

Плотникова С.В. , Тихомиров В.Г.

ЭЛЕКТРОННЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Часть II

• Издательство ТГТУ •

Министерство образования Российской Федерации
Тамбовский государственный технический университет

Плотникова С.В. , Тихомиров В.Г.

**ЭЛЕКТРОННЫЕ МЕТОДЫ
ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ**

Часть II

**Тамбов
Издательство ТГТУ
2004**

УДК
ББК

Рецензент
Доктор технических наук, профессор
В.Ф. Калинин

Электронные методы обработки информации: Метод. указ. / Авт.-сост.: Плотникова С.В., Тихомиров В.Г. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. 40 с.

УДК
ББК

© Тамбовский государственный
технический университет
(ТГТУ), 2004

Учебное издание

**ЭЛЕКТРОННЫЕ МЕТОДЫ
ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ**

Часть II

Авт.-сост.: Плотникова С.В.,
Тихомиров В.Г.

Редактор Т.М. Глинкина
Компьютерное макетирование Е.В. Кораблевой

Подписано в печать 28.01.04
Формат 60 × 84 / 16. Бумага газетная. Печать офсетная
Гарнитура Times New Roman. Объем: 2,4 усл. печ. л.; 2,3 уч.-изд. л.
Тираж 00 экз. С.

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета,
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

1 КРАТКИЙ ОБЗОР ОСНОВНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ MS EXCEL

Программа Microsoft Excel служит для обработки электронных таблиц и фактически представляет собой стандарт с точки зрения функциональных возможностей и удобства работы. С помощью программы Excel можно выполнить множество полезных дел: составлять простейшие электронные таблицы, организовывать наглядное представление информации, управлять базами данных, организовывать вычисления статистических оценок и др. Для каждого из этих действий программа может создать отдельный документ, который сохраняется на диске в виде файла. Файл может содержать несколько взаимосвязанных рабочих листов, образующих единый документ.

Данные для обработки MS Excel записываются в так называемые ячейки, которые находятся на пересечении строк и столбцов, образуя таблицу. Строки нумеруются числами, а столбцы буквами. Например, A1, B3, D8 и т.п. По умолчанию содержимое ячейки представляется программой Excel в стандартном формате, который устанавливается при запуске программы. Например, для чисел и текстов задается определенный вид и размер шрифта.

Одним из важнейших свойств программы обработки электронных таблиц является возможность использования формул и функций. Это, в частности, позволяет проводить статистический анализ числовых значений в таблице.

Текст формулы, которая вводится в ячейку таблицы, должен начинаться со знака равенства (=), чтобы программа Excel могла отличить формулу от текста. После знака равенства в ячейку записывается математическое выражение, содержащее аргументы, арифметические операции и функции.

В качестве аргументов в формуле обычно используются числа и адреса ячеек. Для обозначения арифметических операций могут использоваться следующие символы: + (сложение); – (вычитание); * (умножение); / (деление).

Формула может содержать ссылки на ячейки, которые расположены на другом рабочем листе или даже в таблице другого файла. Однажды введенная формула может быть в любое время модифицирована. Встроенный Менеджер формул помогает пользователю найти ошибку или неправильную ссылку в большой таблице.

В Excel включен Конструктор диаграмм, который позволяет создавать диаграммы «презентационного качества». Красивая трехмерная диаграмма не только радует глаз, но и улучшает качество документа.

Диаграмму можно расположить рядом с таблицей или разместить на отдельном рабочем листе. Конструктор диаграмм является одним из наиболее мощных средств в программе Excel. Построение диаграммы с его помощью выполняется за несколько шагов: для этого достаточно указать исходную область таблицы, тип диаграммы, используемые надписи и цвета.

Для выполнения табличных вычислений нужны формулы. Поскольку некоторые формулы и их комбинации встречаются очень часто, то программа Excel предлагает более 200 заранее запрограммированных формул, которые называются функциями.

Все функции разделены по категориям, чтобы в них было проще ориентироваться. Встроенный Конструктор функций помогает на всех этапах работы правильно применять функции.

В программе имеется упорядоченный по алфавиту полный список всех функций, в котором можно легко найти функцию, если известно ее имя. Многие функции различаются очень незначительно, поэтому при поиске по категориям полезно воспользоваться краткими описаниями функций, которые предлагает Конструктор функций. Функция оперирует некоторыми данными, которые называются ее аргументами. Аргумент функции может занимать одну ячейку или размещаться в целой группе ячеек.

Рассмотрим решения задач, с которыми чаще всего приходится сталкиваться пользователю при работе с MS Excel.

1.2 Как запустить программу MS Excel

В дальнейшем предполагается, что программа MS Excel установлена на компьютере.



1 способ. Найти на рабочем столе иконку  и дважды щелкнуть по ней левой кнопкой мыши.

2 способ. Если на рабочем столе отсутствует иконка из 1 способа, то нажмите на кнопку ПУСК в левом нижнем углу монитора. На экране появится меню, выберите пункт ПРОГРАММЫ. Откроется список программ, установленных на компьютере. Тогда для запуска MS Excel достаточно сделать один клик левой клавишей мыши по имени программы ( Microsoft Excel).

1.3 Как создать и сохранить документ MS Excel

- 1 Запустить программу MS Excel.
- 2 Заполнить клетки открывшейся таблицы необходимой информацией.
- 3 Сохранить созданный документ хотя бы на одном [исправном] носителе информации (дискете, жестком диске). Для этого: из меню **Файл** вызвать пункт **Сохранить как...** В результате чего появится окно **Сохранение документа**. В окне **Папка** указать место на носителе, где планируется размещение созданного файла (по умолчанию – это папка **Мои документы**). В окне **Имя файла** указать имя файла (без расширения). Нажать кнопку **Сохранить**. Если выбранное имя уникально в рамках текущей папки, то файл будет сохранен без дополнительных предупреждений.

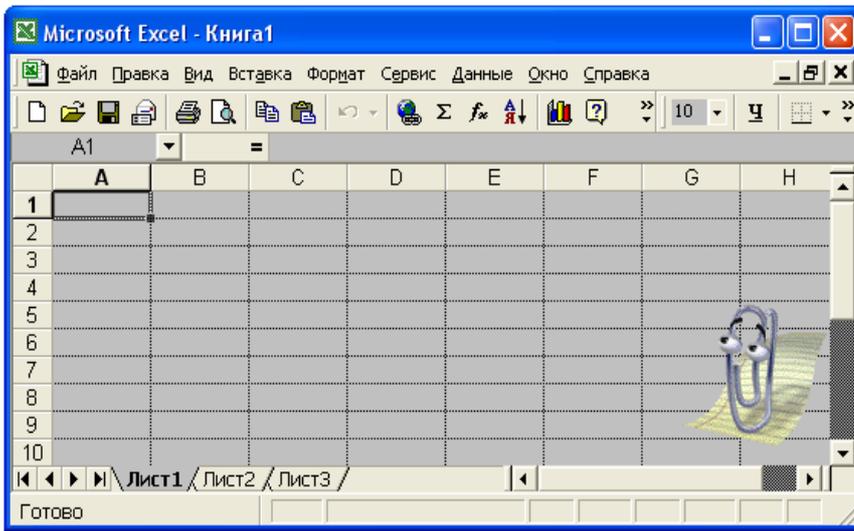
1.4 Как просмотреть созданный документ MS Excel

1 способ. Если программа запущена, то выбрать в меню **Файл** пункт **Открыть...** Появится окно **Открытие документа**. В графе **Папка** указать место расположения [существующего] файла. В центральном окне появится список файлов, выбрать нужный, щелкнув дважды левой клавишей мыши по соответствующему имени.

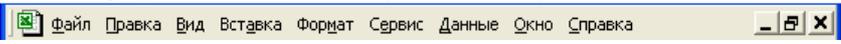
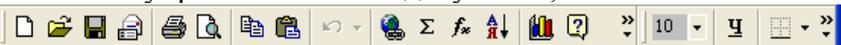
2 способ. В **Проводнике** или с помощью какого-либо файлового менеджера найти месторасположение конкретного файла MS Excel (отмечен иконкой ) и дважды кликнуть левой клавишей мыши соответствующее имя.

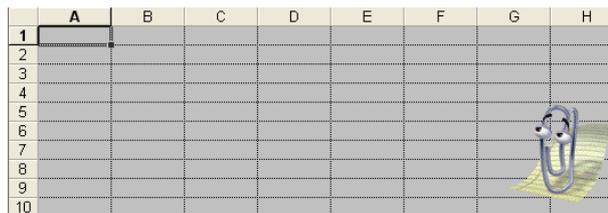
2 ИЗ ЧЕГО СОСТОИТ ИНТЕРФЕЙС MS EXCEL

После запуска MS Excel на мониторе должна появиться примерно следующая картинка.



Таким образом, видимое поле монитора делится на несколько частей:

-  – указывается имя окна, располагаются кнопки управления окном программы;
-  – главное меню программы, располагаются кнопки управления окном документа;
-  – кнопки наиболее часто используемых процедур главного меню;
-  – указатель на текущую ячейку и ее содержимое;



поле для заполнения информацией, состоит из ячеек. У каждой ячейки есть имя, состоящее из имени столбца и строки, на пересечении которых она находится. Например, A1, B3, D8. Прямоугольником отмечается текущая ячейка (на рисунке – A1), информация заносится в текущую ячейку. Заполнение ячейки отмечается клавишей ENTER. Для исправления содержимого текущей ячейки используется клавиша F2. Перемещение по ячейкам осуществляется с помощью клавиш-стрелок.

-  – строка для управления перемещением в рамках текущего документа;
-  – статусная строка.

3 ПРИМЕР СОЗДАНИЯ ДОКУМЕНТА MS EXCEL

Представить данные в электронном виде посредством MS Excel.

x_i	y_i
10	4
20	7
25	10
28	13
30	14

- 1 Загрузить MS Excel.
- 2 Озаглавить документ (для удобства восприятия информации сделать отступы от левого края документа и расположить заголовок в ячейке D2). Для этого:

– подвести (мышью) курсор (белый крестик) к ячейке D2 и (один раз) щелкнуть (левой) клавишей мыши – ячейка D2 станет текущей;

– на клавиатуре набрать заголовок – «Простой пример», завершив ввод информации клавишей ENTER. При этом автоматически перемещается указатель текущей ячейки. Введенный заголовок занимает более одной ячейки. Чтобы их объединить в одну, достаточно вернуться к ячейке D2 (сделать ее текущей). Выделить ячейки, в которых располагается заголовок, для чего нажать левую кнопку мыши и, не отпуская ее, продвигать курсор в сторону продолжения заголовка, остановившись, когда заголовок будет накрыт минимально возможным числом ячеек. Отпустить левую клавишу мыши. Затем щелкнуть (один раз) правой клавишей мыши – появится контекстное меню. Выбрать пункт **Формат ячеек...**, в результате появится окно **Формат ячеек**, в котором выбрать вкладку **Выравнивание** и в поле **Отображение** поставить галочку (левой клавишей мыши) напротив слов **объединение ячеек**. Нажать клавишу **ОК**.

- 3 Сделать текущей ячейку D3, записать в нее "x1";
- 4 Заполнить столбец x1.
- 5 Сделать текущей ячейку E3, записать в нее "y1";
- 6 Заполнить столбец y1.
- 7 Сохранить документ под именем **Эксперимент1** в папке **Мои документы**.
- 8 Закрыть программу.

3.1 Примеры использования ссылок на ячейки в MS Excel

I Вычислить значения $x_1 \cdot x_1$, $x_1 \cdot y_1$, $y_1 \cdot y_1$ для значений предшествующего примера.

- 1 Загрузить файл **Эксперимент1**.
- 2 В ячейках F3, G3, H3 ввести заголовки для новых столбцов, соответственно, $x_1 \cdot x_1$, $x_1 \cdot y_1$, $y_1 \cdot y_1$.
- 3 Для вычисления $x_1 \cdot x_1$ в ячейке F4 записать $=D4 \cdot D4$, завершить ввод клавишей ENTER – в результате число в ячейке F4 равно квадрату числа в ячейке D4; аналогично $F5 = D5 \cdot D5$; $F6 = D6 \cdot D6$; $F7 = D7 \cdot D7$; $F8 = D8 \cdot D8$.

4 Для заполнения столбца $x_1 \cdot y_1$ можно поступить так же, как и в 3-м шаге, а можно поступить иначе. Необходимо вычислить сначала $x_1 \cdot y_1$, записав результат в ячейку G4 как $=D4 \cdot E4$ ENTER, а затем скопировать полученное в буфер. Для чего достаточно сделать ячейку G4 текущей и среди наиболее часто используемых кнопок найти  и нажать на нее. Далее выделить группу ячеек, которые планируется заполнить как $D_i \cdot E_i$, и освободить буфер. Для этого подвести курсор к ячейке G5 и нажать левую клавишу мыши, не отпуская ее до тех пор, пока не будет достигнута ячейка G8. Отпустить левую

клавишу мыши. Среди наиболее часто используемых кнопок найти  и нажать на нее.

- 5 Заполнить столбец $y_1 \cdot y_1$ по своему усмотрению (аналогично шагу 3 или шагу 4).

- 6 Сохранить документ под именем **Эксперимент2** в папке **Мои документы**.

- 7 Закрыть программу.

II Сформировать таблицу из двух столбцов, так, чтобы первый столбец содержал значения 0, 1, 2, ..., 20, а второй – значения -5, -7, ..., -45.

- 1 Загрузить MS Excel.

2 Озаглавить документ: например, в ячейке D2 написать «Прогрессии»; озаглавить столбцы формируемой таблицы, например, в ячейке D3 написать «1-й», а в ячейке E3 – «2-й».

- 3 Заполнить 1-й столбец.

Можно заметить, что каждый нижеследующий элемент (1-го или 2-го) столбца отличается от ближайшего, расположенного выше, на некоторую фиксированную величину, образуя, таким образом, арифметическую прогрессию. Из школьного курса математики известно, что арифметическая прогрессия однозначно определяется первым членом и разностью прогрессии. Будем использовать это замечание при заполнении таблицы.

В ячейку D4 поместить первое значение 0. В ячейку D5 записать $=D4+1$. Скопировать содержимое ячейки D5 в буфер. Выделить оставшиеся незаполненными 19 нижележащих ячеек 1-го столбца. Освободить буфер.

4 Аналогично заполнить второй столбец (первый член прогрессии равен -5 , разность прогрессии равна -2).

5 Сохранить файл под именем **АПрогрессии**.

6 Закрывать программу.

3.2 Пример использования относительных и абсолютных ссылок

Вычислить значения многочлена $P_4(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 4$ при $x = 0, 1, 2, -1$.

1 Загрузить MS Excel.

2 Озаглавить документ.

3 Сформировать столбцы с именами «Кэф» и «Арг», которые заполнить, соответственно, значениями коэффициентов (в порядке возрастания степени) и аргументов:

Кэф.	Арг.
-4	0
1	1
3	2
-1	-1
2	

4 Сформировать столбец степеней первого значения аргумента ($1, 0^1, 0^2, 0^3, 0^4$):

	А	В	С	Д
1			Новый пример	
2		Кэф	Арг	Ст 0
3		-4	0	1
4		1	1	0
5		3	2	0
6		-1	-1	0
7		2		0

Укажем формулы, по которым получены значения столбца D: значение ячейки D3 равно 1; значение ячейки D4 равно C3; значения ячеек D5, D6, D7 вычисляются по предшествующим значениям – в ячейку D5 пишем $=D4*C3$, в D6 пишем $D5*C3$, в D7 пишем $D6*C3$.

5 Сформировать столбец степеней второго значения аргумента ($1^0, 1^1, 1^2, 1^3, 1^4$). Значение ячейки E3 равно 1; значение ячейки E4 равно C4; в ячейку E5 запишем $E4*C4$. Попробуйте заполнить ячейки автоматически: скопировать E5 в буфер, выделить ячейки E6 и E7 и освободить буфер. Полученные значения ($E6 = 2, E7 = -2$) отличаются от ожидаемых ($E6 = 1, E7 = 1$). Посмотрим на формулы, по которым оказались заполненными ячейки E6 и E7: сделать текущей ячейку E6 – в строке формул будет записано $E5*C5$, а для ячейки E7 увидим $E6*C6$, т.е. MS Excel автоматически пересчитывает не только тот множитель (E_i), который необходимо пересчитать, но и пересчитывает тот множитель (C4), который нельзя пересчитывать – включается механизм относительных ссылок. Если же требуется, чтобы индекс некоторой ячейки, в которой находится определенный параметр, оставался неизменным при автопересчете, необходимо задействовать механизм абсолютных ссылок. Для этого перед неизменяемым индексом достаточно поставить знак \$. С учетом замечаний пересчитаем значения столбца E. Внесем исправления в ячейку E5, запишем туда следующее: $=E4*С$4$, запишем содержимое E5 в буфер и выделив ячейки E6 и E7, освободим буфер. В результате получатся правильные значения.

6 Сформировать столбец степеней третьего значения аргумента ($2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$).

7 Сформировать столбец степеней четвертого значения аргумента ($(-1)^0, (-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4$).

	A	B	C	D	E	F	G
1			Новый пример				
2		Коеф	Арг	Ст 0	Ст 1	Ст 2	Ст -1
3		-4	0	1	1	1	1
4		1	1	0	1	2	-1
5		3	2	0	1	4	1
6		-1	-1	0	1	8	-1
7		2		0	1	16	1

8 Сформировать произведения вида $a_i x^i$ для каждого из заданных значений x , при этом получаемые значения удобно располагать в соответствующих столбцах, начиная с 9 строки. (Организуйте процесс вычисления наиболее рациональным образом, например, заполните сначала ячейки 9 строки, а затем, скопировав эту строку, освободите буфер в заранее выделенный диапазон D10:G13).

9 Вычислить суммы значений столбцов D, E, F, G со строки 9 по строку 13.

	Новый пример				
Коеф	Арг	Ст 0	Ст 1	Ст 2	Ст -1
-4	0	1	1	1	1
1	1	0	1	2	-1
3	2	0	1	4	1
-1	-1	0	1	8	-1
2		0	1	16	1

		-4	-4	-4	-4
		0	1	2	-1
		0	3	12	3
		0	-1	-8	1
		0	2	32	2
		-4	1	34	1

3.3 Примеры использования функций в MS Excel

I Вычислить суммы элементов столбцов таблицы из предшествующего примера.

1 Загрузить файл **Эксперимент2**.

2 В ячейку C9 внести заголовок «Сумма» для новых значений.

3 Вычислить сумму элементов столбца x_i . Для этого:

– сделать текущей ячейку D9;

– среди кнопок наиболее часто используемых процедур найти Σ и щелкнуть по ней. В результате в указанной ячейке появится запись =СУММ(D4:D8), которая после нажатия клавиши ENTER превратится в искомое значение 113.

4 Аналогично вычислить сумму элементов столбцов y_i , $x_i * x_i$, $x_i * y_i$, $y_i * y_i$.

5 Сохранить документ под именем **Эксперимент3**.

6 Закрыть программу.

II Вычислить $y = 5 \exp(3x)$ при $x = 0, 1, \dots, 20$.

1 Загрузить MS Excel.

2 В одну из верхних строк внести заголовок создаваемого документа (отражающий содержание), например, во 2-ю строку, начиная со столбца D, записать «Вычисление экспоненты». Объединить ячейки, покрывающие заголовок, в одну.

3 В ячейку D3 записать «Арг», а в ячейку E3 записать «Знач». Тогда заполненные ячейки можно будет считать, соответственно, заголовками столбца аргументов (x) заданной функции и ее значений ($y(x)$).

4 Заполнить столбец «Арг».

5 Заполнить столбец «Знач». Для этого (предварительно уточнить имя экспоненты в программе MS Excel: кнопка f_x , Категория – математические, Функция – Exp) в ячейку E3 записать =5*Exp(D3).

Затем скопировать содержимое этой ячейки в буфер. Выделить оставшиеся незаполненными ячейки столбца «Знач» и освободить буфер.

- 6 Сохранить документ под именем **Экспонента**.
- 7 Закрыть программу.

3.4 Примеры построения диаграмм в MS Excel

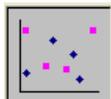
I Нанести на плоскости XOY пары точек (x_i, y_i) из файла **Эксперимент1**.

1 Открыть файл **Эксперимент1**.

2 Выделить группу ячеек, в которых расположены пары точек (D4 – E8). Для этого подвести курсор к левой верхней ячейке группы (D4) и нажать левую кнопку мыши, не отпуская ее до тех пор, пока не будет достигнута правая нижняя ячейка (E8). Отпустить левую кнопку мыши.

3 Среди кнопок наиболее часто используемых процедур найти  и нажать ее.

4 В открывшемся окне **Мастер диаграмм** выбрать **Тип диаграммы** – точечная и **вид**



. Нажать кнопку **Далее**.

5 В открывшемся окне нажать кнопку **Далее**.

6 В открывшемся окне заполнить поля **Название диаграммы**, например, ОБЛАКО ТОЧЕК; **ось X**, например X; **ось Y**, например, Y. Нажмите кнопку **Далее**.

7 В открывшемся окне нажмите кнопку **Готово**. В результате в текущем окне документа появится диаграмма. Для ее перемещения по таблице достаточно подвести курсор к диаграмме, и нажав левую кнопку мыши, не отпуская, перемещать диаграмму.

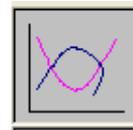
8 Сохранить файл под именем **Эксперимент4**.

9 Закрыть программу.

II Построить график функции $y = 5 \exp(3x)$ при $x = 0, 1, \dots, 20$.

1 Открыть файл **Экспонента**.

2 Выделить область таблицы с числовыми данными.



3 Используя кнопку , вызвать **Мастер диаграмм**, где выбрать **Тип** – точечная, **Вид** и действовать далее аналогично II.

Замечание: разработчики программы предусмотрели различные способы решения часто возникающих при обработке электронной информации задач. Так, например, для копирования содержимого выделенной области можно выполнить следующие действия:

4 Нажать мышью кнопку , или

5 Войти мышью в меню **Цравка**; выбрать мышью пункт **Копировать**, или

6 Нажать Alt+**П**, не отпуская клавишу Alt, нажать **К** (вместе с клавишей Alt нажимаются буквы, выделенные подчеркиванием (см. 2)), или

7 Нажать Ctrl+O.

Далее рассмотрим задачу о сглаживании экспериментальных зависимостей на примере линейной регрессии, используя результаты решений предшествующих задач.

4 ПОНЯТИЕ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

В профессиональной деятельности специалисту приходится сталкиваться с задачей о сглаживании экспериментальных зависимостей, полученных в результате наблюдения или эксперимента. В простей-

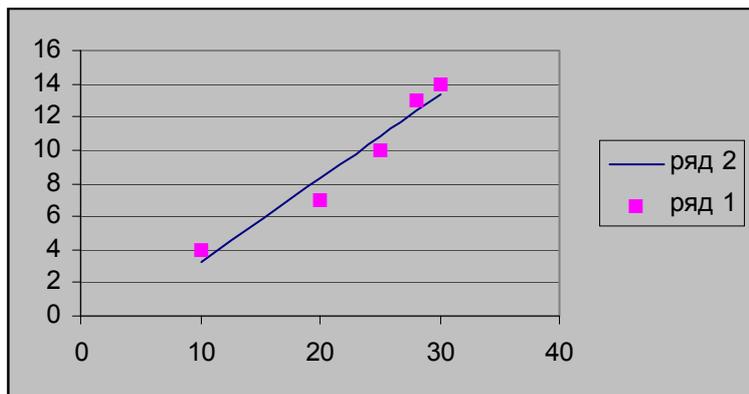
шем случае это может быть связь между двумя переменными x и y , заданная таблично (см. файл **Эксперимент1**).

Требуется найти зависимость между x и y , которая бы:

- представлялась в виде простой формулы $y = f(x)$;
- отражала общую тенденцию поведения искомой зависимости;
- исключала случайные отклонения, связанные с погрешностями измерений.

Нанесем на плоскости XOY пары точек (x_i, y_i) , соответствующие заданным значениям (см. файл **Эксперимент4**).

Очевидно, что существует бесконечное множество кривых, проходящих через эти точки, но с учетом сформулированных ранее требований разумно взять некоторую прямую.



Таким образом, исходя из определенных соображений, на которые влияют опыт исследователя, теоретические предпосылки и т.п., устанавливается *вид зависимости* $y = f(x)$. Как известно, прямая на плоскости описывается соотношением $y = ax + b$, где a и b – некоторые числа, в данном случае *неизвестные параметры* искомой функции.

Согласно наиболее распространенному и теоретически обоснованному **методу наименьших квадратов** неизвестные параметры выбирают так, чтобы сумма квадратов отклонений $\delta_i = f(x_i) - y_i$ была наименьшей. Исходя из этого замечания, найдем параметры a и b для случая, когда искомая функция

имеет вид $y = ax + b$. Для этого найдем a и b , при которых функция $S(a, b) = \sum_{i=1}^n \delta_i(a, b)^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$

принимает наименьшее значение, где n – число пар точек (x_i, y_i) . Таким образом, задача нахождения параметров a и b сводится к поиску минимума функции $S(a, b)$.

Вспоминая необходимое условие экстремума, получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} S'_a = 0 \\ S'_b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n 2\delta_i(a, b) \cdot (\delta_i(a, b))'_a = 0 \\ \sum_{i=1}^n 2\delta_i(a, b) \cdot (\delta_i(a, b))'_b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \delta_i(a, b) \cdot x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n \delta_i(a, b) \cdot 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i x_i = 0 \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n 1 - \sum_{i=1}^n y_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Рассмотрим определитель Δ полученной системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

Из курса математики известно, что абсолютная величина среднего арифметического нескольких различных чисел меньше среднего квадратического этих чисел, отсюда следует, что $\Delta > 0$. Тогда полученная система имеет единственное решение, которое определяется, например, по формулам Крамера:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta},$$

где

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i & n \end{vmatrix}; \quad \Delta_b = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i \end{vmatrix}.$$

Используя достаточное условие экстремума для функции от двух переменных, проверим, доставляют ли найденные значения a и b мини-мум функции $S(a, b)$. Для этого установим знак числа $AB - C^2$, где

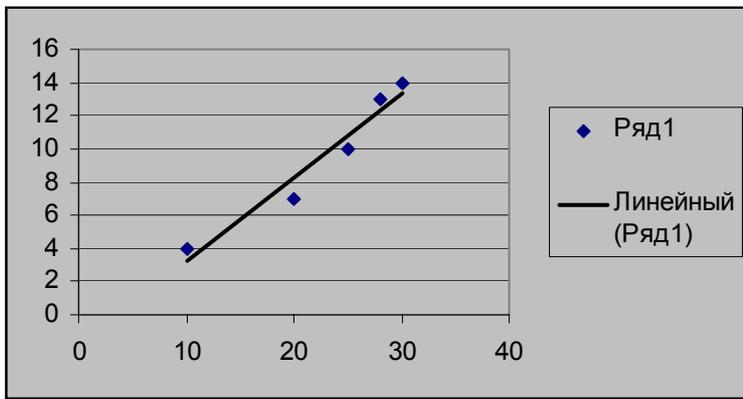
$$A = S''_{aa}(a, b) = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad B = S''_{ab}(a, b) = 2 \sum_{i=1}^n x_i; \quad C = S''_{bb}(a, b) = 2n.$$

Выражение $AB - C^2 = 4\Delta > 0$ и $A = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$, значит, найденная точка (a, b) доставляет *минимум*. Таким образом, найденные параметры a, b являются искомыми.

Вычислим параметры a, b по заданным значениям. Для этого в пакете MS Excel составим вспомогательную таблицу (используя файл **Эксперимент3**):

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2		
	10	4	100	40	16	n	5
	20	7	400	140	49	Δ	1276
	25	10	625	250	100	Δ_a	646
	28	13	784	364	169	Δ_b	-2350
	30	14	900	420	196	a	0,50627
Сумма	113	48	2809	1214	530	b	-1,84169

Тем самым найдено *уравнение регрессии* $y = 0,50627x - 1,84169$, служащее для представления данных файла **Эксперимент1**. Расположим график *регрессионной зависимости* вместе с точками, соответствующими заданным значениям, на одной плоскости (экспериментируйте с **Мастером диаграмм**):



Как видно, найденная зависимость достаточно точно представляет заданные значения. Регрессионная зависимость вида $y = ax + b$ называется *линейной*.

Подводя итог, заметим, что процесс поиска уравнения регрессии, представляющего некоторые данные, распадается на следующие шаги:

- 1) выбор вида сглаживающей зависимости;
- 2) нахождение параметров сглаживающей зависимости;
- 3) проверка соответствия найденной зависимости и данных.

Далее рассмотрим нелинейные модели регрессии.

5 ПОНЯТИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Несмотря на то, что линейная модель регрессии является простой и ее параметры легко могут быть найдены по опытным данным, следует помнить и об условии отражения моделью общей тенденции искомой зависимости. С учетом этого рассматривают и другие виды моделей (нелинейные). Большинство таких моделей имеют характерное поведение, что дает основание рассматривать следующие семейства:

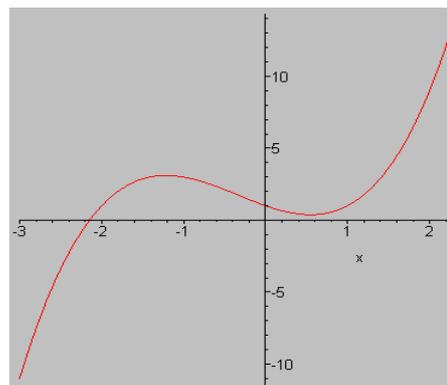
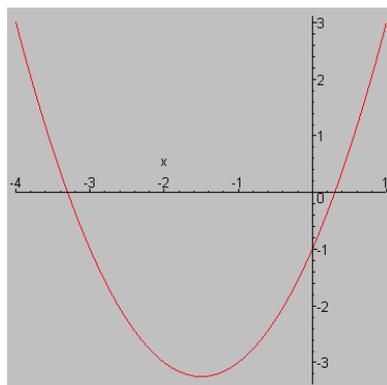
- многочлены (степени больше 1);
- экспоненциальные и логарифмические;
- степенные и показательные;
- сигмюиды.

Рассмотрим подробнее.

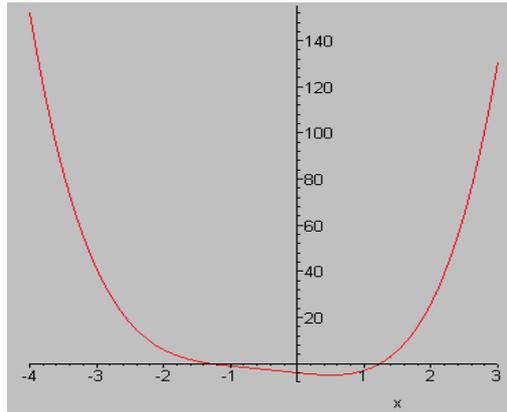
1) Напомним, что многочленом (от одной переменной) степени n называется функция вида $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, где a_0, a_1, \dots, a_n – некоторые числа (коэффициенты многочлена). Очевидно, что при $n = 0, 1$ многочлен описывает прямую (линейная зависимость). При $n > 1$ описываемая зависимость будет нелинейной. Так как выбор модели-функции во многом зависит от расположения экспериментальных точек (x_i, y_i) на координатной плоскости, то полезно иметь представление о характерных чертах этих моделей. Приведем графики некоторых многочленов при $n = 2, 3, 4$.

$$P_2(x) = x^2 + 3x - 1$$

$$P_3(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$$



$$P_4(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x - 4$$



Многочлен степени n однозначно определяется своими $n + 1$ коэффициентами, поэтому для его построения достаточно каким-либо образом вычислить указанные значения. При этом можно поступить, как и в случае линейной регрессии: неизвестные параметры выберем так, чтобы сумма квадратов отклонений $\delta_i = P_n(x_i) - y_i$ была наименьшей. Исходя из этого замечания, найдем параметры a_0, a_1, \dots, a_n , при которых функция $S(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n (a_n x_i^n + \dots + a_1 x + a_0 - y_i)^2$ принимает наименьшее значение, где n – число пар точек (x_i, y_i) . Вспоминая необходимое условие экстремума, получаем систему из $n + 1$ уравнений с $n + 1$ неизвестными:

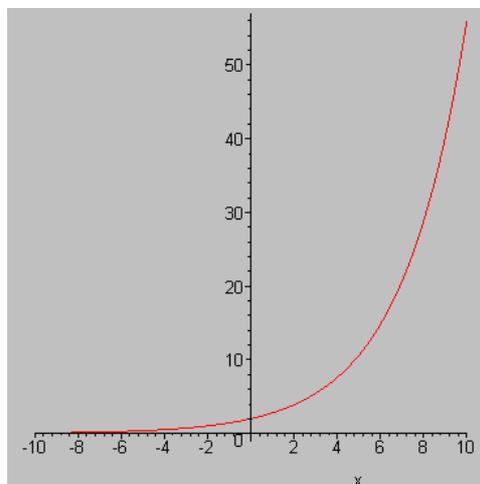
$$\begin{cases} S'_{a_0} = 0; \\ S'_{a_1} = 0; \\ \dots \\ S'_{a_n} = 0. \end{cases}$$

Решая ее, можем найти искомые параметры.

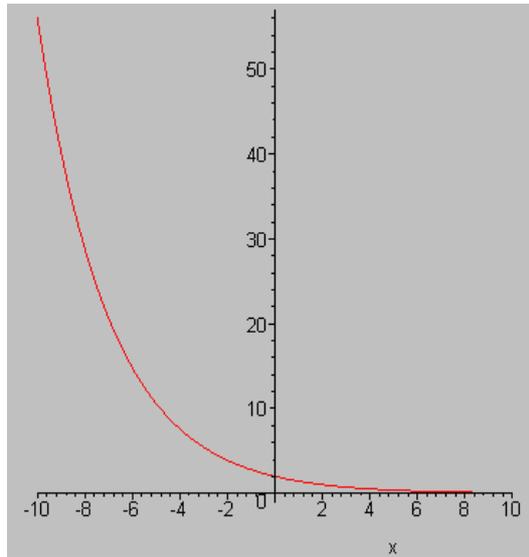
2) К следующему семейству можно отнести такие функции как:

$$y(x) = be^{ax}; y(x) = ae^{\frac{b}{x}}; y(x) = a + b \ln x; y = \frac{1}{a + b \ln x}; y(x) = e^{a + \frac{b}{x} + c \ln x}.$$

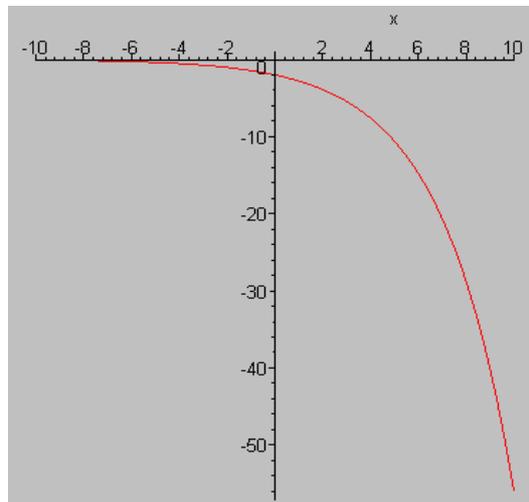
Это выпуклые или вогнутые кривые; некоторые из них имеют точку разрыва или экстремальную точку. Приведем графики функций семейства при определенных параметрах a, b, c :



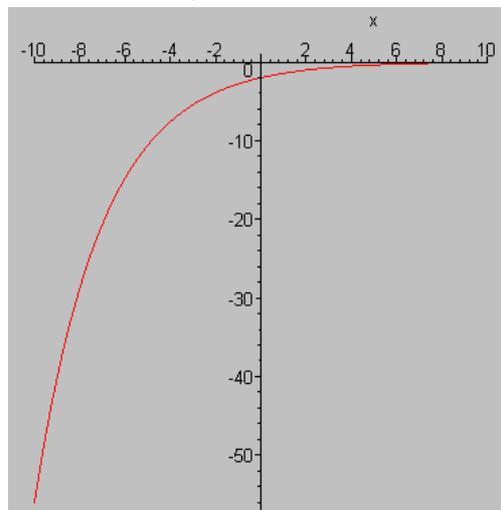
$$y(x) = 2e^{\frac{x}{3}}$$



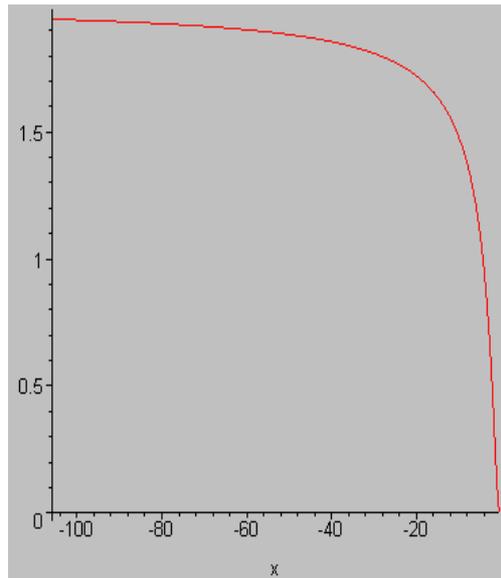
$$y(x) = 2e^{-\frac{x}{3}}$$



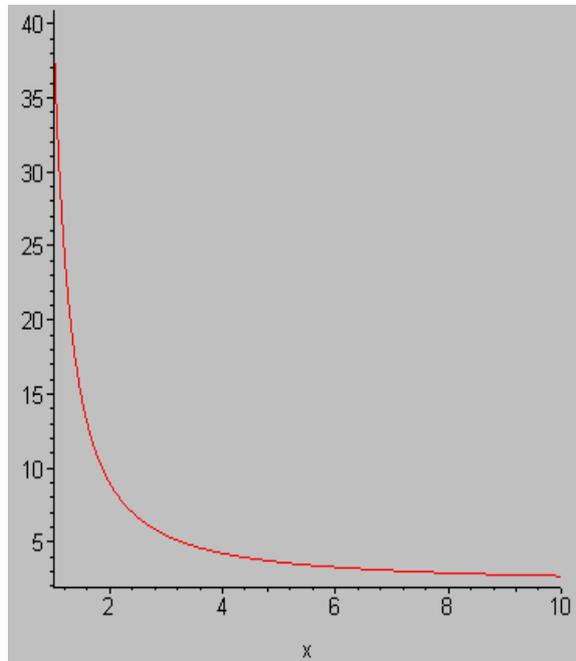
$$y(x) = -2e^{\frac{x}{3}}$$



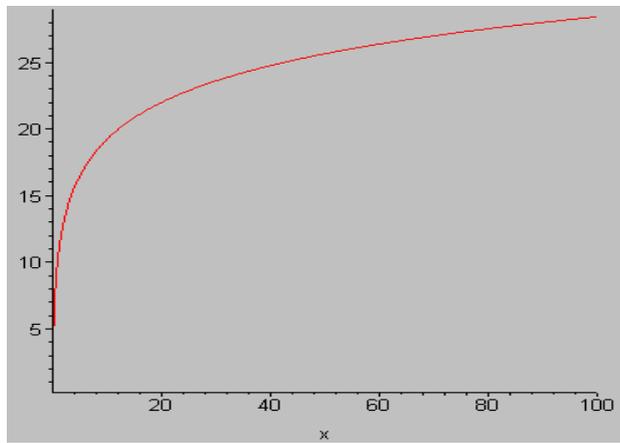
$$y(x) = -2e^{-\frac{x}{3}}$$



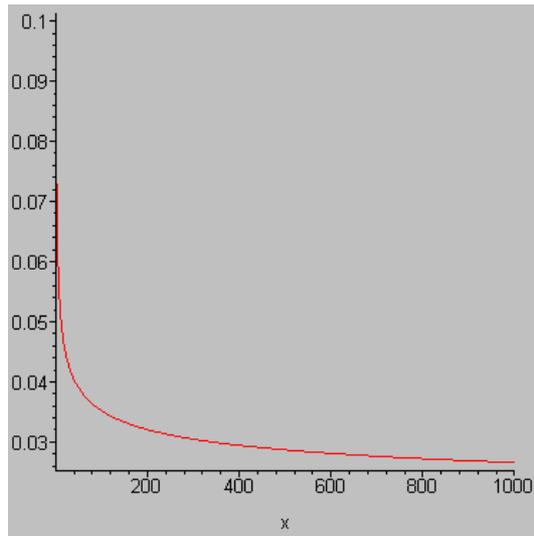
$$y(x) = 2e^{\frac{3}{x}}, \quad x > 0$$



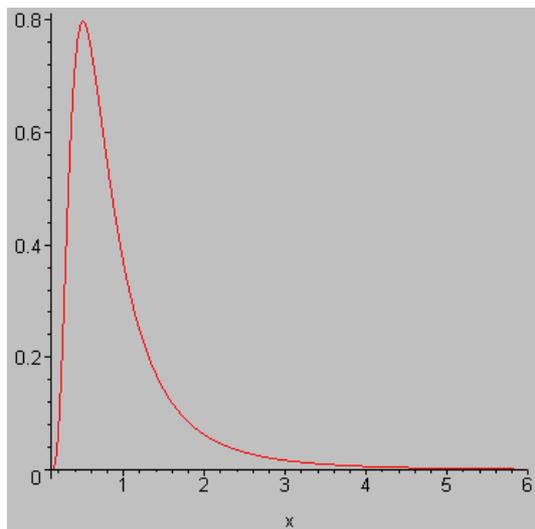
$$y(x) = 2e^{\frac{3}{x}}, \quad x < 0$$



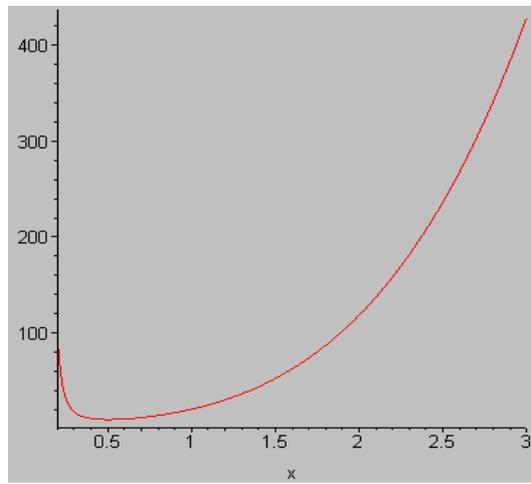
$$y(x) = 10 - 4 \ln x$$



$$y(x) = \frac{1}{10 + 4 \ln x}$$



$$y(x) = e^{1 - \frac{2}{x} - 4 \ln x}$$



$$y(x) = e^{\frac{1}{x} + 4 \ln x}$$

В качестве примера рассмотрим, как использовать метод наименьших квадратов при нахождении параметров модели $y(x) = be^{ax}$. Для этого найдем минимум функции двух переменных $S(a, b) = \sum_{i=1}^n (be^{ax_i} - y_i)^2$. Здесь n – количество заданных упорядоченных пар точек (x_i, y_i) . Применяя необходимое условие экстремума, получим систему:

$$\begin{cases} S'_a = 0; \\ S'_b = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (be^{ax_i} - y_i) bx_i e^{ax_i} = 0; \\ 2 \sum_{i=1}^n (be^{ax_i} - y_i) e^{ax_i} = 0. \end{cases}$$

Упрощая ее, приходим к выводу о невозможности выразить в явном виде неизвестное b через неизвестное a , хотя полученная система разрешима.

Попытаемся обойти возникшие препятствия. Для этого попробуем каким-либо образом преобразовать данные. Так, например, легко заметить, что $\ln(be^{ax}) = \ln b + \ln(e^{ax})$. Так как $\ln(e^{ax}) = ax$, то $\ln(be^{ax}) = \ln b + ax$. Обозначив $B = \ln b$, получим линейную зависимость $\ln(be^{ax}) = ax + B$. Значит, если исходные данные «хорошо ложились» на кривую $y = be^{ax}$, то преобразованные данные вида $(x_i, \ln y_i)$ должны «окутить» прямую $y(x) = ax + \ln b$. Поэтому для нахождения параметров a и b можно воспользоваться формулами для линейной регрессии:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta}; \quad \ln b = \frac{\Delta_b}{\Delta},$$

где
$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \ln y_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n \ln y_i & n \end{vmatrix}; \quad \Delta_b = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \ln y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n \ln y_i \end{vmatrix};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

Рассмотрим пример.

Пусть зависимость между x и y задана в виде таблицы:

x	y
0	2,12
0,2	0,49
0,25	0,342
0,29	0,3
0,31	0,231
0,33	0,189
0,45	0,086
0,5	0,06
0,8	0,01
0,85	0,006
0,96	0,002
1	0,0018

Считая, что данные могут быть приближены зависимостью $y(x) = be^{ax}$, найти параметры a и b .

Решение (в MS Excel).

- 1 Создать файл, содержимое которого заполнить данными задачи.
- 2 С помощью Мастера диаграмм построить график данной функциональной зависимости.
- 3 Используя Мастер функций, создать вспомогательный столбец, который заполнить значениями $\ln y_i$ (функцию искать в категории – Математические по имени LN).
- 4 Построить график зависимости, образованной точками $(x_i, \ln y_i)$.
- 5 Создать вспомогательный столбец, который заполнить значениями x_i^2 .
- 6 Создать вспомогательный столбец, который заполнить значениями $x_i \ln y_i$.
- 7 Вычислить суммы от $x_i, x_i^2, x_i \ln y_i$.
- 8 По формулам, приведенным ранее, вычислить $\ln b, a$ и $b = e^{\ln b}$. В результате получится примерно следующая таблица.

$\ln y$	x	y	x^2	$x \ln y$		
0,751416	0	2,12	0	0	Δ	14,2548
-0,71335	0,2	0,49	0,04	-0,14267	Δa	-99,6602
-1,07294	0,25	0,342	0,0625	-0,26824	Δb	10,2741
-1,20397	0,29	0,3	0,0841	-0,34915	a	-6,99135
-1,46534	0,31	0,231	0,0961	-0,45425	$\ln b$	0,720746
-1,66601	0,33	0,189	0,1089	-0,54978	b	2,055967
-2,45341	0,45	0,086	0,2025	-1,10403		
-2,81341	0,5	0,06	0,25	-1,40671		
-4,60517	0,8	0,01	0,64	-3,68414		
-5,116	0,85	0,006	0,7225	-4,3486		
-6,21461	0,96	0,002	0,9216	-5,96602		
-6,30685	1	0,001824	1	-6,30685		
-32,8796	5,94		4,1282	-24,5804		

- 9 Построить график найденной зависимости и сделать вывод об адекватности (степени соответствия данных) модели.

10 К следующему семейству можно отнести такие функции, как:

$$y(x) = ax^b; \quad y(x) = ab^x; \quad y(x) = ax^{bx}; \quad y(x) = ab^{\frac{1}{x}}x^c.$$

Свойства этих кривых во многом сходны со свойствами кривых предшествующего семейства в силу их тесной взаимосвязи. Рассмотрим, например, функцию $y(x) = ab^{\frac{1}{x}}x^c$ (Hoerl – модель) и выполним следующие преобразования:

$$\ln y = \ln(ab^{\frac{1}{x}}x^c) = \ln a + \ln b^{\frac{1}{x}} + \ln x^c = \ln a + \frac{1}{x} \ln b + c \ln x.$$

Обозначим $\tilde{a} = \ln a$, $\tilde{b} = \ln b$, тогда $\ln y = \tilde{a} + \frac{\tilde{b}}{x} + c \ln x$, откуда $y(x) = e^{\tilde{a} + \frac{\tilde{b}}{x} + c \ln x}$, т.е. получили одну из моделей предшествующего семейства.

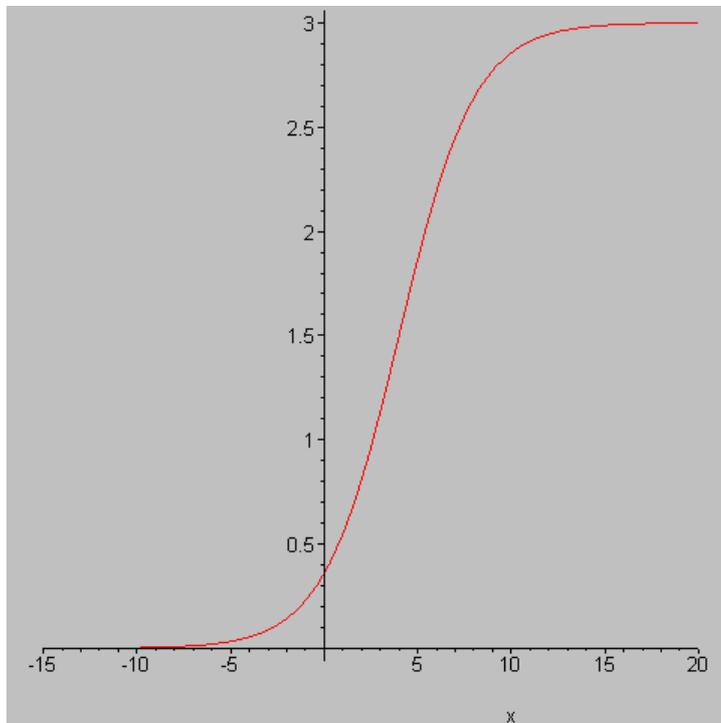
Как и модели семейства 2, некоторые модели рассматриваемого семейства могут быть сведены к линейной модели. Например, для $y(x) = ab^x$ можно выполнить следующие преобразования

$$\ln y = \ln ab^x = \ln a + \ln b^x = \ln a + x \ln b.$$

3) Семейство сигмид образуют S-образные возрастающие кривые, в широком разнообразии возникающие в прикладных инженерных задачах, в биологии, экономике, сельском хозяйстве. Рассмотрим характерные черты моделей семейства на примере так называемой логистической модели $y(x) = \frac{a}{1 + e^{c-bx}} = \frac{a}{1 + e^c e^{-bx}}$. Обозначим $C = e^c$, тогда $y(x) = \frac{a}{1 + C e^{-bx}}$. Легко видеть, что при $a, b, C > 0$ производная

$$y'(x) = \frac{abCe^{-bx}}{(1 + Ce^{-bx})^2} \neq 0,$$

более того, при указанных ограничениях $y'(x) > 0$, т.е. функция всюду возрастает. Приведем график логистической функции при некоторых значениях $a, b, C > 0$:



$$y(x) = \frac{3}{1 + e^2 e^{-\frac{x}{2}}}$$

Из рисунка можно заметить, что значение $a > 0$ определяет область значений $(0, a)$, которые принимает логистическая функция. Кроме того, легко видеть, что имеется точка перегиба. Можно показать, что ее абсцисса $x = \frac{\ln C}{b} = \frac{c}{b}$, откуда определяется ордината

$$y\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{a}{1 + e^{\frac{c-b \cdot c}{b}}} = \frac{a}{2}.$$

Тогда для функции, график которой приведен выше, координаты точки перегиба будут $\left(4, \frac{3}{2}\right)$.

Несмотря на простоту логистической модели, она достаточно адекватно описывает реальные ситуации. Так, например, функция вида

$$y(x) = \frac{\alpha}{\beta + \gamma \alpha e^{-\alpha x}} = \frac{\alpha / \beta}{1 + \gamma \frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha x}},$$

где $\gamma = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{y_0} - \frac{\beta}{\alpha} \right)$, $y_0 = y(0)$,

описывает рост численности населения на некоторой территории. (Отметим, что прогнозирование численности населения в том или ином регионе имеет существенное значение и оказывает влияние на развитие строительной отрасли. Так, например, плотность населения г. Тамбова влияет на среднюю этажность строящихся домов, а это, в свою очередь ведет к изменению строительных технологий.)

Смысл коэффициентов α, β состоит в следующем: α показывает насколько быстро растет популяция, пока она мала. Чем больше сообщество, тем медленнее оно растет и при $y = \frac{\beta}{\alpha}$ рост прекращается. Если же численность y_0 в начальный момент времени $x = 0$ превышала величину $\frac{\beta}{\alpha}$, то величина $y(x)$ начинает уменьшаться.

Но несмотря на простоту логистической модели, определение ее параметров методом наименьших квадратов представляет определенные трудности, связанные с неразрешимостью в явном виде получающейся системы уравнений.

6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Кратко охарактеризовать основные функциональные возможности MS Excel.
- 2 Показать основные способы запуска программы MS Excel.
- 3 Описать основные этапы работы с новым документом.
- 4 Описать основные этапы работы с созданным документом.
- 5 Показать основные элементы интерфейса MS Excel и указать их предназначение.
- 6 Привести собственный пример использования ссылок.
- 7 Указать условия применимости абсолютных и условных ссылок.
- 8 Привести собственный пример вычисления функции.
- 9 Привести собственный пример построения графика функции.
- 10 Описать основные шаги метода наименьших квадратов.
- 11 Описать основные этапы нахождения параметров линейной регрессии.
- 12 Дать представление о некоторых нелинейных регрессионных моделях.
- 13 Охарактеризовать семейство многочленов.
- 14 Охарактеризовать экспоненциально-логарифмические модели.
- 15 Охарактеризовать показательно-степенные модели.
- 16 Привести собственные примеры связи между моделями экспоненциально-логарифмического и показательно-степенного семейств.
- 17 Привести собственный пример перехода от экспоненциально-логарифмической к линейной модели.
- 18 Привести собственный пример перехода от показательно-степенной к линейной модели.
- 19 Охарактеризовать семейство сигмOID.
- 20 Используя аппарат дифференциального исчисления, найти координаты точки перегиба логистической кривой.

7 ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

- 1 Считая, что данные пары точек адекватно описываются кривой $y(x) = be^{ax}$, найти параметры a и b .

ВАРИАНТЫ

BAP. 1		BAP. 2		BAP. 3		BAP. 4		BAP. 5		BAP. 6	
x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j
1.840	34.27	1.140	15.96	1.520	32.14	1.760	38.82	1.640	25.37	1.020	41.57
2.340	32.47	2.600	11.86	2.980	22.26	2.160	36.28	2.720	17.71	2.120	33.37
3.740	27.74	3.720	9.444	3.660	18.91	3.280	30.20	3.580	13.37	3.900	23.32
4.	26.97	4.900	7.456	5.	13.54	4.500	24.55	4.040	11.47	4.220	21.93
5.940	21.77	5.880	6.100	5.320	12.42	5.160	22.09	5.520	7.027	5.420	17.32
6.600	20.25	6.360	5.526	6.100	10.20	6.160	18.66	6.760	4.644	6.900	12.87
7.060	19.11	7.020	4.832	7.500	7.260	7.600	14.68	7.200	3.922	7.740	10.81
8.380	16.63	8.800	3.450	8.100	6.104	8.420	12.75	8.260	2.905	8.440	9.440
9.360	14.75	9.400	3.022	9.540	4.258	9.880	9.960	9.060	2.087	9.460	7.751
10.76	12.80	10.12	2.712	10.04	3.820	10.06	9.719	10.12	1.449	10.92	5.833
11.82	11.35	11.22	2.200	11.64	2.531	11.24	8.092	11.26	1.122	11.12	5.608
13.	9.852	12.32	1.682	12.06	2.365	12.08	6.897	12.40	0.7053	12.80	3.852
13.42	9.454	13.48	1.299	13.52	1.680	13.80	5.126	13.02	0.4738	13.10	3.633
14.46	8.431	14.22	1.074	14.24	1.397	14.22	4.831	14.22	0.4145	14.74	2.774
15.60	7.326	15.04	0.9278	15.38	1.095	15.74	3.734	15.50	0.2509	15.22	2.390
16.24	6.993	16.18	0.7664	16.80	0.7650	17.	3.070	16.30	0.2023	16.50	1.911
17.40	5.987	17.44	0.5412	17.60	0.5872	17.86	2.679	17.80	0.2166	17.64	1.457
18.50	5.376	18.86	0.4402	18.22	0.4840	18.16	2.620	18.90	0.02078	19.	1.081
19.96	4.580	19.64	0.3736	19.22	0.3949	19.62	1.997	19.76	0.06063	19.14	1.109
20.04	4.432	20.68	0.3498	20.26	0.3068	20.38	1.720	20.22	0.1520	20.94	0.8142
BAP. 7		BAP. 8		BAP. 9		BAP. 10		BAP. 11		BAP. 12	
x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j
1.860	7.539	1.660	34.34	1.220	17.76	1.860	43.96	1.240	17.07	1.480	26.03
2.140	5.747	2.120	30.70	2.140	14.09	2.220	42.48	2.160	6.893	2.940	19.34
3.580	1.266	3.120	23.84	3.300	10.43	3.500	37.25	3.080	2.672	3.540	17.23
4.360	0.5662	4.920	15.11	4.860	7.211	4.620	33.40	4.700	0.5466	4.	15.67
5.660	0.1307	5.900	12.00	5.340	6.327	5.880	29.39	5.600	0.2582	5.280	12.08
6.260	0.1436	6.480	10.39	6.520	4.742	6.040	29.05	6.	0.1763	6.060	10.49
7.360	-0.05883	7.600	7.729	7.260	3.907	7.460	25.14	7.640	0.1284	7.780	7.315
8.700	0.02816	8.920	5.630	8.360	2.949	8.660	22.25	8.840	-0.04146	8.700	6.082
9.460	0.003818	9.	5.491	9.320	2.235	9.900	19.60	9.060	0.08686	9.740	4.901
10.58	0.001246	10.54	3.779	10.18	1.783	10.66	18.31	10.62	0.09144	10.30	4.562
11.30	-0.009394	11.38	3.043	11.36	1.412	11.14	17.35	11.66	-0.009491	11.02	3.904
12.90	-0.009878	12.50	2.205	12.06	1.247	12.14	15.64	12.80	-0.08984	12.36	2.945
13.76	0.1001	13.54	1.662	13.38	0.8262	13.76	13.48	13.40	-0.05991	13.56	2.364
14.94	0.00001592	14.12	1.524	14.82	0.5004	14.24	12.79	14.98	0.03002	14.20	2.135
15.64	0.04001	15.32	1.029	15.58	0.5082	15.10	11.67	15.06	-0.09998	15.66	1.567
16.06	0.07001	16.76	0.8778	16.90	0.3511	16.28	10.43	16.74	0.01000	16.60	1.345
17.48	-0.07000	17.12	0.7997	17.52	0.3007	17.26	9.394	17.54	0.01000	17.40	1.038
18.92	-0.07000	18.84	0.3683	18.90	0.1729	18.92	7.922	18.86	-0.09000	19.	0.7930
19.54	0.05000	19.50	0.4670	19.50	0.1732	19.10	7.849	19.68	-0.08000	19.34	0.6615
20.70	0.02000	20.24	0.2800	20.	0.09170	20.90	6.646	20.68	-0.07000	20.30	0.6838

<i>BAP.</i>	13	<i>BAP.</i>	14	<i>BAP.</i>	15	<i>BAP.</i>	16	<i>BAP.</i>	17	<i>BAP.</i>	18
x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j
1.760	4.442	1.940	3.840	1.240	39.06	1.260	27.49	1.340	45.91	1.640	22.91
2.040	3.400	2.540	2.169	2.220	33.24	2.800	21.29	2.520	36.22	2.540	19.64
3.160	1.073	3.500	0.7654	3.100	28.57	3.080	20.35	3.200	31.60	3.240	17.46
5.	0.1252	4.660	0.3556	4.440	22.84	4.540	15.90	4.	26.93	4.600	13.94
5.800	0.01873	5.560	0.1039	5.300	19.83	5.580	13.47	5.580	19.65	5.820	11.35
6.240	0.1007	6.240	0.05265	6.	17.60	6.180	12.24	6.300	17.07	6.600	9.957
7.040	0.06278	7.480	-0.06476	7.640	13.39	7.480	9.822	7.960	12.29	7.960	7.929
8.320	-0.08367	8.540	0.09528	8.280	12.16	8.260	8.598	8.700	10.47	8.340	7.543
9.160	-0.05726	9.980	0.01125	9.960	9.115	9.	7.585	9.840	8.442	9.280	6.457
10.82	-0.009480	10.52	0.04073	10.78	7.998	10.04	6.402	10.68	7.146	10.84	4.943
11.54	0.07025	11.36	0.08031	11.06	7.648	11.28	5.128	11.16	6.458	11.40	4.508
12.42	-0.01990	12.24	-0.05987	12.10	6.379	12.74	4.040	12.44	4.885	12.58	3.624
13.86	0.06002	13.72	0.02003	13.42	5.126	13.18	3.687	13.24	4.227	13.90	2.937
14.12	-0.01998	14.78	0.00001029	14.64	4.194	14.04	3.265	14.90	3.087	14.82	2.577
15.52	0.4729 10 ⁻⁵	15.08	0.05001	15.16	3.865	15.16	2.767	15.96	2.405	15.02	2.525
16.62	-0.02000	16.68	0.01000	16.20	3.326	16.26	2.282	16.24	2.241	16.16	2.040
17.34	-0.04000	17.34	-0.009999	17.82	2.462	17.78	1.666	17.72	1.734	17.92	1.543
18.48	0.07000	18.78	0.02000	18.30	2.213	18.18	1.593	18.86	1.341	18.82	1.232
19.46	0.9196 10 ⁻⁷	19.46	0.01000	19.16	1.970	19.26	1.342	19.34	1.174	19.16	1.142
20.64	-0.02000	20.28	-0.09000	20.74	1.463	20.88	0.9780	20.64	0.8972	20.42	0.9781
<i>BAP.</i>	19	<i>BAP.</i>	20	<i>BAP.</i>	21	<i>BAP.</i>	22	<i>BAP.</i>	23	<i>BAP.</i>	24
x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j
1.060	43.27	1.400	43.57	1.640	30.65	1.240	21.14	2.	33.71	1.220	33.93
2.480	37.43	2.	40.81	2.380	28.38	2.160	18.11	2.620	31.44	2.720	20.56
3.640	33.26	3.940	32.98	3.900	24.37	3.420	14.67	3.320	29.04	3.700	14.93
4.120	31.79	4.580	30.66	4.480	23.07	4.200	12.92	4.480	25.54	4.400	11.85
5.480	27.81	5.040	29.14	5.880	20.00	5.540	10.40	6.	21.55	5.340	8.559
6.360	25.36	6.980	23.58	6.600	18.51	6.860	8.321	6.860	19.52	6.060	6.688
7.480	22.75	7.500	22.20	7.680	16.71	7.420	7.588	7.820	17.68	7.640	4.024
8.440	20.57	8.760	19.30	8.	16.22	8.760	5.997	8.980	15.42	8.380	3.143
9.780	18.15	9.180	18.49	9.520	13.82	9.600	5.249	9.320	15.01	9.	2.529
10.12	17.36	10.74	15.37	10.38	12.77	10.96	4.113	10.28	13.43	10.12	1.779
11.74	14.76	11.52	14.26	11.70	11.11	11.84	3.554	11.74	11.44	11.80	1.019
12.22	14.04	12.60	12.57	12.82	9.990	12.	3.618	12.52	10.55	12.70	0.6800
13.96	11.86	13.32	11.67	13.40	9.465	13.62	2.656	13.18	9.685	13.40	0.6755
14.66	11.17	14.08	10.69	14.28	8.563	14.78	2.145	14.42	8.473	14.82	0.3149
15.78	9.887	15.92	8.676	15.60	7.554	15.16	2.037	15.36	7.549	16.	0.2163
16.94	8.922	16.34	8.228	16.76	6.636	16.14	1.665	16.28	6.940	16.38	0.3070
17.92	7.987	17.80	7.023	17.66	6.126	17.78	1.443	17.30	6.165	17.32	0.08860
18.38	7.677	18.22	6.667	18.86	5.461	18.94	1.106	18.26	5.563	18.36	0.1921
19.82	6.634	19.64	5.833	19.42	5.072	19.52	0.9950	19.42	4.935	19.10	0.01757
20.08	6.356	20.18	5.436	20.60	4.690	20.66	0.8812	20.16	4.433	20.92	-0.05222

BAP. 25		BAP. 26		BAP. 27		BAP. 28		BAP. 29		BAP. 30	
x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j
1.140	14.05	2.	35.93	1.040	19.82	1.400	14.50	1.300	29.75	1.	24.23
2.960	2.380	2.780	31.46	2.240	16.73	2.320	9.002	2.340	26.09	2.680	20.04
3.120	1.943	3.820	26.41	3.220	14.51	3.420	5.196	3.260	23.21	3.420	18.45
5.	0.2565	4.760	22.55	4.680	11.69	4.600	2.999	4.800	19.25	4.040	17.30
5.120	0.3329	5.200	20.93	5.460	10.56	5.160	2.097	5.920	16.77	5.880	13.99
6.200	0.1193	6.600	16.71	6.600	8.908	6.920	0.8415	6.180	16.15	6.660	12.82
7.720	-0.04047	7.480	14.47	7.840	7.545	7.800	0.6770	7.	14.60	7.640	11.55
8.540	-0.01140	8.860	11.36	8.380	6.988	9.	0.2222	8.900	11.61	8.780	10.11
9.460	0.07343	9.300	10.60	9.860	5.621	9.700	0.2570	9.020	11.34	9.220	9.648
10.40	-0.008661	11.	8.015	10.88	4.832	10.30	0.1482	10.96	8.814	10.02	8.782
11.06	0.06069	11.14	7.875	11.16	4.651	11.64	0.05607	11.48	8.264	11.24	7.744
12.98	0.06010	12.18	6.625	12.56	3.915	12.98	0.04405	12.72	7.136	12.88	6.546
13.02	-0.08990	13.02	5.770	13.16	3.570	13.38	-0.03395	13.98	6.164	13.90	5.834
14.60	0.06002	14.66	4.335	14.32	3.064	14.62	0.07940	14.68	5.546	14.28	5.522
15.24	-0.05999	15.38	3.774	15.32	2.496	15.54	0.1022	15.32	5.186	15.08	4.962
16.10	0.05000	16.28	3.397	16.16	2.295	16.80	0.08652	16.06	4.670	16.26	4.391
17.84	-0.07000	17.20	2.754	17.40	1.815	17.88	0.09380	17.26	4.096	17.50	3.804
18.38	-0.03000	18.86	2.088	18.16	1.649	18.74	-0.01753	18.14	3.632	18.68	3.316
19.	-0.06000	19.94	1.822	19.64	1.380	19.94	0.07136	19.02	3.326	19.40	3.067
20.64	-0.08000	20.36	1.590	20.70	1.205	20.80	0.01088	20.54	2.774	20.14	2.851

2 Считая, что данные пары точек адекватно описываются некоторым многочленом 2-й степени, найти его коэффициенты.

ВАРИАНТЫ

BAP. 1		BAP. 2		BAP. 3		BAP. 4		BAP. 5		BAP. 6	
x_j	y_j										
0.5200	2.940	1.100	14.62	0.6600	11.38	1.100	12.83	0.5400	5.662	0.8800	-4.956
1.780	17.29	1.560	18.52	1.960	25.40	1.660	19.31	1.340	3.096	1.460	-4.738
1.640	15.42	1.980	22.85	2.120	27.85	2.280	28.53	2.340	1.716	2.100	-3.780
2.580	27.85	2.700	31.67	2.100	27.54	2.460	31.60	2.280	1.708	2.260	-3.402
3.140	36.09	3.460	43.24	3.340	51.50	2.620	34.52	2.720	1.808	2.940	-1.166
3.180	36.73	4.	53.01	3.600	57.71	3.940	64.39	3.720	3.200	3.600	1.820
3.700	44.95	4.100	54.88	3.640	58.66	4.280	73.78	3.880	3.680	4.200	5.320
4.220	53.79	4.720	67.65	4.240	74.68	4.080	68.29	4.160	4.500	4.700	8.780
5.280	73.37	5.440	84.50	5.380	111.0	4.840	90.86	5.440	10.35	4.660	8.470
5.960	87.09	5.260	80.16	5.640	120.4	5.100	99.23	5.960	13.76	5.480	15.10
5.920	86.26	6.200	104.4	5.960	132.5	6.140	137.4	6.460	17.49	6.240	22.46
6.660	102.2	6.920	125.5	6.820	168.1	6.680	160.0	6.980	21.84	6.500	25.22
7.020	110.4	7.160	133.0	7.340	191.5	6.580	155.5	6.680	19.22	6.600	26.45
7.160	113.6	7.700	150.8	7.900	219.0	7.660	205.1	7.900	30.93	7.100	32.11
8.240	140.0	7.680	149.9	8.360	242.8	8.400	243.0	8.400	36.60	7.500	37.18
8.620	149.8	8.640	184.2	8.880	271.1	8.800	264.7	8.940	43.23	8.460	50.68
9.060	161.6	8.660	184.9	9.040	280.4	8.780	263.7	8.840	42.04	9.300	63.84
9.260	167.2	9.360	212.4	9.480	305.9	9.900	329.6	9.240	47.08	9.220	62.65
10.40	199.8	9.760	228.8	9.720	320.7	9.760	321.1	9.920	56.78	10.32	81.92
10.24	195.2	10.68	269.1	11.	404.	10.68	380.3	10.54	66.37	10.22	80.03

BAP. 7		BAP. 8		BAP. 9		BAP. 10		BAP. 11		BAP. 12	
x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j
0.5000	7.580	1.420	21.09	1.040	6.486	0.7200	-6.835	1.220	0.416	0.5800	-1.634
1.320	12.03	2.	31.08	1.720	14.72	1.660	-8.722	1.200	0.3800	1.360	-0.07000
1.500	13.41	2.360	38.33	2.500	27.78	2.100	-7.700	2.220	9.290	1.540	0.4720
2.080	18.87	2.760	47.10	2.500	27.77	2.320	-6.630	2.600	13.75	2.440	3.864
3.140	32.04	3.140	56.56	2.580	29.38	2.940	-2.550	2.980	18.67	2.720	5.398
3.980	45.65	3.240	59.08	3.600	52.21	3.480	2.980	3.320	23.68	3.740	11.94
4.420	54.01	3.540	67.35	4.180	68.04	3.620	4.710	3.600	28.18	3.620	11.10
4.	46.	4.800	107.7	4.080	65.27	4.940	26.77	4.980	54.55	4.080	14.64
5.220	71.03	5.460	132.6	4.580	80.26	4.640	20.91	5.420	64.60	5.060	23.58
5.580	79.46	5.	115.0	5.760	121.5	5.680	43.67	5.080	56.74	5.740	30.86
6.120	93.24	6.340	170.0	5.980	130.3	6.460	65.11	5.760	72.82	6.500	40.33
6.200	95.21	6.920	197.1	6.960	172.0	6.980	81.32	6.180	83.83	6.740	43.51
6.860	113.8	7.400	221.2	7.500	197.8	6.740	73.63	6.520	92.98	6.840	44.75
7.080	120.5	7.940	249.8	7.140	180.6	7.100	85.34	7.860	134.3	7.620	55.98
8.320	161.0	7.980	251.8	8.440	246.4	7.780	109.5	8.440	154.3	7.500	54.27
8.300	160.4	8.300	269.9	8.120	229.4	8.460	136.6	8.380	152.3	8.940	77.92
9.100	189.8	9.060	314.5	8.660	258.6	8.680	145.9	9.120	179.5	9.280	84.14
9.360	199.8	9.800	361.8	9.620	315.0	9.440	180.2	9.100	178.7	9.200	82.74
9.980	225.2	9.580	347.3	10.24	354.7	10.38	227.7	9.960	213.3	10.42	106.6
10.38	242.3	10.18	387.1	10.80	392.0	10.72	246.3	10.28	227.1	10.16	101.2
BAP. 13		BAP. 14		BAP. 15		BAP. 16		BAP. 17		BAP. 18	
x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j
1.340	15.07	1.100	11.82	1.160	-14.25	0.8800	13.77	0.9600	5.935	0.5200	8.981
1.240	14.43	1.200	12.41	1.800	-13.68	1.500	20.81	1.620	8.482	2.	11.91
1.840	18.66	1.740	17.18	1.820	-13.52	1.720	23.44	2.440	15.04	2.500	14.93
2.880	27.81	2.740	29.34	2.120	-12.43	2.720	36.84	2.100	11.73	2.280	13.61
2.640	25.43	3.420	39.64	2.920	-6.730	2.660	35.99	2.660	17.64	2.800	17.34
3.220	31.25	3.760	45.48	3.180	-4.180	3.300	45.59	3.160	24.37	3.760	27.04
4.380	44.78	3.500	40.92	4.080	8.31	4.080	58.33	3.880	36.55	3.880	28.51
4.720	49.21	4.300	55.83	4.400	13.91	4.960	74.29	4.320	45.69	4.200	32.58
4.760	49.70	5.220	76.07	5.200	30.55	4.760	70.43	5.420	73.39	4.940	44.01
5.500	60.17	5.	71.04	5.800	45.45	5.180	78.48	5.920	88.51	5.360	51.37
5.780	64.54	5.960	94.90	6.340	60.78	6.	95.	6.020	91.60	5.700	57.91
6.900	83.29	6.920	122.4	6.040	52.00	6.120	97.63	6.	91.04	6.800	82.08
6.540	77.01	6.720	116.5	6.860	77.42	6.720	110.6	6.940	123.7	7.440	98.48
7.680	97.77	7.380	137.0	7.380	95.33	7.920	139.0	7.040	127.5	7.940	112.3
8.180	107.6	7.680	147.1	7.960	117.4	8.300	148.6	8.280	179.6	8.160	118.7
8.640	117.3	8.260	167.4	8.700	148.6	8.600	156.4	8.920	210.0	8.400	125.8
9.040	125.9	8.980	194.1	9.080	165.7	9.460	179.6	8.920	210.0	9.400	158.6
9.940	146.6	9.700	223.3	9.560	188.8	9.880	191.5	9.260	227.2	9.	145.1
10.38	157.3	10.20	244.5	9.800	200.7	9.900	192.1	9.720	251.5	9.760	171.3
10.08	150.0	10.36	251.8	10.80	254.4	10.80	218.8	10.70	307.8	10.24	189.1

BAP. 19		BAP. 20		BAP. 21		BAP. 22		BAP. 23		BAP. 24	
x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j
0.8400	6.936	1.180	-7.358	0.6600	-2.033	0.9600	-6.275	1.500	-9.770	1.020	-0.900
1.580	12.41	1.640	-5.590	1.440	-3.298	1.380	-2.938	1.260	-8.452	1.760	3.458
2.480	20.60	1.860	-4.610	1.520	-3.250	2.020	4.210	2.220	-12.89	2.440	8.260
2.820	23.95	2.160	-3.224	2.400	0.09000	2.140	5.850	2.420	-13.55	2.680	10.25
2.780	23.56	2.920	1.460	2.520	0.8100	2.580	12.50	3.420	-15.71	2.760	10.85
3.540	32.23	3.140	3.090	3.100	6.090	3.420	28.61	3.800	-15.93	3.440	17.09
3.800	35.44	4.460	14.36	4.420	25.31	4.100	44.49	4.340	-15.78	4.320	26.55
4.400	43.33	4.260	12.42	4.320	23.33	4.960	68.78	4.080	-16.06	4.380	27.23
5.460	59.21	4.920	19.04	4.840	33.57	4.800	63.87	4.880	-15.14	4.580	29.64
5.180	54.66	5.400	24.54	5.500	48.71	5.	70.10	5.840	-12.51	5.120	36.62
6.280	72.84	6.140	33.84	6.200	67.60	5.860	98.9	5.620	-13.28	5.860	46.83
6.480	76.32	6.500	38.74	6.320	71.23	6.680	130.6	6.200	-11.13	6.100	50.51
7.200	89.84	6.580	39.83	7.	92.99	7.260	155.3	7.360	-4.800	6.740	60.66
7.300	91.88	7.480	53.35	7.860	124.4	7.080	147.5	7.480	-3.89	7.780	78.87
8.040	106.8	7.820	58.89	8.220	138.9	7.900	185.1	7.900	-0.7700	8.480	92.40
8.920	126.1	8.280	66.75	8.820	164.8	8.740	228.0	8.620	5.250	8.240	87.59
9.120	130.8	9.240	84.61	9.480	195.8	9.140	249.6	9.420	13.39	9.	103.0
9.940	150.5	9.860	97.19	9.060	175.8	9.200	253.0	9.840	18.02	9.800	120.5
10.10	154.5	10.06	101.3	9.860	214.9	9.920	295.1	9.880	18.57	9.880	122.2
10.48	164.1	10.36	107.6	10.80	265.4	10.40	325.0	10.78	29.91	10.72	142.2
BAP. 25		BAP. 26		BAP. 27		BAP. 28		BAP. 29		BAP. 30	
x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j	x_j	y_j
0.6200	3.793	0.6000	-10.86	1.140	16.44	1.300	-7.490	1.400	-8.340	1.500	8.250
1.260	13.10	1.440	-14.92	1.580	21.40	1.900	-8.000	1.860	-10.45	1.380	8.144
2.420	36.45	1.720	-16.15	1.920	25.84	1.920	-7.974	2.	-11.08	2.460	10.09
2.660	42.12	2.440	-18.06	2.400	32.91	2.160	-8.074	2.880	-13.76	2.220	9.418
2.780	45.27	3.040	-19.04	2.500	34.43	2.840	-7.324	3.220	-14.38	2.880	11.52
3.980	80.25	3.980	-18.95	3.760	57.92	3.200	-6.660	3.880	-15.08	3.740	15.57
3.500	65.26	4.300	-18.54	4.480	73.92	3.580	-5.510	3.620	-14.90	3.960	16.74
4.940	114.6	4.460	-18.33	4.740	80.38	4.	-3.990	4.860	-14.32	4.680	21.60
4.940	114.7	4.520	-18.23	5.100	89.67	4.900	0.3500	5.100	-13.79	5.440	27.64
5.580	140.7	5.900	-13.53	5.560	102.1	5.820	6.59	5.800	-11.75	5.400	27.28
6.200	168.2	5.860	-13.74	5.740	107.3	6.320	10.65	6.180	-10.19	6.120	34.21
6.800	197.0	6.360	-11.16	6.560	132.3	6.700	13.99	6.880	-6.680	6.180	34.84
7.320	223.6	7.180	-5.71	7.100	150.4	6.740	14.56	7.400	-3.500	6.760	41.12
7.280	221.4	7.220	-5.460	7.820	176.2	7.920	27.11	7.880	0.1300	7.060	44.72
8.380	283.2	7.560	-2.690	8.060	185.3	8.360	32.40	7.940	0.4500	8.080	58.06
8.900	314.7	8.500	5.650	8.540	204.2	8.820	38.48	8.980	9.890	8.300	61.22
8.600	296.3	8.540	6.210	9.360	238.5	9.020	41.21	9.040	10.47	9.440	79.33
9.520	354.6	9.800	20.49	9.720	254.4	9.920	54.77	9.300	13.09	9.680	83.43
9.900	380.0	9.980	22.69	10.36	283.8	9.500	48.15	10.12	22.54	10.28	94.23
10.36	412.1	10.42	28.57	10.26	279.2	10.22	59.50	10.96	33.50	10.50	98.26