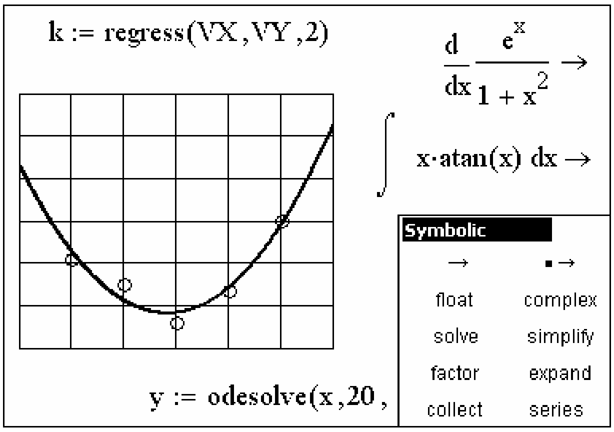
СИСТЕМА MATHCAD
В ИНЖЕНЕРНОЙ ПРАКТИКЕ



• Издательство ТГТУ •

Министерство образования Российской Федерации
Тамбовский государственный технический университет

СИСТЕМА MATHCAD
В ИНЖЕНЕРНОЙ ПРАКТИКЕ

Часть 2

Лабораторные работы по курсу
"Системы автоматизированных расчетов"
для студентов 2 курса дневного и 3 курса заочного отделений
специальностей 072000 и 210200

Тамбов
Издательство ТГТУ
2004

УДК 025.4.03
ББК ←973-018.2
С312

Р е ц е н з е н т
Кандидат технических наук, доцент
И. В. Милованов

С312 Система MathCAD в инженерной практике. В 2 ч.: Лабораторные работы / Сост.: А.Ю. Сенкевич, А.А. Чуриков. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. – Ч. 2. – 20 с.

Даны лабораторные работы, методические указания и индивидуальные задания для освоения студентами аналитических (символьных) расчетов, способов численного решения дифференциальных уравнений, а также для приобретения практических навыков обработки данных в системе автоматизированных расчетов MathCAD.

Предназначены для студентов дневного и заочного отделений специальностей 072000 и 210200.

УДК 025.4.03
ББК 973-018.2

Учебное издание

СИСТЕМА MATHCAD В ИНЖЕНЕРНОЙ ПРАКТИКЕ

Лабораторные работы

Составители: Сенкевич Алексей Юрьевич,
Чуриков Александр Алексеевич

Редактор Т.М. Глинкина
Компьютерное макетирование Е.В. Кораблевой

Подписано в печать 09.03.04
Формат 60 × 84 / 16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Гарнитура Times New Roman. Объем: 1,16 усл. печ. л.; 1,1 уч.-изд. л.
Тираж 100 экз. С. 201[М]

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета,
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

СИМВОЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В MATHCAD

Цель работы.

1 Ознакомиться с основными видами символьных (аналитических) вычислений, производимых в MathCAD.

2 Приобрести практические навыки выполнения символьных расчетов в MathCAD.

Задание.

1 Изучить методические указания по выполнению лабораторной работы.

2 Произвести символьные вычисления в соответствии с вариантом задания (табл. 1).

Методические указания

Долгое время математические компьютерные программы (**Eureka**, **Mercury**, ранние версии **MathCAD** и **MatLab**) развивались как системы для численных расчетов. Однако в начале 90-х годов XX века быстрое развитие получили системы символьной математики (**MathCAD**, **Maple**, **MatLab** и др.). Им стали доступны такие интеллектуальные виды аналитических (символьных) вычислений, как нахождение пределов функций и их производных, вычисление определенных и неопределенных интегралов, разложение функций в ряд, подстановки, комбинирование и т.д. Результаты символьных вычислений представляются в аналитическом виде, т.е. в виде формул [1].

Для выполнения символьных расчетов в MathCAD используется меню символьных вычислений "Symbolics" или палитра "Символьные вычисления" (рис. 1).

Основным в данной палитре является оператор "Символический знак равенства" (кнопка ). Если при помощи него вместе знака "=" в выражениях использовать символ "→", то MathCAD будет производить аналитические вычисления, вместо численных. К таким операциям относятся, например, нахождение сумм рядов, производных, определенных и неопределенных интегралов, пределов функций (рис. 2).

Замечание. Если система не может выполнить символьное вычисление, то в качестве результата в этом случае выдается исходное выражение!

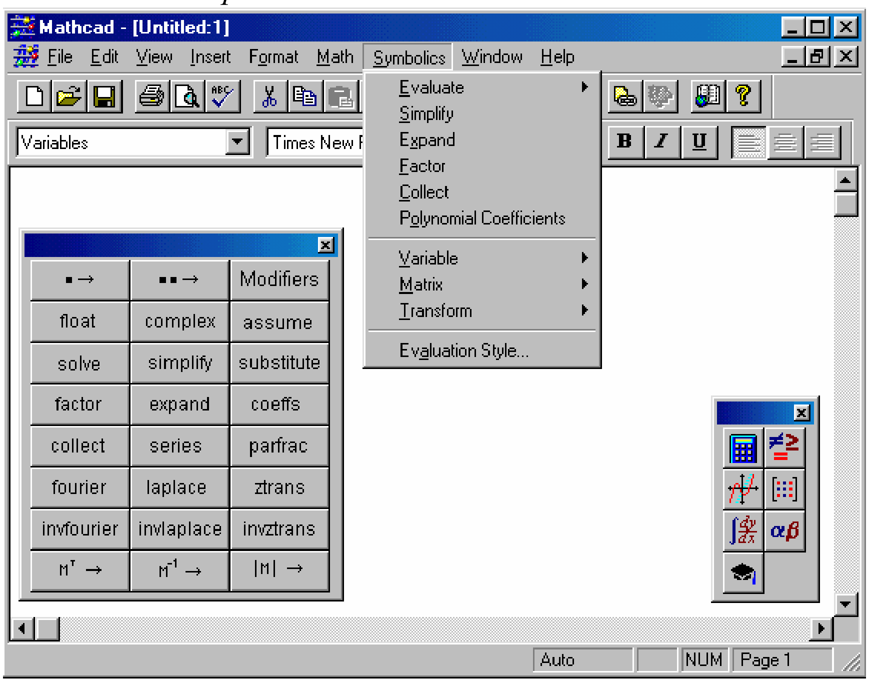


Рис. 1 Меню символьных вычислений "Symbolics"

и палитра "Символьные вычисления"

Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{6}\cdot\pi^2$$

Производная

$$\frac{d^2}{dx^2}\cos(x) \rightarrow -\cos(x)$$

Определенный интеграл

$$\int_a^b e^x\cdot\sin(x)\,dx \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot\exp(b)\cdot\cos(b) + \frac{1}{2}\cdot\exp(b)\cdot\sin(b) + \frac{1}{2}\cdot\exp(a)\cdot\cos(a) - \frac{1}{2}\cdot\exp(a)\cdot\sin(a)$$

Неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^2+1}{3\cdot x+5}\,dx \rightarrow \frac{1}{6}\cdot x^2 - \frac{5}{9}\cdot x + \frac{34}{27}\cdot\ln(27\cdot x+45)$$

Предел

$$\lim_{n\to 0}\frac{n^2+2}{n^2-3\cdot n+1} \rightarrow 2$$

Рис. 2 Примеры символьных вычислений

Рассмотрим на примерах ряд операторов палитры "Символьные вычисления" (рис. 1):

• simplify – упростить выражение, например

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\ \text{simplify} \rightarrow \frac{(2\cdot x+5)}{(x+1)^2}$$

• expand – разложить по степеням какой-либо переменной, раскрыть выражение, например

$$\left(2\,x^2+5\right)\cdot(x+1)\cdot\left(x^3-6\right)\ \text{expand}, x \rightarrow 2\cdot x^6 - 7\cdot x^3 + 2\cdot x^5 - 12\cdot x^2 + 5\cdot x^4 - 30\cdot x - 30$$

• factor – разложить выражение на множители (операция, обратная expand), например

$$2\cdot x^6 - 7\cdot x^3 + 2\cdot x^5 - 12\cdot x^2 + 5\cdot x^4 - 30\cdot x - 30\ \text{factor}, x \rightarrow \left(2\cdot x^2+5\right)\cdot(x+1)\cdot\left(x^3-6\right)$$

• coeffs – нахождение полиномиальных коэффициентов. Эта операция аналогична команде expand с той лишь разницей, что она возвращает коэффициенты результирующего полинома в виде вектора.

• substitute – замена переменной в выражении (подстановка).

• series – разложить функцию в ряд Тейлора по указанной переменной, например

$$y(x) := e^x$$

$$y(x)\ \text{series}, x, 4 \rightarrow 1 + x + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot x^3$$

В данном примере второй параметр, равный 4, определяет количество членов ряда, оставляемых при разложении.

• parfrac – разложить выражение на простые дроби, например

$$\frac{(x+4)^2}{x-1} + \frac{x}{x+2x^2-1}\ \text{convert}, \text{parfrac}, x \rightarrow x + 9 + \frac{25}{(x-1)} + \frac{1}{3\cdot(1+x)} + \frac{1}{3\cdot(2\cdot x-1)}$$

• solve – решить уравнение или неравенство относительно указанной переменной. Пусть, например, необходимо решить уравнение $2x^2 + x - 10 = 0$. Для этого в MathCAD введем следующую формулу:

$$2\cdot x^2 + x - 10\ \text{solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{-5}{2} \end{bmatrix}$$

Однако многие уравнения подчас не имеют аналитического решения. В таких случаях приходится применять численные методы. В MathCAD для приближенного отыскания корня функции $F(x)$ используется встроенная функция root($F(x)$, x), перед вызовом которой необходимо задать начальное приближение. На рис. 3 приведен пример нахождения корня функции $F(x) = -64 + 25x - 8x^2 + 2x^3$. В нем сначала определяется функция $F(x)$, затем задается начальное приближение $x = 1$ и находится корень $x1$.

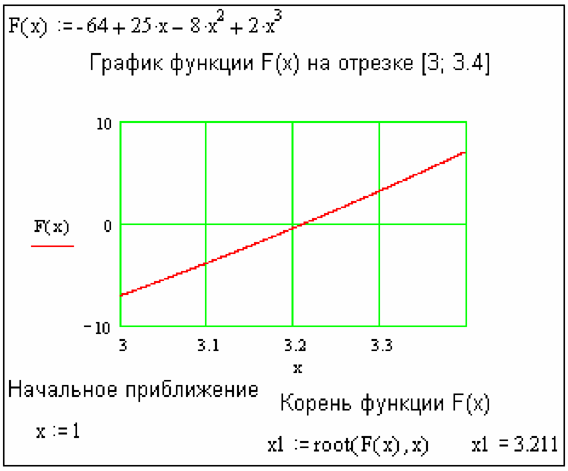


Рис. 3   Приближенное нахождение корня функции

Интегральные преобразования

MathCAD предоставляет пользователю возможность выполнять следующие виды интегральных преобразований:

- fourier и invfourier – прямое и обратное преобразования Фурье;
- laplace и invlaplace – прямое и обратное преобразования Лапласа;
- ztrans и invztrans – прямое и обратное преобразования Z-преобразования.

Например, преобразование Лапласа:

Прямое

$$\cos(5\,t)\ \text{laplace}, t \rightarrow \frac{s}{\left(s^2+25\right)}$$

Обратное

$$\frac{10}{s+2}\ \text{invlaplace}, s \rightarrow 10\cdot\exp(-2\cdot t)$$

Символьные преобразования над матрицами

В палитре "Символьные вычисления" имеются следующие кнопки для выполнения символьных преобразований над матрицами:

- $M^T \rightarrow$ – получение транспонированной матрицы;
- $M^{-1} \rightarrow$ – получение обратной матрицы;
- $|M| \rightarrow$ – вычисление определителя квадратной матрицы.

Задания для самостоятельной работы

В лабораторной работе студент должен выполнить в соответствии с выданным преподавателем вариантом три задания.

1 Найти предел, производную, интеграл или сумму ряда, используя операции символьных вычислений MathCAD.

2 Решить аналитически (при помощи символьной функции solve) уравнение в MathCAD. Построить график заданной функции. Для одного из найденных корней повторить процедуру, но уже численным способом (посредством функции root), выбрав в качестве начального приближения любую точку в окрестности этого корня.

3 Для функции $f(t)$ найти ее изображение, используя прямое преобразование Лапласа, а для функции $F(s)$ найти ее оригинал при помощи обратного преобразования Лапласа.

Таблица 1

№ вариан-	Задание 1	Задание 2	Задание 3

та			
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$	$\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{\ln\lvert x\rvert+1}=0$	$f(t)=\sin(2t)\cos t$
2	$\dfrac{d}{dx}\dfrac{e^x}{1+x^2}$	x^3+x^2-x- $-1=0$	$F(s)=\dfrac{1}{s-5}+\dfrac{1}{s^2-36}$
3	$\int\dfrac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$	$\cos x-\ln x-$ $-0{,}125=0$	$f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^t$
4	$\dfrac{d}{dx}\dfrac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4}$	x^4-x^3- $-5x^2+2=0$	$F(s)=\dfrac{s^2+1}{s(s+1)(s+2)}$
5	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(k+1)^2}$	$\dfrac{x^3\ln x}{3x+1}=0$	$f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$
6	$\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}\right)$	$-3x^5+x^4-$ $-2x^2+x+1=0$	$F(s)=\dfrac{3s}{\left(s^2+1\right)^2}$
7	$\int\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}}dx$	$\dfrac{\arccos x-1}{x^2+10}=0$	$f(t)=\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{t}$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(2n+1)!}$	$x^4-2x^3+3x^2-$ $-x+1=0$	$F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^3(s+3)}$

Продолжение табл. 1

№ варианта	Задание 1	Задание 2	Задание 3
9	$\int\limits_a^b x^2\ln(1+x)dx$	$e^{2x}-1+$ $+\dfrac{x}{x^2+1}=0$	$f(t)=\dfrac{\sin(2\sqrt{at})}{\sqrt{a\pi}}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$	$2x^3+5x^2-$ $-0{,}5x+15=0$	$F(s)=\dfrac{s+1}{s^2(s-1)(s+2)}$
11	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k+1}{k!}$	$\sin x-\ln x-$ $-0{,}5=0$	$f(t)=\sin t\cdot\operatorname{sh} t$
12	$\int\limits_a^b\dfrac{x^2}{x^6+4}dx$	$x^2-2\sqrt{x+1}-$ $-1=0$	$F(s)=\dfrac{s^2+14}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+9\right)}$
13	$\dfrac{d}{dx}\arccos\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$	$\dfrac{0{,}5e^{3x}+x}{x(1-2x)^2}=0$	$f(t)=\dfrac{\sin 7t\cdot\sin 3t}{t}$
14	$\int x\operatorname{arctg}x\,dx$	$\sqrt[3]{x+1}-1-$ $-2\sqrt{x-1}=0$	$F(s)=\dfrac{s^2+2}{s^4+s^2+1}$

Лабораторная работа № 5

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ В MATHCAD

Цель работы.

1 Научиться решать в MathCAD дифференциальные уравнения численным способом.

2 Ознакомиться со способом численного решения систем дифференциальных уравнений в MathCAD.

Задание.

1 Изучить методические указания по выполнению лабораторной работы.

2 Решить в MathCAD дифференциальное уравнение и систему дифференциальных уравнений в соответствии с вариантом задания (табл. 2).

Методические указания

Численное решение дифференциального уравнения *n*-го порядка

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} & y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \\ & \quad \ldots \\ & y'(x_0) = y_0', \\ & y(x_0) = y_0 \end{aligned}$$

на отрезке $x \in [x_0, x_K]$ в MathCAD может быть найдено при помощи функции odesolve (x, x_K, *steps*). Здесь x – переменная дифференцирования; x_K – правая граница отрезка, на котором ищется решение; *steps* – необязательный параметр, определяющий число шагов разбиения интервала $[x_0, x_K]$ для нахождения решения дифференциального уравнения.

Ввод дифференциального уравнения и начальных условий производится в блоке, начинающемся с директивы *given* ("дано").

Рассмотрим пример. Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 3y = \sin x$ с начальными условиями $y'(0) = 1$ и $y(0) = 0$ на отрезке $x \in [0, 20]$.

Решение данного уравнения проиллюстрировано на рис. 4.

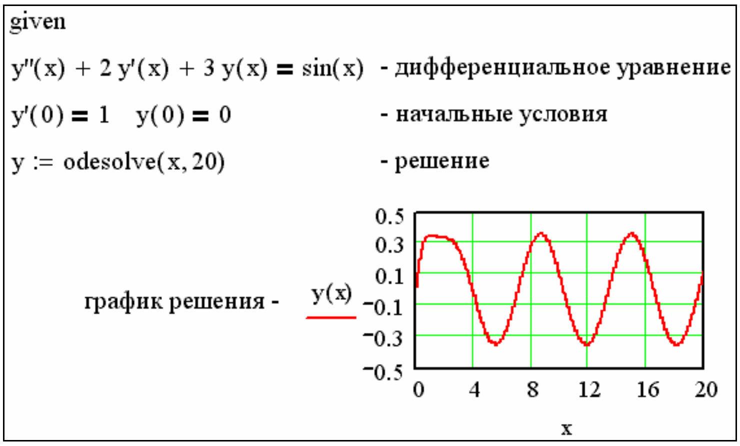


Рис. 4 Пример решения дифференциального уравнения

Замечания к решению дифференциального уравнения (*рис*. 4).

1 *Ввод знака равенства в дифференциальном уравнении и в начальных условиях производится при помощи кнопки* = *палитры* "*Сравнения и отношения*".

2 *Знак производной* ("*штрих*") *вводится кнопкой клавиатуры* ~ Ё . *При этом, если необходимо ввести четвертую производную, то необходимо ввести четыре* "*штриха*", *пятую – пять* "*штрихов*" *и т.д.*

Численное решение системы из *n* дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y_0' = f_0(x,\ y_0,\ y_1,\ \dots,\ y_{n-1}); \\ y' = f_1(x,\ y_0,\ \ y_1,\ \dots,\ y_{n-1}); \\ \quad\dots \\ y_{n-1}' = f_{n-1}(x,\ y_0,\ y_1,\ \dots,\ y_{n-1}) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} y_0(x_0) = y_{0,0}; \\ y_1(x_0) = y_{0,1}; \\ \quad\dots \\ y_{n-1}(x_0) = y_{0,n-1} \end{cases}$$

на отрезке $x \in [x_0, x_K]$ в MathCAD может быть найдено при помощи функции rkfixed (y, x_0, x_K, n, F), которая возвращает полученную методом Рунге-Кутта с фиксированным шагом таблицу решения системы. При этом начальные условия необходимо задать в виде вектора y, а правые части системы уравнений – в виде вектора F; n – число точек разбиения заданного интервала $[x_0, x_K]$.

Например, пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_0'(x) = \mu y_0(x) - y_1(x) - \left[y_0^2(x) + y_1^2(x)\right] y_0(x); \\ y_1'(x) = \mu y_1(x) + y_0(x) - \left[y_0^2(x) + y_1^2(x)\right] y_1(x) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} y_0(0) = 0; \\ y_1(0) = 1, \end{cases}$$

а параметр $\mu = -0{,}1$. Требуется найти решение данной системы дифференциальных уравнений на интервале $x \in [0,\ 20]$.

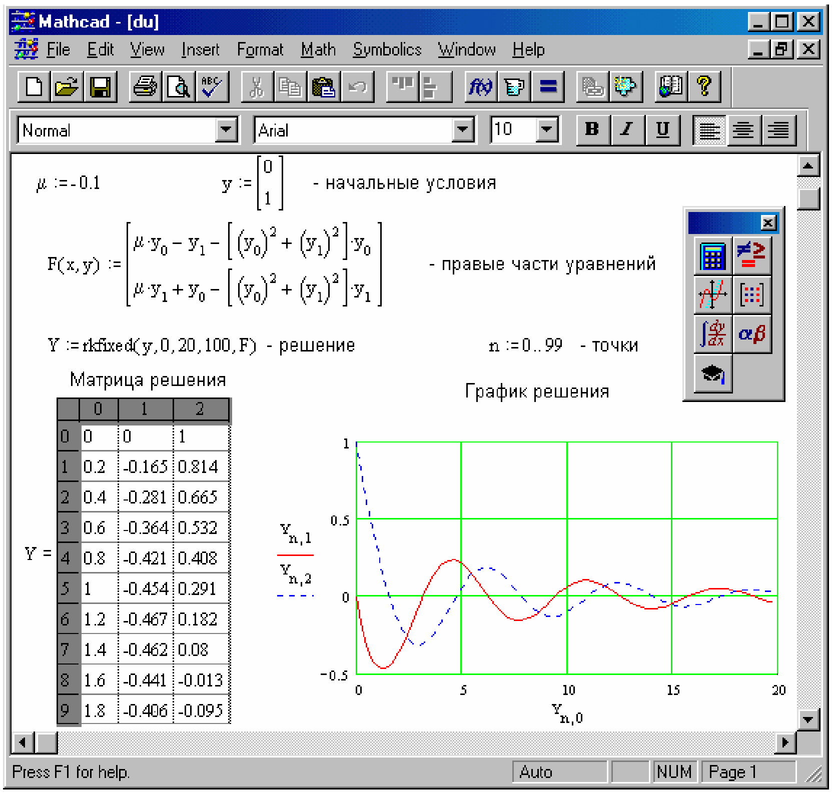


Рис. 5 Решение системы дифференциальных уравнений

Решение данной задачи в MathCAD представлено на рис. 5.

Приближенное решение системы, получаемое данным методом, представляется табличной функцией, заданной в 100 точках ($n = 0, 1, \ldots, 99$). При этом первый столбец матрицы решения Y соответствует x, второй – переменной y_0, а третий – y_1 (рис. 5).

Кроме функций решения дифференциальных уравнений odesolve и rkfixed, в MathCAD существует и ряд других, например, rkadapt и bulstoer.

Задания для самостоятельной работы

В лабораторной работе студент должен выполнить в соответствии с выданным преподавателем вариантом два задания.

1 Найти численное решение дифференциального уравнения в MathCAD на интервале $x \in [0, 20]$. Построить график решения.

2 Численно решить систему дифференциальных уравнений в MathCAD на интервале $x \in [0, 50]$. Построить графики решения.

Таблица 2

№ варианта	Задание 1	Задание 2
1	$y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 7x; \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0, \end{cases} \begin{cases} x(0) = -1; \\ y(0) = 1 \end{cases}$
2	$y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 15$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y; \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y, \end{cases} \begin{cases} x(0) = -1; \\ y(0) = 1 \end{cases}$
3	$4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - 4y; \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \end{cases} \begin{cases} x(0) = -1; \\ y(0) = 2 \end{cases}$
4	$y''' = -y'$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y; \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y, \end{cases} \begin{cases} x(0) = 1; \\ y(0) = 0 \end{cases}$
5	$y^{\mathrm{V}} = y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$, $y^{\mathrm{IV}}(0) = 2$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 5y; \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y, \end{cases} \begin{cases} x(0) = 0; \\ y(0) = 1 \end{cases}$
6	$y''' + 2y'' + y' + 2e^{-2x} = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{x}; \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \end{cases} \begin{cases} x(0) = 5; \\ y(0) = 2 \end{cases}$
7	$y''' - y' = 3(2 - x^2)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z; \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z; \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y, \end{cases} \begin{cases} x(0) = -1; \\ y(0) = 1; \\ z(0) = 2 \end{cases}$

Продолжение табл. 2

№ варианта	Задание 1	Задание 2
8	$y''' + 9y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - \dfrac{1}{y}; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0; \\ y(0) = 1 \end{cases}$
9	$y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - 3z; \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 - 3y; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1; \\ y(0) = 2; \\ z(0) = 3 \end{cases}$
10	$4y'' - 20y' + 25y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2x^2; \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 0 \end{cases}$
11	$y''' + 2y'' + 1 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y^3 + 4z; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \dfrac{1}{y} + 5z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 2y + 0{,}5z, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 2; \\ y(0) = 3; \\ z(0) = 1 \end{cases}$
12	$y^{\mathrm{IV}} + y'' + y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^3 - 5y; \\ \dfrac{dy}{dt} = (x - y)^2, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1; \\ y(0) = 1 \end{cases}$
13	$y''' + y'' + y' + y = \mathrm{e}^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 0$	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 2; \\ y(0) = 4 \end{cases}$
14	$y''' + 2y'' + y' - 1 = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 1$	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y - z; \\ \dfrac{dy}{dt} = y - \sqrt{z}; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 2y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1; \\ y(0) = 10; \\ z(0) = 5 \end{cases}$

Лабораторная работа № 6

ОБРАБОТКА ДАННЫХ В MATHCAD

Цель работы.

1 Изучить способы проведения интерполяции табличных данных в MathCAD.

2 Ознакомиться с функциями построения уравнений регрессии в MathCAD.

Задание.

1 Изучить методические указания по выполнению лабораторной работы.

2 Выполнить интерполяцию табличных данных и получить модель заданного вида с помощью регрессионного анализа в соответствии с вариантом задания (табл. 3).

Методические указания

Интерполяция

При проведении анализа различных физических явлений, технологических процессов результаты эксперимента обычно представляются в виде табличной зависимости функции $y(x)$:

x	x_1	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_{n-1}	y_n

При этом число заданных точек этой зависимости ограничено.

Поэтому неизбежно возникает задача приближенного вычисления значений функции в промежутках между узловыми точками (интерполяция) и за их пределами (экстраполяция). Эта задача решается аппроксимацией или интерполяцией исходной зависимости, т.е. ее подменой какой-либо достаточно простой функцией [2]. В MathCAD имеются встроенные функции, обеспечивающие кусочно-линейную и сплайновую интерполяцию исходной табличной зависимости.

При кусочно-линейной интерполяции соседние узловые точки соединяются отрезками прямых, и дополнительные точки определяются по уравнениям этих прямых. Для проведения такого вида интерполяции используется функция linterp(*VX*, *VY*, *x*), где *VX* и *VY* – векторы, задающие узловые точки исходной табличной зависимости, а *x* – аргумент результирующей интерполяционной функции.

Например, на рис. 6 исходная табличная зависимость *y*(*x*) задается векторами *VX* и *VY* (по 5 точек). Затем определяется, так называемая, интерполяционная функция *f_i*(*x*), которая позволяет для любого значения аргумента *x* определить искомую величину функции *y*. График этой функции представлен на рис. 6 (пунктир) вместе с узловыми точками (крестики). Из рис. 6 видно, что в узловых точках VX_i значения функции *f_i*(*x*) совпадают с табличными *VY*.

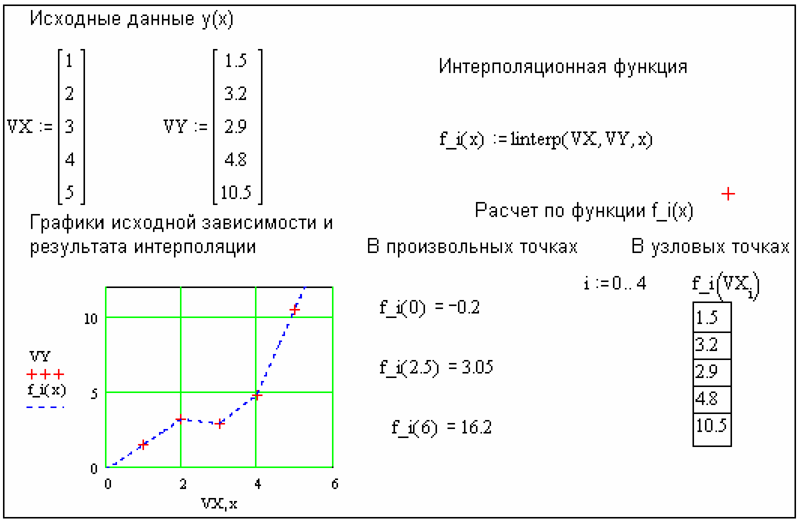


Рис. 6 Проведение кусочно-линейной интерполяции в MathCAD

Как видно из рис. 6, результаты кусочно-линейной интерполяции при достаточно малом числе узловых точек получаются довольно грубыми. Поэтому в целях повышения точности целесообразнее использовать сплайновую интерполяцию, при которой исходная функция заменяется отрезками кубических полиномов, проходящих через три смежные узловые точки. Коэффициенты полиномов рассчитываются так, чтобы непрерывными были их первые и вторые производные.

Для выполнения сплайновой интерполяции в MathCAD имеются четыре встроенные функции. Три из них обеспечивают получение вектора вторых производных сплайн-функций при различных способах сплайновой интерполяции:

• cspline (*VX*, *VY*) – возвращает вектор *VS* вторых производных при приближении в опорных точках к кубическому полиному;

• pspline (*VX*, *VY*) – возвращает вектор *VS* вторых производных при приближении в опорных точках к параболической кривой;

• lspline (*VX*, *VY*) – возвращает вектор *VS* вторых производных при приближении в опорных точках к прямой.

Четвертая функция interp (*VS*, *VX*, *VY*, *x*) определяет для найденного ранее вектора вторых производных *VS* и заданной при помощи векторов *VX* и *VY* исходной табличной зависимости *y*(*x*) интерполяционную сплайновую функцию.

Таким образом, сплайновая интерполяция в MathCAD производится в два этапа. На первом этапе определяется вектор вторых производных *VS* при помощи одной из трех функций (cspline, pspline или lspline), а на втором – определяется интерполяционная зависимость посредством функции interp. Пример дан на рис. 7.

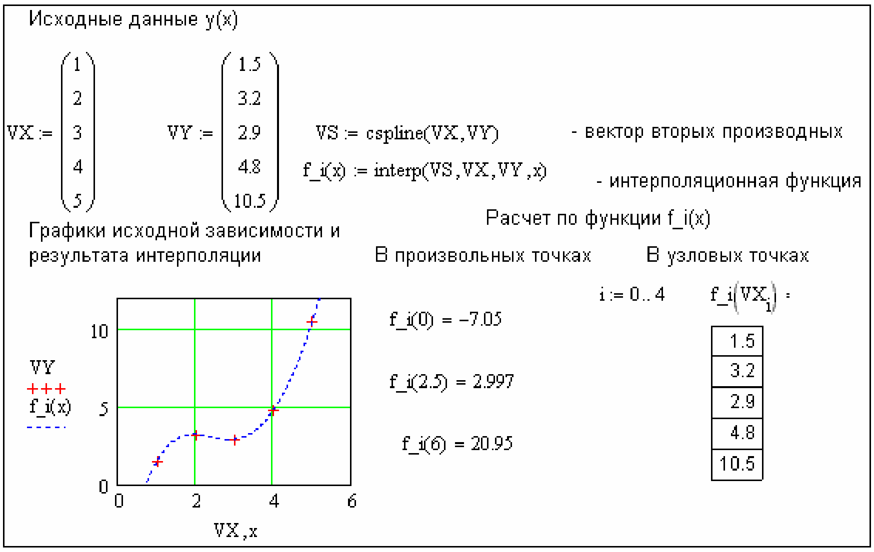


Рис. 7 Проведение сплайновой интерполяции в MathCAD

Как видно из сравнения графиков, представленных на рис. 6 и 7, сплайновая интерполяция дает более гладкий и точный график интерполяционной функции.

Регрессионный анализ

Широко распространенной задачей обработки данных является представление результатов эксперимента некоторой функцией *y*(*x*). Задача регрессионного анализа заключается в получении параметров этой функции, описывающей (аппроксимирующей) экспериментальные данные, заданные векторами *VX* и *VY*, с наименьшей среднеквадратической погрешностью (метод наименьших квадратов).

Довольно часто используется линейная регрессия, при которой аппроксимирующая функция *y*(*x*) имеет вид $y(x) = a + bx$, для определения коэффициентов которой в MathCAD служат следующие встроенные функции:

- intercept(*VX*, *VY*) – возвращает значение параметра *a* (величины отрезка, отсекаемого линией регрессии на оси *OY*);
- slope (*VX*, *VY*) – возвращает значение параметра *b* (тангенса угла наклона линии регрессии). Пример дан на рис. 8.

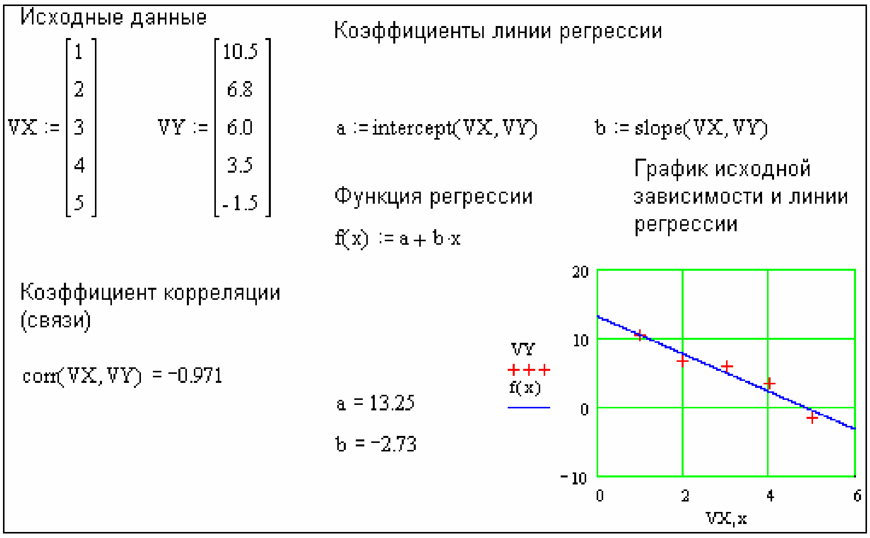


Рис. 8 Линейная регрессия

В приведенном примере (рис. 8) рассчитан коэффициент корреляции (связи) двух множеств *VX* и *VY* с помощью функции corr. Чем ближе этот коэффициент к единице по модулю, тем точнее исходные табличные данные, определенные векторами *VX* и *VY*, описываются линейной зависимостью $y(x) = a + bx$.

Проведение полиномиальной регрессии, т.е. аппроксимации табличной зависимости полиномом *n*-й степени, выполняется посредством встроенной функции regress(*VX*, *VY*, *n*). Данная функция возвращает вектор, назовем его *k*, элементы которого, начиная с четвертого, представляют собой коэффициенты аппроксимирующего полинома $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, т.е.

k	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	...	k_{n+3}
a_i				a_0	a_1	a_2	...	a_n

Пример выполнения полиномиальной регрессии представлен на рис. 9.

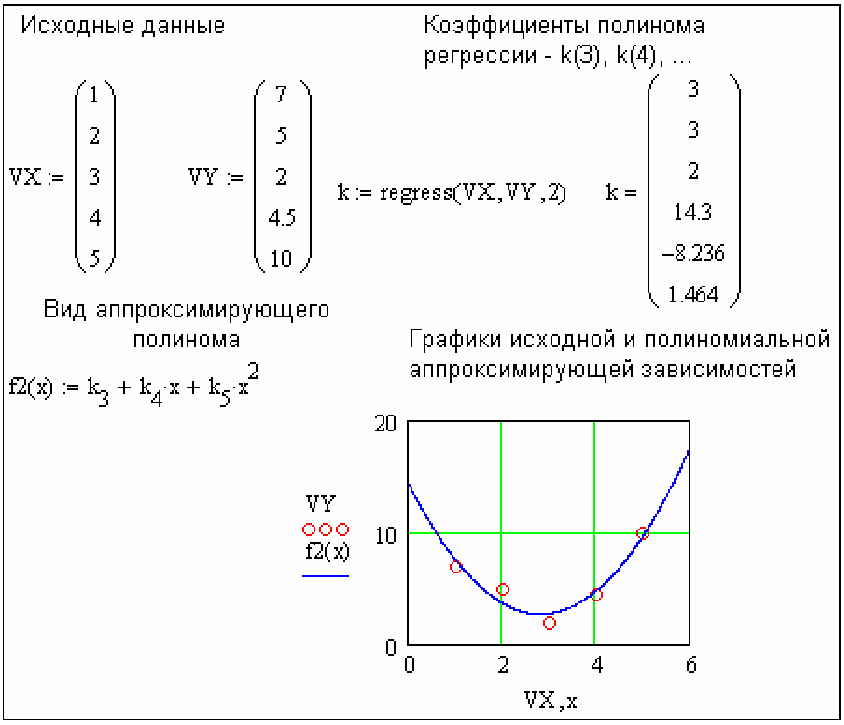


Рис. 9 Полиномиальная регрессия

Замечание. Для нахождения корней полинома произвольной степени в MathCAD используется функция polyroots.

Кроме того, в MathCAD имеется ряд других функций для проведения регрессионного анализа [2], например, linfit, loess, genfit.

Задания для самостоятельной работы

В лабораторной работе студент должен выполнить в соответствии с выданным преподавателем вариантом два задания (табл. 3).

1 Выполнить в MathCAD заданного вида интерполяцию табличных данных $y = f(x)$. Построить графики.

2 Аппроксимировать таблично заданную зависимость $y = f(x)$ указанной функцией с помощью регрессионного анализа. Построить графики.

Таблица 3

№ варианта	Исходные данные $y = f(x)$	Задание 1 (вид интерполяции)	Задание 2 (регрессионный анализ)
1	x = [1 2 3 4 5 6 7 8 9] y = [12,5 10 13,6 17,4 21,5 20,5 29,3 27,6 31,2]	Кусочно-линейная	Модель – полином 4 степени
2	X = [5 10 15 20 25 30 35 40] y = [99,1 50,6 23,5 20,1 45,7 51,1 76,0 110,1]	Сплайновая	Линейная модель
3	x = [0,5 0,7 1,0 1,1 1,5 1,8 1,9 2,2 2,3] y = [14,5 10,1 9,6 5,5 3,6 0,5 -0,3 -7,6 -8,0]	Кусочно-линейная	Модель – полином 3 степени
4	x = [0 3 4 5 7 8 11 14 17] y = [-3 0 2 10 9 14 21 25 31]	Сплайновая	Модель – полином 2 степени
5	x = [-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4] y = [12 23 33 41 47 56 59]	Кусочно-линейная	Модель – полином 4 степени
6	x = [3,7 5,1 6 7,2 8 8,3 8,9 9,4 9,6] y=[14 16 12 12 10,3 9 7 8,9 5 1]	Сплайновая	Линейная модель
7	x = [1,3 1,5 2,0 3,4 6,1 7,0 9,3 10,2 11] y = [120 115 100 99 81 72 64 55 48]	Кусочно-линейная	Модель – полином 3 степени
8	x = [100 111 120 124 128 131 156 163 170] y = [315 299 250 266 270 111 91 100 78]	Сплайновая	Модель – полином 2 степени
9	x =[0,5 0,7 1,0 1,1 1,5	Кусочно-	Модель –

	1,8 1,9 2,2 2,3] *y* = [14,5 10,1 9,6 5,5 3,6 0,5 -0,3 -7,6 -8,0]	линейная	полином 4 степени
10	*x* = [5 10 15 20 25 30 35 40 45 50] *y* = [99,1 50,6 23,5 20,1 45,7 51,1 76 110,1 156,1 176,2]	Сплайновая	Линейная модель

Окончание табл. 3

№ варианта	Исходные данные $y = f(x)$	Задание 1 (вид интерполяции)	Задание 2 (регрессионный анализ)
11	*x* = [0 3 4 5 7 8 11 14 17] *y* = [-3 0 2 10 9 14 21 25 31]	Кусочно-линейная	Модель – полином 3 степени
12	*x* = [1 2 3 4 5 6 7 8] *y* = [12,5 10 13,6 17,4 21,5 20,5 29,3 27,6]	Сплайновая	Модель – полином 2 степени
13	*x* = [2 4 6 8 10 12 14 16] *y* = [1 1,5 1,2 3 4,1 7,2 5,5 3,4]	Кусочно-линейная	Модель – полином 4 степени
14	*x* = [0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8] *y* = [1 0,5 0,3 -0,2 0,1 0,6 0,3 -0,2 0]	Сплайновая	Линейная модель

Список литературы и ссылки в Internet

1 Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М.: Нолидж, 2001. – 1296 с.

2 Дьяконов В.П. MathCAD 2000: Учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. – 501 с.

3 Дьяконов В.П. Справочник MathCAD PLUS 6.0. – М.: СК Пресс, 1997.

4 MathCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. – М.: Информационно-издательский дом "Филинъ", 1996.

5 www.mathsoft.com – официальный сайт фирмы MathSoft Inc. – разработчика MathCAD.

6 www.exponenta.ru – русскоязычный сайт, посвященный системам автоматизированных расчетов.

7 Система MathCAD в инженерной практике: Лаб. работы / Сост.: А.Ю. Сенкевич, А.А. Чуриков: – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. – 28 с.