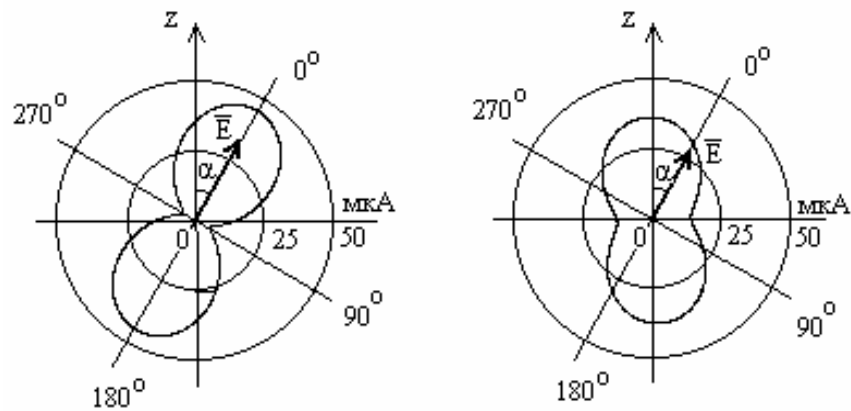


Н.Я. МОЛОТКОВ, А.А. ЕГОРОВ

# КРИСТАЛЛООПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ И ИХ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ДИАПАЗОНЕ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ



•ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ•

Министерство образования Российской Федерации  
Тамбовский государственный технический университет

**Н.Я. МОЛОТКОВ, А.А. ЕГОРОВ**

**КРИСТАЛЛООПТИЧЕСКИЕ  
ЯВЛЕНИЯ И ИХ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В ДИАПАЗОНЕ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ**

Утверждено Ученым советом университета  
в качестве учебного пособия для студентов  
технических специальностей

Тамбов  
Издательство ТГТУ  
2004

УДК 548.1.022(075)  
ББК В37я73  
М758

**Рецензенты:**

Кандидат физико-математических наук, доцент  
*В.И. Иволгин*

Доктор технических наук, профессор  
*О.С. Дмитриев*

**Молотков Н.Я., Егоров А.А.**

М758 Кристаллооптические явления и их моделирование в диапазоне сверхвысоких частот: Учебное пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. 64 с.

Изложены основные вопросы распространения электромагнитных волн в анизотропных одноосных кристаллах и возникновение двойного лучепреломления. Осуществлено моделирование основных кристаллооптических явлений в диапазоне сверхвысоких частот на базе искусственных сред: волноводных, металлоленточных и слоистых диэлектрических структур, которые являются аналогом кристалла исландского шпата. Большое внимание уделено теории сложения когерентных волн с ортогональными линиями поляризации, интерференции поляризованных волн и анализу волн с эллиптической, круговой и линейной поляризацией. Рассмотрено применение двойного лучепреломления в технике на базе наглядных опытов в диапазоне СВЧ.

Предназначено для студентов технических специальностей.

УДК 548.1.022(075)

ББК В37я73

ISBN 5-8265-0273-8

© Молотков Н.Я., Егоров А.А., 2004

© Тамбовский государственный  
технический университет  
(ТГТУ), 2004

Учебное издание

**Молотков Николай Яковлевич,  
Егоров Андрей Анатольевич**

**КРИСТАЛЛООПТИЧЕСКИЕ  
ЯВЛЕНИЯ И ИХ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В ДИАПАЗОНЕ  
СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ**

Учебное пособие

Редактор Т.М. Глинкина  
Компьютерное макетирование Е.В. Кораблевой

Подписано в печать 16.03.04

Формат 60 × 84 / 16. Бумага офсетная. Печать офсетная  
Гарнитура Times New Roman. Объем: 3,72 усл. печ. л.; 3,6 уч.-изд. л.  
Тираж 100 экз. С. 202<sup>М</sup>

Издательско-полиграфический центр  
Тамбовского государственного технического университета,  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

## ВВЕДЕНИЕ

Оптика является одним из важнейших разделов курса физики технического вуза. Именно в оптике в последние годы произошло наибольшее число научных открытий. Оптические волновые принципы и явления находят все большее применение в других отраслях научных знаний, например, в радиофизике, радиотехнике, средствах связи и навигации. В связи с этим на курс оптики технического вуза нельзя смотреть как на ограниченный раздел курса физики, который изучает только свойства света и его взаимодействие с веществом. Учитывая, что видимый свет является лишь узким участком спектра электромагнитных волн, занимающим диапазон от низкочастотных колебаний до гамма-излучения, курс оптики в техническом вузе должен представлять собою единую теорию широкого спектра электромагнитных волн и их взаимодействие с веществом. В связи с этим оптические явления в курсе оптики должны экспериментально исследоваться не только в световом диапазоне спектра электромагнитных волн, но и в радиодиапазоне электромагнитных волн. Такой подход позволяет утвердить взгляд обучаемых на оптические явления как на электромагнитные и вскрыть глубокое единство их природы.

В пособии впервые сделана попытка изложить основные вопросы кристаллооптики и наглядного моделирования кристаллооптических явлений в сантиметровом диапазоне электромагнитных волн ( $\lambda = 3,2$  см).

С этой целью в пособии даются сведения об искусственных двоякопреломляющих анизотропных средах для сантиметровых радиоволн: волноводных, металленточных и слоистых диэлектрических структурах, последние из которых являются полным аналогом кристалла исландского шпата. Наглядные опыты в диапазоне сверхвысоких частот на базе искусственных анизотропных сред позволяют значительно расширить круг кристаллооптических явлений, изучаемых непосредственно на основе эксперимента. Например, описываются опыты по наблюдению двойного лучепреломления в различных призмах, двойного лучепреломления в модели одноосного кристалла при различной ориентации его главной оси, исследуются закономерности явления интерференции поляризованных волн и получение волн с круговой и эллиптической поляризацией и другие. При чтении лекций по кристаллооптике экспериментальные исследования в сантиметровом диапазоне радиоволн должны дополнять и обогащать эксперимент в оптическом диапазоне. Часть экспериментальных исследований на основе техники СВЧ студенты продолжают в радиофизическом практикуме по кристаллооптике. Моделирование кристаллооптических явлений в сантиметровом диапазоне радиоволн позволяет студентам не только наглядно изучать сложные физические явления, но и глубже понять физическую сущность многих тонких явлений и процессов.

### 1 ДВОЙНОЕ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

#### при прохождении через кристалл исландского шпата

При изложении оптических явлений часто предполагается изотропность среды, в которой распространяются световые электромагнитные волны. Очевидно, в природе существуют тела, не удовлетворяющие этому требованию. Среда, физические свойства которых различны по разным направлениям, называются анизотропными. Анизотропными являются кристаллические вещества, кристаллизующиеся в системе со сравнительно низкой симметрией. Благодаря низкой симметрии кристаллов, их физические свойства (теплопроводность, электропроводность и др.) по различным направлениям различны. К числу таких анизотропных веществ относится кристалл исландского шпата или кальцита ( $\text{CaCO}_3$ ). Исландский шпат встречается в природе в виде сравнительно крупных кристаллов, имеющих вид ромбоэдров (рис. 1).

Такое ограничение кристаллов показывает, что  $\text{CaCO}_3$  кристаллизуется в ромбоэдрической системе. Соседние молекулы  $\text{CaCO}_3$  располагаются по вершинам и в центре правильного ромбоэдра со стороной  $a = 12,72 \cdot 10^{-8}$  см.

При прохождении узкого пучка естественного света через кристалл исландского шпата происходит его разделение на два пучка. Это явление впервые было открыто в 1670 году Э. Бартолини и носит название двойного лучепреломления. При рассмотрении различных предметов через кристалл исландского шпата они кажутся двойными. Кроме исландского шпата, двойным лучепреломлением обладают, например, кварц, турмалин. Если падающий пучок естественного света достаточно узок, а кристалл имеет достаточную толщину, то из него выходят два пучка, параллельных первоначальному (как и при всяком прохождении через плоскопараллельную пластинку), вполне разделенных пространственно. Даже в том случае, когда первоначальный пучок нормален к естественной грани кристалла, т.е. угол падения равен нулю, преломленный пучок разделяется на два, причем один из них ( $o$ ) представляет продолжение первичного, а второй ( $e$ ) уклоняется (рис. 2) так, что угол преломления для него отличен от нуля.

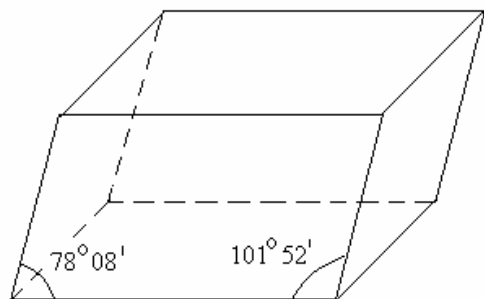


Рис. 1

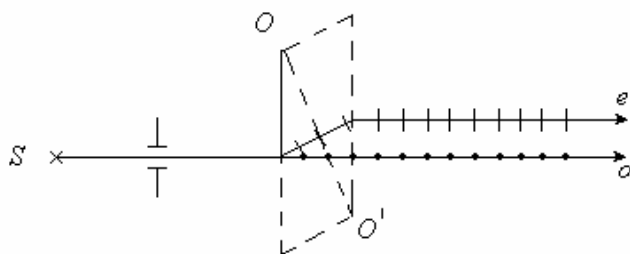


Рис. 2

Луч света, который при нормальном падении излучения на грань кристалла не испытывает преломления, называется обыкновенным ( $o$ ). Исследования показывают, что при двойном лучепреломлении обыкновенный луч удовлетворяет обычному закону преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_o, \quad (1.1)$$

для которого показатель преломления  $n_o$  является постоянной величиной для данного кристалла. Для исландского шпата (для света с длиной волны  $\lambda = 589,3$  нм, желтый дублет натрия)  $n_o = 1,658$ . Луч света, который даже при нормальном падении излучения на грань кристалла испытывает преломление, называется необыкновенным ( $e$ ). Отсюда следует, что необыкновенный луч не следует обычному закону преломления, что и дало повод к его названию «необыкновенного». опыты показывают, что для необыкновенного луча значение показателя преломления  $n_e$  зависит от направления распространения необыкновенной волны в кристалле. Для различных углов падения  $\alpha$  показатель преломления необыкновенного луча имеет различные значения. Для  $\text{CaCO}_3$   $n_e$  изменяется в границах  $1,486 \leq n_e \leq 1,658$ .

Для кристалла  $\text{CaCO}_3$   $n_e \leq n_o$ . Такие кристаллы называются оптически *отрицательными*. Вместе с тем существует широкий класс веществ (например, кварц) для которых  $n_e \geq n_o$ . Такие кристаллы называются оптически *положительными*.

В кристалле исландского шпата существует одно направление, вдоль которого оба преломленных луча распространяются, не раздваиваясь и с одинаковой скоростью, как в обычной изотропной среде. Это направление в кристалле принято называть *главной оптической осью кристалла*. В кристал-

ле исландского шпата оптическая ось параллельна диагонали  $OO'$  (рис. 2), соединяющей тупые углы ромбоэдра. Оптическая ось представляет собой определенное направление в кристалле, а не какую-то избранную линию. Кристалл исландского шпата является одноосным кристаллом, но существуют также двуосные кристаллы. При распространении света вдоль оптической оси показатель преломления обыкновенного и необыкновенного лучей совпадают, т.е.  $n_e = n_o$ .

Плоскость, проходящая через оптическую ось кристалла и волновую нормаль распространяющихся волн, носит название *плоскости главного сечения* или, короче, *главной плоскости*. Под волновой нормалью понимается направление, перпендикулярное плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  волны. Обычно в качестве главной плоскости выбирают плоскость, содержащую оптическую ось кристалла и падающий световой луч. На рис. 2 главная плоскость совпадает с плоскостью чертежа. При вращении кристалла вокруг оси, совпадающей с направлением первичного луча (рис. 2), обыкновенный луч остается неподвижным, а необыкновенный вращается вместе с главной плоскостью кристалла вокруг обыкновенного луча. Следовательно, обыкновенный и необыкновенный лучи лежат в главной плоскости кристалла.

Опыт показывает, если кристалл исландского шпата (рис. 2) облучается неполяризованным светом, то оба выходящих луча оказываются линейно поляризованными. Чтобы это показать, поставим на пути обыкновенного и необыкновенного лучей пластинку турмалина, как анализатор. При вращении ее вокруг оси, совпадающей с направлением первичного луча, замечают попеременное гашение то одного луча, то другого. Причем, чтобы погасить один из лучей, когда второй наиболее ярк, нужно пластинку турмалина повернуть на угол  $90^\circ$ . Этот опыт доказывает, что оба луча (обыкновенный и необыкновенный) линейно поляризованы, а их линии поляризации взаимно перпендикулярны. Причем, электрический вектор  $\vec{E}_o$  обыкновенной волны всегда перпендикулярен главной оптической оси кристалла, т.е. вектор  $\vec{E}_o$  перпендикулярен главной плоскости, что на рис. 2 отмечено точками. Электрический вектор  $\vec{E}_e$  необыкновенной волны лежит в главной плоскости кристалла, что отмечено на рис. 2 соответствующими черточками. Векторы  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$  ортогональны.

## **2 ОПТИЧЕСКАЯ АНИЗОТРОПИЯ КРИСТАЛЛОВ. ЭЛЛИПСОИД ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ**

Мы рассмотрели некоторые экспериментальные закономерности распространения световых волн в кристалле исландского шпата. При этом остался не решен вопрос о причине возникновения двойного лучепреломления. Нами было отмечено, что двойное лучепреломление наблюдается только в оптически анизотропных веществах. Чем же обуславливается оптическая анизотропия кристаллов? Закономерности распространения света в любой среде (изотропной или анизотропной) определяются интерференцией первичных и вторичных волн, излучаемых молекулами, атомами или ионами среды вследствие их электрической поляризации под действием электрического поля  $\vec{E}$  световой волны. Поэтому оптические свойства среды полностью обусловлены оптическими свойствами этих элементарных излучателей, их взаимным расположением и взаимодействием друг с другом. Молекулы и атомы среды в зависимости от их структуры могут быть электрически изотропными или анизотропными. В первом случае поляризуемость не зависит от направления, во втором – зависит. Однако электрические свойства отдельных атомов и молекул среды еще не определяют полностью оптические свойства этой среды. Так, например, все газы, жидкости и аморфные твердые тела при обычных условиях оказываются изотропными, хотя молекулы многих из них электрически анизотропны. Причина этого заключается в полной хаотичности ориентации молекул в газах, жидкостях и аморфных телах. Всякое упорядочение ориентаций анизотропных молекул в этих средах под влиянием внешних воздействий приводит к возникновению оптической анизотропии.

Если среда находится в кристаллическом состоянии, то ее частицы (атомы, молекулы или ионы) располагаются в строгом порядке, образуя кристаллическую решетку. Каждая частица находится в сильном взаимодействии с ближайшими соседними частицами в решетке. Поэтому излучение вторичных волн частицами кристаллической среды зависит не только от электрических свойств самих частиц, но и от силового воздействия со стороны других частиц. Следовательно, оптическая анизотропия кристалла может быть обусловлена как электрической анизотропией образующих его частиц, так и анизо-

тропией поля сил взаимодействия между частицами. Характер этого поля, т.е. его изотропность или анизотропность, зависит от степени симметрии решетки кристалла. Как показывают исследования, только кристаллы кубической системы (например, каменная соль NaCl), обладающие весьма высокой степенью симметрии решетки, являются оптически изотропными. Все остальные кристаллы независимо от электрических свойств образующих их частиц оптически анизотропны.

Расчет интерференции вторичных волн в анизотропных кристаллах весьма сложен. Более простой метод изучения закономерностей распространения света в таких средах основан на применении к ним теории Максвелла для переменного электромагнитного поля. При этом в макроскопической теории кристалл рассматривается как однородная среда, относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  которого не одинакова в разных направлениях. Предполагается, что кристаллы немагнитны, т.е. их относительная магнитная проницаемость  $\mu = 1$ . Таким образом, считается, что *оптическая анизотропия немагнитных кристаллов является следствием анизотропии его относительной диэлектрической проницаемости*.

Из курса электричества известно, что в изотропной среде векторы электрического смещения  $\bar{D}$  и напряженности поля  $\bar{E}$  совпадают по направлению и между ними существует простая связь:  $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ , где  $\epsilon$  – скалярная величина. В анизотропных средах связь между векторами  $\bar{D}$  и  $\bar{E}$  задается более сложным соотношением, в которое входит так называемый *тензор диэлектрической проницаемости*. Оно записывается следующим образом

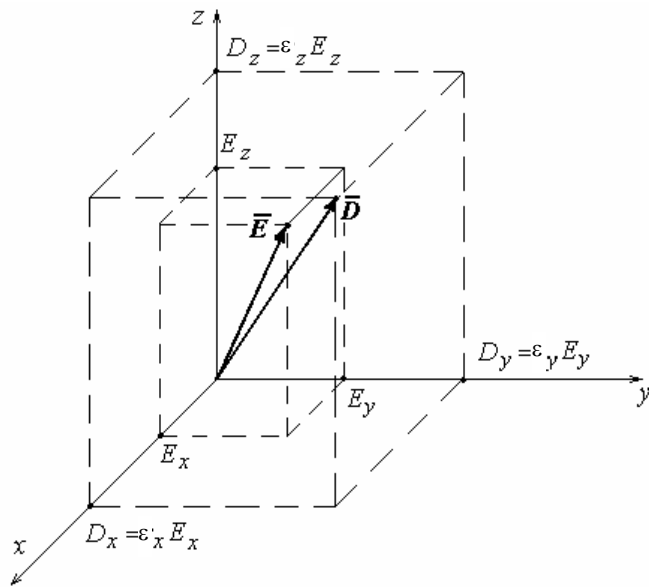
$$\begin{cases} D_x = \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z; \\ D_y = \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z; \\ D_z = \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z. \end{cases} \quad (2.1)$$

Отсюда следует, что векторы  $\bar{D}$  и  $\bar{E}$  в общем случае не совпадают по направлению. Существует ряд обстоятельств, которые позволяют упростить соотношение (2.1). Легко доказать, что для любого кристалла можно найти такие три главных ортогональных направления  $x, y, z$ , для которых справедливыми будут соотношения

$$D_x = \epsilon_x E_x; \quad D_y = \epsilon_y E_y; \quad D_z = \epsilon_z E_z, \quad (2.2)$$

где  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  называют главными значениями диэлектрической проницаемости анизотропной среды.

Так как в общем случае  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  не равны между собой, то для всех направлений в кристалле, кроме главных направлений по осям  $x, y, z$ , векторы  $\bar{D}$  и  $\bar{E}$  не совпадают между собой по направлению. Несовпадение направлений векторов  $\bar{D}$  и  $\bar{E}$  для кристаллооптики имеет чрезвычайно важное значение. Если по некоторому направлению в анизотропном кристалле действует электрическое поле напряженности  $\bar{E}$ , то соответствующее значение вектора электрического смещения  $\bar{D}$  можно получить следующим образом. Разложим вектор  $\bar{E}$  на компоненты  $E_x, E_y, E_z$  вдоль главных осей  $x, y, z$  (рис. 3). Каждая из этих компонент обусловит вдоль выбранных осей компоненты вектора смещения:  $D_x = \epsilon_x E_x$ ;  $D_y = \epsilon_y E_y$ ;  $D_z = \epsilon_z E_z$ . Результирующий вектор  $\bar{D}$  получается простым построением. Рис. 3 показывает, что  $\bar{D}$  и  $\bar{E}$  не совпадают по направлению, если

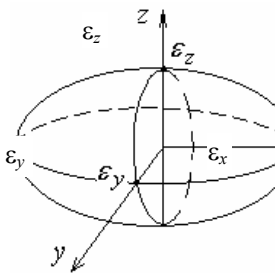


**Рис. 3**

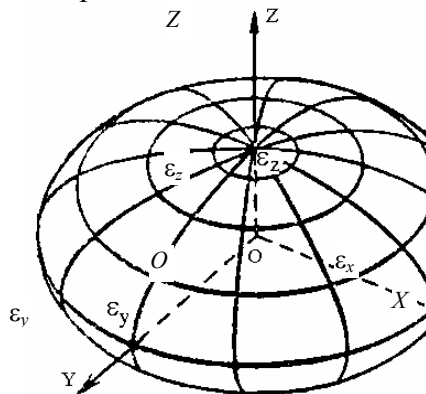
$\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$ . Наоборот, если  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$ , то направления  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  всегда совпадают и для любого направления будет справедливо соотношение  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , т.е. среда изотропна. Если кристалл не поглощает электромагнитные волны, то зависимость его относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  в соответствующих направлениях поддается простой графической интерпретации. Будем из произвольной точки  $O$  кристалла по всевозможным направлениям откладывать радиусы-векторы  $\vec{r}$ , модули которых равны относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  в соответствующих направлениях  $|\vec{r}| = \epsilon$ . Поверхность, проходящая через концы радиусов-векторов  $\vec{r}$ , имеет форму эллипсоида, оси  $x, y, z$  симметрии которого взаимно перпендикулярны и совпадают с тремя главными направлениями в кристалле. Уравнение эллипсоида диэлектрической проницаемости имеет вид:

$$\frac{x^2}{\epsilon_x^2} + \frac{y^2}{\epsilon_y^2} + \frac{z^2}{\epsilon_z^2} = 1, \quad (2.3)$$

где  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  – главные значения диэлектрической проницаемости среды. Графически эллипсоид диэлектрической проницаемости показан на рис. 4.



**Рис. 4**



**Рис. 5**

Анизотропный кристалл, у которого все три главных значения  $\epsilon$  различны ( $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$ ), называется двусосным. Примерами двусосных кристаллов является ромбическая среда, гипс, слюда и другие кристаллы с низкой симметрией. Если два главных значения  $\epsilon$  одинаковы, например,  $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$ ,



то эллипсоид диэлектрической проницаемости имеет форму эллипсоида вращения вокруг оси  $OZ$  (рис. 9). Плоскость  $XOY$  пересекает этот эллипсоид по окружности. Следовательно, для любого направления, перпендикулярного к оси  $Z$ , значения  $\epsilon$  одинаковы, а сами эти направления являются главными. Анизотропные кристаллы, обладающие таким свойством, называются *одноосными*, а ось  $OZ$  – называется главной оптической осью одноосного кристалла в точке  $O$ .

Одноосный кристалл называется *оптически положительным*, если  $\epsilon_z > \epsilon_x = \epsilon_y$ , т.е. если его оптическая ось направлена вдоль большой оси эллипсоида диэлектрической проницаемости. В противном случае ( $\epsilon_z < \epsilon_x = \epsilon_y$ ) одноосный кристалл называется *оптически отрицательным* (рис. 5). Оптически положительными являются, например, кристаллы кварца ( $SiO_2$ ), рутила ( $TiO_2$ ), киновари ( $HgS$ ), а оптически отрицательными – кристаллы исландского шпата, турмалина, апатита.

Если главную относительную диэлектрическую проницаемость одноосного кристалла по направлению, перпендикулярному к оптической оси  $OZ$  обозначить  $\epsilon_{\perp} = \epsilon_x = \epsilon_y$ , а по направлению оптической оси  $OZ$  –  $\epsilon_{\parallel} = \epsilon_z$ , то уравнение эллипсоида для диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\frac{x^2 + y^2}{\epsilon_x^2} + \frac{z^2}{\epsilon_z^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2 + y^2}{\epsilon_{\perp}^2} + \frac{z^2}{\epsilon_{\parallel}^2} = 1. \quad (2.4)$$

Если из произвольной точки  $O$  внутри анизотропного кристалла по всевозможным направлениям провести радиусы-векторы  $\vec{r}$ , модули которых равны корням квадратным из значений относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  в соответствующих направлениях  $|\vec{r}| = \sqrt{\epsilon}$ , то можно графически построить поверхность эллипсоида, называемого оптической индикатрисой среды. Учитывая, что  $\sqrt{\epsilon} = n$  равно показателю преломления при  $\mu = 1$ , оптическая индикатриса определяет значение показателя преломления в кристалле для различных направлений.

Для одноосного кристалла имеем

$$\frac{x^2 + y^2}{\epsilon_x} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2 + y^2}{\epsilon_{\perp}} + \frac{z^2}{\epsilon_{\parallel}} = 1. \quad (2.5)$$

Оптическая индикатриса показателя преломления одноосного кристалла показана на рис. 6. Она представляет собой эллипсоид вращения. Это эллипсоид нормалей, так как можно определить нормальную фазовую скорость  $V = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$  волн для различных направлений.

### 3 ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ. ЛУЧЕВАЯ И НОРМАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ ВОЛН

**В анизотропной среде векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  не совпадают по направлению. Для одноосного кристалла связь между указанными векторами дается соотношениями**

$$D_x = \epsilon_x E_x = \epsilon_y E_y; \quad D_z = \epsilon_z E_z. \quad (3.1)$$

Если  $E_x = E_y = 0$ , то

$$\vec{D} = \epsilon_z \vec{E} = \epsilon_{\parallel} \vec{E}, \quad (3.2)$$

и если  $E_z = 0$ , то

$$\vec{D} = \epsilon_x \vec{E} = \epsilon_y \vec{E} = \epsilon_{\perp} \vec{E}. \quad (3.3)$$

Следовательно, в одноосном кристалле векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  совпадают лишь в двух случаях, когда вектор  $\vec{E}$  направлен по оптической оси  $z$  и когда он перпендикулярен ей. Во всех остальных случаях направление векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  различны. С этим связана одна из особенностей распространения электромагнитной волны в анизотропной среде, на которой необходимо остановиться специально.

Понятие луча в оптике характеризует направление вектора плотности потока энергии в среде, определяемого вектором Умова-Пойнтинга:  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ . Следовательно, вектор  $\vec{S}$  определяет направление лу-

ча. Энергия переносится волной с групповой скоростью  $\bar{V}_Г$ , которая называется *лучевой скоростью*. Вектор лучевой скорости  $\bar{V}_Г$  совпадает с вектором луча  $\bar{S}$ .

Для плоской монохроматической волны в однородной изотропной среде лучи  $\bar{S}$  нормальны к волновым поверхностям. Поэтому в изотропной среде лучи одновременно характеризуют и направление переноса энергии волной и направление распространения фронта волны, причем для монохроматической волны скорость переноса энергии (лучевая или групповая скорость) равна фазовой скорости перемещения волновой поверхности вдоль нормали к ней. Фазовая скорость  $\bar{V}$ , называемая *нормальной скоростью*, определяется соотношением

$$V = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (3.4)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме. При  $\mu = 1$  имеем

$$V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (3.5)$$

Вектор фазовой скорости  $\bar{V}$  совпадает с нормалью  $\bar{N}$  к волновой поверхности. В изотропной среде плоская электромагнитная волна характеризуется тем, что векторы фазовой скорости  $\bar{V}$  и групповой  $\bar{V}_Г$ , или векторы  $\bar{N}$  и  $\bar{S}$  совпадают.

Иначе обстоит дело в анизотропной среде. Вследствие несовпадения направлений векторов  $\bar{D}$  и  $\bar{E}$  линейно поляризованная плоская монохроматическая волна в анизотропной среде характеризуется двумя тройками взаимно перпендикулярных векторов  $\bar{D}; \bar{H}; \bar{V}$  и  $\bar{E}; \bar{H}; \bar{V}_Г$  или  $\bar{D}; \bar{H}; \bar{N}$  и  $\bar{E}; \bar{H}; \bar{S}$  (рис. 7). Векторы  $\bar{D}; \bar{E}; \bar{V}; \bar{V}_Г$  лежат в одной плоскости, которая перпендикулярна вектору  $\bar{H}$ . Вектор фазовой или нормальной скорости  $\bar{V}$  перпендикулярен векторам  $\bar{D}$  и  $\bar{H}$ . Этот вектор  $\bar{V}$  направлен по нормали  $\bar{N}$  к волновой поверхности. Вектор групповой или лучевой скорости  $\bar{V}_Г$  перпендикулярен векторам  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$ , этот вектор  $\bar{V}_Г$  лучевой скорости совпадает по направлению с вектором Умова-Пойнтинга  $\bar{S}$ .

Следовательно, в анизотропной среде векторы  $\bar{V}$  и  $\bar{V}_Г$  не совпадают по направлению. Это приводит к тому, что волновая поверхность волны в анизотропной среде имеет не постоянную кривизну. Как нами будет показано далее, волновая поверхность линейно поляризованной волны в одноосном кристалле может иметь форму эллипсоида вращения. На рис. 8 показан участок такой поверхности  $AB$  для точечного источника света  $L$ . Вектора  $\bar{S}$  и  $\bar{V}_Г$  направлены в точке  $P$  по лучу  $LP$ . Вектора  $\bar{V}$  и  $\bar{N}$  перпендикулярны к касательной  $MK$  и к волновой поверхности в точке  $P$ .

Можно показать, что связь между нормальной и лучевой скоростью дается соотношением

$$V = V_Г \cos \alpha, \quad (3.6)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\bar{D}$  и  $\bar{E}$ .

Из теории Максвелла следует, что в анизотропном кристалле всякая плоская монохроматическая линейно поляризованная волна  $\bar{D}$  распадается на две плоские линейно поляризованные волны  $\bar{D}_o$  и  $\bar{D}_e$  (обыкновенную и необыкновенную) с ортогональными линиями поляризации ( $\bar{D}_o \perp \bar{D}_e$ ). Вектор  $\bar{D}_o$  обыкновенной волны всегда перпендикулярен к главной оси одноосного кристалла и нормали  $\bar{N}$  к фронту волны.

#### 4 РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЛИНЕЙНО ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ В ОДНООСНОМ КРИСТАЛЛЕ. ВОЛНОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОЙ И НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛН

Выберем внутри анизотропного одноосного кристалла прямоугольную систему координат  $xuz$  с началом в точке  $O$  и рассмотрим несколько частных случаев распространения линейно поляризованной волны из точки  $O$  в различных направлениях. Ось  $z$  совпадает с главной оптической осью кристалла (ГО).

1 Выделим в кристалле плоскость главного сечения  $xoz$  и рассмотрим распространение волны из точки  $O$  в различных направлениях в этой плоскости (рис. 9, а). Пусть волна в каждом из лучей линейно поляризована, а ее электрический вектор  $\vec{E}_o$  колеблется перпендикулярно к главному сечению, т.е. вектор  $\vec{E}_o$  совпадает с осью  $y$ . Следовательно, рассматриваемая волна является обыкновенной волной, а ее вектор  $\vec{E}_o$  перпендикулярен главной оси (ГО) кристалла. Направления колебаний вектора  $\vec{E}_o$  отмечены на рис. 9, а точками. Обыкновенная волна, распространяющаяся из точки  $O$  в различных направлениях, имеет одну и ту же фазовую скорость

$$V_o = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}}, \quad (4.1)$$

и, следовательно, данная волна за единицу времени распространяется на расстояние, равное модулю скорости  $V_o$ . Геометрическое место точек, до которых обыкновенные волны, исходящие из точки  $O$ , будут доходить за единицу времени, представит собой окружность, изображенную на рис. 9, а сплошной линией.

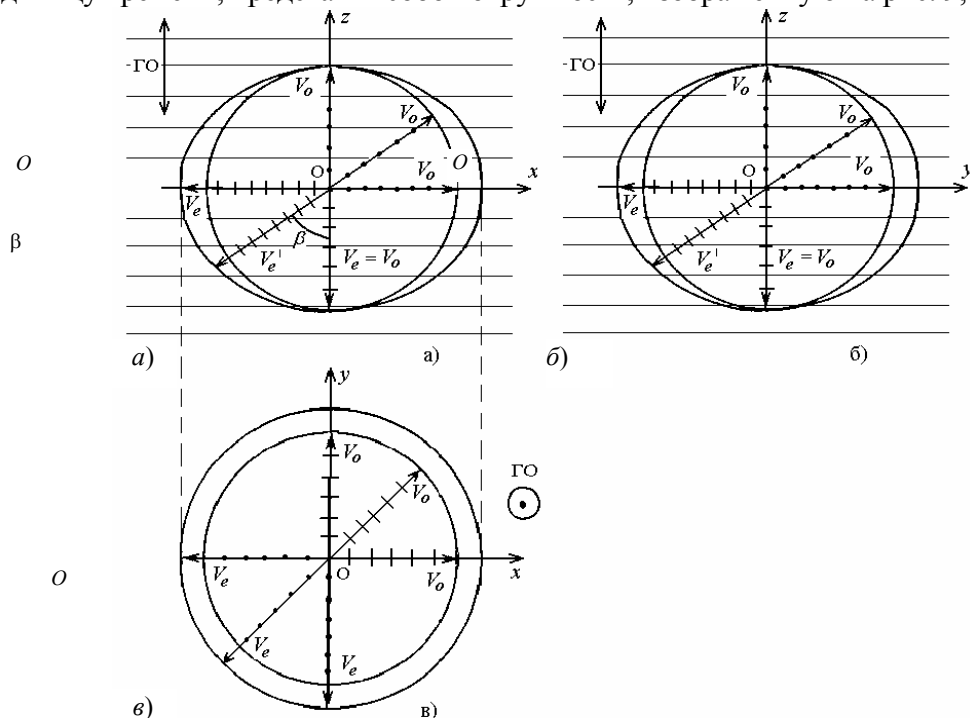


Рис. 9

Выделим в кристалле плоскость главного сечения  $yoz$  (рис. 9, б) и рассмотрим распространение из точки  $O$  обыкновенной линейно поляризованной волны  $\vec{E}_o$  в различных направлениях. При этом вектор  $\vec{E}_o$  волны перпендикулярен главной оси  $z$  и совпадает по направлению с осью  $x$ . Обыкновенная волна для всех направлений распространения в главной плоскости  $yoz$  имеет одну и ту же скорость

$$V_o = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}}. \quad (4.2)$$

Так как для одноосного кристалла  $\epsilon_x = \epsilon_y$ , то волновая поверхность для обыкновенной волны в плоскости  $yoz$  представляет собой окружность прежнего радиуса.

Выделим в анизотропном одноосном кристалле плоскость  $xoy$  (рис. 9, в), которая перпендикулярна главной оси ГО кристалла, и рассмотрим распространение обыкновенной волны из точки  $O$  в различных направлениях. Для любого направления распространения вектор  $\vec{E}_o$  обыкновенной волны всегда пер-

пендикулярен главной оси  $z$ , и, следовательно, фазовая скорость будет определяться формулами (4.1) и (4.2). Таким образом, волновая поверхность обыкновенной волны в плоскости  $xoy$  также представляет собой окружность прежнего радиуса.

Из рассмотрения этих частных случаев следует, что обыкновенная волна в одноосном кристалле имеет одинаковую фазовую скорость для всех направлений, а ее волновая поверхность представляет собой сферу.

2 Выделим в одноосном кристалле главную плоскость  $xoz$  (рис. 9, а) и рассмотрим распространение из точки  $O$  необыкновенной волны в различных направлениях.

Пусть необыкновенная волна распространяется вдоль оси  $x$ , а ее электрический вектор  $\vec{E}_e$  совпадает с главной осью  $z$  кристалла. Колебания вектора  $\vec{E}_e$  отмечены на рис. 9, а черточками. Рассматриваемая необыкновенная волна имеет фазовую скорость

$$V_e = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}}. \quad (4.3)$$

Так как для одноосного оптически отрицательного кристалла  $\varepsilon_z < \varepsilon_x = \varepsilon_y$ , то скорость необыкновенной волны больше скорости обыкновенной волны, т.е.  $V_e > V_o$ .

Пусть необыкновенная волна распространяется вдоль главной оси  $z$  (рис. 9, а), а ее электрический вектор  $\vec{E}_e$  совпадает с осью  $x$ . Рассматриваемая необыкновенная волна будет распространяться в кристалле с фазовой скоростью

$$V_e = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}}. \quad (4.4)$$

Так как вектор  $\vec{E}_e$  оказывается перпендикулярным главной оси  $z$ , то ее фазовая скорость будет равна согласно формуле (4.2) фазовой скорости обыкновенной волны, т.е.  $V_e = V_o$ . Другими словами, рассматриваемая необыкновенная волна становится обыкновенной.

Пусть необыкновенная волна распространяется из точки  $O$  под некоторым углом  $\beta$  к оптической оси  $z$  (рис. 9, а), а ее вектор  $\vec{E}_e$  составляет с главной осью  $z$  угол  $(90^\circ - \beta)$ . Данная необыкновенная волна будет распространяться в кристалле с фазовой скоростью

$$V'_e = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (4.5)$$

где относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  имеет значение, заключенное в пределах  $\varepsilon_z < \varepsilon < \varepsilon_x$ . Следовательно, фазовая скорость рассматриваемой необыкновенной волны имеет значение, заключенное в пределах  $V_o < V'_e < V_e$ .

Таким образом, необыкновенная волна  $\vec{E}_e$  в плоскости главного сечения кристалла  $xoz$  имеет для различных направлений распространения различную фазовую скорость, которая может изменяться от  $V_o$  до  $V_e$ . Геометрическое место точек, до которых необыкновенные волны, исходящие из точки  $O$ , будут доходить за единицу времени, представляет собой эллипс, изображенный на рис. 9, а сплошной линией.

Легко видеть, что распространение необыкновенной волны в главной плоскости  $yo z$  кристалла (рис. 9, б) будут иметь те же закономерности и волновая поверхность необыкновенной волны будет представлять собой эллипс тех же размеров, что и на рис. 9, а.

Выделим в одноосном кристалле плоскость  $xoy$ , которая перпендикулярна главной оси  $z$  (рис. 9, в). Рассмотрим распространение необыкновенной волны из точки  $O$  в различных направлениях. Для любого направления распространения необыкновенной волны в данной плоскости ее электрический вектор  $\vec{E}_e$  всегда параллелен главной оси  $z$ . Следовательно, фазовая скорость необыкновенной волны для всех направлений в плоскости  $xoy$  имеет одно и то же значение

$$V_c = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}}. \quad (4.6)$$

Волновая поверхность необыкновенной волны в плоскости  $xoy$ , перпендикулярной главной оси  $z$  кристалла, представляет собой окружность радиусом  $V_e > V_o$ . Таким образом, из рассмотренных частных случаев следует, что волновая поверхность необыкновенной волны в одноосном кристалле представляет собой эллипсоид вращения. Волновые поверхности обыкновенной и необыкновенной волн соприкасаются в точках на главной оси  $z$ .

Аналогично можно рассмотреть волновые поверхности обыкновенной и необыкновенной волн в одноосном оптически положительном кристалле, для которого  $\epsilon_z > \epsilon_x = \epsilon_y$ . В этом случае эллипсоид волновой поверхности необыкновенной волны будет расположен внутри сферической волновой поверхности обыкновенной волны. Волновые поверхности обыкновенной и необыкновенной волн будут соприкасаться в точках на главной оси  $z$ .

## 5 ИСКУССТВЕННЫЕ АНИЗОТРОПНЫЕ СРЕДЫ ДЛЯ САНТИМЕТРОВЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В качестве искусственных двоякопреломляющих сред для электромагнитных волн сантиметрового диапазона ( $\lambda = 3,2$  см) могут использоваться структуры трех основных типов: волноводные, металлоленточные и слоистые диэлектрические структуры.

1 Волноводные структуры представляют собой пачку прямоугольных волноводов сечением  $a_x \neq a_z$  (рис. 10), причем поперечные размеры волноводов удовлетворяют условию:  $\frac{\lambda}{2} < a < \lambda$ . За главную «кристаллографическую» ось  $z$  структуры условно принимается направление, перпендикулярное к широкой стенке волноводов ( $a_x > a_z$ ). Волна, электрический вектор  $\vec{E}$  которой составляет с главной осью  $z$  произвольный угол  $\alpha$ , распадается в волновой структуре на две волны: обыкновенную  $\vec{E}_o$  и необыкновенную  $\vec{E}_e$ , с взаимно перпендикулярными линиями поляризации.

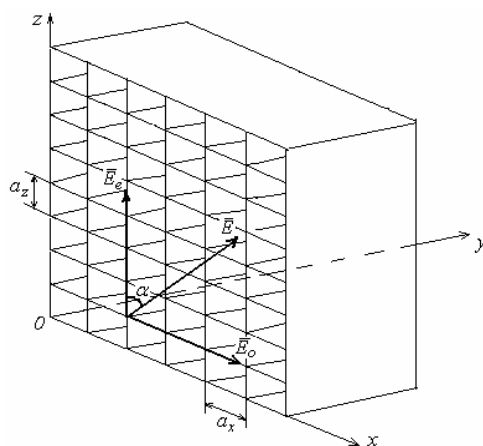


Рис. 10

Для обыкновенной волны, электрический вектор  $\vec{E}_o$  которой перпендикулярен главной оси  $z$  модели кристалла, эквивалентный показатель преломления равен

$$n_o = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a_z}\right)^2}. \quad (5.1)$$

Для необыкновенной волны, вектор  $\vec{E}_e$  которой параллелен главной оси  $z$ , эквивалентный показатель преломления равен

$$n_e = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a_x}\right)^2}. \quad (5.2)$$

Так например, при  $a_z = 18$  мм  $n_o = 0,46$ , при  $a_x = 23$  мм  $n_e = 0,76$ . Волноводные конструкции изготавливаются из тонкой белой жести и имеют достаточно большую «оптическую» анизотропию.

2 Если в волноводной структуре убрать вертикальные перегородки, то получится металлоленточная структура (рис. 11). Она состоит из металлических листов, расположенных на расстоянии  $a_z$  друг от друга:

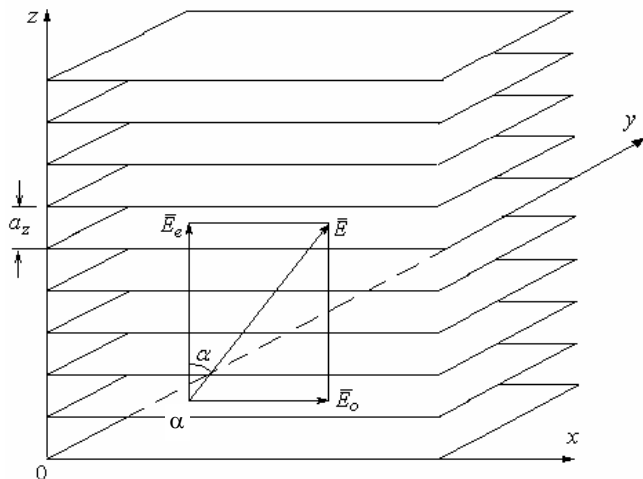


Рис. 11

$\frac{\lambda}{2} < a_z < \lambda$ . За главную «кристаллографическую» ось  $z$  условно принимается направление, перпендикулярное к металлическим лентам.

Электромагнитная волна, электрический вектор  $\vec{E}$  которой составляет с главной осью  $z$  металлоленточной структуры произвольный угол  $\alpha$ , в металлоленточной структуре распадается на две волны: обыкновенную  $\vec{E}_o$  и необыкновенную  $\vec{E}_e$  с ортогональными линиями поляризации. Для необыкновенной волны, электрический вектор  $\vec{E}_o$  которой перпендикулярен к главной оси  $z$  металлоленточной структуры, ее эквивалентный показатель преломления определяется по формуле (5.1). Например, при  $a_z = 20$  мм  $n_o = 0,6$ . Для необыкновенной волны, электрический вектор  $\vec{E}_e$  которой параллелен главной оси  $z$ , эквивалентный показатель  $n_e = 1$ , так как согласно формуле (5.2) можно считать, что  $a_x = \infty$ .

Достоинство волноводных и металлоленточных структур как двоякопреломляющих искусственных сред для сантиметровых электромагнитных волн состоит в достаточно большой анизотропии показателя преломления и малого поглощения волн. Недостатком этих сред является то, что электромагнитные волны могут распространяться в них только вдоль волноводов или вдоль металлических лент, т.е. перпендикулярно ее главной оси  $z$ .

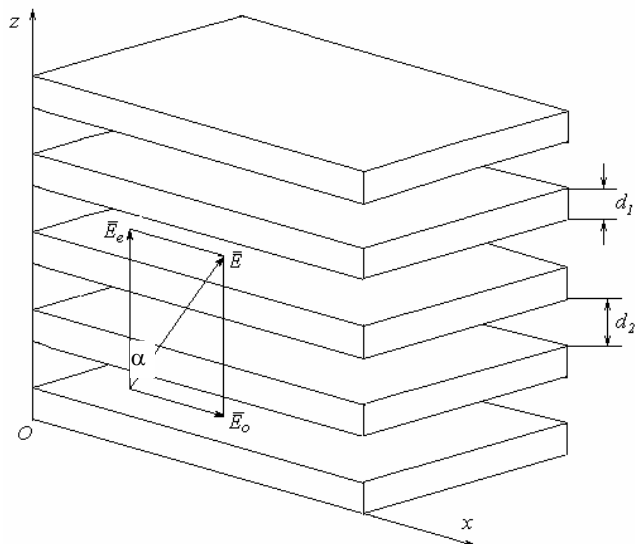


Рис. 12

3 Слоистая диэлектрическая структура, как искусственная анизотропная среда для сантиметровых электромагнитных волн ( $\lambda = 3,2$  см), представляет собой систему большого числа плоских изотропных тонких листов любого диэлектрика, разделенных, например, воздушными промежутками. Слоистую диэлектрическую структуру для радиоволн можно изготовить из тонких листов органического стекла толщиной  $d_1$ , расположенных параллельно друг другу так, что толщина воздушных зазоров между листами органического стекла равна  $d_2$  (рис. 12). При этом толщина  $d_1$  изотропных листов диэлектрика и величина  $d_2$  воздушных зазоров между ними должны быть значительно меньше длины волны используемого электромагнитного излучения. При  $\lambda = 3,2$  см величины  $d_1$  и  $d_2$  не должны превышать 5 мм. Слоистая диэлектрическая структура в диапазоне сверхвысоких частот обладает достаточной анизотропией для относительной диэлектрической проницаемости и показателя преломления. Для нее характерно так называемое «двойное лучепреломление формы», которое наблюдается в ряде оптических слоистых объектов: кристаллах табачной мозаики, жидкостях со взвешенными в них упорядоченными частицами и других. Естественной слоистой диэлектрической структурой для сантиметровых радиоволн является древесина с годовыми кольцами, которую впервые использовал Дж. Ч. Бозе для исследования интерференционных коноскопических фигур. Однако естественный изгиб годовых колец в древесине часто является нежелательным и к тому же анизотропия двоякопреломляющих свойств древесины достаточно мала.

Анизотропия диэлектрических свойств слоистой структуры возникает из-за различия граничных условий для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  электрического поля при переходе поверхностей между листами диэлектрика и воздушными зазорами. Примем за главную «оптическую» ось слоистой структуры направление, перпендикулярное листам органического стекла, т.е. направление, совпадающее с осью  $z$  (рис. 12). Электромагнитная волна, электрический вектор  $\vec{E}$  которой составляет с главной осью  $z$  произвольный угол  $\alpha$ , распадается в слоистой диэлектрической структуре на две волны: обыкновенную волну  $\vec{E}_o$  и необыкновенную  $\vec{E}_e$  с взаимно перпендикулярными линиями поляризации.

1 Предположим, что в слоистой диэлектрической структуре вдоль ее листов распространяется плоская электромагнитная волна, электрический вектор  $\vec{E}_o$  которой параллелен оси  $y$  (рис. 12). Так как в данном случае электрический вектор  $\vec{E}_o$  этой волны перпендикулярен к главной оси  $z$  слоистой диэлектрической структуре, то волна, распространяющаяся в ней, является обыкновенной волной. Если размеры листов оргстекла достаточно велики, а величины  $d_1$  и  $d_2$  малы по сравнению с  $\lambda$ , то электрическое поле в листах и между ними можно считать однородным. Учитывая, что тангенциальная составляющая электрического вектора  $\vec{E}_o$  должна быть непрерывной на границах раздела сред, значение вектора  $\vec{E}$  внутри листов и между ними должно быть одинаково. Следовательно,  $\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_o$  и  $\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_o$ , где  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  — диэлектрические проницаемости, соответственно, органического стекла и воздуха. Среднее значение вектора электрического смещения, полученное усреднением по всему объему структуры, равно

$$\vec{D} = \frac{d_1 \vec{D}_1 + d_2 \vec{D}_2}{d_1 + d_2} = \frac{d_1 \epsilon_1 + d_2 \epsilon_2}{d_1 + d_2} \vec{E}_o. \quad (5.3)$$

Следовательно, для обыкновенной волны, распространяющейся перпендикулярно главной оси структуры, ее эффективная диэлектрическая проницаемость равна

$$\varepsilon_x = \frac{\bar{D}}{E} = \frac{d_1\varepsilon_1 + d_2\varepsilon_2}{d_1 + d_2}. \quad (5.4)$$

Если толщина листов органичного стекла равна величине воздушных зазоров ( $d_1 = d_2$ ), то согласно (5.4) имеем

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}. \quad (5.5)$$

Так как электромагнитные свойства слоистой структуры одинаковы вдоль осей  $x$  и  $y$ , то

$$\varepsilon_y = \varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}. \quad (5.6)$$

Для обыкновенной волны, вектор  $\bar{E}_o$  которой всегда перпендикулярен к главной оси структуры независимо от направления ее распространения, должны выполняться указанные граничные условия (непрерывность тангенциальной составляющей вектора  $\bar{E}$ ), а, следовательно, для обыкновенной волны эквивалентный показатель преломления слоистой структуры всегда равен

$$n_o = \sqrt{\varepsilon_x \mu} = \sqrt{\frac{d_1\varepsilon_1 + d_2\varepsilon_2}{d_1 + d_2}}, \quad (5.7)$$

при  $\mu = 1$  или при  $d_1 = d_2$  имеем

$$n_o = \sqrt{\varepsilon_x} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}}. \quad (5.8)$$

2 Предположим, что вдоль листов слоистой структуры распространяется необыкновенная волна, электрический вектор  $\bar{E}_e$  которой параллелен главной оси  $z$  структуры (рис. 12). Учитывая, что нормальная составляющая вектора электрического смещения  $\bar{D}$  должна оставаться непрерывной при пересечении границ раздела сред, вектор смещения  $\bar{D}$  должен быть одинаковым как внутри лент, так и в промежутках между ними, т.е.  $\bar{E}_1 = \frac{\bar{D}}{\varepsilon_1}$ ;  $\bar{E}_2 = \frac{\bar{D}}{\varepsilon_2}$ . Среднее значение напряженности поля, полученное усреднением по всему объему слоистой структуры, равно

$$\bar{E}_e = \frac{d_1\bar{E}_1 + d_2\bar{E}_2}{d_1 + d_2} = \frac{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}{d_1 + d_2} \bar{D}. \quad (5.9)$$

В данном случае эффективная диэлектрическая проницаемость слоистой структуры равна

$$\varepsilon_z = \frac{\bar{D}}{E} = \frac{d_1 + d_2}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(d_1 + d_2)}{d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1}. \quad (5.10)$$

При  $d_1 = d_2$  получим

$$\varepsilon_z = \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (5.11)$$

Таким образом, для необыкновенной волны, которая распространяется перпендикулярно к главной оси слоистой структуры, эквивалентный показатель преломления равен



$$n_e = \sqrt{\varepsilon_z \mu} = \sqrt{\varepsilon_e \mu} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (d_1 + d_2)}{d_1 \varepsilon_2 + d_2 \varepsilon_1}} \quad (5.12)$$

при  $\mu = 1$ . В случае, если  $d_1 = d_2$ , имеем

$$n_e = \sqrt{\frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}. \quad (5.13)$$

Пусть необыкновенная волна  $\vec{E}_e$  распространяется вдоль главной оси  $z$  слоистой структуры, а ее вектор  $\vec{E}_e$  совпадает с осью  $x$ . Так как вектор  $\vec{E}_e$  данной волны оказывается перпендикулярным к главной оси  $z$ , то она становится обыкновенной и ее показатель преломления будет равен

$$n_e = n_o = \sqrt{\varepsilon_x} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}}. \quad (5.14)$$

Пусть необыкновенная волна распространяется под углом  $\beta$  к главной оси  $z$ , а ее электромагнитный вектор  $\vec{E}_e$  составляет с главной осью  $z$  угол  $(90^\circ - \beta)$ . Диэлектрическая проницаемость слоистой структуры для этой волны будет иметь значение  $\varepsilon'$ , заключенное в пределах  $\varepsilon_z < \varepsilon' < \varepsilon_x$ , а показатель преломления будет заключен в пределах  $n_e < n'_e < n_o$ .

Учитывая, что относительная диэлектрическая проницаемость органического стекла в диапазоне радиоволн равна  $\varepsilon_1 = 2,56$ , а проницаемость воздуха  $\varepsilon_2 = 1$ , согласно формулам (5.6) и (5.11) можно найти главные эффективные проницаемости слоистой диэлектрической структуры:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 1,78; \quad \varepsilon_z = 1,44.$$

Таким образом, слоистая диэлектрическая структура является аналогом одноосного оптически отрицательного двоякопреломляющего кристалла, для которого выполняется соотношение  $\varepsilon_x = \varepsilon_y > \varepsilon_z$ . Поверхность эллипсоида вращения для диэлектрической слоистой структуры можно теоретически построить на основе уравнения (2.5). Внешний вид эллипсоида аналогичен рис. 5. Согласно формуле (5.8) слоистая диэлектрическая структура для обыкновенной волны имеет показатель преломления  $n_o = \sqrt{\varepsilon_x} = 1,33$ . Показатель преломления необыкновенной волны имеет значение от  $n_e = \sqrt{\varepsilon_z} = 1,20$  до  $n_o = 1,33$  в зависимости от направления распространения.

## **6 ИСКУССТВЕННЫЕ ДВОЯКОПРЕЛОМЛЯЮЩИЕ ПРИЗМЫ ДЛЯ САНТИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН**

Для сантиметровых электромагнитных волн двоякопреломляющие призмы можно изготовить на базе металлоленточных, волноводных или слоистых диэлектрических структур. Металлоленточная анизотропная

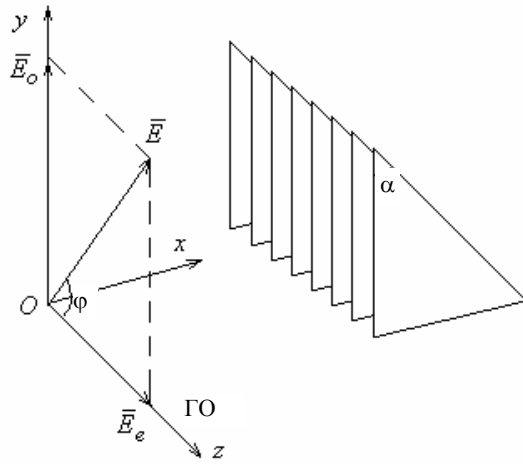


Рис. 13

призма (рис. 13) состоит из тонких металлических листов в виде прямоугольных треугольников, установленных с помощью шпилек параллельно друг другу на расстоянии  $a = 20$  мм друг от друга. Преломляющий угол при вершине призмы равен  $\alpha = 45^\circ$ . За главную ось (ГО)  $z$  металлоленточной призмы принимается направление, перпендикулярное к ее металлическим листам. При облучении призмы линейно поляризованной волной, электрический вектор  $\bar{E}$  которой составляет с главной осью  $z$  угол  $\varphi = 45^\circ$ , в ней распространяются две волны: обыкновенная  $\bar{E}_o$  и необыкновенная  $\bar{E}_e$  с взаимно перпендикулярными линиями поляризации.

Для обыкновенной волны эквивалентный показатель преломления равен:  $n_o = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$ . При  $a = 20$  мм и  $\lambda = 32$  мм имеем  $n_o = 0,6$ . Для необыкновенной волны эквивалентный показатель преломления призмы равен  $n_e = 1$ . Ход лучей в металлоленточной двоякопреломляющей призме показан на рис. 14. Угол преломления  $\beta_o$  для обыкновенной волны может быть рассчитан на основе закона преломления:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_o} = \frac{1}{n_o}$$

При  $\alpha = 45^\circ$  получим  $\beta_o = 22^\circ$ . Другими словами, металлоленточная призма, как менее оптически плотная среда, отклоняет обыкновенную волну от первоначального

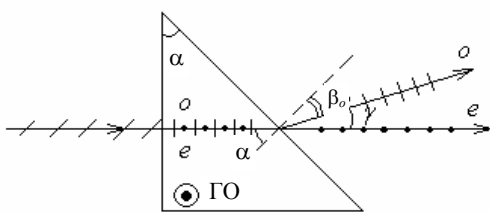
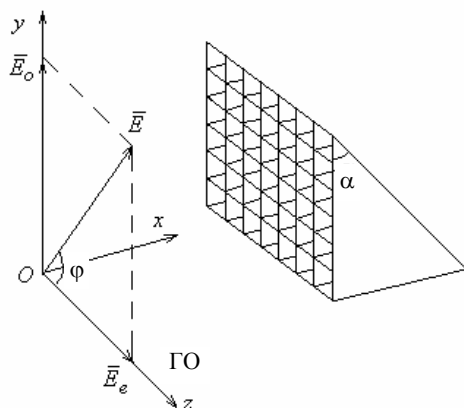


Рис. 14

направления распространения на угол  $\gamma = 45^\circ - \beta_o = 23^\circ$ . Так как для необыкновенной волны данная призма имеет показатель преломления  $n_e = 1$ , то указанная волна не испытывает преломления в металлоленточной призме.

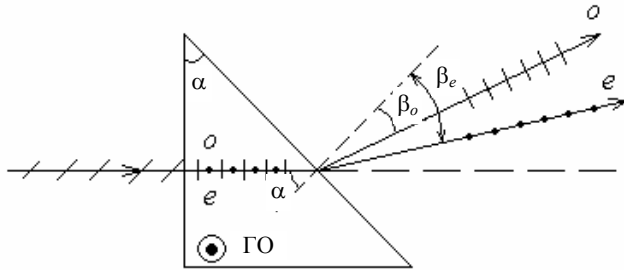


Волноводная двоякопреломляющая призма (рис. 15) изготовлена из тонкой белой жести и состоит из большого числа спаянных вместе прямоугольных волноводов различной длины. Ка-

**Рис. 15**

вершине призмы  $\alpha = 45^\circ$ . Для обыкновенной и необыкновенной волн призма имеет, соответственно, показатели преломления:  $n_o = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a_z}\right)^2} = 0,6$  и  $n_e = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a_y}\right)^2} = 0,80$ . Другими словами, анизотропия обусловлена тем, что  $a_z \neq a_y$ . Ход лучей в волноводной призме показан на рис. 16.

Обыкновенная и необыкновенная волны испытывают на гипотенузной грани призмы преломления в соответствии с законами:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_o} = \frac{1}{n_o}$ ;  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_e} = \frac{1}{n_e}$ , где  $\beta_o$  и  $\beta_e$  – углы преломления для обыкновенной и необыкновенной волн. Расчеты дают:  $\beta_o = 22^\circ$ ;  $\beta_e = 29^\circ$ .



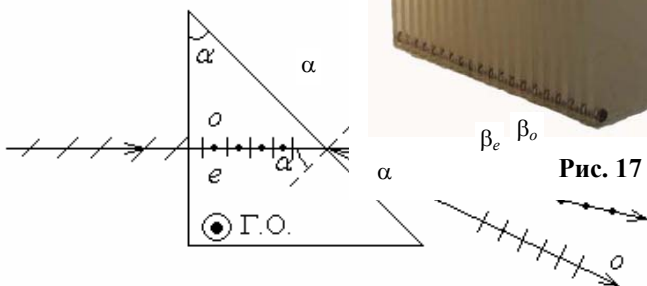
**Рис. 16**

Описанные призмы не позволяют исследовать двойное преломление в случае, когда волна распространяется вдоль главной оси. Рассмотрим различные случаи двойного лучепреломления сантиметровых электромагнитных волн в двоякопреломляющих призмах, выполненных на базе слоистых диэлектрических структур. На рис. 17 показана анизотропная прямоугольная призма, состоящая из тонких листов органического стекла толщиной 4 мм, установленных параллельно друг другу на расстоянии также 4 мм. Листы органического стекла скрепляются металлическими шпильками с соответствующими прокладками. Преломляющий угол призмы при ее вершине  $\alpha = 45^\circ$ . За главную ось принимается направление, перпендикулярное к листам оргстекла. Для обыкновенной и необыкновенной волн призма имеет, соответственно, показатели преломления:  $n_o = 1,33$  и  $n_e = 1,20$ .

Для проведения эксперимента электромагнитной грани так, чтобы волны оргстекла, т.е. этом электрический волны должен  $\varphi = 45^\circ$ . При таком поляризованная волна в обыкновенную и



эксперимента облучают призму волной перпендикулярно к ее катетной распространялись вдоль листов перпендикулярно к ее главной оси. При вектор  $\vec{E}$  линейно поляризованной составлять с главной осью призмы угол облучения призмы линейно ней распадается на две волны:



**Рис. 18**

необыкновенную с ортогональными линиями поляризации, которые распространяются по одному направлению (рис. 18).

Обыкновенная волна, вектор  $\vec{E}_o$  которой перпендикулярен к главной оси призмы, преломляется на гипотенузной грани призмы в соответствии с законом:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_o} = \frac{1}{n_o}$ . При  $\alpha = 45^\circ$  и  $n_o = 1,33$  имеем значение угла преломления  $\beta_o = 70^\circ$ . Другими словами, обыкновенная волна отклоняется к основанию призмы от первоначального направления распространения на угол  $\gamma_o = \beta_o - \alpha = 24^\circ$ . Необыкновенная волна преломляется на гипотенузной грани призмы в соответствии с законом  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_e} = \frac{1}{n_e}$ . При  $\alpha = 45^\circ$  и  $n_e = 1,20$  получим  $\beta_e = 58^\circ$ , т.е. данная волна отклоняется призмой от первоначального направления распространения на угол  $\gamma_e = \beta_e - \alpha = 13^\circ$ .



Рис. 19

На рис. 19 показана двоякопреломляющая призма, выполненная из тонких листов органического стекла с воздушными промежутками между ними. Главная ось этой призмы располагается перпендикулярно к листам оргстекла и перпендикулярно к ее основанию. Этим данная призма отличается от призмы, изображенной на рис. 17. Пока-

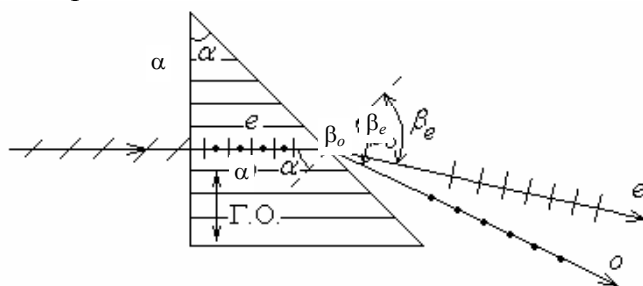


Рис. 20

затели преломления для имеют прежние значения:

(рис. 19) показан на Углы преломления волн имеют прежние зна-

Описанная показать отсутствие когда пространяется вдоль ее 19) достаточно устано-



обыкновенной и необыкновенной волн  $n_o = 1,33$  и  $n_e = 1,20$ . Ход лучей в призме рис. 20.

для обыкновенной и необыкновенной чения:  $\beta_o = 70^\circ$ ;  $\beta_e = 58^\circ$ .

анизотропная призма рис. 19 позволяет двойного лучепреломления в случае, электромагнитная волна рас- главной оси. Для этого призму (рис. вить, как показано на рис. 21,

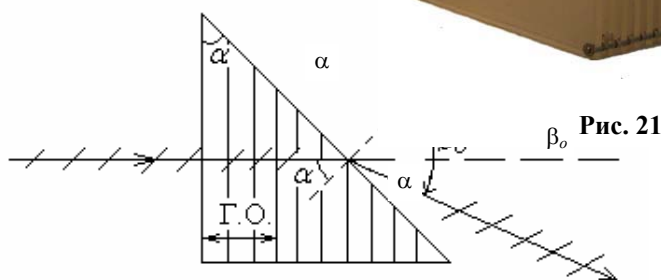


Рис. 21

Рис. 22

и облучить ее волной перпендикулярно вертикальной катетной грани. В этом случае линейно поляризованная волна при любой ориентации ее электрического вектора  $\vec{E}$  является обыкновенной волной (рис. 22) и испытывает преломление по закону:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_o$ .

Таким образом, опытным путем доказано, что двойное лучепреломление не наблюдается, если электромагнитная волна распространяется вдоль главной оси анизотропного кристалла.

## 7 ПОСТРОЕНИЕ ГЮЙГЕНСА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СЛУЧАЕВ ДВОЙНОГО ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛА

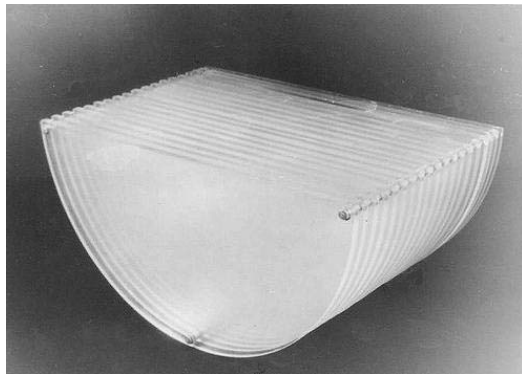
Для наглядного объяснения двойного лучепреломления и построения обоих преломленных лучей в одноосном кристалле можно воспользоваться графическим методом, предложенным Х. Гюйгенсом и являющимся обобщением принципа Гюйгенса на анизотропные среды. Для более глубокого понимания построения Гюйгенса рассмотрим четыре основных случая падения неполяризованной волны на поверхность анизотропного двоякопреломляющего кристалла, в качестве которого будем использовать модель двоякопреломляющего кристалла в виде слоистой диэлектрической структуры. При этом полученные результаты могут быть проверены на основе наглядного эксперимента в сантиметровом диапазоне радиоволн.

**Волновые поверхности в слоистой диэлектрической структуре аналогичны волновым поверхностям для отрицательных двоякопреломляющих одноосных кристаллов, которым, например, является кристалл исландского шпата. Это позволяет широко использовать слоистые диэлектрические структуры для моделирования кристаллооптических явлений в сантиметровом диапазоне электромагнитных волн.**

Рассмотрим основные случаи падения плоской электромагнитной волны на поверхность модели двоякопреломляющего кристалла, выполненного в виде слоистой диэлектрической структуры.

**1 Главная ось кристалла параллельна преломляющей грани и перпендикулярна к плоскости падения волн.** Модель двоякопреломляющего кристалла для сантиметровых электромагнитных волн выполнена в форме полуцилиндра радиусом 15 см (рис. 23), что позволяет наблюдать двойное лучепреломление только на одной диаметральной преломляющей грани.

Модель  
числа листов  
= 4 мм,  
другу.  
кристалла лежат в  
данном случае  
Листы  
между собой  
шпильками с  
имеются воздушные  
Главная  
кристалла  
листам



кристалла состоит из большого органического стекла толщиной  $d_1$  расположенных параллельно друг Листы диэлектрика модели плоскости падения волн, которые в совпадают с плоскостью рис. 23. органического стекла соединены металлическими тонкими прокладками так, что между ними зазоры толщиной  $d_2 = d_1 = 4$  мм. «оптическая» ось модели (направление, перпендикулярное к органического стекла)

расположена параллельно диаметральной преломляющей грани и перпендикулярно к плоскости падения волн.

Рассмотрим наклонное падение плоской электромагнитной волны на преломляющую диаметральною грань модели кристалла. Допустим, что электрический вектор  $\vec{E}$  линейно поляризованной волны, падающей на «кристалл», составляет с плоскостью падения угол  $45^\circ$ . Такое облучение «кристалла» эквивалентно использованию неполяризованного излучения. Пусть угол падения линейно поляризованной волны на преломляющую грань модели кристалла равен  $\alpha$ , а плоский фронт в начальный момент времени изображается линией  $AB$  (рис. 24). За время  $\tau$ , в течение которого правый край фронта  $B$  распространяется в первой среде (воздух) до точки  $C$ , в модели кристалла согласно принципа Гюйгенса возникнут около точки  $A$  две волны: обыкновенная и необыкновенная, волновые поверхности которых имеют в плоскости чертежа форму окружности различного радиуса, так как электрический вектор  $\vec{E}_o$  обыкновенной волны всегда перпендикулярен главной оси кристалла, а электрический вектор  $\vec{E}_e$  необыкновенной волны оказывается параллельным к главной оси модели кристалла. Линии  $CM$  и  $CN$ , проведенные из точки  $C$  и являющиеся касательными к окружностям, определяют положение волновых фронтов для преломленных обыкновенной и необыкновенной волн. Из треугольников  $ABC$  и  $ACM$  имеем



исследовать двойное лучепреломление только на одной диаметральной преломляющей грани.

Листы органического стекла в модели кристалла расположены параллельно преломляющей грани так, что главная ось модели кристалла (направление перпендикулярное листам стекла) лежит в плоскости падения.

На рис. 27 показано построение на основе принципа Гюйгенса волновых фронтов для обыкновенной и необыкновенной волны в модели кристалла (рис. 26) при наклонном падении плоского фронта  $AB$  линейно поляризованной волны, электрический вектор  $\vec{E}$  которой составляет с плоскостью падения угол  $45^\circ$ . За время  $\tau$ , в течение которого правый край фронта  $B$  распространяется в воздухе до точки  $C$ , в модели кристалла возникают около точки  $A$  две волны: обыкновенная, волновая поверхность которой в плоскости падения изображается окружностью, и необыкновенная волна, волновая поверхность которой имеет форму эллипса, малая полуось которого параллельна оси ГО модели кристалла. Линии  $CM$  и  $CN$ , являющиеся касательными к окружности и эллипсу, дают положение волновых фронтов для преломленных волн, соответственно, обыкновенной и необыкновенной. При этом угол падения  $\beta_o$  для обыкновенной волны может быть рассчитан по формуле (7.1), так как для нее показатель преломления  $n_o$  имеет постоянное значение. Для необыкновенной волны, электрический вектор  $\vec{E}_e$  которой составляет с главной осью ГО модели произвольный угол, показатель преломления  $n'_e$  имеет значение, заключенное в пределах от  $n_e = 1,20$  до  $n_o = 1,33$ . Так как показатель преломления  $n'_e$  для необыкновенной волны оказывается меньше показателя преломления для обыкновенной волны  $n_o$ , то угол преломления  $\beta_e$  для необыкновенной волны будет больше угла преломления  $\beta_o$  для обыкновенной волны, что подтверждается опытами в сантиметровом диапазоне электромагнитных волн.

На рис. 28 показано построение волновых фронтов для обыкновенной и необыкновенной волн при нормальном падении плоской волны на модель двоякопреломляющего кристалла (рис. 26). Электрический вектор  $\vec{E}$  линейно поляризованной волны, падающей на грань кристалла, составляет с плоскостью падения угол  $45^\circ$ . Из построения волновых поверхностей видно, что обыкновенная и необыкновенная волны распространяются с одинаковыми фазовыми скоростями, так как направление их распространения совпадает с главной осью модели кристалла.

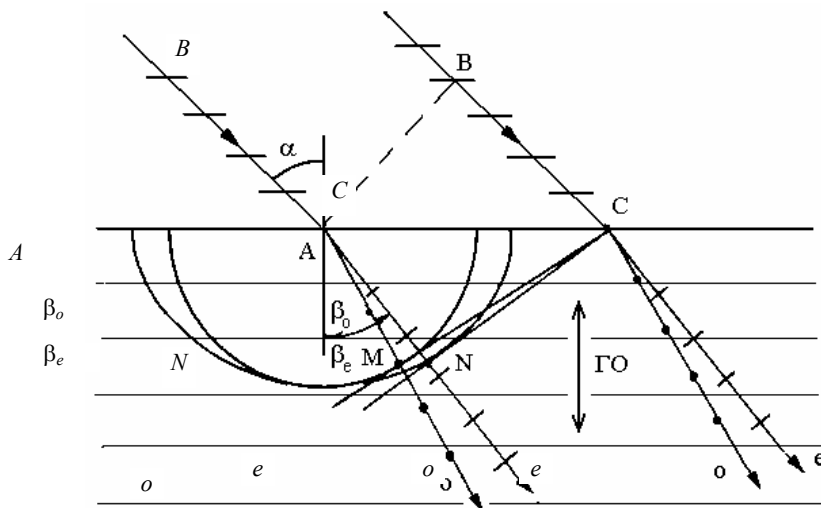


Рис. 27

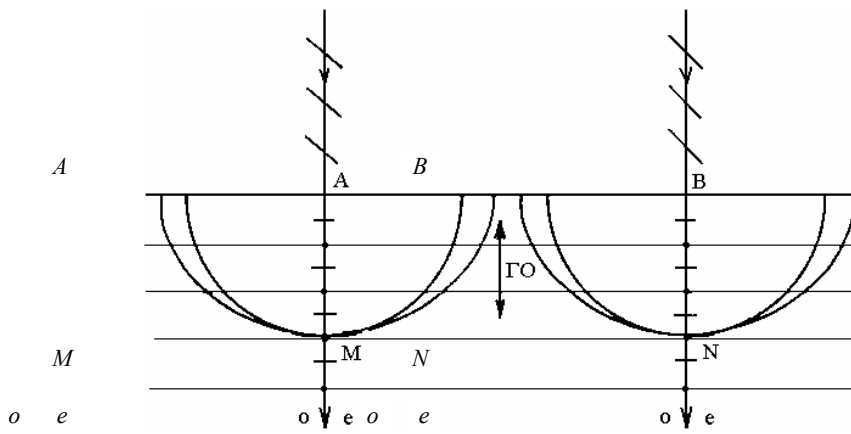


Рис. 28

3 Главная ось кристалла параллельна преломляющей грани и расположена в плоскости падения. Модель кристалла для исследования двойного лучепреломления в сантиметровом диапазоне электромагнитных волн при указанных условиях ориентации главной оси кристалла показана на рис. 29.

На рис. 30 показано построение волновых фронтов для обыкновенной и необыкновенной волны в рассматриваемой модели кристалла при наклонном падении на нее линейно поляризованной волны, электрический вектор  $\vec{E}$  которой составляет с плоскостью падения угол  $45^\circ$ . Из построения следует, что угол преломления  $\beta_o$  обыкновенной волны меньше угла преломления  $\beta_e$  необыкновенной волны, что подтверждается соответствующим экспериментом.

На рис. 31 показано построение волновых фронтов для обыкновенной и необыкновенной волны при нормальном падении линейно поляризованных волн на преломляющую грань модели кристалла (рис. 29). Из построения следует, что обыкновенная и необыкновенная волны распространяются в модели кристалла в прежнем направлении, но имеют различные фазовые скорости.

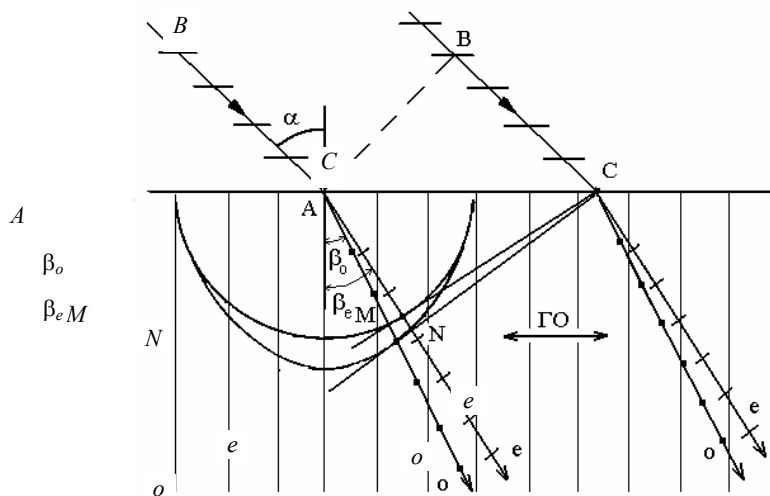


Рис. 30



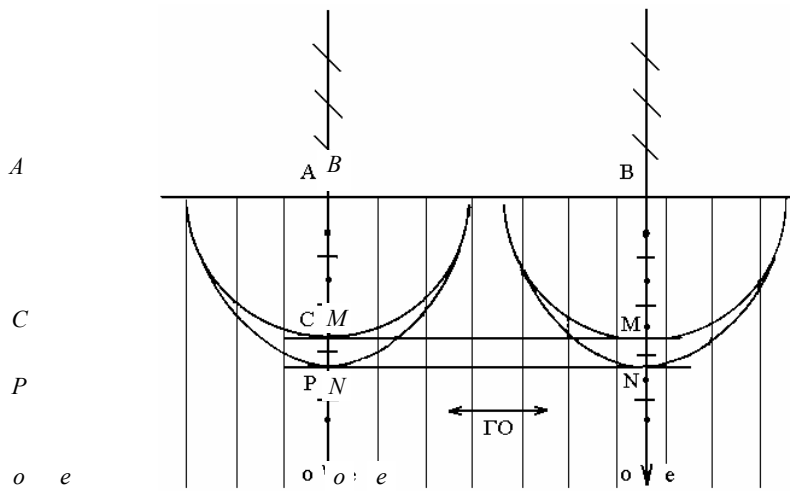


Рис. 31

4 Главная ось кристалла лежит в плоскости падения под углом  $45^\circ$  к преломляющей грани. Модель кристалла для экспериментального исследования двойного лучепреломления в сантиметровом диапазоне электромагнитных волн при указанных условиях ориентации ее главной оси показана на рис. 32.

Листы органического стекла модели кристалла составляют с диаметральной гранью угол  $45^\circ$ . Следовательно, главная ось модели кристалла (направление перпендикулярное листам стекла) лежит в плоскости падения волн и составляет с преломляющей гранью угол  $45^\circ$ .

На рис. 33 показано построение волновых фронтов для обыкновенной и необыкновенной волны в модели кристалла при наклонном падении плоского фронта  $AB$  линейно поляризованной волны, электрический вектор  $\vec{E}$  которой составляет с плоскостью падения угол  $45^\circ$ . За время  $\tau$ , в течение которого правый край фронта  $B$  распространяется в воздухе до точки  $C$ , в модели кристалла около точки  $A$  возникают две волны: обыкновенная, волновая поверхность которой в плоскости падения имеет форму окружности, и необыкновенная волна, волновая поверхность которой изображается эллипсом, малая полуось которого параллельна главной оси ГО модели кристалла. Линии  $CM$  и  $CN$ , являющиеся касательными к волновым поверхностям, определяют поло-

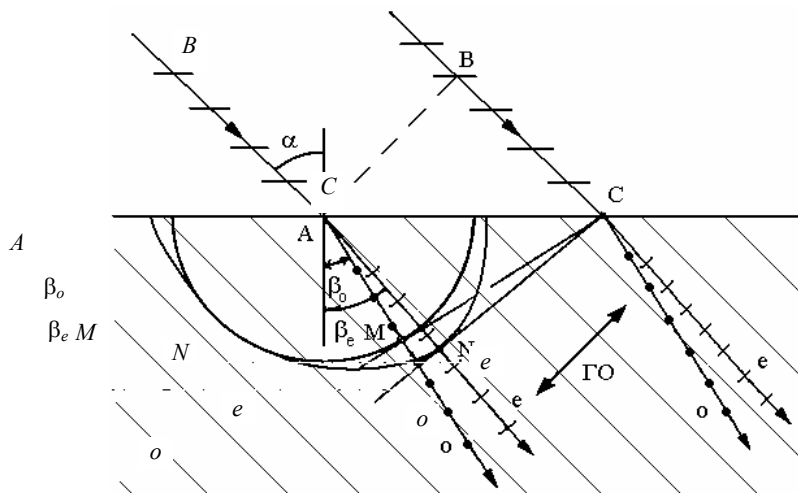


Рис. 33

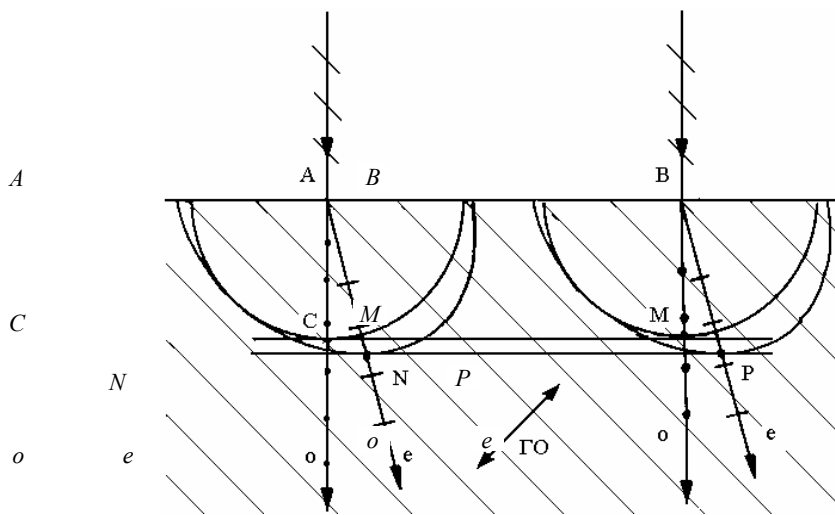


Рис. 34

жение преломленных волновых фронтов для обыкновенной и необыкновенной волны. Из построения видно, что угол преломления  $\beta_e$  необыкновенной волны оказывается несколько больше угла преломления  $\beta_o$  обыкновенной волны, что подтверждается соответствующим экспериментом.

На рис. 34 показано построение волновых фронтов для обыкновенной и необыкновенной волны при нормальном падении линейно поляризованной волны на преломляющую грань модели кристалла (рис. 32).

Согласно принципу Гюйгенса около точек  $A$  и  $B$  возникнут сферические волновые поверхности одинакового радиуса, в результате чего волновой фронт  $CM$  обыкновенной волны в модели кристалла будет параллелен падающему фронту  $AB$  и обыкновенные волны пересекут грань модели кристалла, не преломляясь. Волновые поверхности вторичных необыкновенных волн, исходящих из точек  $A$  и  $B$ , будут иметь в плоскости рис. 34 вид эллипсов, малые полуоси которых параллельны главной оси ГО «кристалла». Волновой фронт  $NP$  необыкновенной волны, распространяющейся в модели кристалла, будет также параллелен падающему фронту  $AB$  плоской волны, но точки  $N$  и  $P$  его касания с эллипсами – сдвинуты относительно точек  $C$  и  $M$ . Это приводит к отклонению необыкновенных волн от первоначального направления распространения.

Для того, чтобы уверенно показать факт отклонения необыкновенных волн при нормальном падении сантиметровых электромагнитных волн на грань кристалла, модель кристалла целесообразно изготовить в форме параллелепипеда достаточно больших размеров  $20 \times 20 \times 30$  см (рис. 35).

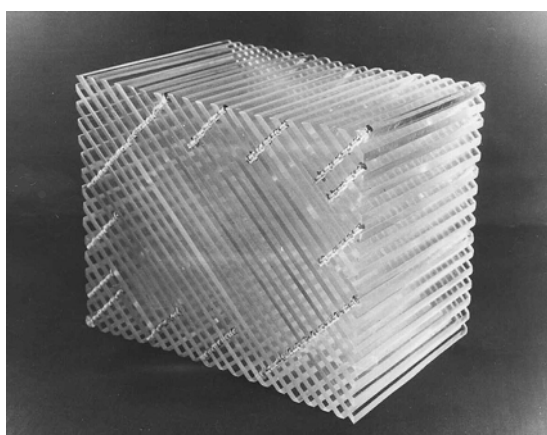


Рис. 35

При этом листы органического стекла должны составлять с гранью, на которую нормально падают волны, угол  $45^\circ$ .

## 8 ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ДВОЙКОПРЕЛОМЛЯЮЩИЕ ПРИЗМЫ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

На основе искусственных сред имеется возможность наглядно моделировать физические процессы, происходящие в поляризационных двойкопреломляющих призмах, применяемых в оптике для превращения естественного света в линейно поляризованный. Модель поляризационной электромагнитных волн основе слоистых обладают анизотропией прямоугольных призм угол при вершине, равный анизотропных призм

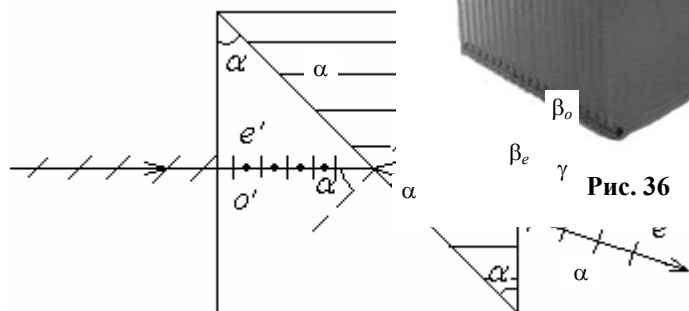


Рис. 36

света в линейно поляризованный. Модель поляризационной электромагнитных волн основе слоистых обладают анизотропией прямоугольных призм угол при вершине, равный анизотропных призм

кулярно. Под главной осью диэлектрической структуры понимается направление, перпендикулярное к листам органического стекла. Листы органического стекла призмы имеют толщину  $d_1 = 4$  мм. Ширина воздушных промежутков между листами оргстекла равна  $d_1 = d_2 = 4$  мм. Согласно формулам (5.8) и (5.13) показатели преломления призм для необыкновенной и обыкновенной волн равны  $n_o = 1,33$  и  $n_e = 1,20$ .

Рассмотрим физические процессы, происходящие в модели призмы Волластона. Облучим поляризатор Волластона линейно поляризованной волной, электрический вектор  $\vec{E}$  которой составляет с главными осями двойкопреломляющих призм угол  $45^\circ$  (рис. 37). Такое облучение в определенной мере эквивалентно использованию неполяризованного излучения в соответствующем оптическом эксперименте. Волна, падающая на первую анизотропную призму поляризатора Волластона, распадается в ней на две линейно поляризованные волны (обыкновенную  $o'$  и необыкновенную  $e'$ ) с ортогональными линиями поляризации. Эти волны распространяются в первой призме в одном направлении и падают на границу раздела двух двойкопреломляющих призм под углом  $\alpha = 45^\circ$ . Так как главные оси призм поляризатора Волластона взаимно перпендикулярны, то обыкновенная  $o'$  (необыкновенная  $e'$ ) волна, распространяющаяся в первой призме, становится необыкновенной  $e$  (обыкновенной  $o$ ) во второй призме.

Необыкновенная волна  $e'$ , распространяющаяся в первой призме, на границе раздела сред модели поляризатора Волластона испытывает преломление в соответствии с законом Снеллиуса

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_o} = \frac{n_o}{n_e}, \quad (8.1)$$

где  $\alpha = 45^\circ$  – угол падения;  $\beta_o$  – угол преломления для обыкновенной волны  $o$ , распространяющейся на второй призме. При  $n_o = 1,33$  и  $n_e = 1,20$  получаем  $\beta_o \approx 39,5^\circ$  (рис. 37).

Обыкновенная  $o'$  волна, распространяющаяся в первой призме, на границе раздела двух двойкопреломляющих призм испытывает преломление в соответствии с законом

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_e} = \frac{n_e}{n_o}. \quad (8.2)$$

Легко подсчитать, что угол преломления для необыкновенной волны, распространяющейся во второй призме, равен  $\beta_e \approx 51,5^\circ$ . Таким образом, из модели поляризатора Волластона выходят две линейно поляризованные волны, которые в опыте улавливаются соответствующим перемещением приемной рупорной антенны, соединенной с осциллографом. Угол расхождения двух линейно поляризованных волн примерно равен  $\gamma = \beta_e - \beta_o \approx 12^\circ$ . Здесь мы не учитываем дополнительное преломление волн при выходе из второй анизотропной призмы поляризатора Волластона. Вращением приемной рупорной антенны, как анализатора, вокруг ее продольной оси убеждаются, что каждая из волн на выходе модели поляризатора Волластона линейно поляризована, причем линии поляризации в них ортогональны и ориентированы по направлению главных осей анизотропных призм.

На базе слоистых диэлектрических структур можно изготовить наглядную действующую модель поляризационной призмы Глана с воздушным зазором. Модель данного симметричного поляризатора состоит из двух прямоугольных призм с вершинами, равными при вершинах, равному стеклу в обеих призмах «оптические» оси так имеет воздушный зазор.



призмы Глана с воздушным зазором. поляризатора (рис. 38) для сан-электромагнитных волн состоит из двоякопреломляющих призм с углом  $\alpha = 52^\circ$ . Так как листы органического параллельны, то их главные же параллельны. Между призмами промежуток, толщина  $L$

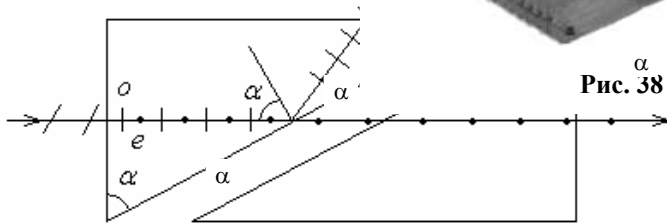


Рис. 39

которого должна быть не меньше длины волны используемого электромагнитного излучения.

Рассмотрим принцип действия данного поляризатора. Облучим модель поляризационной призмы Глана электромагнитной волной, электрический вектор  $\vec{E}$  которой составляет с главными осями анизотропных призм угол  $45^\circ$  (рис. 39). Такое облучение в определенной мере эквивалентно использованию неполяризованного излучения в соответствующем оптическом эксперименте. В первой двоякопреломляющей призме волна распадается на две линейно поляризованные волны (обыкновенную  $o$  и необыкновенную  $e$ ) с ортогональными линиями поляризации. Обе волны распространяются в одном направлении и падают на границу раздела между призмой и воздушными промежутками под углом  $\alpha = 52^\circ$ . Так как показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волны равны  $n_o = 1,33$  и  $n_e = 1,20$ , то воздушный слой между анизотропными призмами поляризатора Глана выполняет роль «оптически» менее плотной среды. При этом для обыкновенной  $o$  волны предельный угол полного внутреннего отражения в соответствии с формулой

$$\sin \alpha_o = \frac{1}{n_o} \quad (8.3)$$

равен  $\alpha_o \approx 48,5^\circ$ . Так как угол падения  $\alpha = 52^\circ$  для обыкновенной волны, падающей на границу раздела, больше предельного угла  $\alpha_o$  полного внутреннего отражения ( $\alpha > \alpha_o$ ), то она испытывает полное отра-

жение от воздушного промежутка между анизотропными призмами (рис. 39). Для необыкновенной  $e$  волны предельный угол полного внутреннего отражения в соответствии с формулой

$$\sin \alpha_e = \frac{1}{n_e} \quad (8.4)$$

равен  $\alpha_e \approx 56,5^\circ$ . Так как угол падения  $\alpha = 52^\circ$  этой волны на границу раздела сред меньше предельного угла полного отражения ( $\alpha < \alpha_e$ ), то необыкновенная волна не испытывает полного отражения от воздушного промежутка и распространяется во второй призме. Таким образом, если исключить из рассмотрения волну, испытывающую полное отражение от воздушного зазора между анизотропными призмами, то из модели поляризатора Глана выходит только одна линейно поляризованная волна, которая улавливается приемной рупорной антенной, соединенной с осциллографом. Вращением приемной рупорной антенны, как анализатора, вокруг ее продольной оси убеждаются, что электрический вектор  $\vec{E}$  линейно поляризованной волны, выходящей из модели поляризатора Глана, совпадает по направлению с главными осями двоякопреломляющих призм. Другими словами, эта волна является необыкновенной.

Следует отметить, что если толщина  $L$  воздушного промежутка между анизотропными призмами рассмотренного поляризатора будет значительно меньше длины волны используемого излучения, то обыкновенная компонента, испытывающая полное внутреннее отражение, будет частично просачиваться через воздушный зазор, что является следствием «оптического» аналога туннельного эффекта.

Поляризационная призма Николя (ее часто называют николю) вырезается из кристалла исландского шпата (рис. 40). Основание  $AB$  и  $CD$  кристалла подшлифовывают так, чтобы они составляли с ребрами угол  $68^\circ$ . После этого призму распиливают по диагональной плоскости  $BD$  так, чтобы плоскость распиливания была перпендикулярной к обоим основаниям  $AB$  и  $CD$ . Плоскости распила полируются, а затем склеиваются канадским бальзамом. Продольное и поперечное сечение призмы показано на рис. 41.

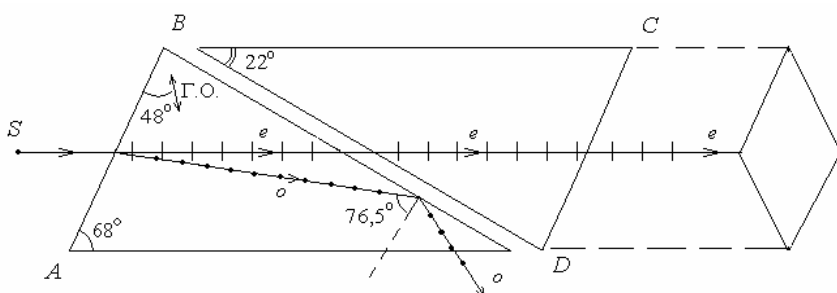
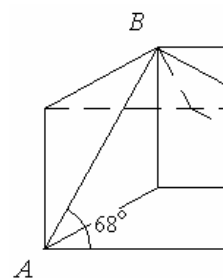


Рис. 41

Главная ось (ГО) составляет с основанием призмы угол  $48^\circ$ . Диагональная плоскость  $BD$  наклонена к ребрам  $BC$  и  $AD$  под углом  $22^\circ$ . На переднюю грань  $AB$  призмы падает неполяризованное излучение от источника света  $S$ . В призме свет распадается на два луча: обыкновенный ( $o$ ) ( $n_o = 1,658$ ) и необыкновенный ( $e$ ) ( $n'_e = 1,515$ ). Канадский бальзам имеет показатель преломления  $n = 1,550$ . Так как  $n'_e < n < n_o$ , то слой канадского бальзама оптически менее плотен, чем исландский шпат для обыкновенного луча и оптически более плотен для необыкновенного луча. Обыкновенный луч падает на поверхность  $BD$  канадского бальзама под углом  $76,5^\circ$ , большим предельного, и, претерпев полное внутреннее отражение, поглощается в оправе призмы. Необыкновенный луч свободно проходит через слой канадского бальзама и после преломления на задней грани  $DC$  выходит из призмы параллельно падающему лучу  $S$ . Таким образом, призма Николя преобразует естественный неполяризованный свет в линейно поляризованный. Электрический вектор  $\vec{E}_e$  необыкновенной волны, выходящий из николя, лежит в главной плоскости призмы, проходящей через луч и оптическую ось (ГО). При повороте призмы Николя вокруг луча  $S$  на некоторый угол на такой же угол повернется и линия поляризации света, выходящего из призмы.

## 9 СЛОЖЕНИЕ ДВУХ КОГЕРЕНТНЫХ ВОЛН С ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ ПОЛЯРИЗАЦИИ. АНАЛИЗ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА И ТЕОРИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

## ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВОЛН В КРИСТАЛЛАХ

Естественный свет представляет собой набор элементарных линейно поляризованных волн со всевозможными ориентациями колебаний их векторов  $\vec{E}_i$  в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения луча. Эти элементарные волны соответствуют излучению различных независимых атомов источника света, т.е. заведомо некогерентны друг с другом. Рассмотрим падение естественного света на пластину одноосного двоякопреломляющего кристалла, оптическая ось которого параллельна плоскости пластинки. При падении неполяризованного света на анизотропный кристалл в нем распространяются две волны: обыкновенная и необыкновенная с ортогональными линиями поляризации. Каждая из элементарных волн, падающих на кристалл, участвует в возбуждении этих двух волн. Однако ее вклад в обыкновенную и необыкновенную волны неодинаков и зависит от угла  $\alpha_i$  между вектором  $\vec{E}_i$  элементарной волны главной осью кристалла. Так, например, элементарная волна, вектор  $\vec{E}_i$  которой перпендикулярен главной оси кристалла, будет возбуждать обыкновенную волну; элементарная волна, вектор  $\vec{E}_i$  которой параллелен к главной оси кристалла, будет возбуждать необыкновенную волну. Иными словами, обыкновенная и необыкновенная волны в одноосном кристалле порождаются различными элементарными волнами, входящими в состав неполяризованного света, падающего на кристалл. Следовательно, обыкновенная и необыкновенная волны, распространяющиеся в одноосном кристалле при падении на него естественного света, некогерентны.

Рассмотрим теперь падение на одноосный двоякопреломляющий кристалл линейно поляризованной волны, полученной, например, из естественного света с помощью дихроизного поляризатора. Пусть главная линия поляризатора составляет с главной оптической осью кристалла произвольный угол  $\alpha$ . В этом случае углы  $\alpha_i$  для всех элементарных волн, входящих в состав падающего на кристалл света, одинаковы и равны углу  $\alpha$ . Следовательно, для всех падающих на кристалл элементарных волн  $\vec{E}_i$  соотношения между их вкладами в обыкновенную и необыкновенную волны, возбуждаемые в кристалле, также будут одинаковыми. Иными словами, обыкновенная и необыкновенная волны порождаются одними и теми же элементарными волнами, входящими в состав света, падающего на кристалл.

Таким образом, обыкновенная и необыкновенная волны, возникающие в одноосном кристалле при падении на него линейно поляризованного света, *когерентны*. Однако, так как линии поляризации обыкновенной и необыкновенной волн взаимно перпендикулярны, то несмотря на их когерентность, они не могут интерферировать. Тем не менее, взаимодействие двух когерентных волн с ортогональными линиями поляризации приводит к их *сложению*, которое следует отличать от явления интерференции.

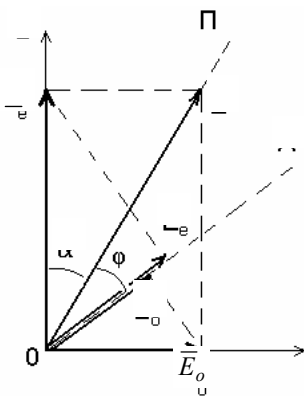


Рис. 42

Рассмотрим теорию сложения двух когерентных волн с взаимно перпендикулярными линиями поляризации. Пусть имеется пластинка анизотропного одноосного кристалла, вырезанная параллельно его главной оптической оси  $Z$ . Допустим, что перед пластинкой установлен обычный источник света и поляризатор так, что электрический вектор  $\vec{E}$  волны, падающей на пластинку, составляет произвольный угол  $\alpha$  с ее главной оптической осью  $Z$ . Плоскость пластинки совпадает с плоскостью чертежа (рис. 42).

Линия ОП соответствует главной линии поляризатора. Линейно поляризованная волна  $\vec{E}$  в анизотропной пластинке распадается на две когерентные волны (обыкновенную  $\vec{E}_o$  и необыкновенную  $\vec{E}_e$ ) с взаимно перпендикулярными линиями поляризации ( $\vec{E}_o \perp \vec{E}_e$ ). Амплитуды этих когерентных волн можно найти из пространственной диаграммы (рис. 42)

$$E_o = E \sin \alpha; E_e = E \cos \alpha. \quad (9.1)$$

Уравнения колебаний когерентных волн на входе анизотропной пластинки можно записать в виде:

$$E_o = E_o \sin \omega t = E \sin \alpha \sin \omega t; \quad (9.2)$$

$$E_e = E_e \sin \omega t = E \cos \alpha \sin \omega t.$$

Исключая из этих выражений время  $t$ , найдем уравнение линейно поляризованной волны, падающей на пластинку

$$\frac{E_o}{E_e} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (9.3)$$

При  $\alpha = 45^\circ$  получим

$$\frac{E_o}{E_e} = 1. \quad (9.4)$$

График колебаний вектора  $\vec{E}$  перед пластинкой показан на рис. 43, а.

Так как обыкновенная и необыкновенная волны имеют в анизотропной пластинке различную фазовую скорость:  $v_o = \frac{c}{n_o}$ ;  $v_e = \frac{c}{n_e}$ , то на выходе из нее они приобретают разность фаз  $\delta$ , которая определяется оптической

разностью хода  $\Delta = d(n_o - n_e)$ , т.е.  $\delta = \Delta k = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_o - n_e)$ , где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число;  $n_o$  и  $n_e$  – соответственно, показатели преломления для обыкновенной ( $n_o = \sqrt{\epsilon_x \mu}$ ) и необыкновенной ( $n_e = \sqrt{\epsilon_z \mu}$ ) волн;  $d$  – геометрическая толщина пластинки. Уравнения колебаний для обыкновенной и необыкновенной волн на выходе из двоякопреломляющей пластинки могут быть записаны в виде:

$$E_o = E_o \sin \omega t; E_e = E_e \sin(\omega t + \delta), \quad (9.5)$$

где мы учитываем для простоты изменение фазы лишь одной из когерентных волн. Учитывая выражение (9.1), получим:

$$E_o = E \sin \alpha \sin \omega t; E_e = E \cos \alpha \sin(\omega t + \delta). \quad (9.6)$$

Осуществляя сложение двух взаимно перпендикулярных когерентных колебаний, т.е. исключая из уравнений (9.6) время  $t$ , получим уравнение эллипса:

$$\frac{E_o^2}{E^2 \sin^2 \alpha} - 2 \frac{E_o E_e \cos \delta}{E^2 \sin \alpha \cos \alpha} + \frac{E_e^2}{E^2 \cos^2 \alpha} = \sin^2 \delta. \quad (9.7)$$

Таким образом, в общем случае результирующая волна, выходящая из фазовой двоякопреломляющей пластинки, обладает эллиптической поляризацией, т.е. в любой неподвижной плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, конец электрического вектора описывает эллипс, при этом полуоси эллипса могут не совпадать с выбранными осями координат  $x$  и  $z$ . В зависимости от величин  $\alpha$  и  $\delta$  результирующая волна может обладать круговой или линейной поляризацией. Рассмотрим специальные случаи.

1 Пусть электрический вектор  $\vec{E}$  волны, падающей на пластинку, совпадает с ее главной осью  $z$  ( $\alpha = 0$ ). Тогда согласно формуле (9.1) амплитуда обыкновенной волны  $E_o = 0$  и, следовательно, в пластинке распространяется только необыкновенная волна с линейной поляризацией, вектор  $\vec{E}_e$  которой совпадает с осью  $z$ .

2 Если  $\alpha = 90^\circ$ , то согласно формуле (9.1)  $E_e = 0$  и, следовательно, в пластинке распространяется только обыкновенная волна, вектор  $\vec{E}_o$  которой совпадает с осью  $x$ .

3 Пусть электрический вектор  $\vec{E}$  первоначальной волны составляет с главной оптической осью  $z$  пластинки угол  $\alpha = 45^\circ$ . Уравнение (9.7) принимает вид:

$$\frac{E_o^2}{E^2} - 2 \frac{E_o E_e \cos \delta}{E^2} + \frac{E_e^2}{E^2} = \frac{1}{2} \sin^2 \delta. \quad (9.8)$$

Рассмотрим наиболее важные частные случаи:

а) Пусть имеется такая анизотропная пластинка, что разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами в ней равна  $\delta = \frac{\pi}{4}$ . Такая пластинка называется «пластинкой  $\lambda/8$ », так как оптическая разность хода между когерентными волнами для нее равна  $\Delta = d(n_o - n_e) = \frac{\delta}{k} = \frac{\lambda}{8}$ , где  $d$  – геометрическая толщина пластинки;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число. При указанных условиях из формулы (9.8) найдем

$$\frac{E_o^2}{E^2} - \sqrt{2} \frac{E_o E_e}{E^2} + \frac{E_e^2}{E^2} = \frac{1}{4}, \quad (9.9)$$

Освободимся от члена  $E_o E_e$  и приведем полученное уравнение эллипса к каноническому виду. Для этого осуществим поворот осей координат на угол  $\alpha = 45^\circ$ . В данном случае формулы поворота имеют вид:  $E_o = \frac{\sqrt{2}}{2}(E'_o - E'_e)$ ;  $E_e = \frac{\sqrt{2}}{2}(E'_o + E'_e)$ . Подставляя эти выражения в формулу (9.9), после преобразований найдем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{E_o'^2}{\frac{4+2\sqrt{2}}{8}E^2} + \frac{E_e'^2}{\frac{4-2\sqrt{2}}{8}E^2} = 1. \quad (9.10)$$

Графически полученный эллипс изображен на рис. 43, б. Полуоси  $a$  и  $b$  эллипса определяются выражениями

$$a^2 = \frac{4+2\sqrt{2}}{8}E^2 = 0,85E^2; \quad b^2 = \frac{4-2\sqrt{2}}{8}E^2 = 0,15E^2 \quad (9.11)$$

или

$$a = \sqrt{0,85}E = 0,92E; \quad b = \sqrt{0,15}E = 0,39E. \quad (9.12)$$

Таким образом, если на кристаллическую «пластинку  $\lambda/8$ » падает свет, электрический вектор  $\vec{E}$  которого составляет с ее главной осью угол  $\alpha = 45^\circ$ , то на выходе ее образуется эллиптически поляризованная волна, причем большая полуось эллипса совпадает с линией поляризации волны, падающей на пластинку.

б) Пусть кристаллическая пластинка такова, что разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами для нее равна  $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Данная пластинка называется «пластинкой  $\lambda/4$ », для нее оптическая разность хода равна  $\Delta = d(n_o - n_e) = \frac{\lambda}{4}$ . Для данной пластинки на основании формулы (9.8) найдем уравнение окружности

$$E_o^2 + E_e^2 = \frac{1}{2}E^2. \quad (9.13)$$

Таким образом, если выполняются два условия:  $\alpha = 45^\circ$  и  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , то линейно поляризованная волна при прохождении дwoякопреломляющей пластинки превращается в волну с круговой поляризацией, которая характеризуется тем, что ее электрический вектор описывает в любой неподвижной плоскости, перпендикулярной направлению распространения, окружность (рис. 43, в) радиусом

$$R = \frac{E}{\sqrt{2}}, \quad (9.14)$$

где  $E$  – модуль электрического вектора линейно поляризованной волны, падающей на пластинку.

в) При  $\alpha = 45^\circ$  и  $\delta = 3\frac{\pi}{4}$  на основании формулы (9.8) найдем снова уравнение эллипса:



$$\frac{E_o'^2}{4 - 2\sqrt{2}} E^2 + \frac{E_e'^2}{4 + 2\sqrt{2}} E^2 = 1. \quad (9.15)$$

Большая полуось этого эллипса перпендикулярна электрическому вектору  $\bar{E}$  волны, падающей на пластинку (рис. 43, з). Полуоси эллипса численно равны

$$a = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{2}}{8}} E^2 = \sqrt{0,15E^2} = 0,39E; \quad (9.16)$$

$$b = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{2}}{8}} E^2 = \sqrt{0,85E^2} = 0,92E.$$

г) Пусть геометрическая толщина  $d$  кристаллической пластинки такова, что разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами равна  $\delta = \pi$ . Данная пластинка называется «пластинкой  $\lambda/2$ », так для нее  $\Delta = d(n_o - n_e) = \frac{\lambda}{2}$ .

Для полуволновой пластинки на основании формулы (9.8), найдем уравнение прямой линии:

$$\frac{E_o}{E_e} = -1, \quad (9.17)$$

график которой изображен на рис. 43, д. Сравнивая выражения (9.4) и (9.17) или рис. 43, а и 43, д, можно заключить, что при  $\alpha = 45^\circ$  из полуволновой пластинки выходит волна с линейной поляризацией, но ее электрический вектор повернут по отношению к линии поляризации волны, падающей на пластинку, на угол  $2\alpha = 90^\circ$ .

д) При  $\alpha = 45^\circ$  и  $\delta = 2\pi$  нетрудно показать, что уравнение колебаний на выходе будет иметь вид:

$$\frac{E_o}{E_e} = 1. \quad (9.18)$$

Следовательно, волна, выходящая из «пластинки  $\lambda$ » будет обладать линейной поляризацией, причем ее электрический вектор будет совпадать с линией поляризации волны, падающей на пластинку.

Рассмотрим анализ поляризованного света и теорию интерференции поляризованных волн в кристаллах. Следует отметить, что вследствие очень большой частоты колебаний как в оптике, так и в радиофизике не существует приемников электромагнитных волн, способных регистрировать вращение электрического вектора в волне с круговой или эллиптической поляризацией; не существует приемников, способных фиксировать и колебания электрического вектора в волне с линейной поляризацией. Поэтому для анализа характера поляризации результирующей волны, выходящей из анизотропной пластинки, используют различные анализаторы: пластинку турмалина или николя. Пусть главная ось  $OA$  анализатора, установленного за одноосной кристаллической пластинкой, составляет с главной линией  $OP$  поляризатора, установленного перед пластинкой, произвольный угол  $\varphi$  (рис. 42). Анализатор одновременно пропускает две параллельные составляющие  $\bar{E}'_o$  и  $\bar{E}'_e$  от обыкновенной  $\bar{E}_o$  и необыкновенной  $\bar{E}_e$  волн, линии поляризации которых взаимно перпендикулярны. Составляющие  $\bar{E}'_o$  и  $\bar{E}'_e$  когерентны и интерферируют. Следует заметить, что пространственная диаграмма (рис. 42) ничего не говорит о разности фаз  $\delta$  интерферирующих волн  $\bar{E}'_o$  и  $\bar{E}'_e$ . Указанная разность фаз  $\delta$  определяется оптической разностью хода  $\Delta = d(n_o - n_e)$  ортогональных компонент  $\bar{E}_o$  и  $\bar{E}_e$  в двоякопреломляющей пластинке. Численные значения амплитуд интерферирующих волн можно найти на основе имеющейся пространственной диаграммы (рис. 42):

$$E'_o = E_o \sin(\varphi + \alpha); \quad E'_e = E_e \cos(\varphi + \alpha). \quad (9.19)$$

Учитывая формулы (9.1), получим

$$E'_o = E \sin \alpha \sin(\varphi + \alpha); \quad E'_e = E \cos \alpha \cos(\varphi + \alpha), \quad (9.20)$$

где  $\varphi$  – угол между главными линиями анализатора и поляризатора.

Согласно теории сложения однонаправленных когерентных колебаний найдем результат интерференции когерентных волн  $E'_o$  и  $E'_e$ , имеющих произвольную разность фаз  $\delta$ . Для этого достаточно построить векторную диаграмму интерферирующих волн (рис. 44), где  $OP$  – опорная линия, и воспользоваться формулой косоугольного треугольника

$$E_p^2 = E_o'^2 + E_e'^2 + 2E_o'E_e' \cos \delta = (E'_o + E'_e)^2 - 2E_o'E_e'(1 - \cos \delta).$$

Учитывая, что  $(1 - \cos \delta) = 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$ , получим

$$E_p^2 = (E'_o - E'_e)^2 - 4E_o'E_e' \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

Поставляя в данное выражение формулы (9.20), найдем значение интенсивности волны  $I \sim E_p^2$ , выходящей из анализатора, установленного за кристаллической пластинкой

$$I = I_0 \left\{ \cos^2 \varphi - \sin 2\alpha \sin 2(\varphi + \alpha) \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\}, \quad (9.21)$$

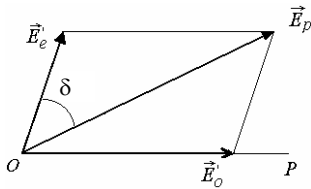


Рис. 44

где  $I_0 \sim E^2$  – интенсивность линейно поляризованной волны, падающей на одноосную кристаллическую пластинку. При выводе формулы (9.21) следует использовать тригонометрические соотношения

$$\sin \alpha \sin(\alpha + \varphi) + \cos \alpha \cos(\alpha + \varphi) = \cos[\alpha - (\alpha + \varphi)] = \cos \varphi;$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha;$$

$$\sin(\alpha + \varphi) \cos(\alpha + \varphi) = \frac{1}{2} \sin 2(\alpha + \varphi).$$

Полученную формулу (9.21) можно трактовать двояко. С одной стороны, это есть общая формула интерференции поляризованных волн  $E'_o$  и  $E'_e$  в одноосном кристалле, так как она определяет интенсивность волны  $I$ , проходящей через анализатор, как функцию разности фаз  $\delta$  интерферирующих компонент  $E'_o$  и  $E'_e$ . Другими словами, формула (9.21) определяет функцию  $I = I(\delta)$  при заданных параметрах эксперимента:  $\alpha = \text{const}$  и  $\varphi = \text{const}$ . С другой стороны, формула (9.21) определяет зависимость интенсивности  $I$  волны, проходящей через анализатор, от угла  $\varphi$  его поворота, т.е. данная формула определяет функцию  $I = I(\varphi)$  при заданных постоянных параметрах эксперимента:  $\alpha = \text{const}$  и  $\delta = \text{const}$ . Эта зависимость  $I = I(\varphi)$  позволяет определить характер поляризации результирующей волны, выходящей из кристаллической пластинки, которая получилась от сложения двух когерентных волн  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$  с ортогональными линиями поляризации. Данная функциональная зависимость  $I = I(\varphi)$ , выраженная графически в полярных координатах, называется полярной диаграммой результирующей волны.

Найдем полярные диаграммы волн, выходящих из анизотропной пластинки в специальных случаях, рассмотренных ранее.

1 Пусть электрический вектор  $\vec{E}$  волны, падающей на двоякопреломляющую пластинку любой толщины, совпадает с ее главной оптической осью  $z$  ( $\alpha = 0$ ). Согласно формуле (9.1) в кристалле распространяется только необыкновенная линейно поляризованная волна  $E_e = E$ , причем обыкновенная волна отсутствует ( $E_o = 0$ ). На основании формулы (9.20) видно, что одна из интерферирующих компонент имеет нулевую амплитуду ( $E'_o = 0$ ). Из формулы (9.21) при  $\alpha = 0$  найдем полярную диаграмму линейно поляризованной необыкновенной волны, выходящей из пластинки:  $I = I_0 \cos^2 \varphi$ ,

которая соответствует закону Малюса и графически в полярных координатах представляет собой «восьмерку» с «талией» равной нулю.

2 Пусть вектор  $\vec{E}$  первичной волны, падающей на одноосную анизотропную пластинку, составляет с ее главной оптической осью  $z$  угол  $\alpha = 90^\circ$ . В данном случае согласно формуле (9.1) в кристалле будет распространяться только обыкновенная линейно поляризованная волна  $E_0 = E$ , причем  $E_e = 0$ . На основании формулы (9.20) можно заключить, что одна из интерферирующих волн имеет нулевую амплитуду ( $E'_e = 0$ ). Из формулы (9.21) при  $\alpha = 90^\circ$  найдем полярную диаграмму линейно поляризованной обыкновенной волны, выходящей из пластинки:  $I = I_0 \cos^2 \varphi$ , которая снова соответствует закону Малюса.

Из этих двух случаев можно сделать важный вывод. При  $\alpha = 0$  или  $90^\circ$  из кристалла выходит линейно поляризованная волна (необыкновенная или обыкновенная) и при вращении анализатора интенсивность проходящего света периодически изменяется в соответствии с законом Малюса; т.е. при повороте анализатора на угол  $90^\circ$  максимум интенсивности сменяется минимумом и наоборот (картина становится дополнительной), но этот факт не может трактоваться как интерференция поляризованных волн, так как одна из интерферирующих компонент  $E'_o$  или  $E'_e$  при этом равна нулю.

3 Пусть электрический вектор  $\vec{E}$  первичной волны, падающей на анизотропную пластинку, составляет с ее главной оптической осью угол  $\alpha = 45^\circ$ . В этом случае формула (9.21) принимает вид

$$I = I_0 \left\{ \cos^2 \varphi - \sin 2(\varphi + 45^\circ) \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Учитывая, что  $\sin 2(\varphi + 45^\circ) = \sin(2\varphi + 90^\circ) = \cos 2\varphi$ , найдем

$$I = I_0 \left\{ \cos^2 \varphi - \cos 2\varphi \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Так как  $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ , то окончательно получим

$$I = I_0 \left\{ \cos^2 \varphi \cos^2 \frac{\delta}{2} + \sin^2 \varphi \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\}. \quad (9.22)$$

Если между поляризатором и анализатором кристаллическая анизотропная пластинка отсутствует ( $\delta = 0$ ), то из этой формулы мы получаем полярную диаграмму линейно поляризованной волны, выходящей из поляризатора:  $I = I_0 \cos^2 \varphi$ , которая соответствует закону Малюса. В полярных координатах данная диаграмма изображена на рис. 45, а.

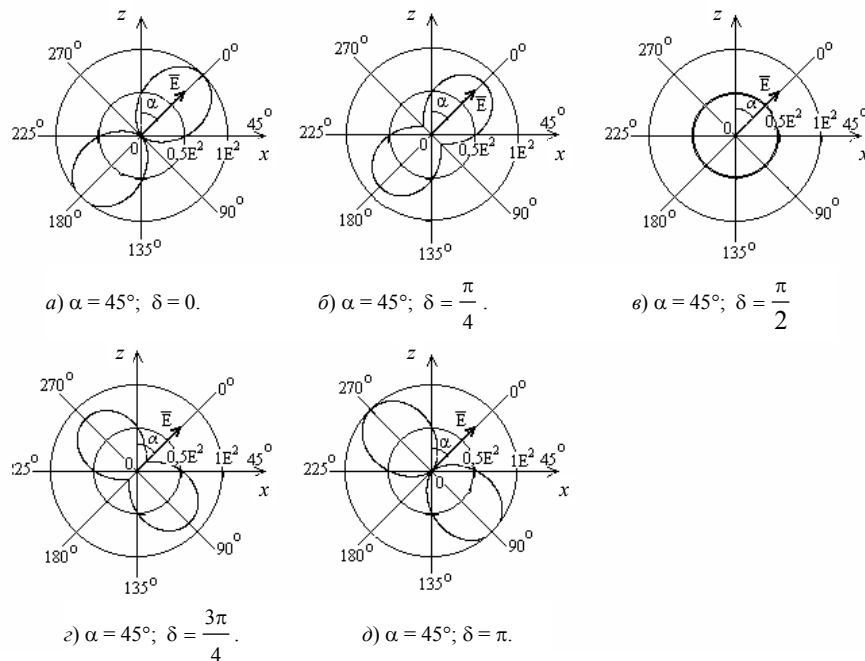


Рис. 45

Рассмотрим наиболее важные частные случаи.

а) Пусть при  $\alpha = 45^\circ$  между поляризатором и анализатором расположена анизотропная «пластинка  $\lambda/8$ », для которой разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами равна  $\delta = \frac{\pi}{4}$  или  $\delta = 45^\circ$ . При данных условиях из «пластинки  $\lambda/8$ » выходит эллиптически поляризованная волна (9.10), причем полуоси эллипса даются выражениями (9.11) и (9.12). На основании формулы (9.22) при  $\delta = 45^\circ$  найдем полярную диаграмму эллиптически поляризованной волны, выходящей из «пластинки  $\lambda/8$ »

$$I = I_0 \{0,85 \cos^2 \varphi + 0,15 \sin^2 \varphi\}. \quad (9.23)$$

Данная полярная диаграмма изображена на рис. 45, б и представляет собой «восьмерку» с «талией» не равной нулю. Легко видеть, что интенсивность волны, проходящей через анализатор, максимальна

$$I_{\parallel} = 0,85I_0 \quad (9.24)$$

при  $\varphi = 0$ , т.е. когда главные линии анализатора и поляризатора совпадают; интенсивность волны, выходящей из анализатора, минимальна

$$I_{\perp} = 0,15I_0 \quad (9.25)$$

при  $\varphi = 90^\circ$ , т.е. когда главные линии анализатора и поляризатора скрещены. Эти значения совпадают с большей и малой полуосями полярной диаграммы (рис. 45, б). На основании полученной полярной диаграммы (9.23) эллиптически поляризованной волны можно найти полуоси эллипса

$$a = \sqrt{I_{\parallel}} = \sqrt{0,85I_0} = 0,92\sqrt{I_0};$$

$$b = \sqrt{I_{\perp}} = \sqrt{0,15I_0} = 0,39\sqrt{I_0}.$$

Учитывая, что  $\sqrt{I_0} \sim E$ , получим формулы

$$a = 0,92E; \quad b = 0,39E, \quad (9.26)$$

которые совпадают со значениями (9.12), найденными на основе теории сложения волн с взаимно перпендикулярными линиями поляризации, что говорит о справедливости рассмотренных подходов.

б) Пусть при  $\alpha = 45^\circ$  между поляризатором и анализатором расположена «пластинка  $\lambda/4$ », для которой разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами равна  $\delta = \frac{\pi}{2}$  или  $\delta = 90^\circ$ . Как было показано раньше, из четвертьволновой пластинки при данных условиях опыта выходит волна с круговой поляризацией. При этом уравнение окружности дается формулой (9.13). На основании формулы (9.22) при  $\delta = 90^\circ$  найдем полярную диаграмму (рис. 45, в) циркулярно поляризованной волны, выходящей из «пластинки  $\lambda/4$ »

$$I = \frac{I_0}{2}, \text{ или } I = \frac{E^2}{2}. \quad (9.27)$$

При этом интенсивность волны  $I$ , выходящей из анализатора, не зависит от его углового положения  $\varphi$  и остается постоянной величиной. Например, интенсивность волны при параллельных и перпендикулярных главных линиях анализатора и поляризатора будет одинаковой

$$I_{\parallel} = I_{\perp} = \frac{I_0}{2}. \quad (9.28)$$

На основе полученной полярной диаграммы (9.27) найдем радиус окружности, которую описывает конец электрического вектора в волне с круговой поляризацией

$$R = \sqrt{I} \text{ или } R = \frac{E}{\sqrt{2}}, \quad (9.29)$$

что совпадает со значением (9.14), найденным на основе теории сложения двух когерентных волн с взаимно перпендикулярными линиями поляризации.

в) При  $\alpha = 45^\circ$  и  $\delta = \frac{3}{4}\pi$  на основании формулы (9.22) найдем уравнение полярной диаграммы для эллиптической поляризованной волны:

$$I = I_0 \{0,15 \cos^2 \varphi + 0,85 \sin^2 \varphi\}. \quad (9.30)$$

Графически данная диаграмма представлена на рис. 45, г. Интенсивность волны, проходящей через анализатор, максимальна

$$I_{\perp} = 0,85I_0 \text{ или } I_{\perp} \sim 0,85E^2 \quad (9.31)$$

при  $\varphi = 90^\circ$ , т.е. когда главные линии анализатора и поляризатора скрещены.

*Интенсивность волны минимальна*

$$I_{\parallel} = 0,15I_0 \text{ или } I_{\parallel} \sim 0,15E^2 \quad (9.32)$$

при  $\varphi = 0$ , т.е. когда главные линии анализатора и поляризатора параллельны. Полуоси эллипса можно найти из полярной диаграммы

$$a = \sqrt{I_{\perp}} = \sqrt{0,85}E = 0,39E;$$

$$b = \sqrt{I_{\parallel}} = \sqrt{0,15}E = 0,92E. \quad (9.33)$$

Полученные значения полуосей совпадают с их численными выражениями (9.16), найденными на основе теории сложения двух волн с ортогональными линиями поляризации.

г) Из формулы (9.22) при  $\alpha = 45^\circ$  и  $\delta = \pi$  найдем уравнение полярной диаграммы линейно поляризованной волны, выходящей из анизотропной полуволновой пластинки

$$I = I_0 \sin^2 \varphi. \quad (9.34)$$

Графически данная диаграмма изображена на рис. 45, д. Сравнивая данную полярную диаграмму с диаграммой линейно поляризованной волны на входе пластинки, которая дается законом Малюса (рис. 45, а), видно, что линия поляризации волны, выходящей из «пластинки  $\lambda/2$ », оказывается повернутой на угол  $2\alpha = 90^\circ$ . Из формулы (9.34) следует, что максимальная интенсивность волны

$$I_{\max} = I_{\perp} = I_0 \quad \text{или} \quad I_{\perp} \sim E^2 \quad (9.35)$$

наблюдается при  $\varphi = 90^\circ$ , т.е. при скрещенных линиях анализатора и поляризатора; минимальная интенсивность

$$I_{\min} = I_{\parallel} = 0 \quad (9.36)$$

наблюдается при  $\varphi = 0$ , т.е. при параллельных главных линиях поляризатора и анализатора.

д) При  $\alpha = 45^\circ$  и  $\delta = 2\pi$  на основании формулы (9.22) найдем уравнение полярной диаграммы волны, выходящей из «пластинки  $\lambda$ »

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (9.37)$$

Данная полярная диаграмма совпадает с полярной диаграммой линейно поляризованной волны на входе анизотропной пластинки, которая, как было показано, дается также законом Малюса. Из формулы (9.37) следует, что максимальная интенсивность волны

$$I_{\max} = I_{\parallel} = I_0 \quad (9.38)$$

наблюдается при  $\varphi = 0$ , т.е. когда главные линии анализатора и поляризатора параллельны; минимальная интенсивность волны

$$I_{\min} = I_{\perp} = 0 \quad (9.39)$$

наблюдается при  $\varphi = 90^\circ$ , т.е. когда главные линии анализатора и поляризатора скрещены. Целесообразно сравнить волны с различным характером поляризации (рис. 43) и их полярные диаграммы (рис. 45).

Рассмотрим теорию интерференции поляризованных волн в двоякопреломляющих кристаллических пластинках.

Из оптики известно, что интерференция поляризованных волн наблюдается наиболее контрастно, если главная линия поляризатора, установленного перед анизотропной пластинкой, составляет с ее главной осью угол  $\alpha = 45^\circ$ , а главная линия анализатора составляет с главной линией поляризатора угол  $\varphi = 0$  или  $\varphi = 90^\circ$ , т.е. главные линии поляризатора и анализатора должны быть или параллельными или взаимно перпендикулярными. В этом случае согласно формулам (9.20) interfering waves  $E'_o$  и  $E'_e$  имеют одинаковые амплитуды

$$E'_o = E'_e = \frac{E}{2}, \quad (9.40)$$

где  $\vec{E}$  – электрический вектор волны, падающей на анизотропную пластинку. Этот вывод подтверждается также построением пространственных диаграмм. Выражение (9.22), которое вытекает из общей формулы интерференции (9.21) поляризованных лучей, может рассматриваться как формула интерференции поляризованных волн в кристаллических пластинках при наилучших условиях

ее наблюдения, т.е. при  $\alpha = 45^\circ$ . Ранее было показано, что интерференция наблюдаться не может при  $\alpha = 0$  и при  $\alpha = 90^\circ$ .

Найдем законы интерференции. Из выражения (9.22) видно, что при параллельных главных линиях анализатора и поляризатора ( $\varphi = 0$ ) интенсивность при интерференции равна

$$I_{\parallel} = I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}. \quad (9.41)$$

Откуда следует, что при  $\delta = 2\pi; 4\pi; 6\pi; \dots$  или  $\Delta = \lambda; 2\lambda; 3\lambda; \dots$  наблюдается максимум интерференции поляризованных волн

$$I_{\max} = I_{\parallel} = I_0. \quad (9.42)$$

Данная формула совпадает с формулой (9.38), найденной из анализа полярной диаграммы волны, выходящей из «пластинки  $\lambda$ », для которой  $\delta = 2\pi$ .

Из формулы (9.41) следует, что при  $\delta = \pi; 3\pi; 5\pi; \dots$ , или  $\Delta = \frac{\lambda}{2}; 3\frac{\lambda}{2}; 5\frac{\lambda}{2}; \dots$  наблюдается минимум интерференции

$$I_{\min} = I_{\parallel} = 0. \quad (9.43)$$

Эта формула совпадает с формулой (9.36), найденной из анализа полярной диаграммы волны, выходящей из «пластинки  $\lambda/2$ », для которой  $\delta = \pi$ .

Из формулы (9.22) следует, что при взаимно перпендикулярных линиях анализатора и поляризатора ( $\varphi = 90^\circ$ ) интенсивность при интерференции поляризованных лучей равна:

$$I_{\perp} = I_0 \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (9.44)$$

Откуда следует, что при  $\delta = 2\pi; 4\pi; 6\pi; \dots$  или  $\Delta = \lambda; 2\lambda; 3\lambda; \dots$  наблюдается минимум интерференции

$$I_{\min} = I_{\perp} = 0. \quad (9.45)$$

Эта формула совпадает с ранее найденной (9.39), полученной из анализа полярных диаграмм волн, выходящих из «пластинки  $\lambda$ », для которой  $\delta = 2\pi$ .

Из формулы (9.44) видно, что при  $\delta = \pi; 3\pi; 5\pi; \dots$  или  $\Delta = \frac{\lambda}{2}; 3\frac{\lambda}{2}; 5\frac{\lambda}{2}; \dots$  наблюдается максимум интерференции

$$I_{\max} = I_{\perp} = I_0, \quad (9.46)$$

что совпадает с формулой (9.35).

Таким образом, можно сформулировать общие правила наиболее контрастной интерференции поляризованных волн:

1 Если оптическая разность хода между обыкновенной и необыкновенной волнами равна нечетному числу полуволн, то при параллельных главных линиях анализатора и поляризатора наблюдается минимум интерференции, а при взаимно перпендикулярных линиях анализатора и поляризатора наблюдается максимум интерференции.

2 Если оптическая разность хода интерферирующих волн в одноосном кристалле равна целому числу длин волн, то при параллельных линиях поляризатора и анализатора наблюдается максимум интерференции, а при взаимно перпендикулярных главных линиях анализатора и поляризатора на-

блюдается минимум интерференции. Эти правила легко запомнить, если вспомнить свойства пластинки «пластинки  $\lambda/2$ » и «пластинки  $\lambda$ ». Полуволновая пластинка поворачивает линию поляризации волны на угол  $2\alpha = 90^\circ$ ; «пластинка  $\lambda$ » оставляет линию поляризации неизменной. Из сформулированных правил следует, что при повороте анализатора на угол  $90^\circ$  интерференционная картина сменяется на дополнительную.

Из формул интерференции (9.41) и (9.44) следует, что если разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами равна  $\delta = \frac{\pi}{2}$  или оптическая разность хода равна  $\Delta = \frac{\lambda}{4}$ , то при параллельных и скрещенных главных линиях поляризатора и анализатора интенсивность при интерференции будет одинакова

$$I_{\parallel} = I_{\perp} = \frac{I_0}{2},$$

что совпадает с выражением (9.27). Этот результат очевиден, так как из «пластинки  $\lambda/4$ » выходит волна с круговой поляризацией.

Если  $\delta = \frac{\pi}{4}$  или оптическая разность хода равна  $\Delta = \frac{\lambda}{8}$ , то из формул интерференции (9.41) и (9.44) найдем

$$I_{\parallel} = 0,85I_0; \quad I_{\perp} = 0,15I_0,$$

что находится в полном согласии с выражениями (9.24) и (9.25), полученными при анализе эллиптически поляризованной волны, выходящей из кристаллической пластинки.

Приведенные теоретические выводы находят полное подтверждение в наглядном эксперименте, выполненном на базе сантиметровых электромагнитных волн. Источником радиоволн служит клистронный генератор, нагруженный передающей рупорной антенной. Волна, излучаемая антенной, является линейно поляризованной, причем электрический вектор  $\vec{E}$  волны направлен перпендикулярно к широкой стенке волновода, соединенного с передающей антенной. Следовательно, источник сантиметровых радиомагнитных волн следует рассматривать как поляризатор соответствующего оптического прибора. В качестве приемника сантиметровых электромагнитных волн используется рупорная антенна, обладающая избирательными свойствами по отношению к поляризации принимаемого излучения. Она принимает электромагнитную волну с максимальной интенсивностью, если электрический вектор  $\vec{E}$  волны оказывается перпендикулярным к широкой стенке волновода приемника. Другими словами, приемная рупорная антенна выполняет роль анализатора в соответствующем оптическом эксперименте. Линии, перпендикулярные к широким стенкам волноводов источника и приемника радиоволн, называют главными линиями поляризатора и анализатора. В качестве искусственной двоякопреломляющей среды для радиоволн используется металлоленточная структура. Она состоит из большого числа параллельных тонких металлических лент, установленных на расстоянии  $a = 20$  мм (рис. 46).

За главную «оптическую» ось искусственной анизотропной среды принимается направление  $Z$ , перпендикулярное к ее лентам. Для обыкновенной электромагнитной волны, вектор  $\vec{E}$  которой расположен параллельно главной оси структуры, ее эквивалентный показатель преломления  $n_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} = 0,6$  при  $\lambda = 32$  мм. Для необыкновенной волны, электрический вектор  $\vec{E}$  которой расположен параллельно главной оси структуры, ее показатель преломления  $n_e = 1$ . Для полного проведения всех экспериментальных исследований нами изготовлены: одна «пластинка  $\frac{\lambda}{8}$ », две «пластинки  $\frac{\lambda}{4}$ », две «пластинки  $\frac{\lambda}{2}$ », и одна «пластинка  $\lambda$ ». Например, полуволновая пластинка состоит из двенадцати одинаковых лент длиной 220 мм и шириной  $d = 40$  мм, скрепленных металлическими шпильками. При этом ее геометрическая толщина  $d$ , т.е. ширина лент, удовлетворяет условию:  $d(n_e - n_0) = \frac{\lambda}{2}$ . Четвертьволновая пластинка состоит из лент шириной  $d = 20$  мм; «пластинка  $\frac{\lambda}{8}$ » и «пластинка  $\lambda$ » имеют, соответственно, геометрическую толщину  $d = 10$  мм и  $d = 80$  мм.

Для проведения эксперимента устанавливают источник и приемник радиоволн на одной прямой напротив друг друга на расстоянии 0,7 м. Для измерения интенсивности принимаемой волны при-



емную антенну соединяют с микроамперметром или осциллографом. Между источником и приемником располагают искусственную двоякопреломляющую среду заданной толщины, что обеспечивает определенную разность хода интерферирующих волн или их разность фаз  $\delta$ .

Исходя из задач эксперимента, выбирается угол  $\alpha$ . Другими словами, в эксперименте угол  $\alpha$  между линией поляризатора и главной осью  $Z$  исследуемой пластинки определяется по соответствующей шкале. Вращая приемную рупорную антенну как анализатор вокруг ее продольной оси, через каждые  $10^\circ$  измеряют зависимость интенсивности  $I$  принимаемой волны от угла  $\varphi$  поворота; при этом угол  $\varphi$  отсчитывается от линии поляризатора. По экспериментальным данным строят полярную диаграмму  $I = I(\varphi)$  принимаемой волны. При тех же параметрах  $\alpha$  и  $\delta$  по формуле (9.21) рассчитывают и строят теоретическую полярную диаграмму, где  $I_0$  – интенсивность волны, падающей на пластинку.

На рис. 47 показана полярная диаграмма результирующей волны, выходящей из анизотропной двоякопреломляющей «пластинки  $\frac{\lambda}{8}$ », когда на нее падает линейно поляризованная волна, электрический вектор  $\vec{E}$  которой составляет с главной осью пластинки угол  $\alpha = 30^\circ$ . Полярная диаграмма построена по формуле (9.21) при интенсивности волны, падающей на пластинку,  $I_0 = 50$  мкА. На рис. 48 приведена полярная диаграмма волны, выходящей из двоякопреломляющей «пластинки  $\frac{\lambda}{4}$ » при  $\alpha = 30^\circ$  и той же интенсивности  $I_0$  первичной волны. В пределах ошибки эксперимента экспериментальные и теоретические полярные диаграммы совпадают.

Большой выбор анизотропных пластинок и углов  $\alpha$  позволяет организовать индивидуальные лабораторные исследования для студентов, изучающих курс оптики по программе университета.

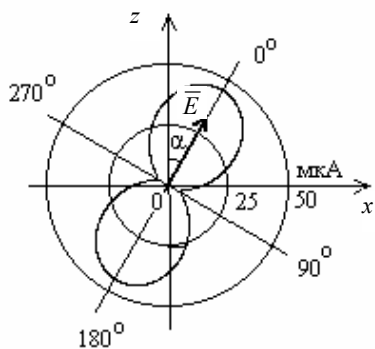


Рис. 47

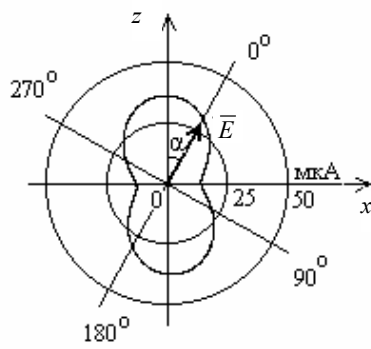


Рис. 48

Описанная установка и набор анизотропных двоякопреломляющих пластинок позволяет проиллюстрировать справедливость общих правил наиболее контрастной интерференции поляризованных волн, приведенных выше. Для этой цели устанавливают источник и приемник радиоволн напротив друг друга так, что их главные линии поляризации скрещены и приема волн нет. Располагают между источником и приемником полуволновую пластинку так, что электрический вектор  $\vec{E}$  волны, падающей на нее, составляет с ее главной осью угол  $\alpha = 45^\circ$ , отмечают прием радиоволн, т.е. максимум интерференции. Устанавливают главные линии поляризатора и анализатора параллельно и регистрируют прием электромагнитных волн. Снова вносят между ними полуволновую пластинку при  $\alpha = 45^\circ$ , отмечают отсутствие приема волн, т.е. минимум интерференции. Повторяют эти опыты с «пластинкой  $\lambda$ » при  $\alpha = 45^\circ$ . Отмечают, что при параллельных линиях поляризатора и анализатора наблюдается прием радиоволн, т.е. максимум интерференции, а при перпендикулярных главных осях поляризатора и анализатора наблюдается минимум интерференции.

В качестве анизотропных пластинок для сантиметровых электромагнитных волн можно также использовать слоистые диэлектрические и волноводные структуры.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.
- 2 Калитеевский Н.И. Волновая оптика. М.: Наука, 1971.

- 3 Крауфорд Ф. Волны: Берклевский курс физики. М.: Наука, 1974. Т. 3.
- 4 Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976.
- 5 Поль Р.В. Оптика и атомная физика. М.: Наука, 1966.
- 6 Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. М.: Наука, 1980.