi}$  – векторная физическая величина, численно равная энергии, переносимой за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению распространения волны, и совпадающая с направлением фазовой скорости волны.

Величину плотности потока энергии мы получим, умножив плотность энергии волны (21.12) на фазовую скорость волны (21.1):

$$\Pi = wv = \frac{1}{\mu_0\mu} EB. \quad (21.13)$$

Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{\Pi}$  образуют правовинтовую систему

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0\mu} [\vec{E}\vec{B}]. \quad (21.14)$$

Вектор плотности потока энергии  $\vec{\Pi}$  называется вектором Пойнтинга.

Поток энергии через произвольную поверхность  $S$  вычисляется интегрированием  $\vec{\Pi}$  по  $S$

$$\Phi_w = \int_S \vec{\Pi} d\vec{S}. \quad (21.15)$$

Масса электромагнитной волны, заключенная в некотором объеме  $V$ , может быть вычислена по формуле теории относительности о соотношении массы и энергии

$$W = mc^2. \quad (21.16)$$

В частности, масса, заключенная в единице объема (средняя плотность материи в электромагнитной волне)  $\rho$  равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{W}{c^2V} = \frac{\bar{w}}{c^2}, \quad (21.17)$$

где  $\bar{w}$  – средняя объемная плотность энергии волны.

Импульс некоторого объема электромагнитной волны равен  $\vec{k} = m\vec{c}$  (в вакууме),  $\vec{k} = m\vec{v}$  (в среде).

8 Электромагнитная волна, встречая на своем пути тела, оказывает на них давление. Пусть плоская волна падает на плоскую поверхность тела перпендикулярно к поверхности (рис. 42).

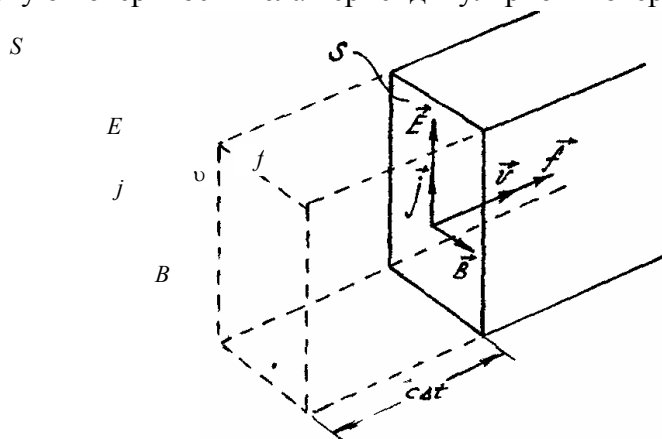


Рис. 42

Электрическое поле волны вызовет в этом теле ток (проводимости или поляризационный). Магнитное поле волны будет действовать на этот ток с силой, направление которой совпадает с направлением распространения волны.

Пусть рассматриваемое тело полностью поглощает падающую на него волну. Тогда импульс, передаваемый волной поверхности тела  $S$  за время  $\Delta t$ , равен  $mc$ , где  $m$  – масса волны, заключенная в прямой призме с основанием  $S$  и высотой  $c \Delta t$  (рис. 42). Импульс  $mc$  равен  $\bar{f}\Delta t$ , где  $\bar{f}$  – средняя сила, действующая на площадку  $S$

$$mc = \bar{f}\Delta t. \quad (21.18)$$

Энергия электромагнитной волны, заключенная в объеме равна, с одной стороны,

$$W = mc^2. \quad (21.19)$$

С другой,

$$W = \bar{w}Sc\Delta t, \quad (21.20)$$

где  $\bar{w}$  – средняя объемная плотность энергии волны.

Из (21.19) и (21.20) находим  $m$  и подставляем в (21.18)

$$\bar{w}S = \bar{f}.$$

Разделив  $\bar{f}$  на  $S$ , найдем давление

$$p = \frac{\bar{f}}{S} = \bar{w}. \quad (21.21)$$

Если тело частично отражает волну и  $k$  – коэффициент отражения, то давление равно

$$p = (1+k)\bar{w}, \quad (21.22)$$

(коэффициент отражения показывает, какая доля падающей на тело энергии отражается).

Для абсолютно отражающего тела  $k = 1$  и

$$p = 2\bar{w}. \quad (21.23)$$

Если волна падает на поверхность под углом  $i$  к нормали,

$$p = (1+k)\bar{w} \cos i. \quad (21.24)$$

9 При прохождении через границу раздела двух сред электромагнитная волна испытывает преломление. Электромагнитные волны могут интерферировать, дифрагировать. Электромагнитные волны могут быть поляризованными (обо всем этом пойдет речь в третьей части курса).

\*\*\*

Теория Максвелла сыграла выдающуюся роль в развитии физики. Эта теория не только объяснила большую совокупность опытных фактов, но и предсказала вплоть до количественных оценок существование неизвестных ранее явлений (давление электромагнитных волн, электромагнитная природа света и др.).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Савельев И.В. Курс общей физики. М.: Наука, 1989. Т. 2.
- 2 Зисман Г.А., Годес О.М. Курс общей физики. М.: Наука, 1971. Т. 2.
- 3 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М.: Высшая школа, 1989. Т. 2.