С.И. ЛАЗАРЕВ, Э.Н. ОЧНЕВ,
О.А. АБОНОСИМОВ

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ ПЕРВОКУРСНИКА

♦ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ♦

Министерство образования и науки Российской Федерации

Тамбовский государственный технический университет

С.И. Лазарев, Э.Н. Очнев, О.А. Абоносимов

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ ПЕРВОКУРСНИКА

Учебное пособие

Тамбов
♦ Издательство ТГТУ ♦
2004

УДК 519.1.(075)
ББК В151.34я73
Л171

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор технических наук, профессор
Тамбовского государственного технического университета
В.В. Леденев

Доктор технических наук, профессор
Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина
А.А. Арзамасцев

Лазарев С.И., Очнев Э.Н., Абоносимов О.А.

Л17 Начертательная геометрия для первокурсника: Учеб.
1 пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. 68 с.

Учебное пособие является теоретическим руководством в освоении методов инженерной геометрии. Рассмотрены разделы: "Точка, прямая, плоскость"; "Способы преобразования проекционного чертежа"; "Поверхности". Даны контрольные вопросы по каждой рассмотренной теме для самопроверки усвоения материала.

Издание предназначено для студентов первого курса, обучающихся по специальностям 280202, 240801, 260601, 270102, 270105.

УДК 519.1.(075)

ББК В151.34я73

ISBN 5-8265-0316-5

Учебное издание

ЛАЗАРЕВ Сергей Иванович,
ОЧНЕВ Эдуард Николаевич,
АБОНОСИМОВ Олег Аркадьевич

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ ПЕРВОКУРСНИКА

Учебное пособие

Редактор Т.М. Федченко

Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано к печати 04.10.2004
Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Объем: 3,95 усл. печ. л.; 3,73 уч.-изд. л.
Тираж 100 экз. С. 652[М]

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1 Плоскости проекций:	
горизонтальная	π_1
фронтальная	π_2
профильная	π_3
дополнительная	π_4
2 Оси проекций и координатные оси	$\frac{\pi_1}{\pi_2} = x, \ \frac{\pi_1}{\pi_3} = y, \ \frac{\pi_2}{\pi_3} = z$
3 Плоскости в пространстве	$\alpha, \beta, \gamma, ...$
4 Проекции точки, прямой, плоскости:	
горизонтальная	$A', \mathit{Г}'$
фронтальная	$A'', \mathit{Г}''$
профильная	$A''', \mathit{Г}'''$
дополнительная	$A_4, \mathit{Г}_4$
5 Знак перпендикулярности	$\perp$
6 Знак неперпендикулярности	$\not\perp$
7 Знак параллельности	$\parallel$
8 Знак совпадения (тождество)	$\equiv$
9 Знак пересечения двух геометрических элементов	$\cap$
10 Знак результата геометрического построения	$=$
11 Знак угла	$\angle$
12 Знак прямого угла	$\llcorner$
13 Знак треугольника	$\triangle$
14 Знак принадлежности одного геометрического элемента другому	$\in$
15 Знак следования	$\rightarrow$
16 Знак отрицания	$\neq$
17 Знак касания	$\subseteq$

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия входит в число дисциплин, составляющих основу инженерного образования [1, 2]. Предметом ее является изложение и обоснование способов построения изображений пространственных форм на плоскости и способов решения задач геометрического характера по заданным изображениям этих форм. Таким образом, начертательная геометрия является теоретической основой изготовления чертежей и чтения (правильного понимания) этих основополагающих технических документов.

Начертательная геометрия является первой составной частью общеинженерной учебной дисциплины – инженерной графики, включающей в себя также техническое черчение и компьютерную графику.

В определенном смысле, начертательную геометрию считают грамматикой технического языка – чертежа.

Кроме этого, начертательная геометрия имеет существенную функцию в общем, вузовском образовании – интенсифицирует работу пространственного воображения и развивает его. Следует также иметь в виду, что графический способ передачи информации носит интернациональный характер.

Приемы построения изображений пространственных форм на плоскости и сведения о них накапливались постепенно с глубокой древности. Об этом свидетельствуют дошедшие до нас остатки древних культур (наскальные изображения; осколки глиняной посуды с изображением различных бытовых сцен; древние изображения различных инженерных сооружений – кораблей, мостов, крепостей и т.п.).

Плоские рисунки и чертежи выполнялись в виде наглядных изображений. Наглядность превалировала над возможностью измерения-решения метрических вопросов. С развитием техники возникла насущная потребность в разработке методов, обеспечивающих точность и удобоизмеримость плоского изображения.

Систематизацию таких приемов и методов провел французский ученый Гаспар Монж (1746 – 1818) в труде, изданном в 1799 г. под названием "Геометрия начертательная". Изложенный Монжем метод параллельного ортогонального проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости обеспечивает при достаточной наглядности изображения высокую точность измерения пространственного объекта. Этот метод уже два века остается основой составления технических чертежей.

В России начертательная геометрия преподается с 1810 г. впервые в Петербургском Институте корпуса инженеров путей сообщения. В этом высшем учебном заведении преподавал Яков Александрович Севастьянов (1796 – 1846). С его именем связано появление первых сочинений по начертательной геометрии в нашей стране, сначала переведенных с французского языка, а затем оригинального труда "Основания начертательной геометрии" (1821 г.).

Значительный вклад в развитие начертательной геометрии внесли Николай Иванович Макаров (1824 – 1904) – профессор Петербургского технологического института и Валериан Иванович Курдюмов (1853 – 1904) – профессор Петербургского Института инженеров путей сообщения.

Дальнейшее развитие научного содержания начертательной геометрии получило в трудах Евграфа Степановича Федорова (1853 – 1919), Николая Алексеевича Рынина (1877 – 1942).

В настоящее время начертательная геометрия в качестве научной и учебной дисциплины окончательно сформировалась трудами Н.А. Глаголева (1888 – 1945), А.И. Добрякова (1895 – 1947), С.М. Колотова (1888 – 1965), И.И. Котова (1909 – 1976) и многих других.

Г л а в а 1 ТОЧКА, ПРЯМАЯ, ПЛОСКОСТЬ

1.1 Методы проецирования. Проецирование точки

1.1.1 Центральное проецирование

Инструментом получения центральных проекций (центральное проецирование) геометрических объектов является некоторая плоскость π_0 (плоскость проекций) и точка S, не принадлежащая π_0 (центр проекций).

Механизм построения центральных проекций A_0, B_0, C_0, D_0, … точек пространства A, B, C, D, … заключается в проведении проецирующих прямых SA, SB , SC, SD, … до пересечения с плоскостью π_0 (рис. 1.1).

Обращает внимание совпадение центральных проекций точек A, A_1, A_2, A_3, … (следовательно, всех точек проецирующих прямых) и формулируется вывод об отсутствии взаимно однозначного соответствия между центральными проекциями и геометрическими объектами пространства. Очевидно, что положение проекций на плоскости π_0 зависит от положения центра проекций S.

Проецируя ряд точек плоской или пространственной линии (рис. 1.2), получаем центральную проекцию этой кривой.

Отсутствие взаимно однозначного соответствия между проецируемым объектом и его проекцией еще более наглядно в этом случае. Проецирующие прямые в совокупности образуют *коническую* поверхность, называемую проецирующей поверхностью. В связи с этим центральные проекции называются также коническими.

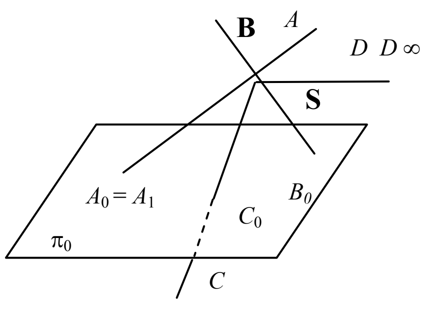


Рис. 1.1 Центральное проецирование точки

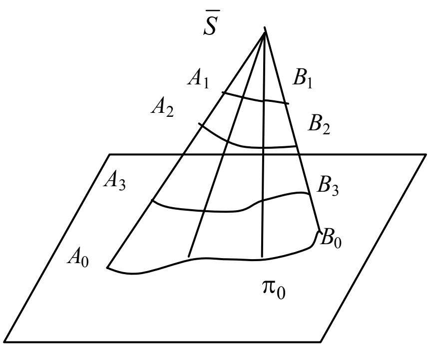


Рис. 1.2 Центральное проецирование кривой

Овладение проецированием точек и линий создает предпосылки для проецирования плоских фигур, пространственных тел и их сочетаний. Центральное проецирование лежит в основе архитектурных изображений и изображений, представляющих собой художественные произведения искусства.

В параллельном (цилиндрическом) проецировании центр проекций считают расположенным на бесконечном удалении от плоскости проекций. Проецирующие прямые параллельны между собой, а в совокупности образуют проецирующую цилиндрическую поверхность.

Инструментом параллельного проецирования (рис. 1.3) являются плоскость проекций π_0 и вектор S, задающий направление проецирующих прямых. Если $S \perp \pi_0$, то параллельное проецирование – косоугольное.
Если $S \perp \pi_0$, то параллельное проецирование – прямоугольное (ортогональное).

В параллельном проецировании так же, как и в центральном, нет взаимно однозначного соответствия между проецируемыми объектами и их проекцией на плоскость π_0. И в параллельном и центральном проецировании:

– прямая линия проецируется в прямую линию, а проецирующей поверхностью является плоскость;

– для построения проекции прямой линии достаточно спроецировать две ее точки и соединить их отрезком прямой;

– если точка принадлежит линии, то проекция этой точки принадлежит проекции этой линии.

Для параллельного проецирования справедливы такие свойства:

– прямая, параллельная S, проецируется в точку;

– отрезок прямой, параллельной π_0, проецируется в натуральную величину.

Убедиться графически в справедливости перечисленных свойств не составит труда.

1.1.2 Проецирование точки по методу Монжа

Для обеспечения взаимно однозначного соответствия между проецируемым объектом и его плоским изображением Г. Монж предложил *метод параллельного, ортогонального проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций*.

Итак, точка пространства A, спроецированная по методу Монжа в системе плоскостей проекций π_1, π_2, имеет единственную пару проекций – горизонтальную A' и фронтальную A''; по заданной паре проекций в этой системе (B', B'') строится единственная точка пространства B. Таким образом, обеспечивается взаимно однозначное соответствие между точкой пространства и парой ее проекций в системе π_1, π_2. Повернем плоскость π_1 вокруг оси X на 90° так, как это показано на рис. 1.4 и, учитывая, что любая плоскость безгранична, получим эпюр Монжа (рис. 1.5).

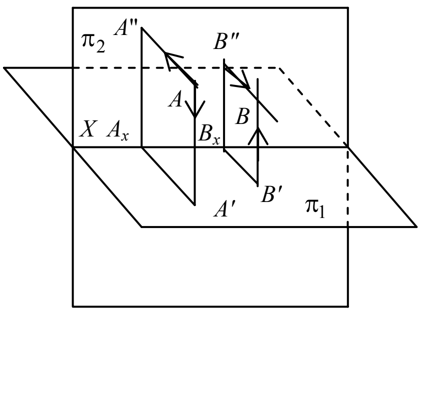
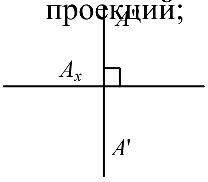


Рис. 1.4 Проекции точки:
π_1 – горизонтальная плоскость проекций;



Линию $A''A' \perp X$ назовем *линией связи*. Эпюр Монжа утратил наглядность в изображении, но приобрел свойства, позволяющие точно отвечать на метрические (связанные с измерением) вопросы. Условимся эпюр Монжа и проекционные изображения, построенные на его основе, называть чертежом.

На чертеже точки A видно, что $A''A_x$ – расстояние точки A от плоскостей π_1; $A'A_x$ – расстояние точки A от плоскости π_2. По этим размерам можно построить и опре-

π_2 – фронтальная плоскость проекций; $AA' \perp \pi_1$; $AA'' \perp \pi_2$; $\pi_1 \perp \pi_2$;
x – ось проекций;
A' – горизонтальная проекция точки A;
A'' – фронтальная проекция точки A

делить расстояние точки A от оси.

При построении чертежей более сложных объектов пространства и решении иных геометрических задач возникает необходимость дополнить систему π_1, π_2 другими плоскостями проекций. Введем новую плоскость проекций π_3 – профильную плоскость проекций. Получим дополнительно к A' и A'' – A''' – профильную проекцию точки A (рис. 1.6).

Рис. 1.5 Эпюр

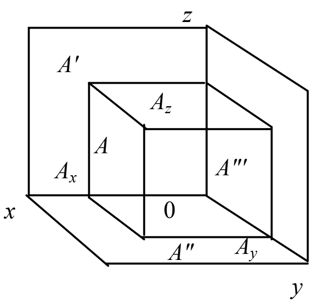


Рис. 1.6 Точка в системе π_1, π_2, π_3

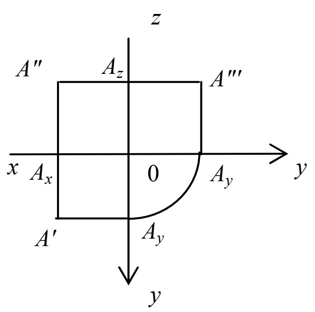


Рис. 1.7 Ортогональные проекции точки

Построение третьей проекции по двум заданным – классическая задача начертательной геометрии и технического черчения (рис. 1.7).

Чертеж геометрического объекта в системе плоскостей проекций π_1, π_2, π_3 дает возможность решать широкий круг задач метрического и позиционного характера.

1.1.3 Система прямоугольных координат

Модель положения точки A в системе плоскостей проекций π_1, π_2, π_3 аналогична модели, которую можно построить, зная прямоугольные "декартовые" координаты точки A. Координаты точки – это числа, выражающие ее расстояние до плоскостей проекций (плоскостей координат). OX, OY, OZ – оси координат, точка O – начало координат.

Точка пространства характеризуется тройкой чисел, которые записываются в скобках в следующей последовательности x, y, z. Например, A (5, 3, 4). Построение чертежа этой точки (рис. 1.8), убеждает, что каждая проекция точки определяется двумя координатами: A' (X, Y); A'' (X, Z); A''' (Y, Z).

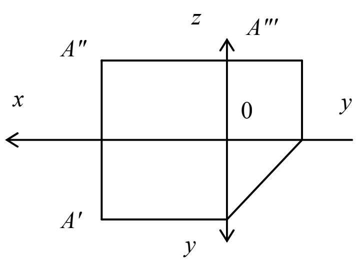


Рис. 1.8 Эпюр точки

Вопросы для самопроверки

1 Сущность центрального и параллельного проецирования.
2 Что представляет собой метод ортогональных проекций (метод Монжа)?
3 Что называется горизонтальной, фронтальной и профильной проекцией точки?
4 Что такое комплексный чертеж (эпюр) точки и механизм его образования?
5 Что называется координатами точки?
6 Какими координатами определяются горизонтальная, фронтальная и профильная проекция точки?
7 Как по чертежу определить расстояние от точки до плоскости проекций?
8 Могут ли совпадать на чертеже горизонтальная и фронтальная проекции точки?
9 Где находятся проекции точки, лежащей в одной из плоскостей проекции?
10 Что означает равенство нулю одной из координат точки?

1.2 Проецирование прямой. Взаимное расположение прямых

1.2.1 Проецирование прямой линии

Прямая линия определяется двумя точками, или одной точкой и направлением. Часть неограниченной по длине прямой, заключенной между двумя точками этой прямой (включая эти точки), называется отрезком прямой. В дальнейшем будем называть прямой линией ее отрезок.

Если на чертеже в системе плоскостей проекций π_1, π_2 или π_1, π_2, π_3 заданы соответствующие проекции двух точек, то, соединив одноименные проекции этих точек, получим чертеж прямой линии, соответственно, в системе двух или трех плоскостей проекций.

На рис. 1.9 представлен отрезок прямой *AB* в системе плоскостей π_1, π_2.

На рис. 1.10 изображен отрезок *BC* в системе плоскостей π_1, π_2, π_3.

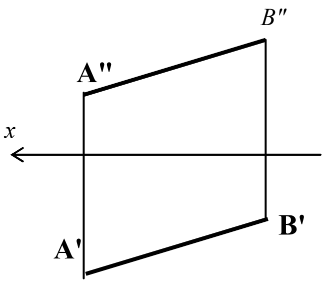


РИС. 1.9 ПРОЕКЦИИ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ В СИСТЕМЕ π_1, π_2

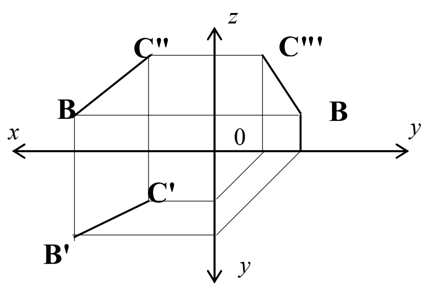


РИС. 1.10 ПРОЕКЦИИ ПРЯМОЙ В СИСТЕМЕ π_1, π_2, π_3

Прямые *AB* и *BC* не параллельны и не перпендикулярны ни к одной из плоскостей проекций. Такие прямые называются *прямыми общего положения*.

Каждая проекция отрезка прямой общего положения меньше самого отрезка прямой.

1.2.2 Частные положения прямой линии относительно плоскостей проекций

Прямую, параллельную одной из плоскостей проекций, называют прямой уровня.

Пусть $AB \parallel \pi_1$. *AB* называется горизонтальной прямой. У горизонтальных прямых горизонтальная проекция равна по длине самой прямой $A'B' = AB$ (рис. 1.11).

На рис. 1.12 изображена прямая $BC \parallel \pi_2$ – фронтальная прямая $B''C'' = BC$.

На рис. 1.13 $CD \parallel \pi_3$ – профильная прямая $C'''D''' = CD$.

Если прямая расположена параллельно двум плоскостям проекций, то она перпендикулярна третьей плоскости проекций. Такая прямая называется проецирующей с добавлением названия плоскости проекций, по отношению к которой прямая перпендикулярна.

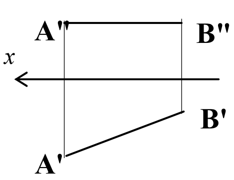


Рис. 1.11 Горизонтальная прямая

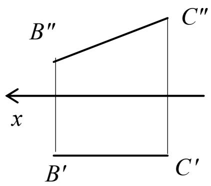


Рис. 1.12 Фронтальная прямая

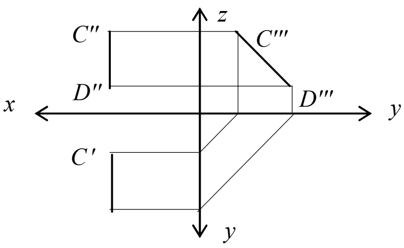


Рис. 1.13 Профильная прямая

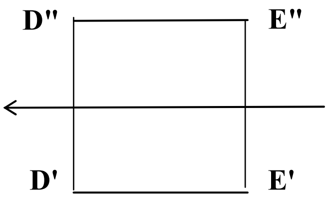


Рис. 1.14 Профильно-проецирующая прямая

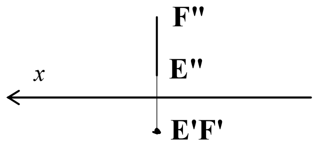


Рис. 1.15 Горизонтально-проецирующая прямая

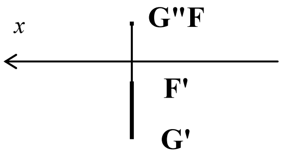


Рис. 1.16 Фронтально-проецирующая прямая

На рис. 1.14 прямая $DE \parallel \pi_1,\ \pi_2, (\perp \pi_3)$ – профильно-проецирующая. $D'E' = D''E'' = DE$.

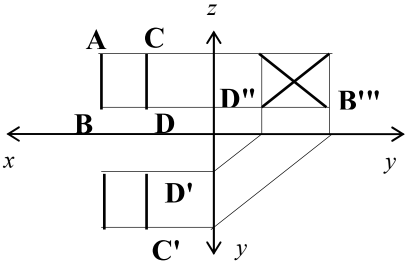
На рис. 1.15 прямая $EF \parallel \pi_2,\ \pi_3, (\perp \pi_1)$ – горизонтально-проецирующая $E''F'' = EF$, $E'''F''' = EF$.

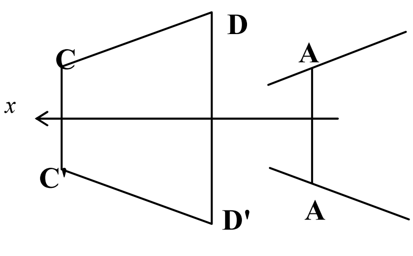
На рис. 1.16 прямая $FG \parallel \pi_1,\ \pi_3, (\perp \pi_2)$ – фронтально-проецирующая. $F'G' = F'''G''' = FG$.

1.2.3 Взаимное положение прямых в пространстве

Параллельные прямые. Одноименные проекции параллельных прямых параллельны между собой. Справедливо ли обратное? Можно ли сделать вывод о параллельности прямых в пространстве, если на чертеже имеются взаимно параллельные соответствующие проекции двух прямых в системе трех плоскостей проекций? Ответ на поставленный вопрос утвердительный. Более того, вывод о параллельности двух прямых в пространстве можно сделать и по чертежу прямых в системе двух плоскостей проекций, если прямые занимают общее положение.

Но для прямых частного положения (например, профильных) нельзя сделать вывод об их параллельности, имея на чертеже параллельность горизонтальных и фронтальных их проекций, соответственно без дополнительного исследования (построения профильной проекции).





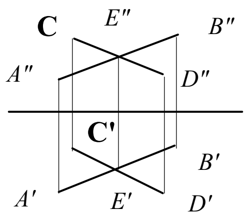


Рис. 1.19 Пересекающиеся прямые

Рис. 1.17 Скрещивающиеся прямые

Рис. 1.18 Параллельные прямые

Так, на рис. 1.17 $A'B' \parallel C'D'$, $A''B'' \parallel C''D''$. Построив $A'''B'''$ и $C'''D'''$, убедились, что AB не параллельна CD в пространстве, так как $A'''B'''$ не параллельна $C'''D'''$.

Если через заданную точку A требуется провести прямую, параллельную заданной прямой CD, то (рис. 1.18) необходимо через A' провести прямую, параллельную $C'D'$, а через A'' провести прямую, параллельную $C''D''$.

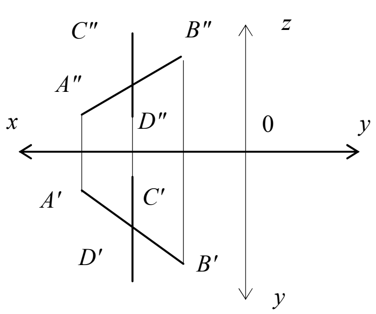
Пересекающиеся прямые. Если прямые линии пересекаются, то их одноименные проекции пересекаются между собой в точке, являющейся точкой пересечения этих прямых (рис. 1.19).

Заключение о том, что данные на чертеже прямые пересекаются, можно сделать всегда по отношению к прямым общего положения, независимо от того, изображены ли они в системе π_1, π_2 или в системе π_1, π_2, π_3.

Необходимым и достаточным условием является лишь то, чтобы точки пересечения одноименных проекций находились на соответствующей линии связи.

Но если одна из данных прямых параллельна какой-либо плоскости проекций, а на чертеже не дана проекция на эту плоскость, то нельзя утверждать, что прямые пересекаются, хотя бы и было соблюдено указанное выше условие, без построения третьей проекции (рис. 1.20).

Скрещивающиеся прямые. Это не пересекающиеся и не параллельные между собой прямые. На рис. 1.21 изображены AB и CD, у которых отсутствуют признаки пересекающихся и параллельных прямых. В точках пересечения одноименных проекций этих прямых располагаются по две точки,



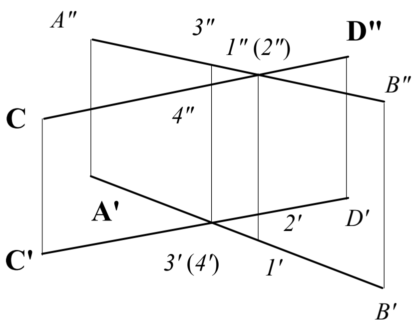


Рис. 1.20 Пересекающиеся прямые

Рис. 1.21 Скрещивающиеся прямые

конкурирующие на видимость. Из двух точек *1*, *2*, расположенных на одном фронтально-проецирующем луче, видимой является точка *1*, так как она ближе к наблюдателю. Точка *3* и *4* конкурируют на видимость на плоскости π_1. Видимой является точка *3*, ближняя к наблюдателю. Проекции невидимых (загороженных) точек помещены в скобках.

Вопросы для самопроверки

1 Какие частные положения может занимать в пространстве прямая?
2 Когда длина проекции отрезка равна самому отрезку?
3 В каком случае проекция прямой обращается в точку?
4 Как расположены проекции прямой, лежащей в одной из плоскостей проекций?
5 Как расположена фронтальная проекция отрезка прямой, если его горизонтальная проекция равна самому отрезку?
6 Как могут быть взаимно расположены в пространстве две прямые?
7 Что на чертеже служит признаком параллельности прямых в пространстве?
8 Что на чертеже служит признаком пересечения прямых в пространстве?
9 Что представляет собой точка пересечения проекций двух скрещивающихся прямых?

1.2.4 Точка на прямой

Если известно, что $C \in AB$, то $C' \in A'B'$, $C'' \in A''B''$, $C''' \in A'''B'''$. На рис. 1.22, по заданной C' точки $C \in AB$, построена C''. На рис. 1.23 точка C принадлежит профильной прямой AB. По заданной C'' построить C'. Точка C делит отрезок AB в определенном отношении. Важнейшим свойством параллельного проецирования является $\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'} = \frac{A''C''}{C''B''} = \frac{A'''C'''}{C'''B'''}$.

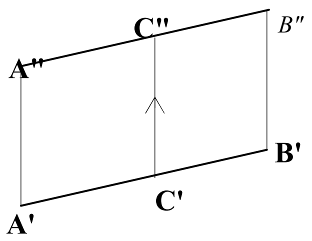


Рис. 1.22 Точка на прямой

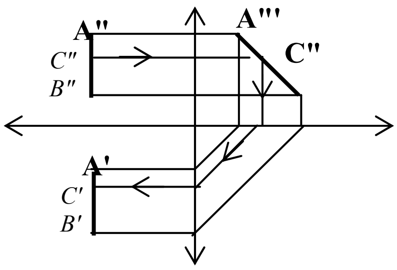


Рис. 1.23 Точка на прямой в системе π_1, π_2, π_3

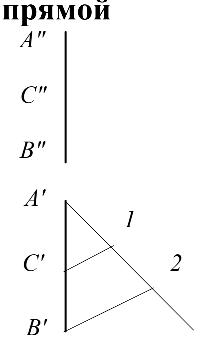


Рис. 1.24 Деление отрезка прямой

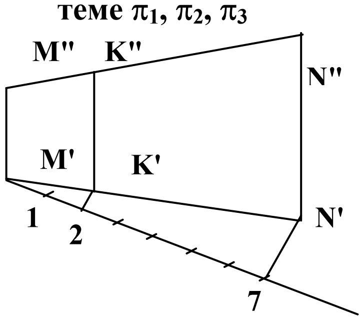


Рис. 1.25 Деление отрезка прямой в заданном отношении

Этим свойством можно воспользоваться для построения C' по заданной C'' (или наоборот) без построения профильной проекции (рис. 1.24).

Из A' под произвольным углом проводим луч, на котором отложим отрезки $A'\,1 = A''C''$ и $A'\,2 = A''B''$. Соединив *2* с B' и проведя линию $1C' \parallel 2B'$, получим искомую проекцию C', так как $\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{A'1}{12} = \frac{A''C''}{C''B''}$.

1 2

На рис. 1.25 этим методом отрезок MN разделен точкой K в заданном отношении $\frac{MK}{KN} = \frac{2}{5}$.

1.2.5 Следы прямой

Следом прямой называется точка пересечения ее с плоскостью проекций. У прямой общего положения имеется три следа – горизонтальный (M), фронтальный (N) и профильный (P). $M \equiv M'$; $N \equiv N''$; $P \equiv P'''$. Прямая не имеет следа на плоскости проекций, если она параллельна этой плоскости.

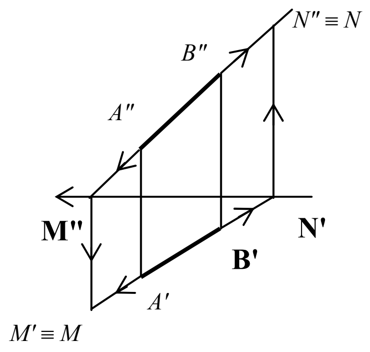


Рис. 1.26 Следы прямой общего положения

Рассмотрим следы прямой общего положения AB в системе π_1, π_2 (рис. 1.26), где M – горизонтальный след; M' – горизонтальная проекция горизонтального следа ($M' \equiv M$); M'' – фронтальная проекция горизонтального следа (располагается на оси x); N – фронтальный след; N' – горизонтальная проекция фронтального следа (располагается на оси x); N'' – фронтальная проекция фронтального следа ($N'' \equiv N$).

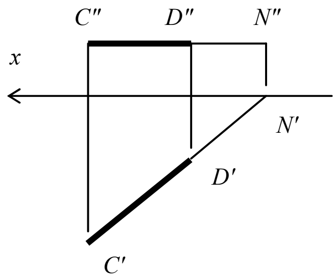


Рис. 1.27 След горизонтальной прямой

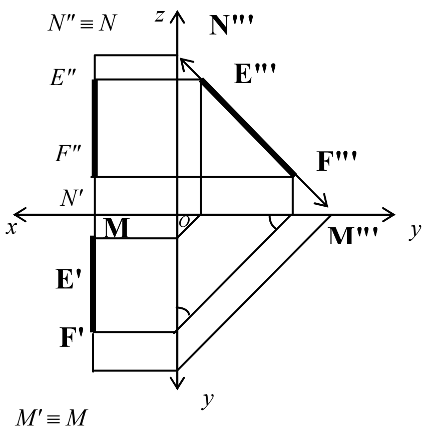
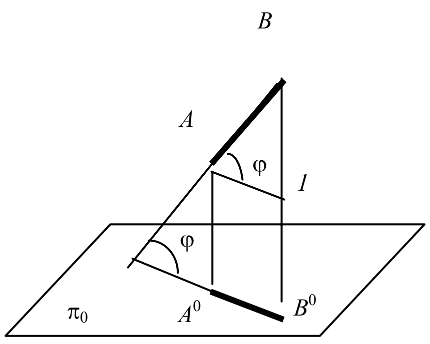


Рис. 1.28 Следы профильной прямой

На рис. 1.27 у горизонтальной прямой CD нет горизонтального следа.

На рис. 1.28 показано построение следов профильной прямой EF. В системе трех плоскостей координат: $z_M = 0$; $y_N = 0$; $x_P = 0$.

1.2.6 Определение длины отрезка прямой общего положения и углов наклона его к плоскостям π_1 и π_2



Для прямых частного положения чертеж непосредственно дает возможность определить длину отрезка прямой и угол наклона его к соответствующей плоскости проекции.

Рассмотрим отрезок прямой общего положения AB и его проекцию на плоскость π_0 (рис. 1.29). AB – гипотенуза прямоугольного $\Delta AB1$; $A1 = A^0B^0$; $B1 = BB^0 - AA^0$; φ – острый угол, противолежащий катету $B1$; $A1 = A^0B^0 = AB\cos\varphi$.

Рис. 1.29 Метод прямоугольного треугольника

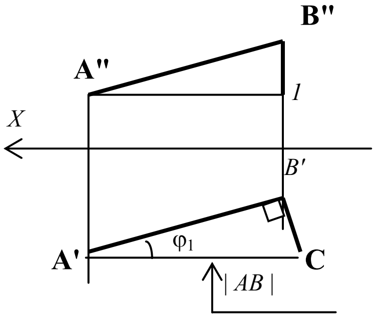


Рис. 1.30 Прямоугольный треугольник на *A'B'*

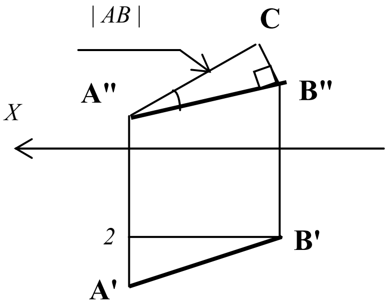


Рис. 1.31 Прямоугольный треугольник на *A''B''*

Угол прямой линии с плоскостью проекции (φ) определяется как угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

ТАКИМ ОБРАЗОМ, ЗНАЯ ПО ЧЕРТЕЖУ КАТЕТЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА, МОЖНО ПОСТРОИТЬ ЕГО В ЛЮБОМ ДРУГОМ МЕСТЕ ЧЕРТЕЖА И ОПРЕДЕЛИТЬ ИНТЕРЕСУЮЩУЮ НАС ДЛИНУ ОТРЕЗКА ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ (ГИПОТЕНУЗА) И УГОЛ НАКЛОНА ЕГО К ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ (УГОЛ, ПРОТИВОПОЛОЖЕННЫЙ КАТЕТУ, РАВНЫЙ РАЗНОСТИ РАССТОЯНИЙ КОНЦОВ ОТРЕЗКА ОТ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ).

На рис. 1.30 в $\Delta A'B'C$ $\angle A'B'C = 90^\circ$; $B'C = B''1$; φ_1 – угол наклона отрезка AB к плоскости проекций π_1. Длина отрезка AB равна гипотенузе $A'C$.

На рис. 1.31 $CB''=A'2$; φ_2 – угол наклона AB к плоскости π_2, длина отрезка $AB = A''C$.

Рассмотренный метод решения метрических задач носит название *метода прямоугольного треугольника.*

1.2.7 Проекции плоских углов

Будем обозначать углы строчными буквами латинского алфавита μ, ρ, σ, φ и ω.

1 Если плоскость, в которой расположен некоторый угол, перпендикулярна к плоскости проекций, то он проецируется на эту плоскость в виде прямой линии.

2 Если плоскость прямого угла не перпендикулярна к плоскости проекций и хотя бы одна его сторона параллельна этой плоскости, то прямой угол проецируется в виде прямого угла.

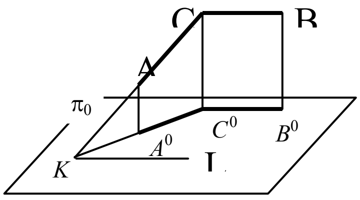


Рис. 1.32 Проекции углов

Дано: $\angle ACB = 90^\circ$, $CB \parallel \pi_0$.

Докажем, что $\angle A^0C^0B^0 = 90^\circ$.

Выполним дополнительные построения (рис. 1.32): $CB \parallel C^0B^0$; $KL \parallel C^0B^0$ (по построению); $KL \parallel CB$; $\angle CKL = 90^\circ$.

Согласно теореме о трех перпендикулярах: если $KL \perp C^0K$, то $KL \perp CK$. Согласно обратной теореме: если $KL \perp CK$, то $KL \perp C^0K$. Следовательно, $\angle A^0C^0B^0 = 90^\circ$.

Верно и обратное утверждение, на основе которого можно сделать вывод, что углы ABC и DEF – прямые (рис. 1.33).

3 Если плоскость тупого или острого угла не перпендикулярна к плоскости проекций и хотя бы одна из его сторон параллельна плоскости проекций, то проекция тупого угла на эту плоскость есть тупой угол, проекция острого угла – острый угол.

4 Если обе стороны любого угла параллельны плоскости проекций, то его проекция равна по величине проецируемому углу.

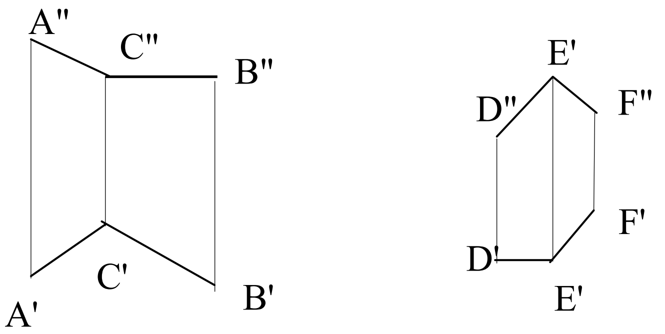


Рис. 1.33 Проекции прямых углов

Вопросы для самопроверки

1 Каким углом измеряется угол межу прямой и плоскостью?

2 Каков порядок определения натуральной величины отрезка методом прямоугольного треугольника?

3 Как определить углы наклона отрезка общего положения к горизонтальной или фронтальной плоскостям проекций?

4 Сформулировать условие принадлежности точки прямой на чертеже.

5 Как на чертеже разделить отрезок прямой в данном отношении?

6 Что называется следом прямой?

7 Какая прямая имеет один, два и три следа в системе трех плоскостей проекций?

8 Может ли прямая иметь горизонтальный и фронтальный следы, сливающиеся в одну точку на чертеже?

9 Как построить следы прямой и их проекции на чертеже?

10 Когда прямой угол проецируется в виде прямого угла на одну из плоскостей проекций? На две плоскости проекций?

1.3 Плоскость. Принадлежность точки и прямой плоскости

1.3.1 Способы задания плоскости на чертеже

Плоскость будем обозначать строчными буквами греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$. Плоскость на чертеже может быть задана:

– тремя точками, не лежащими на одной прямой;
– прямой и точкой, не лежащей на этой прямой;
– двумя пересекающимися прямыми;
– двумя параллельными прямыми;
– плоской фигурой.

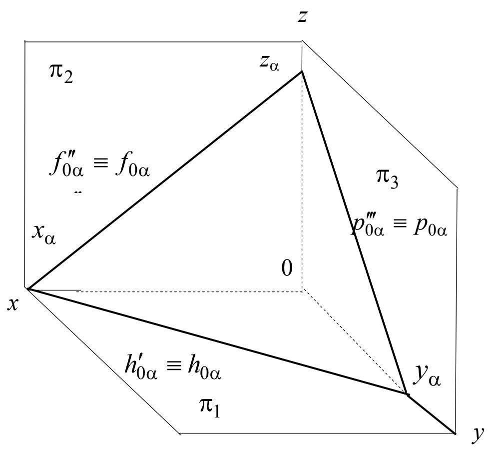
Каждый из перечисленных способов задания плоскости простейшими геометрическими построениями может быть преобразован в любой другой.

Более наглядно и графически экономно плоскость задается следами (рис. 1.34, 1.35).След плоскости – это прямая, по которой она пересекается с плоскостью проекций.

Плоскость α в общем случае может иметь три следа – горизонтальный $(h_{0\alpha})$, фронтальный $(f_{0\alpha})$ и профильный ($p_{0\alpha}$).

Если плоскость α пересекает оси проекций, то в этих точках пересекаются два соответствующих следа плоскости. Эти точки называются точками схода следов $(x_\alpha,\ y_\alpha,\ z_\alpha)$ и по ним может быть построена плоскость.

Рассматривая след плоскости в качестве прямой пространства, имеем в виду, что одна из проекций этой прямой совпадает со следом $(f''_{0\alpha} \equiv f_{0\alpha};\ h'_{0\alpha} \equiv h_{0\alpha};\ p'''_{0\alpha} \equiv p_{0\alpha})$, а вторая располагается на оси проекции.



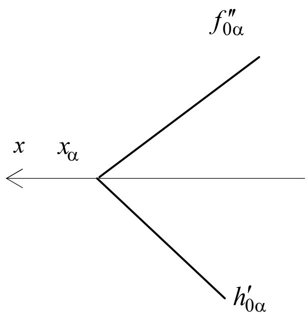


РИС. 1.34 ПЛОСКОСТЬ В СИСТЕМЕ π_1, π_2, π_3

РИС. 1.35 СЛЕДЫ ПЛОСКОСТИ

1.3.2 Прямая и точка в плоскости

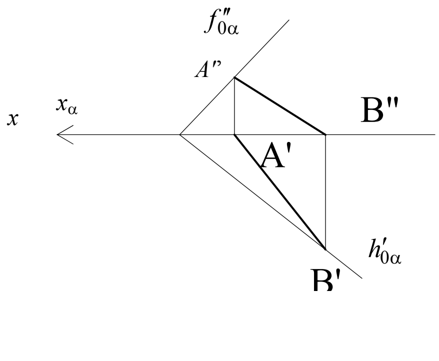
ПОСТРОЕНИЕ НА ЧЕРТЕЖЕ ПРЯМОЙ В ЗАДАННОЙ ПЛОСКОСТИ ОСНОВАНО НА ДВУХ АКСИОМАХ.

1 Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости.

2 Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через точку, принадлежащую данной плоскости и параллельна прямой, находящейся в этой плоскости или параллельной ей.

На рис. 1.36 прямая $AB \in \alpha$, так как $A \in f_{0\alpha}$, а $B \in h_{0\alpha}$.

На рис. 1.37 прямая $MN \in \beta$, так как $M \in \beta$ и $MN \parallel h_{0\beta}$.



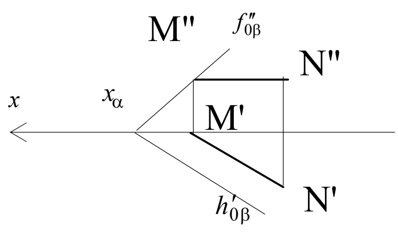


РИС. 1.36 ПРЯМАЯ $AB \in \alpha$

РИС. 1.37 ПРЯМАЯ $MN \in \alpha$

ЧТОБЫ ПОСТРОИТЬ ТОЧКУ, ПРИНАДЛЕЖАЩУЮ ДАННОЙ ПЛОСКОСТИ, НЕОБХОДИМО В ЭТОЙ ПЛОСКОСТИ ПОСТРОИТЬ ПРЯМУЮ И НА НЕЙ ПОСТРОИТЬ ТОЧКУ.

НА РИС. 1.38 *E* ПРИНАДЛЕЖИТ ПЛОСКОСТИ, ОПРЕДЕЛЕННОЙ ΔABC, ТАК КАК $AD \in ABC$, А $E \in AD$.

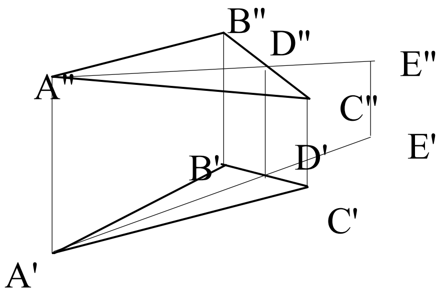


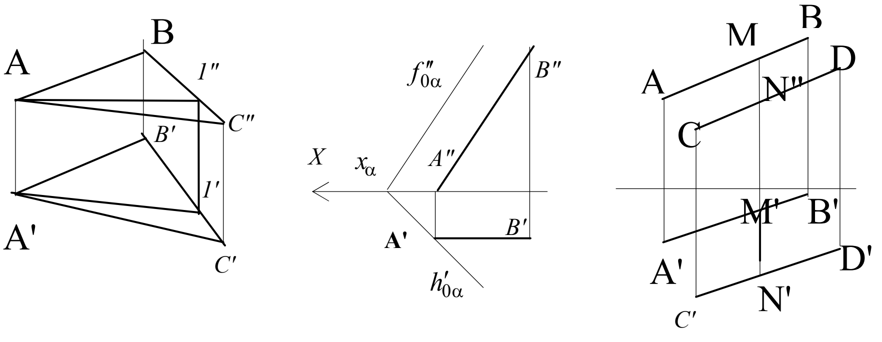
РИС. 1.38 ТОЧКА *E* ПРИНАДЛЕЖИТ ПЛОСКОСТИ $\Delta\, ABC$

1.3.3 Прямые особого положения в плоскости

Прямые, принадлежащие плоскости и расположенные параллельно плоскостям проекций π_1, π_2, π_3, соответственно называются горизонталями, фронталями и профильными прямыми плоскости. Их общим названием является – линии уровня.

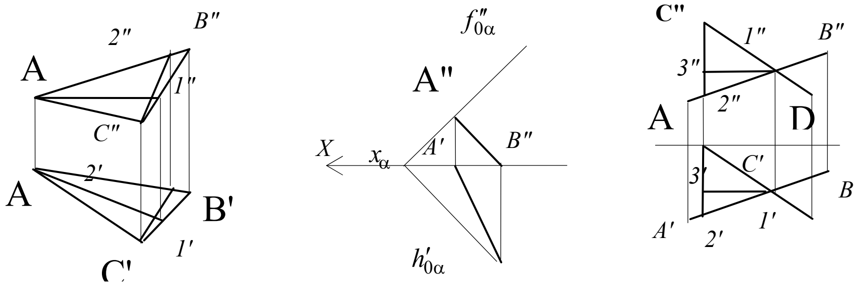
На рис. 1.39 показаны главные линии плоскости: *а* – *A1* – горизонталь плоскости ABC; *б* – AB – фронталь плоскости α; *в* – MN – профильная прямая плоскости, заданной параллельными прямыми AB и CD.

Прямые, принадлежащие плоскости и перпендикулярные к горизонталям, фронталям или профильным прямым этой плоскости, называются линиями наибольшего наклона плоскости, соответственно к плоскостям проекций π_1, π_2, π_3.



а) *б*) *в*)

Рис. 1.39 Главные линии плоскости:
а – горизонталь; *б* – фронталь; *в* – профильная прямая



а) *б*) *в*)

Рис. 1.40 Линии наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций

Линия наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций имеет второе название – линия ската плоскости.

На рис. 1.40, *а* – прямая *C1* – линия ската плоскости ΔABC; *б* – прямая AB – линия наибольшего наклона плоскости α к плоскости π_2; *в* – прямая *1 – 3* – линия наибольшего наклона плоскости, заданной пересекающимися прямыми AB и CD, к плоскости π_3.

Линии особого положения плоскости применяются в виде вспомогательных при различных геометрических построениях.

Рассмотрим пример (рис. 1.41).

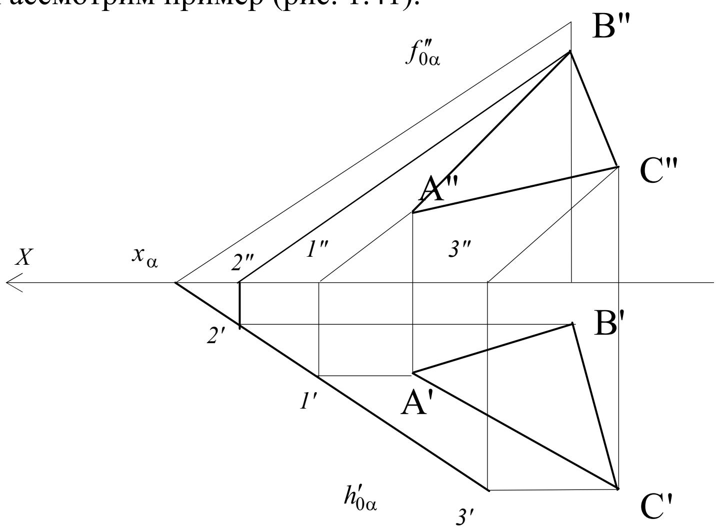


Рис. 1.41 Построение фронтальной проекции ΔABC
по заданной горизонтальной с помощью фронталей

Требуется построить фронтальную проекцию ΔABC, расположенного в плоскости α, по заданной горизонтальной.

Проведем через вершины ΔABC фронтали *A1*, *B2*, *C3* в качестве вспомогательных и на фронтальных проекциях *A"1"*, *B"2"*, *C"3"* построим проекции *A"*, *B"*, *C"*, определяющие искомую фронтальную проекцию ΔABC.

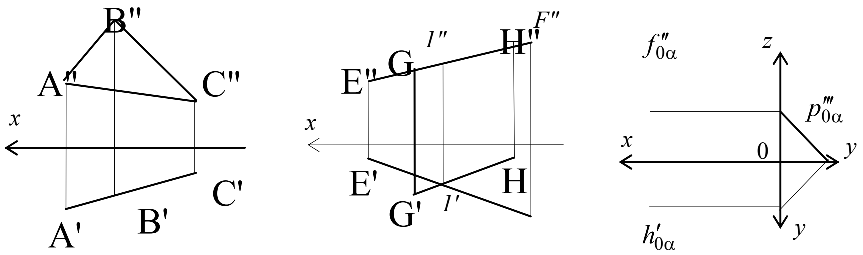
1.3.4 Положение плоскости относительно плоскостей проекций

1 Все плоскости, рассматриваемые нами раньше, могут быть объединены общим признаком – они не перпендикулярны и не параллельны ни к одной из плоскостей проекций π_1, π_2, π_3. Такие плоскости называются – плоскостями общего положения. Плоскости общего положения пересекают каждую ось проекций, следы этих плоскостей не перпендикулярны к осям x, y, z.

2 Плоскости, перпендикулярные к одной из плоскостей проекций π_1, π_2, π_3, называются горизонтально-, фронтально- и профильно-проецирующими.

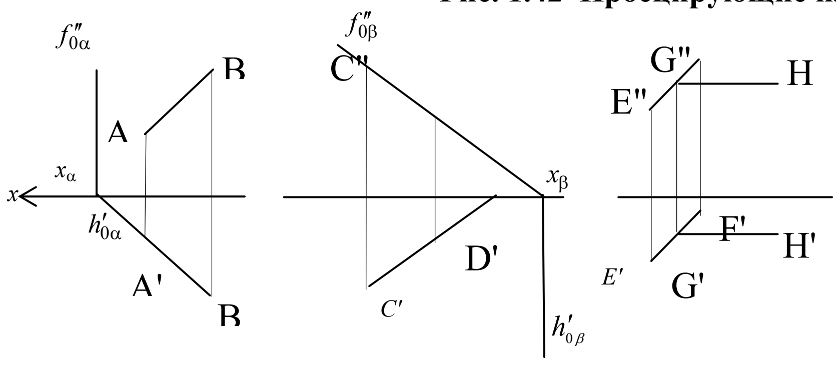
На рис. 1.42, *а* плоскость ΔABC – горизонтально-проецирующая; *б* – плоскость, заданная двумя пересекающимися прямыми *EF* и *GH* – фронтально-проецирующая; *в* – плоскость α, заданная следами – профильно-проецирующая.

Через прямую общего положения можно провести любую проецирующую плоскость. На рис. 1.43, *а* через прямую *AB* проведена горизонтально-проецирующая плоскость α; *б* – через прямую *CD* проведена фронтально-проецирующая плоскость β; *в* – через прямую *EF* проведена профильно-проецирующая плоскость, определяемая пересекающимися прямыми *EF* и *GH* (*GH* – профильная прямая).



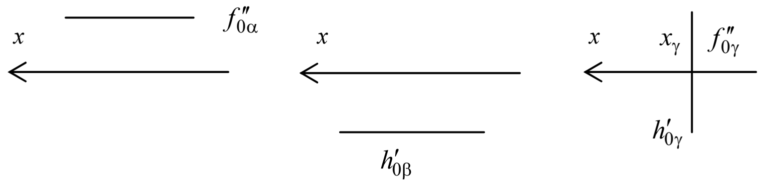
а) *б*) *в*)

Рис. 1.42 Проецирующие плоскости



а) *б*) *в*)

Рис. 1.43 Проведение через прямую проецирующих плоскостей



а) *б*) *в*)

Рис. 1.44 Следы плоскостей уровня

3 Плоскости, перпендикулярные к двум плоскостям проекций (параллельные третьей плоскости проекций), объединены общим названием – плоскости уровня.

Плоскость $\alpha \perp \pi_2, \pi_3 (\| \pi_1)$ – горизонтальная (рис. 1.44, *а*).

Плоскость $\beta \perp \pi_1, \pi_3 (\| \pi_2)$ – фронтальная (рис. 1.44, *б*).

Плоскость $\gamma \perp \pi_1, \pi_2 (\| \pi_3)$ – профильная (рис. 1.44, *в*).

Вопросы для самопроверки

1 Какими способами можно задать плоскость на чертеже?
2 Что называется следом плоскости?
3 Где располагаются следы прямой, лежащей в плоскости, заданной следами?
4 Как построить след плоскости?
5 Где находятся не обозначаемые проекции следов плоскости?
6 Каковы отличительные признаки плоскостей частного положения?
7 Чему равен в пространстве угол между горизонтальным и фронтальным следами для горизонтально-проецирующей плоскости?
8 Сформулируйте признак принадлежности точки плоскости.
9 Когда прямая принадлежит данной плоскости?
10 Что называется горизонталью, фронталью и линией наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций?
11 Какие плоскости можно провести через прямую общего положения?
12 Какие плоскости можно провести через прямую частного положения?

1.3.5 Взаимное положение двух плоскостей в пространстве

Две плоскости могут быть параллельными или пересекающимися.

Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым второй плоскости, то такие плоскости параллельны.

На рис. 1.45 $\alpha \| \beta$, так как $f''_{0\alpha} \| f''_{0\beta}$ и $h'_{0\alpha} \| h'_{0\beta}$.

Если признак параллельности не имеет места, то плоскости пересекаются между собой. При задании плоскостей не следами, а каким-либо иным способом, для определения их взаимного положения в пространстве следует осуществить некоторые вспомогательные построения. Примеры этих построений будут даны при дальнейшем изложении.

Взаимное положение прямой линии и плоскости. Прямая линия может

- принадлежать плоскости;
- быть параллельной плоскости;
- пересекать плоскость.

Признаки, характеризующие принадлежность, были рассмотрены раньше.

Признак параллельности: если прямая параллельна какой-либо прямой, принадлежащей плоскости, то она параллельна самой плоскости.

Рассмотрим пересечение прямой и плоскости, т.е. рассмотрим порядок построения их общей точки.

Наиболее просто эта задача решается, когда плоскость занимает одно из частных положений. Ведь плоскость, перпендикулярная к плоскости проекций, проециру-

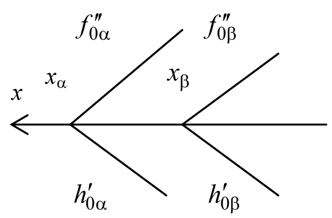


Рис. 1.45 Плоскости параллельные

ется на эту плоскость в виде прямой линии, на которой и находится соответствующая проекция искомой точки. Остальные проекции этой точки строятся на основе принадлежности ее заданной прямой.

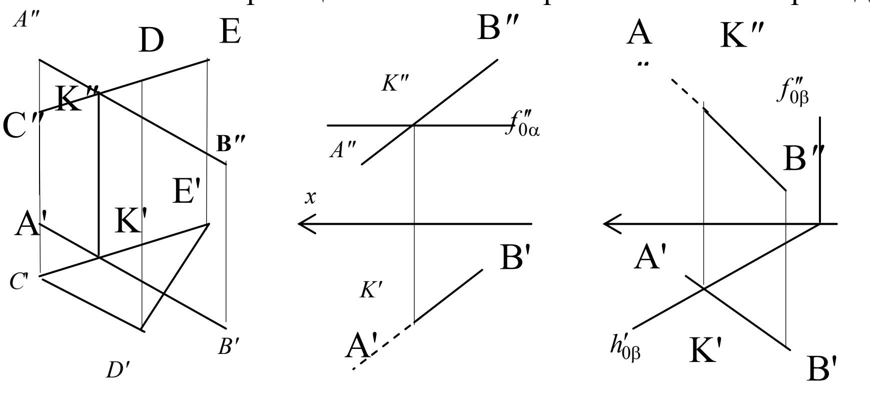
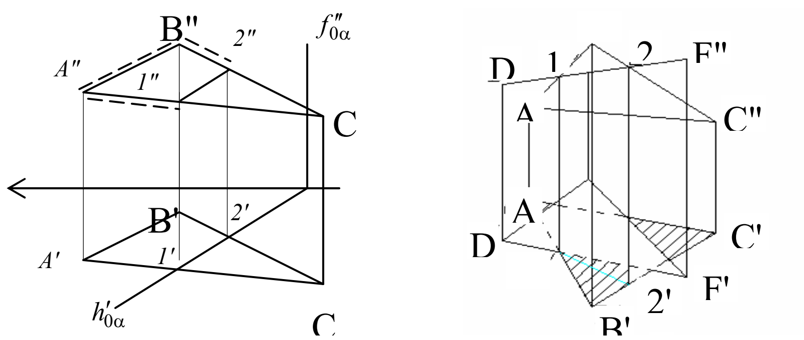


Рис. 1.46 Пересечение прямой с плоскостью

На рис. 1.46 рассмотрены некоторые случаи пересечения прямой *AB* с плоскостями частного положения.

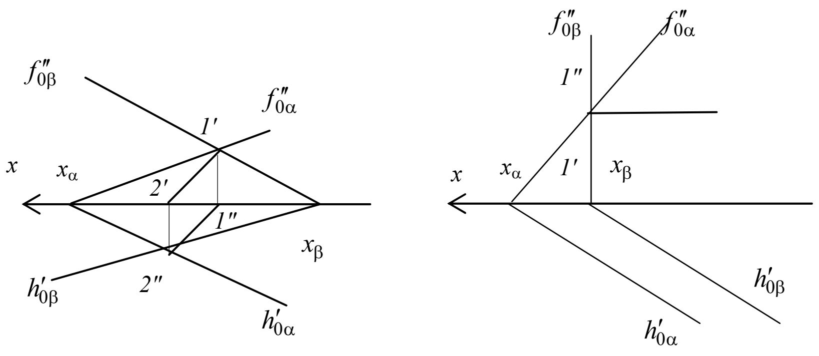
Условно считаем плоскости непрозрачными. Поэтому точка встречи прямой с плоскостью делит прямую на видимую (сплошная) и невидимую (штриховая) части, определяемые методом конкурирующих точек.

Построение линий пересечений двух плоскостей. Прямая линия, получаемая при взаимном пересечении двух плоскостей, определяется двумя точками, каждая из которых принадлежит обеим плоскостям. Так на рис. 1.47, *а* линия пересечения *1-2* горизонтально-проецирующей плоскости α и плоскости ΔABC определена точками пересечения сторон треугольника AC и BC с плоскостью α, а на рис. 1.47, *б* линия *1–2* есть линия пересечения ΔABC (общего положения) и плоскости ΔDEF (фронтально-проецирующая).

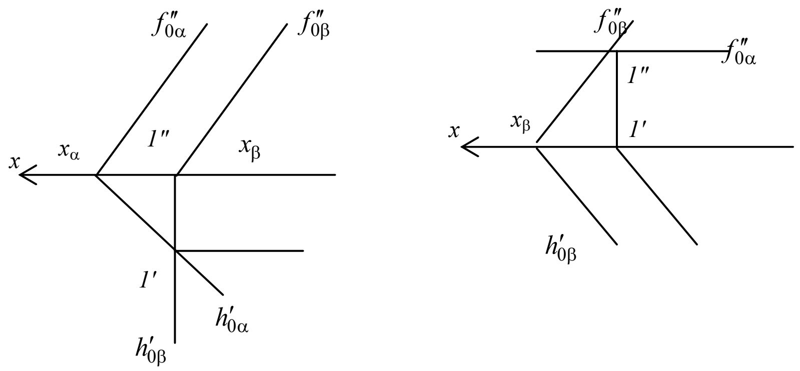


а б

Рис. 1.47 Пересечение плоскостей



в)   *г*)



д)   *е*)

Рис. 1.47   Окончание

На рис. 1.47, *в* две плоскости общего положения α и β, заданные следами, пересекаются по линии *1-2*.

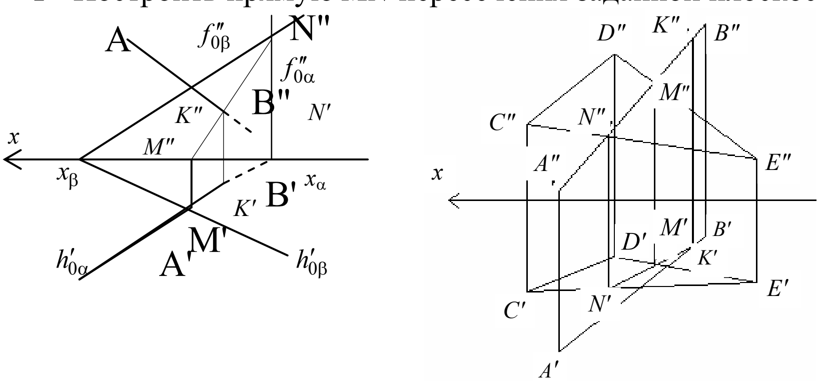
На рис. 1.47, *г – е* линия пересечения плоскостей α и β определяется точкой и направлением.

1.3.6 Пересечение прямой линии с плоскостью общего положения

ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПЛОСКОСТЬЮ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ НЕОБХОДИМО ВЫПОЛНИТЬ СЛЕДУЮЩЕЕ:

1 Через заданную прямую *AB* провести вспомогательную плоскость α.

2 Построить прямую *MN* пересечения заданной плоскости с плоскостью α.

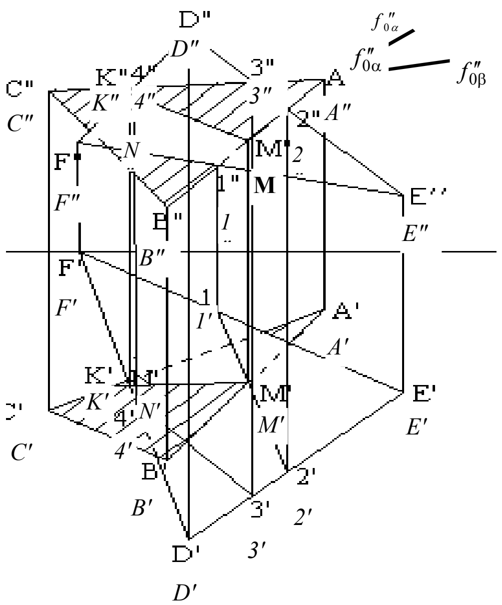


а)   *б*)

РИС. 1.48 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ

3 Определить положение точки пересечения прямых *AB* и *MN*.

На рис. 1.48, *а* построена точка *K* пересечения прямой *AB* с плоскостью общего положения β, заданной следами, *б* – с плоскостью, заданной треугольником ΔCDE .



Построение линий пересечения двух плоскостей. На рис. 1.49 рассматривается построение линий пересечения *MN* двух плоскостей общего положения, заданных ΔABC и ΔCDF.

AB заключена в плоскость α – фронтально-проецирующую, пересекающую ΔCDF по линии *1 – 2*, имеющую общую точку *M* с прямой *AB*.

AC заключена в плоскость β – фронтально-проецирующую, пересекающую ΔCDF по линии *3 – 4*, имеющей общую точку *K* с прямой *AC*.

Таким образом, линия *MK* есть линия пересечения двух заданных плоскостей, а отрезок *MN* – общая линия для заданных треугольников.

Вопросы для самопроверки

1 Какое взаимное положение в пространстве могут занимать две плоскости?

2 В чем заключается алгоритм построения линии пересечения двух плоскостей?

3 Какие плоскости обычно применяются в качестве вспомогательных при построении линии пересечения двух плоскостей и почему?

4 Где располагаются следы прямой пересечения двух плоскостей, заданных следами?

5 Что представляет собой линия пересечения плоскости общего положения с плоскостью уровня?

6 Где располагается одна из проекций точки пересечения плоскости общего положения с проецирующей линией?

7 Как найти точку пересечения прямой с плоскостями, проецирующими и уровня?

8 В чем заключается алгоритм построения точки пересечения прямой линии с плоскостью?

9 Как определить видимость на чертеже при пересечении прямой с плоскостью?

1.3.7 Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна любой прямой в плоскости.

Через заданную точку пространства можно провести бесчисленное множество прямых линий, параллельных заданной плоскости.

Для единственности решения задачи требуется дополнительное условие.

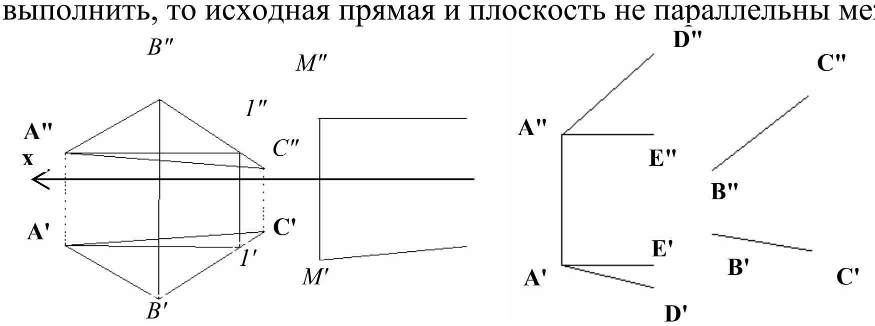
На рис. 1.50, *а* проведена прямая через точку *M* параллельно плоскости ΔABC и плоскости π_1.

Обратная задача (рис. 1.50, *б*). Через заданную точку *A* провести плоскость параллельно заданной прямой *BC*.

Задача имеет множество решений, т.е. через точку *A* может быть проведено множество плоскостей, параллельных прямой *BC*, образующих пучок с осью *AD*, параллельной *BC*. На рисунке проведена одна из возможных плоскостей, заданных двумя пересекающимися прямыми *AB* и *AE*.

Как установить, параллельна ли данная прямая и данная плоскость?

Можно попытаться в плоскости провести прямую, параллельную за данной прямой. Если это нельзя выполнить, то исходная прямая и плоскость не параллельны между собой.



а) *б*)

Рис. 1.50 Параллельность прямой и плоскости

Можно попытаться найти точку пересечения заданных прямой и плоскости. Если такая точка существует, то прямая и плоскость не параллельны между собой.

1.3.7 Параллельность плоскостей

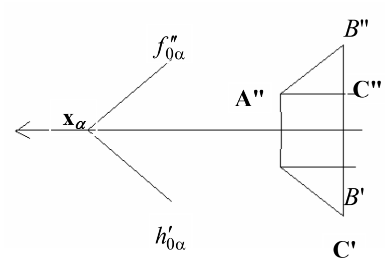


Рис. 1.51 Параллельность

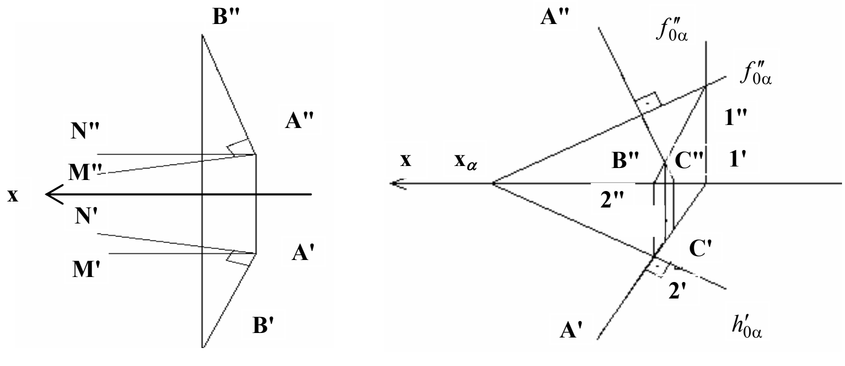
На основании признака параллельности плоскостей (п. 1.3.5) через заданную точку пространства можно построить плоскость, параллельную заданной плоскости, задав ее любым известным способом.

Так на рис. 1.51 через точку A проведена плоскость, заданная двумя пересекающимися прямыми AB и AC, параллельно плоскости α.

$ABC \parallel \alpha$, так как $AB \parallel f_{0\alpha}$; $AC \parallel h_{0\alpha}$.

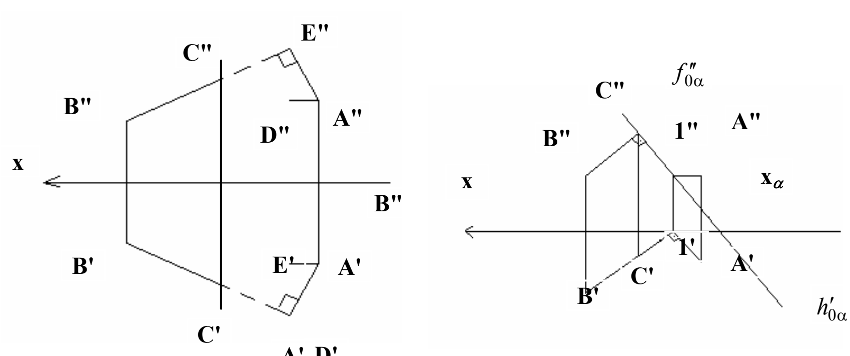
1.3.8 Взаимно перпендикулярные прямая и плоскость

Перпендикуляр к плоскости перпендикулярен к любой прямой этой плоскости, проведенной через точку их пересечения. Выбрав из этого множества прямых горизонталь и фронталь и зная особенность проецирования прямого угла, приходим к выводу: *горизонтальная проекция перпендикуляра к плоскости перпендикулярна к горизонтальной проекции ее горизонтали, а фронтальная проекция перпендикуляра к плоскости перпендикулярна к фронтальной проекции ее фронтали.*



а) *б)*

Рис. 1.52 Перпендикулярные прямая и плоскость



а) *б)*

Рис. 1.53 Задание плоскости:

а – горизонталью и фронталью; *б* – следами

На рис. 1.52, *а* – из точки *A* плоскости, заданной горизонталью *AN* и фронталью *AM*, восстановлен перпендикуляр *AB*; *б* – из точки *A* опущен перпендикуляр *AC* на плоскость α, заданную следами (нулевыми горизонталью и фронталью), и построена точка *B* – пересечение перпендикуляра и плоскости.

Через точку пространства *A* можно провести плоскость перпендикулярно к заданному отрезку *BC*.

На рис. 1.53, *а* эта плоскость задана горизонталью *AD* и фронталью *AE*, *б* – следами.

1.3.9 Взаимно перпендикулярные прямые

Рассмотрим, как из точки *A* опустить перпендикуляр *AD* на прямую общего положения *BC* (рис. 1.54).

Порядок построения:

1) Через точку *A* проведем плоскость, перпендикулярную к *BC*, задав ее фронталью *AH* и горизонталью *AF*.
2) Построим точку *D* пересечения *BC* с этой плоскостью.
3) Проведем прямую *AD*. Она и будет перпендикулярна к заданной прямой *BC*.

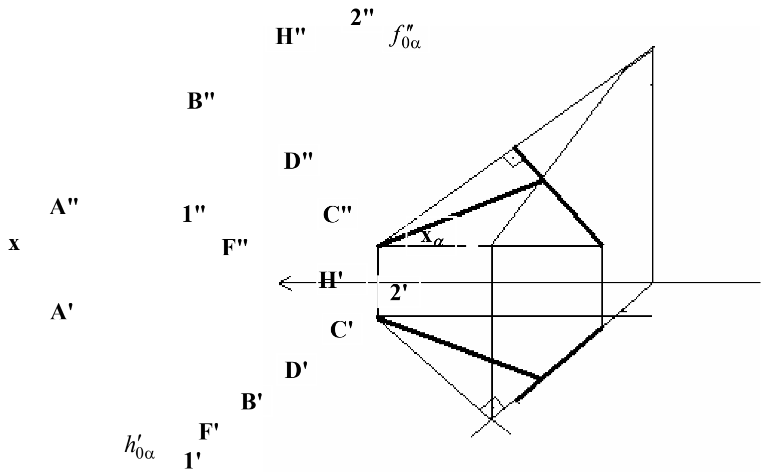


Рис. 1.54 Перпендикулярные прямые

1.3.10 Взаимно перпендикулярные плоскости

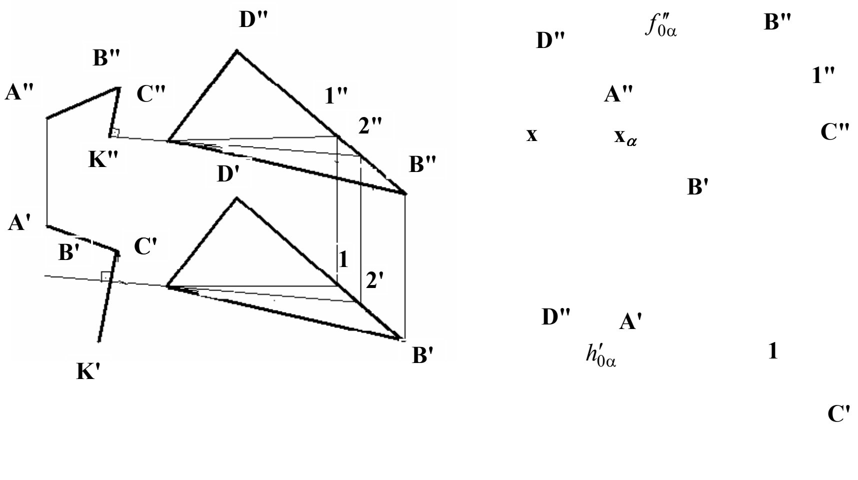
Построение плоскости β, перпендикулярной к плоскости α, может быть проведено двумя способами:

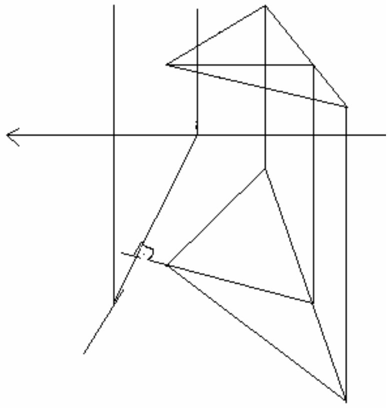
– β проводится перпендикулярно к какой-либо прямой, проведенной в α.
– β проводится через перпендикуляр к плоскости α.

И первый, и второй вариант предполагают множество решений. Для получения единственного решения требуются дополнительные условия.

На рис. 1.55, *а* плоскость *ABK* ⊥ *CDE* проходит через заданную прямую *AB* и перпендикуляр *BK* к плоскости *CDE*. Плоскость *ABK* задана двумя пересекающимися прямыми, т.е. определена однозначно.

На рис. 1.55, *б* плоскость α проходит через заданную точку *D* ⊥ *ABC* и π_1, так как проведена перпендикулярно к горизонтали *A1*.





а) *б*)

РИС. 1.55 ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ

Вопросы для самопроверки

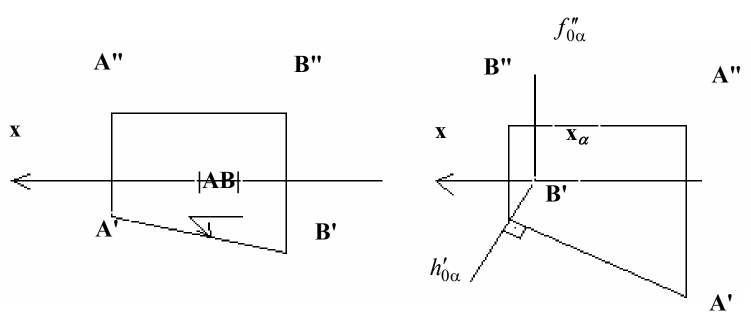
1 Как располагаются проекции прямой, перпендикулярной к плоскости общего положения?
2 Как из точки, принадлежащей плоскости, восстановить перпендикуляр?
3 Как определить натуральную величину расстояния от точки до фронтально-проецирующей плоскости.
4 Как через точку провести плоскость, перпендикулярную к заданной прямой?
5 Как опустить перпендикуляр из точки на прямую общего положения?
6 Сформулировать признак перпендикулярности двух плоскостей.
7 Как через прямую провести плоскость, перпендикулярную заданной плоскости?
8 Сформулировать признак параллельности прямой и плоскости.
9 Как через прямую провести плоскость, параллельную другой плоскости?
10 Как через точку провести плоскость, параллельную данной плоскости?

Глава 2 СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

2.1 Обзор способов преобразования чертежа

Частные положения геометрических объектов относительно плоскостей проекций существенно упрощают решение метрических задач на основе чертежа.

Например, длина отрезка $AB = A'B'$ (рис. 2.1, *а*); расстояние от точки A до плоскости α – $A'B'$ (рис. 2.1, *б*); линейный угол двугранного угла при ребре AB – φ (рис. 2.1, *в*); форма и размер ΔABC есть $\Delta A''B''C''$ (рис. 2.1, *г*) и т.п.



а) *б*)

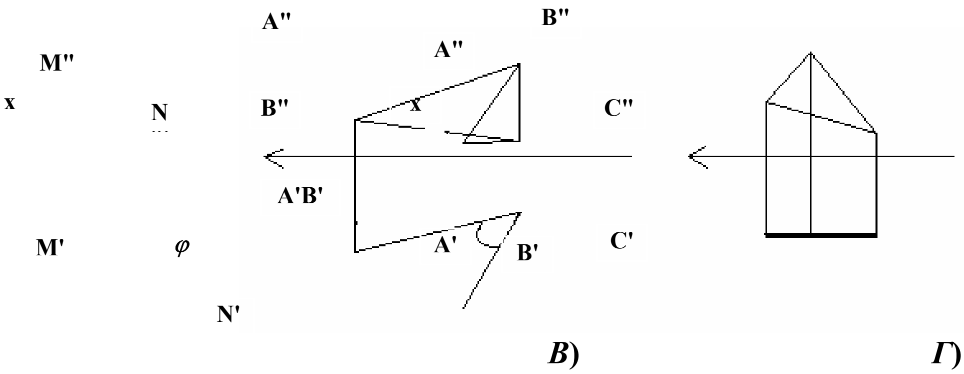


РИС. 2.1 ПРИМЕРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

На рис. 2.1, *а – г* интересующий нас объект занимает частное положение относительно системы плоскостей проекций π_1, π_2.

Необходимо иметь возможность переводить геометрический объект из общего положения в частное. Этого можно достигать двумя принципиально различными способами.

1 Геометрический объект остается неподвижным в пространстве, а система плоскостей проекций π_1, π_2 дополняется плоскостями проекций удобно расположенными относительно объекта геометрического исследования. Этим характеризуется *способ перемены плоскостей проекций.*

2 Геометрический объект перемещать из общего положения в частное, позволяющее получить ответ на поставленный метрический вопрос. При этом система π_1, π_2 остается неизменной и неподвижной. В этом преобразовании заключается суть всех методов вращения.

2.2 Преобразование чертежа заменой плоскостей проекций

Вводимые в чертеж дополнительные плоскости проекций должны давать возможность применять метод Монжа, следовательно, они должны располагаться перпендикулярно либо к плоскости π_1, либо к плоскости π_2, либо к ранее введенным плоскостям проекций.

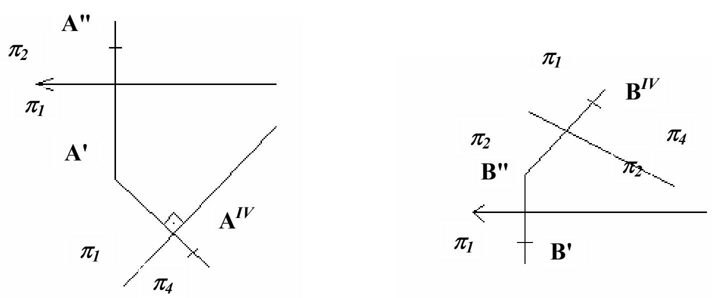
В ряде случаев задача может быть решена введением одной дополнительной плоскости проекций. Для других случаев необходимо последовательно вводить большее количество дополнительных плоскостей.

Рассмотрим поведение точки в новой системе плоскостей проекций.

На рис. 2.2, *а* введена плоскость π_4 – горизонтально-проецирующая (напомним, что π_3 мы обозначаем профильную плоскость проекций). Ее горизонтальный след принимается за новую ось проекций, обозначаемую π_1/π_4.

Проекция точки *A* на плоскости π_4 обозначается A^{IV} и получается методом параллельного ортогонального проецирования. Чертеж точки *A* в системе плоскостей проекций π_1, π_2 и в системе π_1, π_4 связывает общая координата, характеризующая расстояние точки *A* от общей для этих систем плоскости π_1.

На рис. 2.2, *б* новая плоскость π_4 – фронтально-проецирующая. Ее фронтальный след принимается за новую ось проекций, а "связывающей" координатой точки *B* является Y_B в системе π_1, π_2.



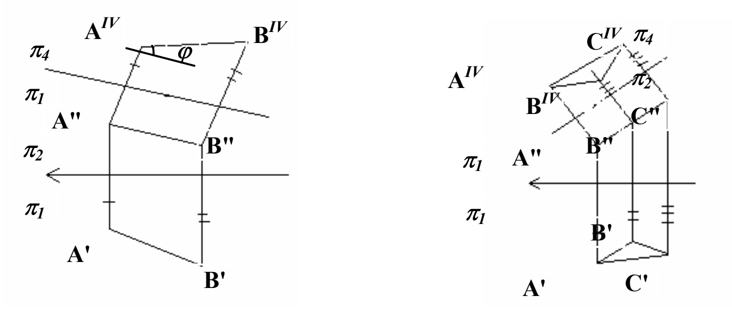
а) *б*)

РИС. 2.2 ПОСТРОЕНИЕ ТОЧКИ В НОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Овладев построением чертежа точек в новой системе плоскостей проекций, мы можем теперь изображать любой геометрический объект в измененной системе.

2.2.1 Введение в систему π_1, π_2 одной плоскости проекций

Многие метрические задачи решаются введением в систему плоскостей π_1, π_2 лишь одной дополнительной плоскости π_4. На рис. 2.3, *а* плоскость $\pi_4 \perp \pi_2$ введена для определения угла наклона отрезка *AB* к плоскости π_2. Плоскость π_4 расположена параллельно *AB*.



***А*)** ***Б*)**

РИС. 2.3 ЗАМЕНА ПЛОСКОСТИ π_1

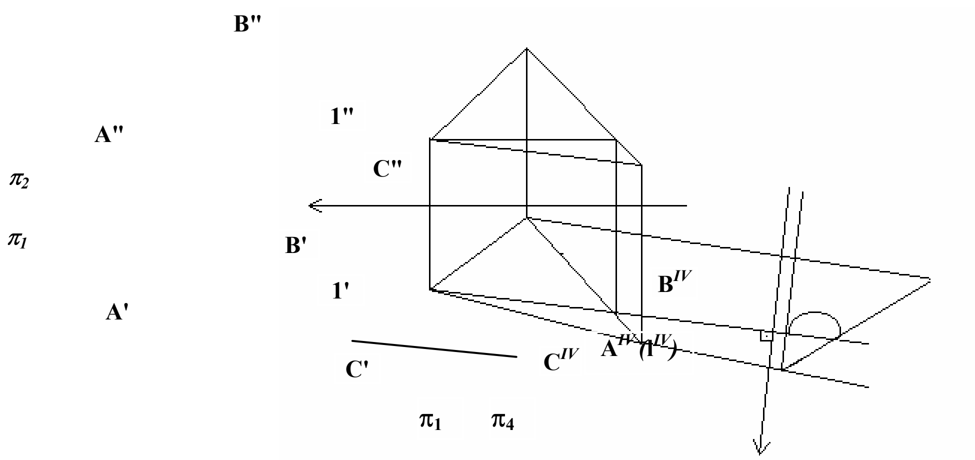
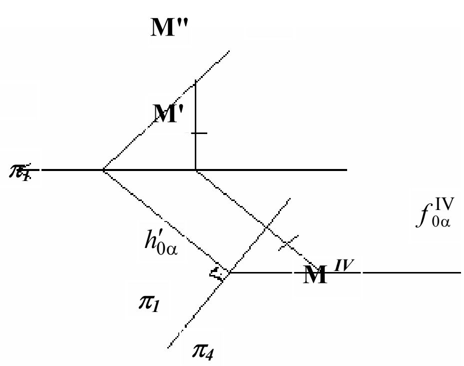


Рис. 2.4 Замена плоскости π_2

На рис. 2.3, *б* расположение плоскости π_4 продиктовано необходимостью определения натурального вида ΔABC.



Угол наклона плоскости общего положения, заданной ΔABC, к плоскости π_1 определя-

ется на проекции этого треугольника на плоскости
$\pi_4 \perp \pi_1$ ($\pi_4 \perp A1$) – горизонтали ΔABC (рис. 2.4).

Рис. 2.5 Замена плоскости

На рис. 2.5 плоскость общего положения α введением $\pi_4 \perp \pi_1$ ($\pi_4 \perp h'_{0\alpha}$) переведена в π_4 – проецирующее положение.

Определено расстояние от точки K до плоскости α. $\pi_4 \perp \pi_1$, $\pi_4 \perp \alpha$ (рис. 2.6).

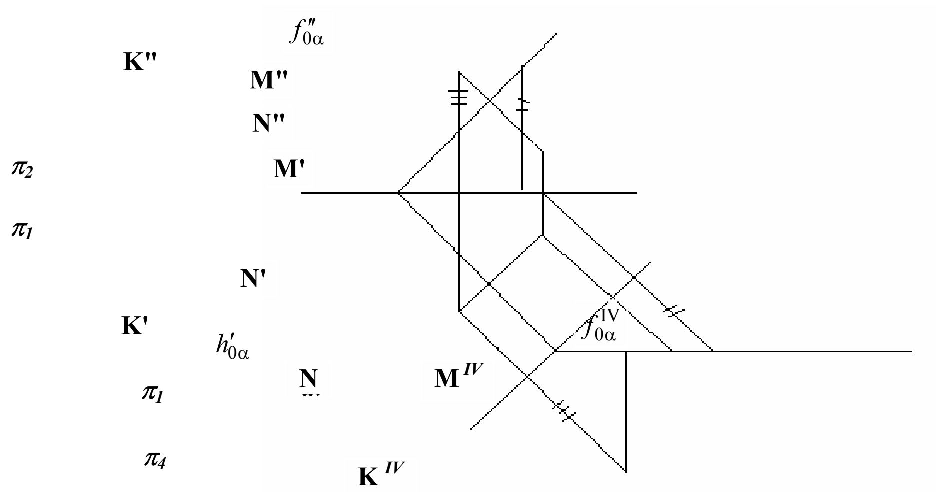
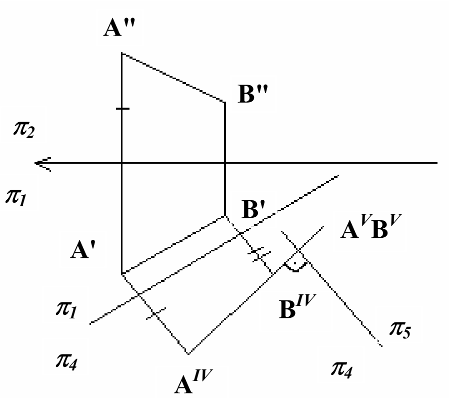


Рис. 2.6 Замена плоскости π_2

2.2.2 Введение в систему π_1, π_2 двух плоскостей проекций



Рассмотрим следующие примеры.

1 Прямую общего положения AB перевести в положение проецирующей прямой. На рис. 2.7 $\pi_4 \perp \pi_1$, $\pi_4 \parallel AB$; $\pi_5 \perp \pi_4$, $\pi_5 \perp AB$.

2 Определить натуральный вид ΔABC, расположенного в плоскости общего положения. На рис. 2.8 $\pi_4 \perp \pi_1$, $\pi_4 \perp A1$; $\pi_5 \perp \pi_4$, $\pi_5 \parallel ABC$.

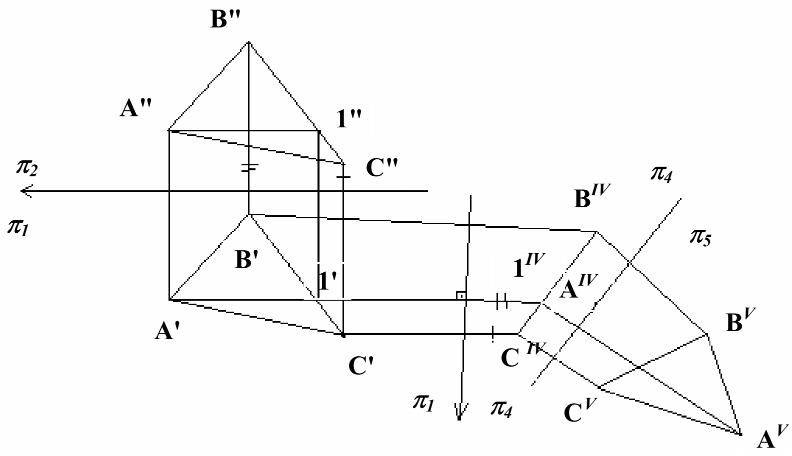


РИС. 2.8 ЗАМЕНА ПЛОСКОСТЕЙ

Вопросы для самопроверки

1 В чем состоит способ замены плоскостей проекций?

2 Какие координаты точек остаются неизменными при замене горизонтальной (фронтальной) плоскости проекций?

3 Как надо располагать новые плоскости проекций, чтобы отрезок прямой общего положения спроецировался в натуральную величину; в точку?

4 Как расположить новую плоскость проекций, чтобы заданная плоскость стала проецирующей?

5 При каком расположении треугольника можно определить его натуральную величину с помощью замены только одной плоскости проекций?

6 В каком случае двугранный угол между плоскостями проецируется на плоскость проекций в натуральную величину?

2.3 Преобразование чертежа вращением. Основные понятия

При вращении вокруг некоторой неподвижной прямой (оси вращения) каждая точка вращаемого геометрического объекта перемещается в плоскости, перпендикулярной к оси вращения (плоскость вращения). Точка перемещается по окружности, центр которой – в точке пересечения оси с плоскостью вращения (центр вращения); радиус этой окружности равен расстоянию от вращаемой точки до центра (радиус вращения).

Ось вращения может быть задана или выбрана, в последнем случае выгодно расположить ось перпендикулярно к одной из плоскостей проекций, либо расположить ее в одной из плоскостей проекций.

На рис. 2.9 A – вращаемая точка; $O''O$ – ось вращения ($\perp\pi_2$); α – плоскость вращения ($\parallel\pi_2$); O – центр вращения ($\alpha \perp O''O$); OA – радиус вращения.

Очевидный вывод:

В плоскости проекций, перпендикулярной к оси вращения, проекция вращаемой точки (*A″*) описывает круговую траекторию, повторяющую траекторию точки *A* в плоскости α; в плоскости, параллельной оси вращения, проекция вращаемой точки перемещается по следу плоскости вращения (по прямой, параллельной оси вращения).

Таким образом, одна из проекций вращаемого объекта, не меняя своей формы и размеров, перемещается и занимает новое положение в своей плоскости проекций, а все точки проекции объекта во второй плоскости проекций перемещаются параллельно оси проекций, так как каждая точка и объекта, и его проекций поворачивается на один и тот же угол.

2.3.1 Вращение вокруг проецирующих прямых

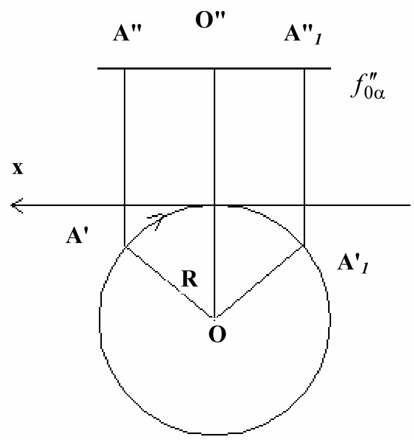


Рис. 2.10 Вращение вокруг проецирующей оси

На рис. 2.10 *A* – вращаемая точка, ось вращения – горизонтально-проецирующая, плоскость вращения точки *A* – α – горизонтальная и радиус вращения точки *A* – *O′A′*. Точка *A* может перейти в положение *A1*, вращаясь в двух противоположных направлениях.

Предлагается изобразить графически вращение точки вокруг фронтально-проецирующей оси и указать все элементы вращения.

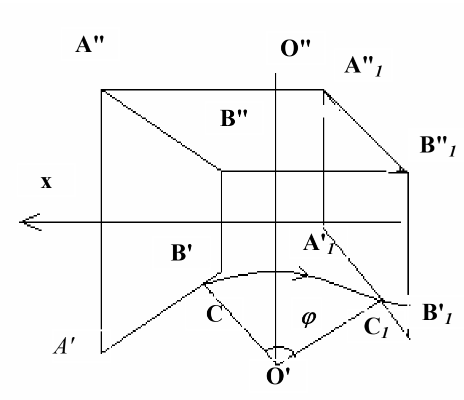


Рис. 2.11 Вращение прямой линии

При повороте отрезка прямой естественно осуществить поворот двух его концевых точек на один и тот же угол или поступить так, как это показано на рис. 2.11.

Проекция $A'B'$ жестко связана с проекцией центра вращения O' перпендикуляром $O'C$. Проведем поворот отрезка на угол φ. Построение $A'_1B'_1$ и $A''_1B''_1$ понятно из чертежа.

Поворот плоскости вокруг проецирующей оси сводится к повороту ее точек и прямых линий. Например, поворот треугольника, задающего плоскость общего положения, можно осуществить, вращая три его вершины на один и тот же угол (т.е. трижды повторить построения рис. 2.10) или поступить графически по принципу, показанному на рис. 2.11.

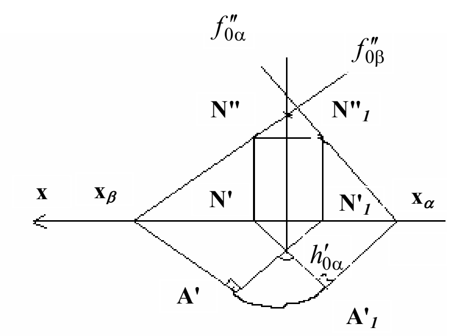


Рис. 2.12 Вращение следов плоскости

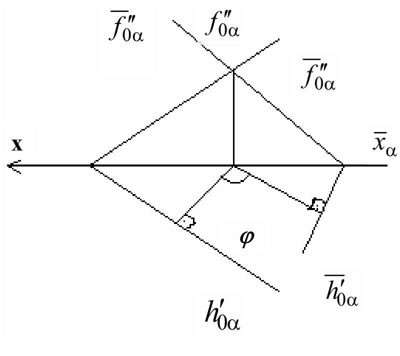


Рис. 2.13 Вращения плоскости

При повороте плоскости, заданной следами, вращается один из следов и ее соответствующая линия частного положения (рис. 2.12).

При этом повороте не меняется высота горизонтали плоскости α, проведенной через точку пересечения α и оси

f"$_{0\alpha}$ $\bar{f}''_{0\alpha}$ $h'_{0\alpha}$

x x$_\alpha$ O" $\bar{x}_\alpha$

φ

$\bar{h}'_{0\alpha}$ h"$_{0\alpha}$

$\bar{f}''_{0\alpha}$

вращения.

Когда положение оси враще-ния можно выбрать, то это необходимо делать из соображения меньшего объема графической работы (рис. 2.13).

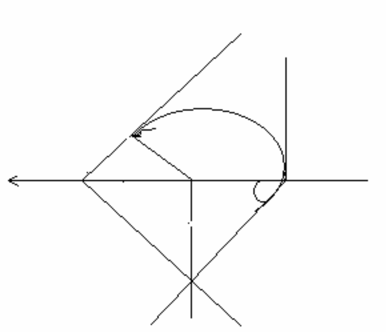


Рис. 2.14 Определение угла наклона

Например, плоскость α общего положения поворотом вокруг проецирующей оси перевести в горизонтально-проецирующее положение и определить ее угол наклона к площади π_2 (рис. 2.14).

2.3.2 Вращение без указания осей вращения

При вращении геометрических объектов вокруг проецирующих прямых рационально не только выбирать удобное положение оси вращения, но и не указывать вообще ее положения. При этом графическую процедуру построения нового положения вращаемого объекта следует основывать на принципах, отмеченных ранее [1, с. 38]. Этот способ преобразования чертежа называется плоско-параллельным перемещением.

Пример. Определить истинную форму треугольника *ABC*, лежащего в плоскости общего положения (рис. 2.15).

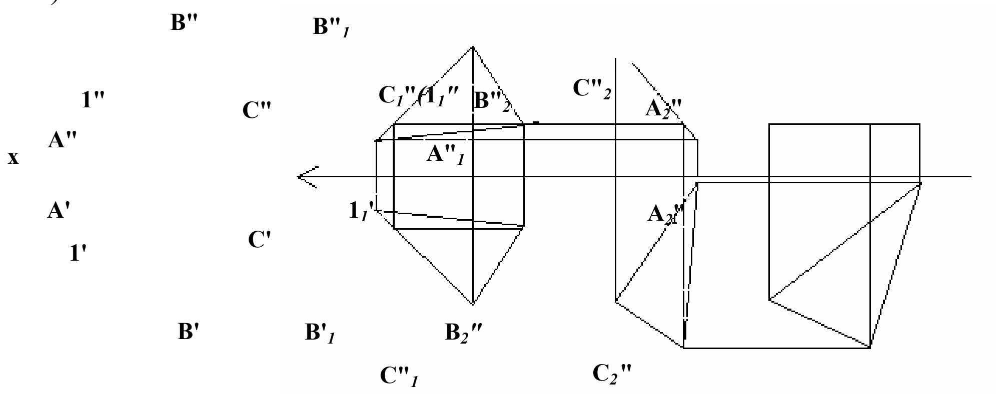
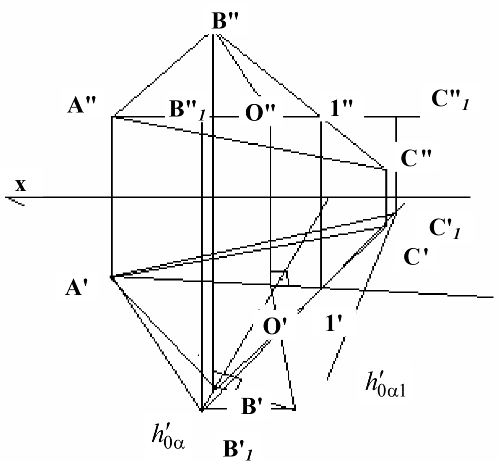


Рис. 2.15 Вращение без указания осей

Первое вращение выполнено вокруг некоторой горизонтально-проецирующей прямой и плоскость ΔABC переведена во фронтально-проецирующее положение. Ориентиром этого преобразования явилась горизонталь *C1*. Вторым вращением плоскость ΔABC переведена в горизонтальное положение вокруг некоторой фронтально-проецирующей прямой и, следовательно, $A'_2B'_2C'_2$ – есть истинная форма ΔABC.

2.3.3 Вращение вокруг линии уровня



Для определения формы и размеров плоской фигуры ее можно повернуть вокруг горизонтали (до положения горизонтального), либо вокруг фронтали (до положения фронтального).

На рис. 2.16 ΔABC из общего положения переведен в горизонтальное положение вращением вокруг горизонтали $A1$ и $A'B_1'C_1'$ – есть истинная форма этой фигуры.

Точки A' и $1'$ – неподвижны, так как принадлежат оси вращения. Вращаются вершины B и C.

Вершина B вращается в плоскости $\alpha \perp A'1'$. Точка O – центр вращения точки B. BO – радиус вращения точки B, его длина определена методом прямоугольного треугольника. Вершина B переместилась в положение B'_1. Вершина C'_1 построена на пересечении плоскости вращения точки C (a_1) с отрезком прямой $B'_1 1'$.

2.3.4 Способ совмещения

Вращение плоскости, заданной следами, целесообразно проводить вокруг одного из следов до совмещения с соответствующей плоскостью проекций. На рис. 2.17 определена длина отрезка AB, принадлежащего плоскости общего положения α, заданной следами, методом совмещения с плоскостью π_1, т.е. вращения вокруг горизонтального следа $h'_{0\alpha}$.

Совмещение положения фронтального следа $f_{0\alpha}''$ построено из следующих соображений: X_α неподвижна; β – плоскость вращения точки 1; O – центр вращения точки 1; $O1$ – радиус вращения точки 1. Он определен методом прямоугольного треугольника.

Положение точек A и B в совмещенном положении построены, как точки, принадлежащие соответствующим горизонталям плоскости α – $A1$ и $B2$.

Вопросы для самопроверки

1 В чем заключается способ вращения?
2 Назвать элементы вращения.
3 Как перемещаются проекции точки относительно плоскостей проекций при вращении ее вокруг горизонтально-проецирующей оси?
4 Какая из проекций отрезка прямой или плоской фигуры не изменяет своей величины (формы) при вращении вокруг фронтально-проецирующей оси?
5 Как прямую общего положения повернуть до положения проецирующей прямой?
6 Какую проецирующую прямую следует принять за ось вращения, чтобы плоскость общего положения стала в результате вращения фронтально-проецирующей?
7 В чем состоит сущность способа плоскопараллельного перемещения?
8 В какой проецирующей плоскости перемещается точка при вращении вокруг горизонтали; фронтали?
9 Как определить радиус вращения точки при ее вращении вокруг горизонтали; фронтали?
10 Что является осью вращения при совмещении заданной плоскости с горизонтальной (фронтальной) плоскостью проекции?

Глава 3 ПОВЕРХНОСТИ

Все поверхности можно разделить на две группы: многогранные и кривые [1, 2].

3.1 Многогранники

3.1.1 Общие понятия о многогранных поверхностях

Многогранной называется поверхность, образованная частями пересекающихся плоскостей. Отсеки плоскостей называются гранями, а линии их пересечения – ребрами. Точки пересечения ребер называются вершинами.

Среди многогранников большую группу составляют правильные многогранники.

Существует пять правильных многогранников.

1 Четырехгранник (тетраэдр) – это правильная трехгранная пирамида (рис. 3.1). Ее поверхность ограничена четырьмя равносторонними треугольниками.

2 Шестигранник или куб. Его поверхность состоит из шести квадратов (рис. 3.2). Куб (гексаэдр) представляет собой частный случай призмы и параллелепипеда.

3 Восьмигранник (октаэдр). Его поверхность состоит из восьми равносторонних треугольников (рис. 3.3).

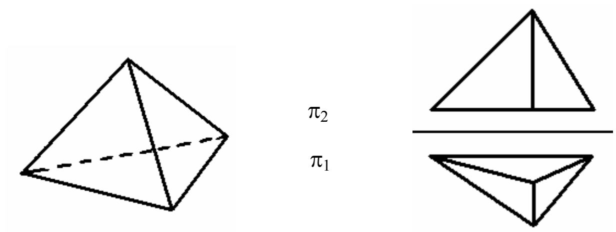
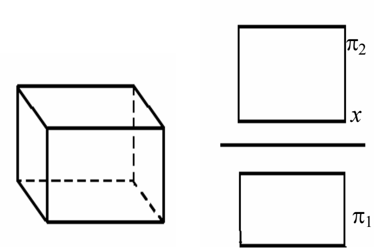


Рис. 3.1 Трехгранная пирамида



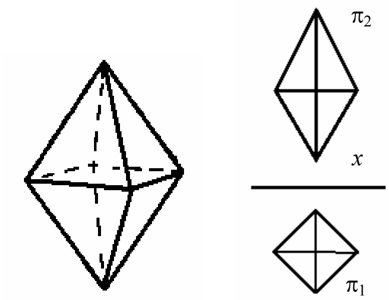


Рис. 3.2 Шестигранник *Рис. 3.3 Восьмигранник*

4 Двенадцатигранник (додекаэдр) ограничен двенадцатью равносторонними пятиугольниками.

5 Двадцатигранник (икосаэдр). Его поверхность состоит из двадцати равносторонних и равных треугольников, соединенных по пяти около каждой вершины.

Свойства многогранников изучал Эйлер, ему принадлежит теорема: У всякого выпуклого многогранника число граней (Г) плюс число вершин (В) минус число ребер (Р) равно двум, т.е.

$$Г + В – Р = 2. \qquad (3.1)$$

3.1.2 Пересечение многогранника плоскостью

Построить сечение многогранника плоскостью можно двумя методами:

- способом граней (пересечение двух плоскостей);
- способом ребер (пересечение прямой с плоскостью).

Способ граней. Дана призма, которую пересекает плоскость, образованная двумя пересекающимися прямыми *AB* и *AC* (рис. 3.4). Определить фигуру сечения.

Порядок графических построений

1 Так как у прямой призмы боковые грани представляют собой горизонтально проецирующие плоскости, задаем их следами.

2 Строим линии пересечения заданной плоскости и граней.

3 Определяем точки пресечения ребер призмы с линиями пересечения.

4 По полученным точкам строим фигуру сечения.

Способ ребер. Дана пирамида, которую пересекает плоскость общего положения. Определяем фигуру сечения (рис. 3.5).

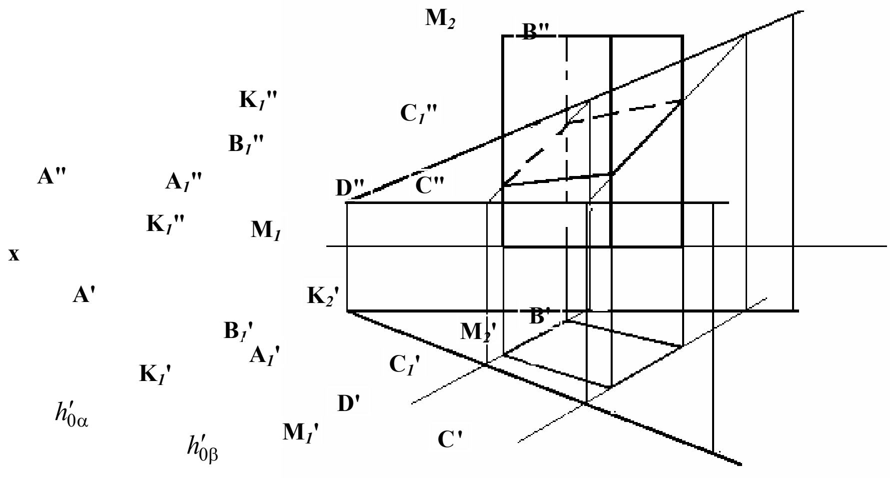


Рис. 3.4 Пересечение призмы плоскостью

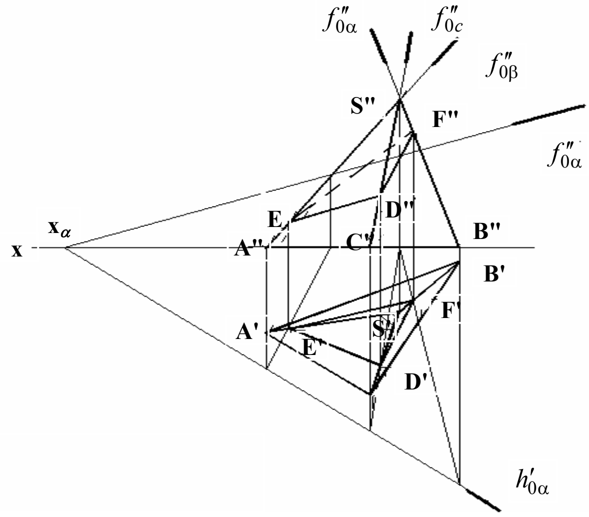


Рис. 3.5 Пересечение пирамиды плоскостью

Порядок графических построений

1 Через ребра пирамиды проводим вспомогательные проецирующие плоскости, задавая их следами.

2 Определяем линии пересечения заданной плоскости и вспомогательных плоскостей.

3 Находим точки пересечения, принадлежащие фигуре сечения, на пересечении ребер и линий пересечения плоскостей.

4 По полученным точкам в обеих плоскостях проекций строим проекции фигуры сечения.

3.1.3 Построение разверток многогранных поверхностей

Разверткой называется изображение, полученное в результате совмещения поверхности (боковой или полной) с плоскостью чертежа [1]. Для одних тел развертки могут быть точными, для других – приближенными. Точные развертки имеют развертываемые поверхности (многогранники, цилиндрические и конические поверхности). Приближенные развертки –

у неразвертывающихся поверхностей, к ним относятся, например, поверхности шара, тора, эллипсоида и т.д.

Основной принцип построения разверток – использование истинных размеров развертываемых элементов поверхности.

Рассмотрим примеры.

Пример. Построим развертку боковой поверхности усеченной части призмы (рис. 3.6).

При построении развертки боковой поверхности воспользуемся ***методом нормального сечения***. Нормальное сечение – это сечение плоскостью, перпендикулярной к ребрам призмы.

Так как основание призмы параллельно плоскости π_1 – горизонтальной плоскости проекции, а грани призмы перпендикулярны, то для построения развертки поступаем следующим образом:

1 Проводим горизонтальную прямую.

2 От произвольной точки на этой прямой откладываем отрезки, равные длинам сторон основания призмы.

3 Из этих точек восстанавливаем перпендикуляры и на них откладываем отрезки, равные ребрам, отсеченным на призме.

4 Соединяя точки, получаем развертку боковой поверхности отсеченной призмы.

Пример. Построить развертку поверхности пирамиды *SABC* (рис. 3.7).

Пользуемся методом триангуляция. Метод триангуляции – это построение развертки поверхности пирамиды по треугольникам.

1 Определяем натуральную величину сторон основания и ребер пирамиды.

2 Строим развертку поверхности пирамиды по треугольникам.

3 Наносим линию пересечения на боковые грани пирамиды.

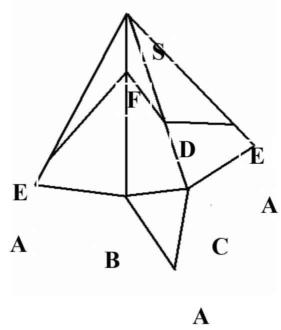


Рис. 3.7 Развертка пира-

3.2 Кривые линии и поверхности

Кривую линию можно представить как траекторию движущейся точки на плоскости или в пространстве [1].

Кривая линия может быть получена в результате взаимного пересечения поверхностей или при пересечении поверхности плоскостью. Кривые линии могут быть плоские и пространственные.

Свойства кривой линии

1 Проекция кривой линии – также кривая линия.

2 Если точка принадлежит кривой линии, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям этой кривой.

3 Касательная к кривой линии проецируется в касательную к проекции этой кривой.

3.2.1 Плоские кривые

Плоские кривые имеют касательную, нормаль и кривизну.

Касательной называется предельное положение секущей, когда две общие с кривой точки стремятся друг к другу и совпадут в одной точке. Касательная – это прямая, имеющая общую точку с кривой.

Нормалью называется прямая, лежащая в плоскости кривой и перпендикулярная касательной в точке ее касания.

Кривизной плоской кривой в данной точке называется величина, обратная радиусу соприкасающейся окружности (r)

$$К = 1 / r . \qquad (3.2)$$

Основные виды плоской кривой: окружность, эллипс, парабола и гипербола.

Эллипс представляет собой геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная (рис. 3.8).

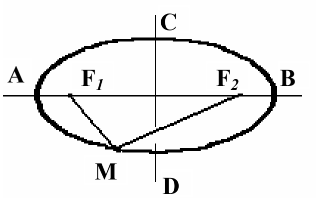


Рис. 3.8 Эллипс

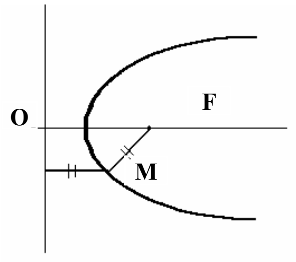


Рис. 3.9 Парабола

Парабола представляет собой геометрическое место точек равноудаленных от

ЗАДАННОЙ ТОЧКИ (ФОКУСА) И ПРЯМОЙ (ДИРЕКТРИСЫ) (РИС. 3.9).

Гипербола представляет собой геометрическое место точек разность расстояний которых до двух заданных точек (фокусов) есть постоянная величина (рис. 3.10).

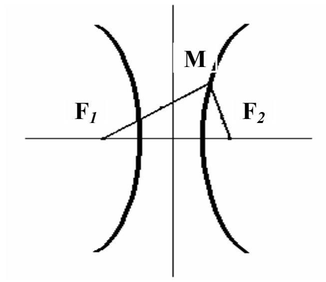
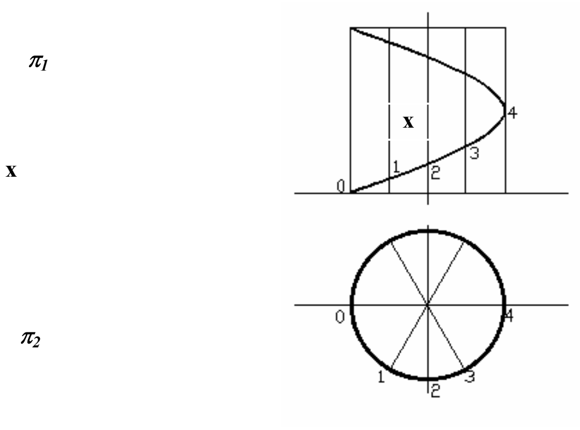


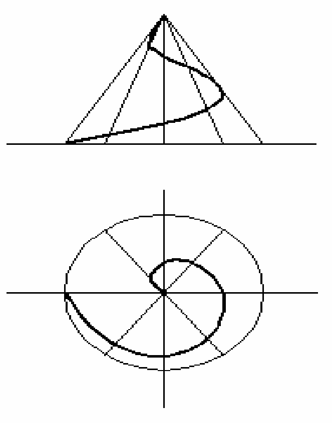
Рис. 3.10 Гипербола

3.2.2 Пространственные кривые

Пространственные кривые могут иметь самые разнообразные формы. Типичным видом пространственной кривой является

ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ. ВИНТОВЫЕ ЛИНИИ БЫВАЮТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ И КОНИЧЕСКИМИ (РИС. 3.11, 3.12).





Цилиндрическая говая линия

Рис. 3.12 Кони винтовая ли

Фронтальная проекция цилиндрической винтовой линии представляет собой синусоиду.

Горизонтальная проекция конической винтовой линии представляет собой спираль Архимеда.

3.2.3 Кривые поверхности

В качестве основного признака разделения кривых поверхностей можно выделить вид образующих и характер их движения в пространстве [1, 2].

По этому признаку все кривые поверхности разделены на два класса: 1 класс – поверхности, образованные кинематическим способом; 2 класс – поверхности, задаваемые каркасом.

Поверхности, образованные кинематическим способом, делятся на линейчатые (развертываемые, винтовые, с направляющей плоскостью, поверхности вращения, поверхности параллельного переноса) и нелинейчатые (поверхности вращения и параллельного переноса).

Поверхности, задаваемые каркасом, делятся на поверхности с линейчатым каркасом (задаваемые сетью, топографические) и поверхности с точечным каркасом (графические).

3.2.4 Поверхности линейчатые развертываемые

1 *Цилиндрические поверхности* образуются прямой линией, сохраняющей во всех своих положениях параллельность некоторой заданной прямой линии и проходящей последовательно через все точки некоторой кривой линии, называемой направляющей (рис. 3.13).

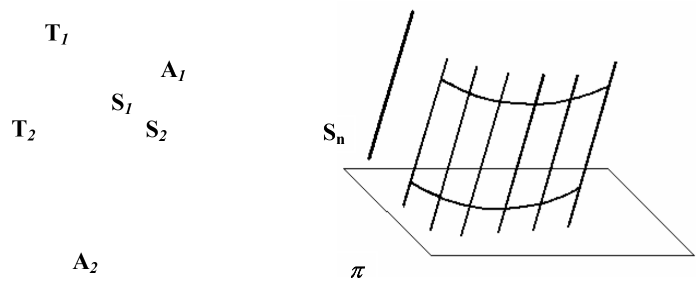


Рис. 3.13 Цилиндрическая поверхность:
A_1A_2 – образующая; S_1S_n – заданная кривая;
T_1T_2 – направляющая

2 *Коническая поверхность* образуется прямой линией, проходящей через некоторую неподвижную точку и последовательно через все точки кривой направляющей линии (рис. 3.14). Неподвижная точка (S) – называется вершиной конической поверхности.

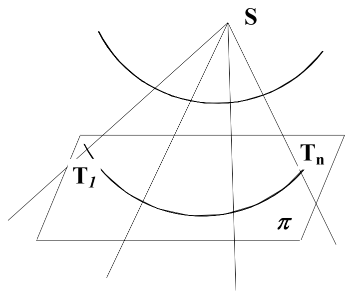


Рис. 3.14 Коническая поверхность

3.2.5 Поверхности линейчатые неразвертываемые

1 *Цилиндроидом* называется поверхность, образованная при перемещении прямой линии, во всех своих положениях сохраняющей параллельность заданной плоскости и пересекающей две кривые линии (направляющая) (рис. 3.15).

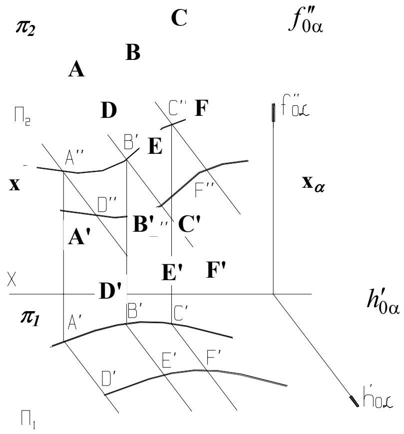


Рис. 3.15 Поверхность цилиндроида

π2 A C

E

x D B

A' B'

π1 C' = E' = D'

2 *Коноидом* называется поверхность, образованная при перемещении пря-

мой линии, во всех своих положениях сохраняющей параллельность некоторой заданной плоскости и пересекающей две направляющие, одна из которых кривая, а другая прямая линия (рис. 3.16).

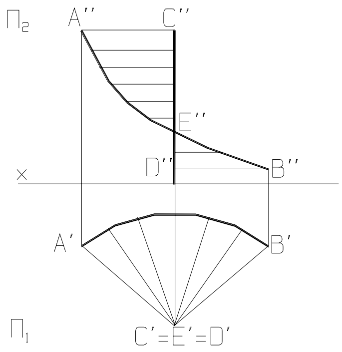


Рис. 3.16 Поверхность коноида

3.2.6 Поверхности нелинейчатые

1 *Эллипсоид* – получен в результате движения деформируемого эллипса, плоскость которого параллельна одной из основных плоскостей проекций и концы осей которого скользят по эллипсу (рис. 3.17).

2 *Эллиптический параболоид* получен в результате перемещения деформируемого эллипса, плоскость которого параллельна плоскости проекций и концы осей которого скользят по параболам (рис. 3.18).

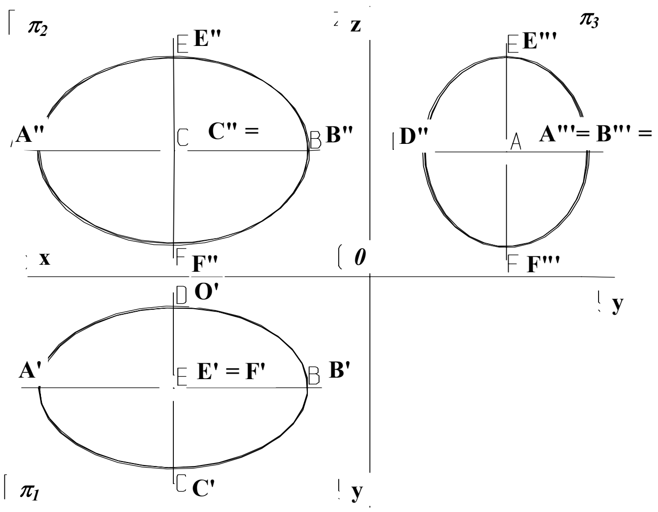


Рис. 3.17 Поверхность эллипсоида

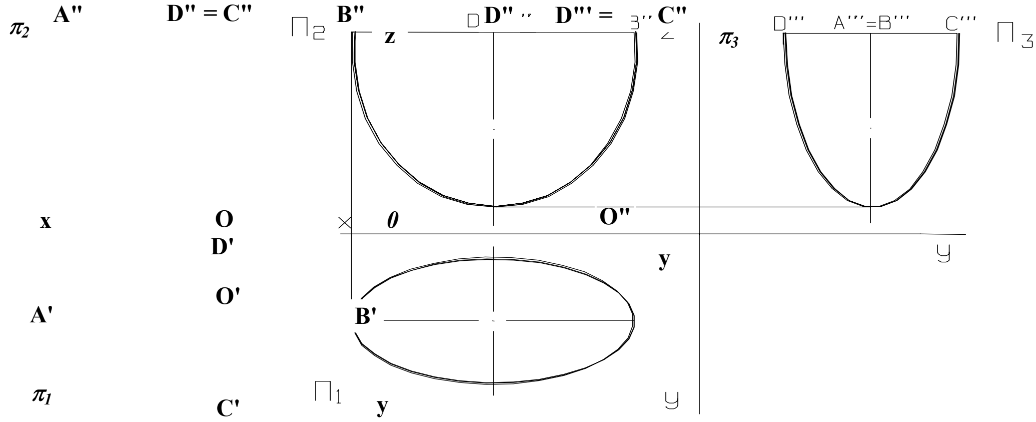


Рис. 3.18 Поверхность эллиптического параболоида

3.2.7 Поверхности вращения

Поверхностью вращения называется поверхность, образованная вращением линии (образующей), вокруг неподвижной прямой – оси вращения. Рассмотрим некоторые поверхности вращения.

1 *Сфера*. Поверхность сферы образуется вращением окружности вокруг диаметра (рис. 3.19).

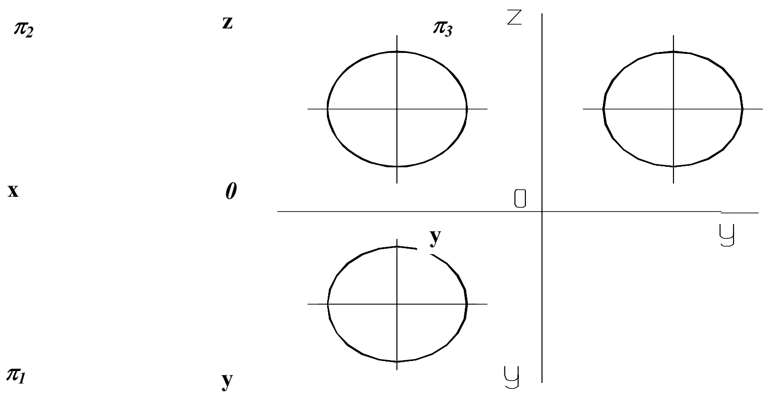


Рис. 3.19 Поверхность сферы

2 *Тор*. Поверхность тора образуется вращением окружности вокруг оси, не проходящей через ее центр, но расположенной в плоскости окружности (рис. 3.20).

К поверхностям вращения относятся эллипсоид вращения, параболоид вращения и гиперболоид вращения (однополостный, двуполостный).

3.2.8 Графические поверхности

Поверхностью, задаваемой каркасом, называют поверхность, которая задается некоторым числом линий, принадлежащих такой поверхности. Примером каркасных поверхностей служат поверхности корпусов судов, самолетов, автомобилей, баллонов, кинескопов.

Каждая поверхность может быть задана графически. Принято считать, что поверхность задается только графически, при помощи некоторого числа линий, которые должны принадлежать такой поверхности, или выявляются на существующей поверхности.

3.2.9 Пересечение прямой линии с кривой поверхностью

Для построения точек пересечения прямой с кривой поверхностью следует через прямую провести вспомогательную плоскость, найти линию пересечения этой плоскости с поверхностью. Точки пересечения заданной прямой и построенной линии будут искомыми точками пересечения прямой с поверхностью. Вспомогательную плоскость, проводимую через прямую, следует выбирать так, чтобы получались простые сечения (сечения, которые можно построить с помощью линейки и циркуля).

Пример 1. Построить точки пересечения прямой с поверхностью конуса (рис. 3.21).

Пример 2. Построить точки пересечения прямой с поверхностью сферы (рис. 3.22).

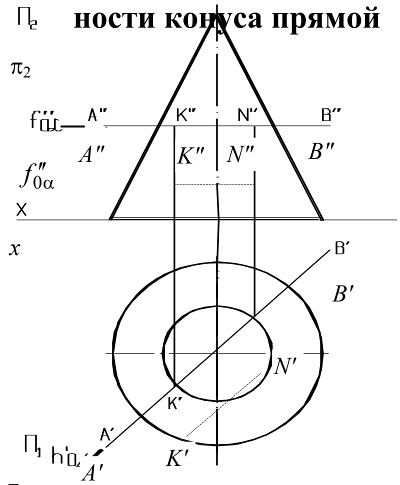


Рис. 3.21 Пересечение поверхности конуса прямой

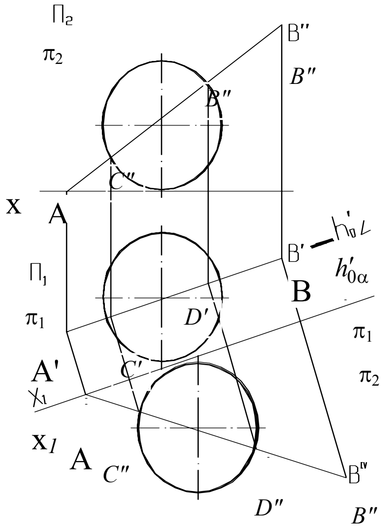


Рис. 3.22 Пересечение прямой с поверхностью сферы

Алгоритм решения

1 Через прямую *AB* проводим проецирующую плоскость (α).

2 Во избежание построения эллипса, применим способ замены плоскостей проекций.

3 Построив в новой плоскости прямую и сечение сферы, получим точки пересечения сферы с прямой.

3.2.10 Пересечение кривых поверхностей плоскостью

Для нахождения кривой линии, получаемой при пересечении линейчатой поверхности плоскостью, следует в общем случае строить точки пересечения образующих поверхности с секущей плоскостью (т.е. многократно решается задача нахождения точек пересечения прямой с плоскостью). Если же кривая поверхность не линейчатая, то для построения линии пересечения такой поверхности плоскостью в общем случае следует применять вспомогательные плоскости. Искомые точки определяются в пересечении линий, по которым вспомогательные секущие плоскости пересекают данную поверхность и плоскость.

Пример. Построить проекции фигуры сечения прямого конуса плоскостью горизонтально-проецирующей (рис. 3.23).

Порядок
графических построений

1 ТАК КАК ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ФИГУРЫ СЕЧЕНИЯ СОВПАДАЕТ СО СЛЕДОМ, А ФРОНТАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ЕСТЬ ГИПЕРБОЛА, ТО ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ВЫСШИХ ТОЧЕК ГИПЕРБОЛЫ ПРОВОДИМ ВСПОМОГАТЕЛЬНУЮ ГОРИЗОНТАЛЬНО-ПРОЕЦИРУЮЩУЮ ПЛОСКОСТЬ $h'_{0\alpha}$ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО СЛЕДУ ПЛОСКОСТИ $h'_{0\beta}$ И ОПРЕДЕЛЯЕМ ХАРАКТЕРНЫЕ ТОЧКИ.

2 Для нахождения других точек гиперболы применим вспомогательные секущие плоскости.

3.2.11 Взаимное пересечение кривых поверхностей

При пересечении двух поверхностей образуется пространственная кривая линия.

Линию пересечения двух поверхностей строят по отдельным точкам.

Общим способом построения точек линии пересечения двух поверхностей является способ вспомогательных поверхностей-посредников. Посредники пересекают заданные поверхности по линиям (желательно простым). Тогда в пересечении этих линий получаются точки, принадлежащие обеим поверхностям, а значит, и линии их пересечения.

В качестве поверхностей-посредников используют или плоскости, или сферы. В зависимости от принятого вида посредника именуют и способ построения линии пересечения: способ вспомогательных секущих плоскостей и способ вспомогательных сфер.

3.2.12 Способ вспомогательных секущих плоскостей

При построении точек линии пересечения поверхностей вначале находят характерные или опорные точки.

Графические построения выполняется в такой последовательности.

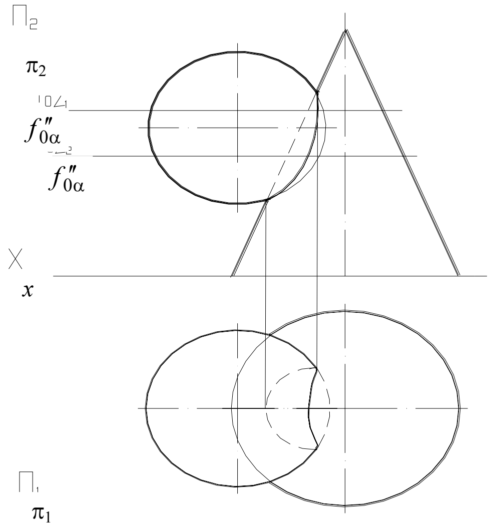


Рис. 3.24 Метод вспомогательных секущих плоскостей

1 Проводят вспомогательные плоскости уровня, пересекающие данные поверхности (в данном случае горизонтальные плоскости).

2 Строят линии пересечения вспомогательных плоскостей с поверхностями.

3 Определяют точки пересечения, принадлежащие обеим поверхностям и через них проводят линию пересечения.

Пример. Построить линию пересечения конуса и сферы методом дополнительных секущих плоскостей рис. 3.24).

3.2.13 Способ вспомогательных секущих сфер

Для построения линии пересечения двух поверхностей способ секущих сфер применяют при следующих условиях:

1 Обе пересекающиеся поверхности есть поверхности вращения.

2 Оси поверхностей вращения пересекаются, точку пересечения принимают за центр вспомогательных (концентрических) сфер.

3 Плоскость, образованная осями поверхностей, должна быть параллельна плоскости проекций.

Пример. Построить линию пересечения цилиндра и усеченного конуса методом концентрических сфер (рис. 3.25).

Порядок графических построений

1 **ОПРЕДЕЛЯЕМ ХАРАКТЕРНЫЕ ТОЧКИ ИСКОМОЙ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ И УСТАНАВЛИВАЕМ РАДИУСЫ МИНИМАЛЬНОЙ И МАКСИМАЛЬНОЙ СФЕР, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В СЕЧЕНИИ.**

2 Проводим вспомогательные секущие сферы, пересекающие данные поверхности, в диапазоне от $R_{\min}$ до $R_{\max}$.

3 Строим линии пересечения вспомогательных сфер с поверхностями.

4 Определяем точки пересечения, принадлежащие обеим поверхностям и через них проводим линию пересечения.

3.2.14 Развертывание кривых поверхностей

Развертки у кривых поверхностей могут быть точными и приближенными. Точные развертки бывают у прямых круговых конусов и цилиндров. Пример условно развертываемых кривых поверхностей – шар.

Пример 1. Построить развертку поверхности прямого кругового цилиндра.

Для развертывания прямого цилиндра применим способ нормального сечения. Способ нормального сечения заключается в том, что в цилиндр вписывают *n*-угольную призму. Число *n* зависит от размера чертежа. Однако оно не должно быть меньше двенадцати. Обычно *n* принимают равным двенадцати. Затем проводим плоскость, перпендикулярную к образующим, вычерчиваем развернутое в прямую линию нормальное сечение и производим развертку *n*-угольной призмы. Концы ребер соединяют линией.

Пример 2. Построить развертку прямого кругового конуса.

Боковая поверхность конуса развертывается в круговой сектор. Угол сектора определяется по формуле $\varphi = R / L \cdot 360°$, где R – радиус окружности основания конуса; L – длина образующей конуса. Построение развертки боковой поверхности конуса можно выполнить и графически без подсчета величины угла сектора. Разделим основание конуса на *n* равных частей.

На дуге, проведенной из произвольной точки S_0 радиусом, равным длине образующей конуса, откладывает 12 отрезков, равных длине хорды. Соединяя эти точки с точкой S_0, получаем развертку боковой поверхности конуса. Причерчивая внизу основания конуса, получаем полную развертку конуса.

Пример 3. Построить приближенную развертку поверхности шара.

Существует несколько методов построения приближенной развертки. Рассмотрим два из них.

1-й способ. Развертка по цилиндрам.

Сущность этого метода заключается в замене шаровой поверхности описанными вокруг нее частями цилиндрических поверхностей и в построении разверток этих частей.

Делим шаровую поверхность на некоторое число одинаковых сферических секций при помощи плоскостей, проходящих через ось шара.

2-й способ. Развертка по конусам и цилиндру.

Через точки деления проведем горизонтальные плоскости, которые рассекут поверхность на 5 шаровых поясов и 2 шаровых сегмента. Далее заменяем поверхность шара одной цилиндрической и шестью коническими поверхностями и произведем их развертку. Развертку конических поверхностей производим по правилам развертывания усеченных прямых круговых конусов.

Первый способ

Развертку каждой секции производим следующим образом (рис. 3.26). Проводим вертикальную прямую и откладываем на ней отрезки вверх и вниз $1'2' = 1''2''$, $2'3' = 2''3''$, $3'4' = 3''4''$, $4'5' = 4''5''$. Через полученные точки

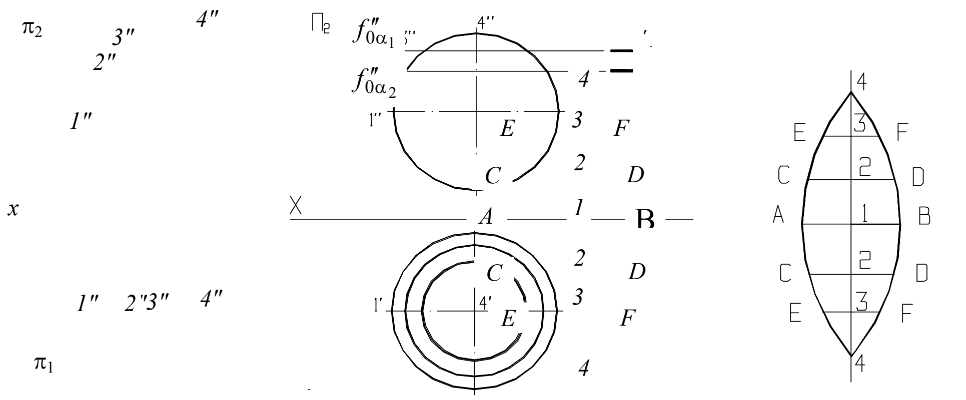


Рис. 3.26 Развертка поверхности сферы

1, *2*, *3*, *4*, *5* проводят горизонтальные отрезки равные $AB = ab$, $CD = cd$ и т.д. Соединив концы отрезков плавной кривой, получим развертку секции. Развертки остальных одиннадцати секций будут такими же.

3.3 Аксонометрические проекции поверхностей

Существует ряд способов построения наглядных изображений поверхностей: перспектива, аксонометрические проекции, сущность которых состоит в следующем. Геометрический объект вместе с прямоугольной системой координат, к которым он отнесен в пространстве, параллельным способом проецируют на выбранную плоскость проекции [1, 2]. Аксонометрическая проекция проецируется только на одну плоскость проекции. Направление проецирующей выбрано так, чтобы она не совпадала ни с одной из координатных осей (рис. 3.27).

Аксонометрическая проекция меньше действительной величины геометрического объекта, поэтому введено понятие о коэффициентах искажения.

Коэффициенты искажения по осям в аксонометрии определяют отношением аксонометрических координат отрезков к их натуральной величине при одинаковых единицах измерения.

По оси X $(O'A_x) / (OA_x) = U$, по оси Y $(A'_x A'_1) / (A_x A_1) = V$, по оси Z $(A'_1 A_1) / (A_1 A) = W$.

Виды аксонометрических проекций

Аксонометрические проекции в зависимости от направления проецирования разделяют на:

– *косоугольные*, когда направление проецирования не перпендикулярно плоскости аксонометрических проекций;

– *прямоугольные*, когда направление проецирования перпендикулярно плоскости аксонометрических проекций.

В зависимости от сравнительной величины коэффициентов искажения по осям различают три вида аксонометрии.

Изометрия – все три коэффициента искажения равны между собой

$$U = V = W.$$

Диметрия – два коэффициента искажения равны между собой и не равны третьему

$$U \neq V = W \text{ или } U = V \neq W.$$

Триметрия – все три коэффициента искажения не равны между собой

$$U \neq V \neq W.$$

Основное предположение аксонометрии сформулировано немецким геометром К. Польке. Три отрезка произвольной длины, лежащие в одной плоскости и выходящие из одной точки под произвольными углами друг к другу, представляют параллельную проекцию трех равных отрезков, отложенных на прямоугольных координатных осях от начала.

3.3.1 Прямоугольная изометрия

Прямоугольная изометрия характеризуется тем, что коэффициенты искажения составляют 0,82 . Их получают из соотношения

$$U = V = W = \sqrt{2/3} \approx 0{,}82. \tag{3.3}$$

Таким образом, изображение будет больше самого предмета в 1,22 раза, т.е. масштаб изображения в прямоугольной изометрии будет М = 1,22 : 1.

Аксонометрические оси в прямоугольной изометрии располагаются под углом 120° друг к другу (рис. 3.28).

В прямоугольной изометрии равные окружности, расположенные в координатных плоскостях, проецируются в равные эллипсы М = 1,22 : 1 (рис. 3.29).

Размеры осей эллипсов при использовании коэффициентов изометрического искажения равны: $2a = 1{,}22d$ – большая ось; малая ось $2b = 0{,}71d$, где d – диаметр изображаемой окружности.

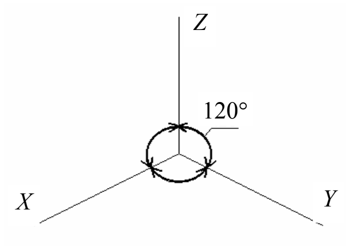


Рис. 3.28 Расположение координатных осей в прямоугольной изометрии

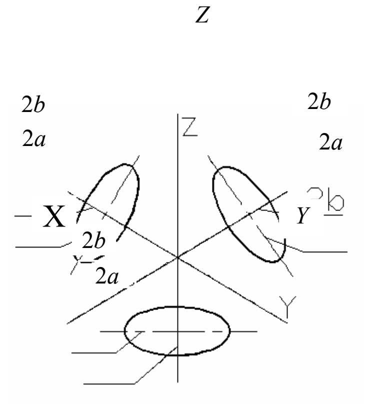


Рис. 3.29 Расположение окружностей в прямоугольной изометрии

3.3.2 Прямоугольная диметрия

Прямоугольная диметрия характеризуется тем, что коэффициенты искажения определяются из следующего соотношения

$$u^2 = \frac{8}{9}; \quad u = \omega = \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0{,}94;$$

$$\nu = 0{,}47\,. \qquad (3.4)$$

В соответствии с ГОСТ 2.317–69 практические построения в прямоугольной диметрии следует выполнять, пользуясь следующими коэффициентами искажения

$$u = \omega = 1 \quad \text{и} \quad \nu = 0{,}5\,.$$

Расположение осей в прямоугольной диметрии происходит следующим образом (рис. 3.30).

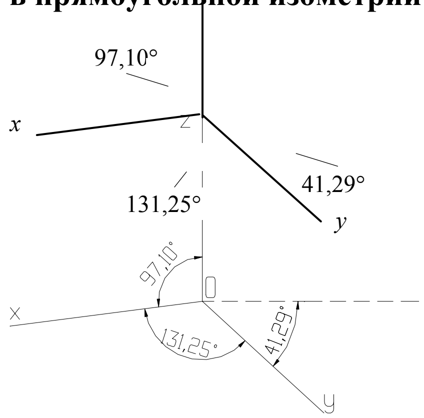


Рис. 3.30 Расположение координатных осей в прямоугольной диметрии

Аксонометрический масштаб для прямоугольной диметрии М = 1,06 : 1.

π_3 В прямоугольной диметрии равные окружности диаметра d, лежащие в координатных плоскостях XOY и YOZ, проецируются в равные эллипсы, большая ось которых $2a$ = 1,06, а малая $2b =$ $= 0{,}35d$. Окружность, расположенная в плоскости XOZ, проецируется в эллипсе с осями: большая ось $2a$ =
$= 1{,}06d$, а малая ось $2b = 0{,}95d$ (рис. 3.31).

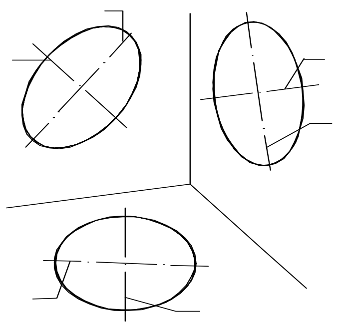


Рис. 3.31 Расположение окружностей в прямоугольной диметрии

3.3.3 Построение аксонометрических изображений по ортогональным проекциям

При построении аксонометрических проекций все размеры геометрического объекта снимают с ортогональных проекций (фронтальной и горизонтальной проекций). Умножая их на величины коэффициентов искажения, откладывают на координатных осях аксонометрических проекций.

Пример. Построить прямоугольную диметрию пирамиды (рис. 3.32).

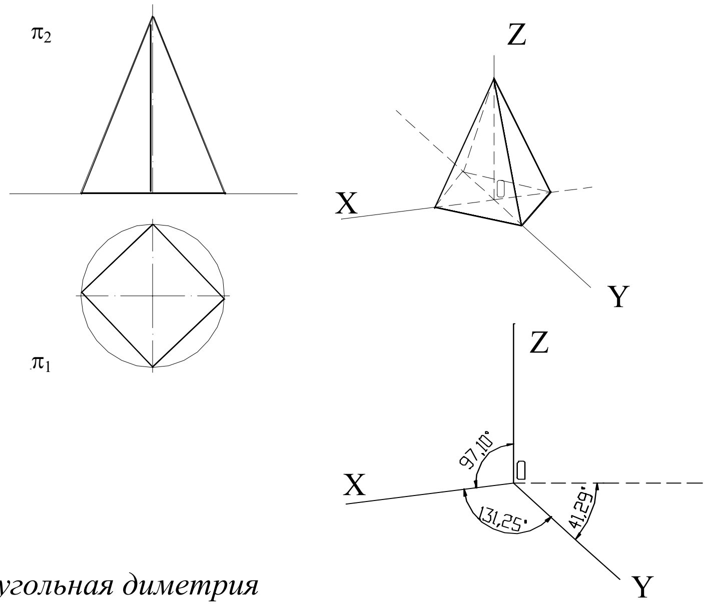


Рис. 3.32 Прямоугольная диметрия пирамиды

Вопросы для подготовки к экзамену

1 Метод центрального проецирования.
2 Метод параллельного проецирования.
3 Метод Монжа.
4 Проецирование точки и прямой на две и три плоскости.
5 Прямые общего и частного положения.
6 Взаимное положение прямых в пространстве. Метод конкурирующих точек.
7 Определение натуральной величины отрезка прямой общего положения и углов его наклона к плоскости проекций.
8 Деление отрезка прямой в данном отношении.
9 Проецирование прямого угла.
10 Следы прямой.
11 Задание плоскости на чертеже.
12 Следы плоскости.
13 Плоскости общего и частного положения.
14 Принадлежность точки и прямой плоскости.
15 Главные линии плоскости.
16 Построение точки пересечения прямой линии с плоскостью частного положения.
17 Построение точки пересечения прямой линии с плоскостью общего положения.
18 Построение прямой линии и плоскости, параллельных между собой.
19 Построение взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.
20 Построение взаимно перпендикулярных плоскостей.
21 Построение взаимно параллельных плоскостей.

22 Построение линии пересечения двух плоскостей, заданных следами.
23 Построение линии пересечения двух плоскостей. Определение видимости.
24 Построение взаимно перпендикулярных прямых.
25 Сущность способов преобразования чертежа вращением и заменой плоскостей проекций.
26 Способ перемены плоскостей проекций.
27 Способ вращения и его разновидности. Вращения вокруг проецирующей оси.
28 Способ вращения вокруг линии уровня.
29 Способ вращения вокруг следа плоскости.
30 Способ плоскопараллельного перемещения.
31 Плоские и пространственные кривые линии.
32 Поверхности. Многогранные поверхности.
33 Пересечение многогранной поверхности плоскостью.
34 Пересечение многогранной поверхности прямой линией.
35 Пересечение одной многогранной поверхности другою.
36 Способ граней. Развертывание многогранных поверхностей способом нормального сечения.
37 Способ ребер. Развертывание многогранных поверхностей способом триангуляции.
38 Кривые поверхности (поверхности линейчатые развертываемые и неразвертываемые, поверхности нелинейчатые, поверхности вращения).
39 Пересечение цилиндрической поверхности плоскостью.
40 Пересечение конической поверхности плоскостью.
41 Пересечение кривых поверхностей прямой линией.
42 Взаимное пересечение кривых поверхностей. Метод вспомогательных секущих плоскостей.
43 Метод концентрических сфер для построения линии пересечения двух поверхностей вращения.
44 Развертывание цилиндрической поверхности.
45 Развертывание конической поверхности.
46 Условное развертывание сферической поверхности.
47 Аксонометрические проекции. Сущность метода. Теорема Польке.
48 Виды аксонометрических проекций. Прямоугольная диметрия.
49 Виды аксонометрических проекций. Прямоугольная изометрия.
50 Построение наглядных изображений в прямоугольной изометрии и диметрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии: Учеб. пособие для втузов. 24-е изд. / Под. ред. В. О. Гордона и Ю. Б. Иванова. М.: Высш. шк., 2000. 272 с.

2 Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия: Учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк. 1981. 262 с.

3 Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989. 226 с.