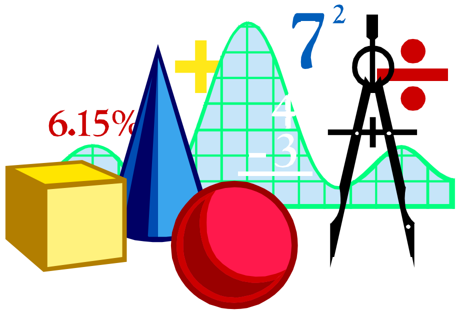
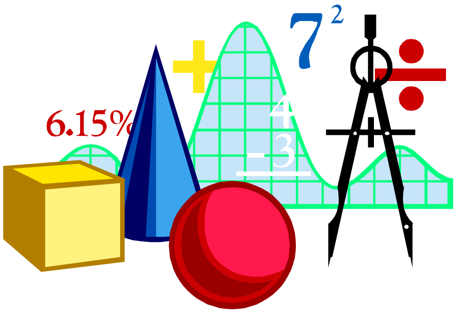


ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ

УДК 517.518.2(075)
ББК В 126 я 73
К 68

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент
А.Е. Бояринов

К 68 Основы теории нечетких множеств: Метод. указания / Сост. И.Л. Коробова, И.А. Дьяков. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. 24 с.

Рассматриваются основные понятия нечеткой логики. Даны рекомендации по способам представления знаний, представленных в лингвистической форме.

Методические указания по дисциплине "Интеллектуальные подсистемы САПР" предназначены для студентов 5 курса дневного отделения специальности 2203.

УДК 517.518.2(075)
ББК В 126 я 73

Министерство образования Российской Федерации
ТАМБОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Методические указания по дисциплине
"Интеллектуальные подсистемы САПР"
для студентов 5 курса дневного отделения специальности 2203

Тамбов
Издательство ТГТУ
2003

Учебное издание

ОСНОВЫ ТЕОРИИ
НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Методические указания

Составители: КОРОБОВА Ирина Львовна,
ДЬЯКОВ Игорь Алексеевич

Редактор Т. М. Федченко
Компьютерное макетирование М. А. Филатовой

Подписано в печать 9.04.2003
Формат 60 × 84 / 16. Бумага газетная. Печать офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Объем: 1,39 усл. печ. л.; 1,41 уч.-изд. л.
Тираж 75 экз. С. 144

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета,
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Процесс автоматизации проектирования, в настоящее время охватывает этапы, связанные с поиском лучших конструктивных и технологических решений; созданием баз данных отдельных частей объектов проектирования; использованием эффективных технических средств, обеспечивающих оперативную работу проектировщика. Однако остаются задачи решение которых ищет сам пользователь-конструктор. И эти решения зависят от его физического и психологического состояния в разные отрезки времени проектирования.

Специфика выбора модели принятия решения состоит в том, что разрабатываемые алгоритмы должны учитывать качественную информацию, исходящую от эксперта и представленную в лингвистической форме. Описание объекта в таком случае носит нечеткий характер. Использование нечетких переменных для построения и анализа правил называют нечеткой логикой, в основе которой лежит понятие нечеткого множества.

1 Нечеткие множества и операции над ними [1 – 5]

Обозначим через $X = \{\ x\ \}$ – универсальное множество.

Нечетким множеством $\tilde{A}$ на множестве X называется совокупность пар вида

$$\tilde{A} = \left\{ \left\langle \mu_A(x)/x \right\rangle \right\},$$

где $\mu_A(x)$ – отображение множества X в единичный отрезок [0,1]. Эта функция называется функцией принадлежности нечеткого множества $\tilde{A}$.

Значение функции принадлежности $\mu_A(x)$ для конкретного элемента $x \in X$ называется *степенью принадлежности.*

Носителем нечеткого множества $\tilde{A}$ называется множество

$$S_A = \{x \mid x \in X \,\&\, \mu_A(x) > 0\},$$

т.е. носителем нечеткого множества $\tilde{A}$ является подмножество S_A универсального множества X, для элементов которого функция принадлежности $\mu_A(x)$ строго больше нуля.

Пример: Пусть универсальное множество X соответствует множеству возможных значений толщин изделия от 10 до 40 мм с дискретным шагом 1 мм. Нечеткое множество $\tilde{A}$, соответствующее нечеткому понятию "малая толщина изделия", может быть представлено в виде

$\tilde{A}$ = {<1/10>, <0,9/11>, <0,8/12>, <0,7/13>, <0,5/14>, <0,3/15>, <0,1/16>, <0/17>, <0/18>, <0/19> …}.

Носителем нечеткого множества A будет являться конечное подмножество S_A = {10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}.

Нечеткое множество A называется нормальным, если границы

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1..$$

Мы будем рассматривать только нормальные нечеткие множества, так как если нечеткое множество ненормально, то его всегда можно превратить в нормальное, разделив все значения функции принадлежности на ее максимальное значение.

Для нечетких множеств вводятся операции объединения, пересечения и дополнения.

Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{N}$ два нечетких множества, заданных на универсальном множестве X с функциями принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_N(x)$.

Объединением **нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{N}$ называется нечеткое множество**

$$\tilde{A} \cup \tilde{N} = \left\{ \left\langle \mu_{A \cup N}(x)/x \right\rangle \right\},$$

где ($\forall \in$ X) $\mu_{A \cup N}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_N(x)\}$.

Пересечением **нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{N}$ называется нечеткое множество вида**

$$\tilde{A} \cap \tilde{N} = \left\{ \left\langle \mu_{A \cap N}(x)/x \right\rangle \right\},$$

где (∀ ∈ X) $\mu_{A\cap N}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_N(x)\}$.

Дополнением **нечеткого множества** $\tilde{A}$ **называется нечеткое множество**

$$\neg\tilde{A} = \{\langle \mu_{\neg A}(x)/x \rangle\},$$

где (∀ *x* ∈ *X*) $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Обозначим $\tilde{A}i$ – нечеткое множество, определенное на X_i (i = 1, … n).

Декартовым произведением нечетких множеств $\tilde{A}_i$ называется множество

$$\tilde{A}_1\tilde{A}_2 \cdot\ldots\cdot \tilde{A}_n = \{\langle \mu_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)/(x_1, x_2, \ldots, x_n)\rangle\},$$

где $x_i \in X_i$, $\mu_A(x_1, \ldots, x_n) = \min\left\{ \mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_n}(x_n) \right\}$.

Пример: Пусть на множестве X = {10, 15, 20, 25} и Y = {5, 6, 7} заданы множества $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$, имеющие вид

$\tilde{A}_1$ ={<1/10>, <0,8/15>, <0,5/20>, <0,3/25>}; $\tilde{A}_2$ ={<1/5>, <0,5/6>, <0,2/7>}.

Тогда множество $\tilde{A}_1\,\tilde{A}_2$, будет иметь вид:

$\tilde{A}_1\,\tilde{A}_2$ = {<1/(10,5)>, <0,8/(15,5)>, <0,5/(20,5)>, <0,3/(25,5)>, <0,5/(10,6)>, <0,5/(15,6)>, <0,5/(20,6)>, <0,3/(25,6)>, <0,2/(10,7)>, <0,2/(15,7)>, <0,2/(20,7)>, <0,2/(25,7)> }.

Степенью е множества $\tilde{A}$ называется нечеткое множество

$$\tilde{A}^{e} = \left\{\left\langle \mu_{A^{e}}(x)/x \right\rangle\right\}.$$

При е = 2 получается частный случай операции возведения в степень- операция **концентрации**, обозначаемая CON.

$$\mathrm{CON}(\tilde{A}) = \tilde{A}^2.$$

Операция CON снижает степень нечеткости описания.

При е = 0,5 получается операция **растяжения** DIL:

$$\mathrm{DIL}(\tilde{A}) = \tilde{A}^{0,5}.$$

Операция DIL повышает степень нечеткости описания.

Множеством **α-уровня** нечеткого множества $\tilde{A}$ называется множество

$$S_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) >= \alpha\}, \text{ где } \alpha \in [0, 1].$$

2 Нечеткое включение и равенство множеств. Нечеткое бинарное отношение [1 – 3]

Пусть $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ – нечеткие множества.

Степенью включения множества $\tilde{A}_1$ в $\tilde{A}_2$ называется величина

$$\eta(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \underset{x \in X}{\&} (\mu_{A_1}(x) \to \mu_{A_2}(x)).$$

Операция → есть импликация, определяемая как

$$\mu_{A_1}(x) \to \mu_{A_2}(x) = 1 \& (1 - \mu_{A_1}(x) + \mu_{A_2}(x)) = \min\{1, 1 - \mu_{A_1}(x) + \mu_{A_2}(x)\}.$$

Степенью равенства нечетких множеств $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ называется величина $\rho(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$, определяемая как логическая сумма эквивалентностей

$$\rho(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \underset{x \in X}{\&} (\mu_{A_1}(x) \leftrightarrow \mu_{A_2}(x)).$$

Здесь ↔ операция эквивалентности

$$\mu_{A_1}(x) \leftrightarrow \mu_{A_2}(x) = (\mu_{A_1}(x) \leftrightarrow \mu_{A_2}(x)) \& (\mu_{A_2}(x) \leftrightarrow \mu_{A_1}(x)).$$

Очевидно, что $\rho(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \eta(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) \& \eta(\tilde{A}_2, \tilde{A}_1)$.

Степень включения и степень равенства могут принимать любые значения из отрезка [0, 1].

Пример: Даны нечеткие множества $\tilde{A}_1$={<0,3/x2>, <0,6/x3>, <0,4/x5>}, $\tilde{A}_2$={<0,8/x1>, <0,5/x2>, <0,7/x3>, <0,6/x5>}, определенные на множестве X = {x1, x2, x3, x4, x5}.

Определим степень включения множества $\tilde{A}_1$ в $\tilde{A}_2$ ($\eta(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$) и множества $\tilde{A}_2$ и $\tilde{A}_1$ ($\eta(\tilde{A}_2, \tilde{A}_1)$).

$\eta(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$ = (0 – > 0,8) & (0,3 – > 0,5) & (0,6 – > 0,7) & (0 – > 0) & (0,4 – – > 0,6) = (1&(1 – 0 + 0,8)) & (1&(1 – 0,3 + 0,5)) & (1&(1 – 0,6 + 0,7)) & (1&(1 – 0 + 0)) & (1&(1 – 0,4 + 0,6)) = 1 & 1 & 1 & 1 & 1 = 1;

$\eta(\tilde{A}_2, \tilde{A}_1)$ = (0,8 – > 0) & (0,5 – > 0,3) & (0,7 – > 0,6) & (0 – > 0) & (0,6 – – > 0,4) = (1&(1 – 0,8 + 0)) & (1&(1 – 0,5 + 0,3)) & (1&(1 – 0,7 + 0,6)) & (1&(1 – 0 + 0)) & (1&(1 – 0,6 + 0,4)) = 0,2 & 0,8 & 0,9 & 1 & 0,8 = 0,2.

Тогда степень равенства множеств $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ будет равна 0,2.

Нечетким бинарным отношением $\tilde{R}$ на множестве X называется нечеткое множество вида: $\{<\mu(x_i,x_j)/(x_i,x_j)>\}$, где x_i, x_j – некоторая пара элементов из множества X; $\mu(x_i, x_j)$ – функция принадлежности, определяемая субъективной мерой того, насколько пара (x_i, x_j) соответствует бинарному отношению $\tilde{R}$.

Если множество X конечно и невелико, то нечеткое бинарное отношение удобно представить в виде матрицы $M(R)$. На пересечении строки x_i и столбца x_j располагается значение функции принадлежности $\mu(x_i, x_j)$.

Пример: Определить на множестве X = {1, 3, 5, 7, 9} нечеткое бинарное отношение ″намного больше″. Матрица $M(R)$ может иметь вид:

$$M(\tilde{R}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,4 & 0,1 & 0 & 0 \\ 1 & 0,8 & 0,5 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}$$

3 Нечеткая и лингвистическая переменные [1]

Понятие нечеткой и лингвистической переменной используется экспертом при описании сложных объектов и явлений, а также при формализации процессов принятия решений на трудно формализуемых этапах проектирования.

Нечеткой переменной называется тройка объектов вида: < α, X, C_α>,
где α – наименование нечеткой переменной, X = {x} – область ее определения; C_α = {< $\mu_\alpha(x)/x$>} – нечеткое множество на X, описывающее ограничения на возможные значения нечеткой переменной α (т.е. ее семантику).

Лингвистической переменной называется пятерка объектов: <β, T, X, G, M>, где β – наименование лингвистической переменной; T – множество ее значений (терм – множество), нечеткие переменные; G – синтаксическая процедура, позволяющая оперировать элементами терм – множества T, в частности, генерировать новые осмысленные термы (при традиционном подходе процедура G определяет новые значения лингвистической переменной, исходя из ее базового терм – множества T и логических операций И, ИЛИ, НЕ, ОЧЕНЬ, СЛЕГКА), М – семантическая процедура, позволяющая превратить каждое новое значение лингвистической переменной, образуемое процедурой G, в нечеткую переменную путем формирования соответствующего нечеткого множества. Например, семантические процедуры могут иметь вид:

М($\tilde{C}_1$ ИЛИ $\tilde{C}_2$) = $\tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2$ – объединение нечетких множеств;

М($\tilde{C}_1$ И $\tilde{C}_2$) = $\tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2$ – пересечение нечетких множеств;

М(НЕ $\tilde{C}_2$) = $\neg\tilde{C}_1$ – дополнение нечетких множеств;

М(ОЧЕНЬ $\tilde{C}_1$) = CON($\tilde{C}_1$) – концентрация нечетких множеств;

М(СЛЕГКА $\tilde{C}_1$) = DIL($\tilde{C}_1$) – растяжение нечетких множеств, где $\widetilde{C}_1$ И $\widetilde{C}_2$ – нечеткие множества, соответствующие нечетким переменным α_1 и α_2 рассматриваемой лингвистической переменной.

***Пример*:** Пусть эксперт оценивает толщину выпускаемого изделия с помощью понятий: ″малая толщина″, ″средняя толщина″, ″большая толщина″; при этом минимальная толщина изделия равна 10 мм, а максимальная – 80 мм.

Формализация такого описания может быть проведена с помощью лингвистической переменной: $< \beta, T, X, G, M >$, где β – "толщина изделия"; $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ = {малая, средняя, большая}; $X = [10, 80]$.

Пусть нечеткие множества C_1, C_2, C_3 описывают семантику базовых значений переменной β. Функции принадлежности представлены на рис. 1.

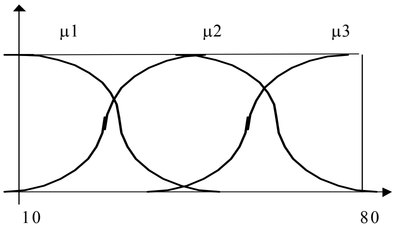


Рис. 1 Функции принадлежности нечетких множеств *C_1*, *C_2*, *C_3*

Тогда значения α_1 = ″малая или средняя толщина″, определяется нечетким множеством $C_1 = \mathrm{M}(\alpha_1$ ИЛИ $\alpha_2) = C_1 \cup C_2$, функция принадлежности которой представлена на рис.2, А значение α_2 = ″небольшая толщина″ будет определяться нечетким множеством $C_2 = \mathrm{M}(\text{НЕ}\alpha_3) = = \neg C_3$, функция принадлежности которой представлена на рис. 3.

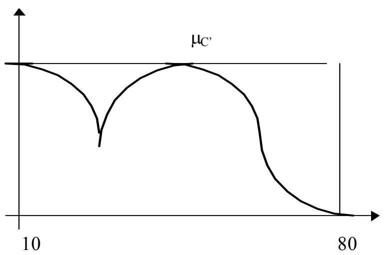


Рис. 2 Функция принадлежности нечеткого множества *C_1*

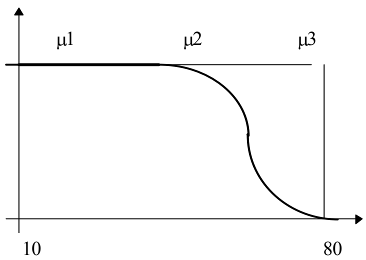


Рис. 3 Функция принадлежности нечеткого множества *C_2*

Лингвистическая переменная, у которой процедура образования нового значения G зависит от множества базовых терм – значений T, называется **синтаксически зависимой лингвистической переменной**.

Существуют переменные, у которых процедура образования новых значений зависит от области определения X, т.е. $G = G(X)$. Например, значение лингвистической переменной ″толщина изделия″ может быть определено как ″близкое к 20 мм″ или ″приблизительно к 75 мм″. Такие лингвистические переменные называются **синтаксически независимыми**.

Произвольное значение (нечеткую переменную α) синтаксически независимой лингвистической переменной задается в виде тройки объектов:

$$\alpha = \langle x, X, C_\alpha \rangle.$$

4 Методы построения терм-множеств [4]

Утверждается, что для практических задач достаточно наличия нечеткого языка с фиксированным конечным словарем. Это ограничение не слишком строгое с точки зрения практического использования. Лингвистическая переменная β на практике имеет базовое терм-множество $T = \{T_i\}$, состоящее из 2 – 10 нечетких переменных. Предполагается, что объединение всех элементов терм-множества покрывает всю область определения лингвистической переменной. На практике значения на входе часто сильно искажены (шум, помехи, ошибки измерения и т.д.), поэтому функции принадлежности должны выбираться достаточно широкими, чтобы искажения не давали ощутимого эффекта. Все термы нумеруются $T_i \in T$ $T = \{T_j\}^{n}{}_1$ на множестве действительных чисел $u \in R$, так что имеющий левее расположенный носитель, имеет меньший номер. Правила для выбора терм-множества сведены в табл. 1. Вводятся более строгие условия:

1) $\mu_{T1}(U_{\min}) = 1$; $\mu_{T1}(U_{\max}) = 1$;
2) $\forall i$, i+1 < = n 0 < max $\mu_{Ti \cap Ti+1}(U) < 1$;
3) $\forall i$ существует $u \in U$: $\mu_{Ti}(U) = 1$;
4) $\forall i$ и $U \sum \mu_{Ti}(U) > 1$.

Таблица 1

	Критерий	Типичные значения
$\|T\|$	Выбирается в результате компромисса между сложностью и простотой	2 – 10
$U_{\max}$, $U_{\min}$	Для измеримых переменных определяют на основании априорных знаний	
ω_t	Должно быть достаточно широким, чтобы избежать чрезмерного влияния погрешностей при переходе от нечеткой переменной к лингвистической переменной	$\omega_t > 5\sigma n$

5 Построение функций принадлежности [1, 4, 5]

Будем считать, что функция принадлежности $\mu_A(x)$ элемента x к нечеткому множеству A – это субъективная мера того, насколько $x \in X$ соответствует понятию, смысл которого формализуется нечетким множеством A. Под субъективной мерой понимается определяемая опросом экспертов степень соответствия элемента x понятию, формализуемому нечетким множеством A. При этом степень соответствия – не условная вероятность наблюдения события A при возникновении события x, а скорее возможность интерпретации понятия x понятием A.

Построение функций принадлежности на счетном множестве точек на основе экспертных оценок

Простейший способ построения функций принадлежности предполагает *опрос нескольких экспертов*.

Пусть имеется m экспертов, часть которых на вопрос о принадлежности элемента $x \in X$ нечеткому множеству A отвечает положительно. Обозначим их число через n_1. Другая часть экспертов ($n_2 = m - n_1$) отвечает на вопрос отрицательно. Тогда функция принадлежности принимается

$$\mu_A(x) = n_1/(n_1 + n_2).$$

Необходимо отметить, что данная схема определения функции принадлежности самая простая, но и самая грубая.

Более точно функцию принадлежности можно построить на основе *количественного парного сравнения степеней принадлежности*. Такая схема допускает и одного эксперта.

Результатом опроса эксперта является матрица $M = \| m_{ij} \|$, $i, j = 1, \ldots, n$, где n – число точек, в которых сравниваются значения функции принадлежности. Число m_{ij} показывает, во сколько раз, по мнения эксперта, степень принадлежности $\mu_A(x_i)$ больше $\mu_A(x_j)$. При этом эксперт оперирует понятиями, представленными в табл. 2.

Таблица 2

Смысл	M_{ij}
$\mu(x_i)$ равна $\mu(x_i)$	1
$\mu(x_i)$ немного больше $\mu(x_j)$	3
$\mu(x_i)$ больше $\mu(x_j)$	5
$\mu(x_i)$ заметно больше $\mu(x_j)$	7
$\mu(x_i)$ намного больше $\mu(x_j)$	9
Значения, промежуточные по степени между перечисленными	2, 4, 6, 8

Далее, определить значение функции принадлежности μ_A в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно, используя формулу

$$\mu_A(x_i) = \frac{m_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} m_{ij}},$$

где j – произвольный столбец матрицы M.

Пример: Пусть для описания расстояния между двумя точками используется лингвистическая переменная β – "расстояние" с множеством базовых значений $T = \{$"малое", "среднее", "большое"$\}$.

Базовое множество лингвистической переменной β: $X = \{1, 3, 6, 8\}$. Терм "малое" характеризуется нечеткой переменной <малое, X, C>. Требуется построить функцию принадлежности нечеткого множества C, т.е. определить значение $\mu_C(x)$, $x \in X$.

Пусть опросом экспертов получена следующая матрица парных сравнений:

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 6 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 6 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Здесь, например, на пересечении первой строки и второго столбца стоит число 5, т. е. $m_{12} = 5$, т. е. в следствие оценки эксперта $\mu_C(1)$ больше $\mu_C(3)$ в соответствии с таблицей.

Зафиксируем первый столбец матрицы M: $M1 = \{1, 1/5, 1/6, 1/7\}$ и по формуле, приведенной выше найдем значения функций принадлежности в точках x_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\mu_C(1) = \frac{m_{11}}{\sum_{i=1}^{4} m_{i1}} = \frac{1}{1{,}55} = 0{,}64; \quad \mu_C(3) = \frac{m_{21}}{\sum_{i=1}^{4} m_{i1}} = \frac{0{,}2}{1{,}55} = 0{,}13;$$

$$\mu_C(6) = \frac{m_{31}}{\sum_{i=1}^{4} m_{i1}} = \frac{0{,}16}{1{,}55} = 0{,}1; \quad \mu_C(8) = \frac{m_{41}}{\sum_{i=1}^{4} m_{i1}} = \frac{0{,}14}{1{,}55} = 0{,}08.$$

Таким образом, нечеткое множество C имеет вид

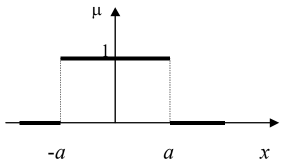
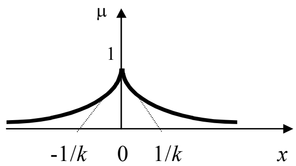
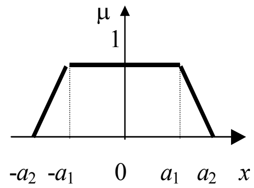
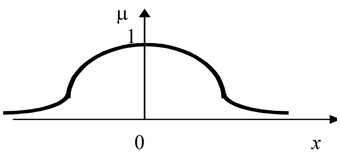
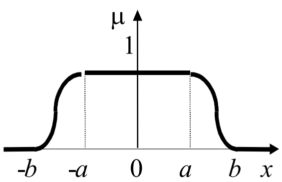
$C = \{$<0,64/1>, <0,13/3>, <0,1/6>, <0,08/8>$\}$.

Построение функции принадлежности

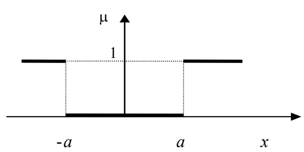
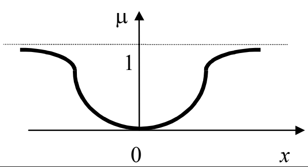
на непрерывном множестве точек

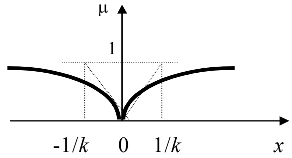
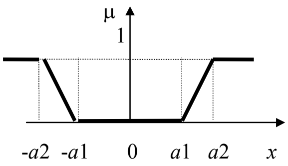
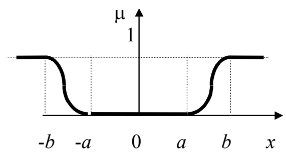
Выбор вида функции принадлежности и их параметров определяется в большей степени опытом, интуицией и другими субъективными факторами лица, принимающего решение. В табл. 3 приведены некоторые простейшие функции принадлежности, которые можно предложить эксперту.

Таблица 3

График	Функция
Функции степеней принадлежности утверждения "величина $\lvert x \rvert$ малая"	
	$\mu(x) = \begin{cases} 0, -\infty < x < -a \\ 1, -a \le x \le a \\ 0, a < x < \infty \end{cases}$
	$K > 1$ $\mu(x) = \begin{cases} e^{kx}, -\infty < x \le 0 \\ e^{-kx}, 0 \le x < \infty \end{cases}$
	$\mu(x) = \begin{cases} 0, -\infty < x \le -a_2 \\ \dfrac{a_2 + x}{a_2 - a_1}, -a_2 \le x \le a_1 \\ 1, -a_1 \le x \le a_1 \\ \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a_1}, a_1 \le x < \infty \end{cases}$
	$\mu(x) = \dfrac{1}{1 + kx^2}$; $k > 1$
	$\mu(x) = \begin{cases} 0; -\infty < x \le -b \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{b-a}(x + \frac{a+b}{2}); \\ -b \le x \le -a \\ 1; -a \le x \le a \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{b-a}(x - \frac{a+b}{2}); \\ a \le x \le b \\ 0; b \le x < \infty \end{cases}$

Продолжение табл. 3

График	Функция
Функции степеней принадлежности утверждения "величина $\lvert x \rvert$ большая"	
	$\mu(x) = \begin{cases} 1; -\infty \le x < -a \\ 0; -a \le x \le a \\ 1; a < x \le \infty \end{cases}$
	$k > 1$ $\mu(x) = \dfrac{kx^2}{1 + kx^2} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{kx^2}}$

	$k > 1$ $\mu(x) = \begin{cases} 1 - e^{kx}; -\infty < x \le 0 \\ 1 - e^{-kx}; 0 \le x < \infty \end{cases}$
	$\mu(x) = \begin{cases} 1; -\infty < x < -a_2 \\ -\dfrac{x + a_1}{a_2 - a_1}; -a_2 \le x \le -a_1 \\ 0; -a_1 x \le a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}; a_1 \le x \le a_1 \\ 1; a_2 \le x < \infty \end{cases}$
	$\mu(x) = \begin{cases} 1; -\infty < x \le -b \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{b-a}(x + \dfrac{a+b}{2}); \\ -b \le x \le -a \\ 0; -a \le x \le a \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{b-a}(x - \dfrac{a+b}{2}); \\ a \le x \le b \\ 1; b \le x < \infty \end{cases}$
Примечание. Все функции определены на множестве действительных чисел.	

Задание функции степеней принадлежности в нечетких подмножествах осуществляют несколькими способами:

– в ряде случаев исследователь может задать самостоятельно функцию, исходя из личного опыта. Например, проводя сопоставление результатов измерений, выполненных на различных технологических системах, исследователь оперирует качественными факторами и описывает результаты сопоставления словесно;

– в более сложных и ответственных случаях задание функций принадлежности в нечетких подмножествах выполняется с привлечением группы экспертов с последующей обработкой их оценок. Так при оценке качества изделий, контроль которого осуществляется визуально, возникает задача выбора эталона, к выбору которого целесообразно привлечь экспертов.

Рассмотрим процесс задания функции принадлежности. Пусть диапазон изменения величины $x \in X$ определяется отрезком $[x_n, x_k]$.Обычно на этом отрезке выделяют значение $x_0 \in X$, характеризующее понятие "норма". Кроме этого на отрезке $[x_n, x_k]$ существуют противоположные по смысловому содержанию (с точки зрения нечеткого множества) термины. Иными словами множество $[x, x_k]$должно обладать симметрией относительно элемента x_0. Требуется, кроме того, выполнение следующих асимптотических свойств

$$\lim_{x \to x_n} \mu(x) = a; \quad \lim_{x \to x_k} \mu(x) = b,$$

где a, b – постоянные для данного термина.

Например, на рис. 4 представлена функция принадлежности $\mu(x)$, формализующая понятие "высокий".

На оси абсцисс отмечен опорный элемент x_0, соответствующий понятию "норма". Обычно полагают $\mu(x) = 0,5$. Выбор x_0 подвержен субъективизму каждого исследователя и определяется уровнем знаний о конкрет-

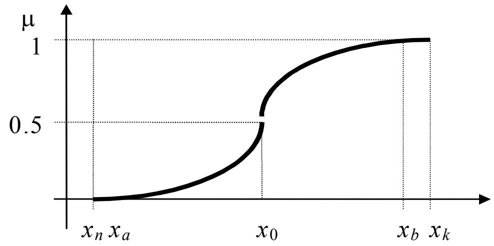


Рис. 4 Функция принадлежности нечеткого понятия "высокий"

ной системе. Выполнение условия $\lim\limits_{x \to x_n} \mu(x) = 0$ отражает тот факт, что элементы $x < x_0$ в меньшей степени чем x_0 относятся к понятию "высокий". Кроме того, заметим, что формируемое нечеткое множество предполагается нормальным, т.е. $\sup\limits_{x \in X} \mu(x) = 1$.

Исходя из асимптотических свойств функции $\mu(x)$ исследователем может быть установлены интервалы $[x_н, x_a]$и $[x_b, x_k]$, на которых функция задается путем четкой классификации:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0; x \in [x_н, x_a] \\ 1; x \in [x_b, x_k] \end{cases}$$

Наиболее сложным является задание $\mu(x)$ при $x \in [x_a, x_b]$. Предполагается, что $\mu(x)$ является монотонной функцией.

Например, проиллюстрируем способ задания функции принадлежности для формализации понятий "низкий", "средний", "высокий".

Процедура задания функций принадлежности, которой должны придерживаться эксперты, заключается в следующем (рис. 5):

1) Выделение точки $x_1 \in X$, которая, с точки зрения, эксперта точно соответствует нечеткому подмножеству. В этом случае $\mu(x) = 1$.

2) Нахождение точек слева и справа от x_1, которые с точки зрения эксперта не могут быть отнесены к рассматриваемому термину. Для них $\mu(x_2) = \mu(x_3) = 0$.

3) Графическое построение функций по выбранным точкам с использованием линейной аппроксимации.

4) Выделение подмножества $X_1 \in X$, на котором определена формализация термина, $X_1 \in [x_2, x_3]$.Следует отметить, что в ряде случаев точки x_2, x_3 могут быть отнесены в бесконечность.

Такой способ задания функций принадлежности обладает следующими особенностями:

- простотой выполнения экспертной оценки с точки зрения психологической нагрузки;
- компактность задания функций;
- простотой математических средств при переходе от одного термина к другому.

В ряде случаев функцию степеней принадлежности μ(x) нечеткого подмножества некоторого множества задают в виде функциональной зависимости, например, экспоненциальной, полинома и т.п. с одним или несколькими неизвестными переменными.

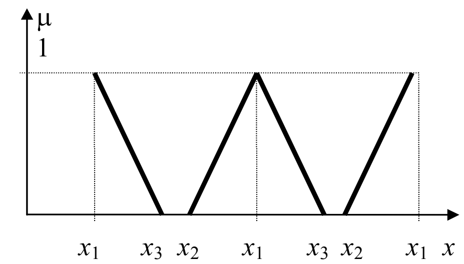


Рис. 5 Пример построения функций принадлежности

Задание функций принадлежности требует знаний особенностей объекта исследований, принятой в данной отрасли терминологии и использование, по возможности, простых функциональных зависимостей. Для идентификации неизвестных параметров в функции принадлежности нечеткого подмножества могут быть использованы метод наименьших квадратов, симплекс-метод и другие.

***Пример*:**

1) Параметр "расход сырья на установку" (G) определен на отрезке [70 – 100] и имеет три нечетких значения:

– малый с функцией принадлежности $\mu_1(x) = \exp(-\frac{1}{5}\ln\frac{1}{2}|x-75|)$;

– средний с функцией принадлежности $\mu_2(x) = \exp(-\frac{1}{5}\ln\frac{1}{2}|x-85|)$;

– большой с функцией принадлежности $\mu_3(x) = \exp(-0{,}1\ln\frac{1}{2}|x-100|)$.

Здесь принятые термины описываются зависимостью вида

$$\mu(x) = \exp(-Q|x-a_p|),$$

где Q – постоянная величина, которая находится при идентификации функции принадлежности $a_p = (a_r + a_{r+1})/2$.

7. Нечеткие высказывания. Правила преобразования нечетких высказываний [1, 2]

Нечеткими называются высказывания следующего вида:

1. Высказывание <β есть α>,

где β – наименование лингвистической переменной, отражающей некоторый объект или параметр реальной действительности; α – наименование нечеткой переменной, которая является нечеткой оценкой β.

***Пример*:** давление большое; толщина равна 14 (в этом случае значение α = 14 является четкой оценкой лингвистической переменной β (толщина)).

2. Высказывания вида: <β есть mα>, <β есть Qα>, <Qβ есть mα>, <mβ есть Qα>,

где m – модификатор (ему соответствуют такие слова как ОЧЕНЬ, СРЕДНИЙ, БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ, НЕЗНАЧИТЕЛЬНЫЙ …); Q – квантификатор (ему соответствуют слова типа: БОЛЬШИНСТВО, НЕСКОЛЬКО, МНОГО, НЕМНОГО, ОЧЕНЬ МНОГО и др.)

***Пример*:** давление очень большое; большинство значений параметра очень мало.

3. Высказывания, образованные из высказываний 1-го и 2-го видов и союзов: И, ИЛИ, ЕСЛИ … ТО, ЕСЛИ … ТО … ИНАЧЕ …

***Пример*:** ЕСЛИ давление большое ТО толщина не мала.

Предположим, имеются некоторые нечеткие высказывания $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$ относительно одной ситуации *A*. Эти высказывания имеют вид:

< β есть α_C >; < β есть α_D >,

где α_C и α_D – нечеткие переменные, определенные на универсальном множестве $X = \{x\}$.

Истинностью высказывания $\tilde{D}$ относительно $\tilde{C}$ называется значение функции $T(\tilde{D}/\tilde{C})$, определяемое степенью соответствия высказываний $\tilde{D}$ и $\tilde{C}$:

$$T(\tilde{D}/\tilde{C}) = \{\mu_T(\tau)/\tau\},$$

где $\tau = \mu_D(x)\ \forall\ x \in X$; $\mu_T(\tau) = \max \mu_C(x)$; $X' = \{x \in X \mid \mu_D(x) = \tau\}$, т.е. функция принадлежности значение истинности $\mu_T(\tau)$ для любого $0 \le \tau \le 1$ определяется как максимальное из $\mu_C(x)$ (функция принадлежности нечеткой переменной α_C) для тех x у которых $\mu_D(x) = \tau$ ($\mu_D(x)$ – функция принадлежности нечеткой переменной α_D).

***Пример*:** имеются два высказывания:

$\tilde{C}$: < β имеет значение приблизительно 6 >; $\tilde{D}$: < β находится близко к 5>.

Нечеткое множество определено на универсальном множестве $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Нечеткие переменные:

α_C – ″приблизительно 6″ с функцией принадлежности:

C_C = {<0,1/3>, <0,4/4>, <0,8/5>, <1/6>, <0,7/7>, <0,4/8>, <0,3/9>, <0,1/10>}

α_D – "близко 5" с функцией принадлежности:

C_D = {<0,1/2>, <0,3/3>, <0,7/4>, <1/5>, <0,8/6>, <0,6/7>, <0,3/8>, <0,1/9>}.

Требуется определить истинность высказывания $\tilde{D}$ относительно $\tilde{C}$.

Определим значения τ, для которых будут вычисляться функции принадлежности.

$\tau \in \{0; 0{,}1; 0{,}3; 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8; 1\}$; $(\tau = \mu_D(x))$

$\tau = 0$ $x = \{10\}$ $\max \mu_C(x) = 0{,}1$;

$\tau = 0{,}3$ $x = \{3, 8\}$ $\max \mu_C(x) = 0{,}4$;

$\tau = 0{,}7$ $x = \{4\}$ $\max \mu_C(x) = 0{,}4$;

$\tau = 1$ $x = \{5\}$ $\max \mu_C(x) = 0{,}8$;

$\tau = 0{,}1$ $x = \{2, 9\}$ $\max \mu_C(x) = 0{,}3$;

$\tau = 0{,}6$ $x = \{7\}$ $\max \mu_C(x) = 0{,}7$;

$\tau = 0{,}8$ $x = \{6\}$ $\max \mu_C(x) = 1$;

Таким образом, истинность высказывания $\tilde{D}$ относительно $\tilde{C}$ имеет вид:

$T(\tilde{D}/\tilde{C})$ = {<0,1/0>,<0,3/0,1>,<0,4/0,3>,<0,7/0,6>,<0,4/0,7>,<1/0,8>,<0,8/1>}.

Мы рассмотрели нахождение истинности высказываний вида <β есть α>. Чтобы определить истинность более сложных высказываний, необходимо привести эти высказывания к виду <β есть α>. Такое приведение осуществляется по определенным правилам.

(1) **Правило преобразования конъюнктивной формы**

$$<\beta_x \text{ есть } \alpha_{x_1} \text{ И } \beta_y \text{ есть } \alpha_{y_1}> \rightarrow <(\beta_x, \beta_y) \text{ есть } \ddot{\alpha}_{x_1} \cap \ddot{\alpha}_{y_1}>,$$

Здесь $\ddot{\alpha}_{x_1} \cap \ddot{\alpha}_{y_1}$ – это значение лингвистической переменной (β_x, β_y) с нечетким множеством $C_\cap = \ddot{C}_{x_1} \cap \ddot{C}_{y_1}$, где $\ddot{C}_{x_1}, \ddot{C}_{y_1}$ – цилиндрические продолжения нечетких множеств C_x и C_y:

$$\ddot{C}_{x_1} = \left\{<\ddot{\mu}_{x_1}(x,y)/(x,y)>\right\};\ \ddot{C}_{y_1} = \left\{<\ddot{\mu}_{y_1}(x,y)/(x,y)>\right\}.$$

$$(x,y) \in X * Y \text{ И } (\forall x \in X), (\forall y \in Y),\ \ddot{\mu}_{x_1}(x,y) = \mu_{x_1}(x),\ \ddot{\mu}_{y_1}(x,y) = \mu_{y_1}(y).$$

***Пример*:** Пусть имеется нечеткое высказывание вида: <давление большое и диаметр малый>. Здесь лингвистические переменные β_x – давление, β_y – диаметр принимают значения α_{x_1} – большое, α_{y_1} – малый.

Лингвистическая переменная β_x определена на множестве X = {3, 5, 6}, а нечеткое множество C_{x_1}, соответствующие значению α_{x_1} имеет вид

C_{x_1} = {<0,3/3>, <0,7/5>, <1/6>}.

β_y определена на множестве Y = {10, 15, 20, 25}, а нечеткое множество C_{y_1}

C_{y_1} = {<1/10>, <0,8/15>, <0,4/20>, <0,2/25>}.

Найдем цилиндрические продолжения

$\ddot{C}_{x_1}$ = {<0,3/(3,10)>, <0,3/(3,15)>, <0,3/(3,20)>, <0,3/(3,25)>, <0,7/(5,10)>, <0,7/(5,15)>, <0,7/(5,20)>, <0,7/(5,25)>, <1/(6,10)>, <1/(6,15)>, <1/(6,20)>, <1/(6,25)>};

$\ddot{C}_{y_1}$ = {<1/(3,10)>, <1/(5,10)>, <1/(6,10)>, <0,8/(3,15)>, <0,8/(5,15)>, <0,8/(6,15)>, <0,4/(3,20)>, <0,4/(5,20)>, <0,4/(6,20)>, <0,2/(3,25)>, <0,2/(5,25)>, <0,2/(6,25)>}.

Тогда получим преобразование исходного высказывания

<давление большое и диаметр малый> $\rightarrow <(\beta_x, \beta_y)$ есть $\ddot{\alpha}_{x_1} \cap \ddot{\alpha}_{y_1}>$,

где $\ddot{\alpha}_{x_1} \cap \ddot{\alpha}_{y_1}$ значение лингвистической переменной (β_x, β_y) с нечетким множеством

$C_\cap = \ddot{C}_{x_1} \cap \ddot{C}_{y_1} =$ {<0,3/(3,10)>, <0,3/(3,15)>, <0,3/(3,20)>, <0,2/(3,25)>, <0,7/(5,10)>, <0,7/(5,15)>, <0,4/(5,20)>, <0,2/(5,25)>, <1/(6,10)>, <0,8/(6,15)>, <0,4/(6,20)>, <0,2/(6,25)>}.

(2) **Правило преобразования дизъюнктивной формы**

$$<\beta_x \text{ есть } \alpha_{x_1} \text{ ИЛИ } \beta_y \text{ есть } \alpha_{y_1}> \rightarrow <(\beta_x, \beta_y) \text{ есть } \ddot{\alpha}_{x_1} \cup \ddot{\alpha}_{y_1}>.$$

где $\ddot{\alpha}_{x_1} \cup \ddot{\alpha}_{y_1}$ – это значение лингвистической переменной (β_x, β_y) с нечетким множеством $C_\cup = \ddot{C}_{x_1} \cup \ddot{C}_{y_1}$ (объединение цилиндрических продолжений).

***Пример*:** Смотри задание примера 12.

Пусть имеется нечеткое высказывание:

$$\text{<давление большое ИЛИ диаметр малый>} \to \text{<}(\beta_x, \beta_y) \text{ есть } \ddot{\alpha}_{x_1} \cup \ddot{\alpha}_{y_1} \text{>},$$

где $\ddot{\alpha}_{x_1} \cup \ddot{\alpha}_{y_1}$ значение лингвистической переменной (β_x, β_y) с нечетким множеством $C_{\cup} = \ddot{C}_{x_1} \cup \ddot{C}_{y_1} =$ {<1/(3,10)>, <0,8/(3,15)>, <0,4/(3,20)>, <0,3/(3,25)>, <1/(5,10)>, <0,8/(5,15)>, <0,7/(5,20)>, <0,7/(5,25)>, <1/(6,10)>, <1/(6,15)>, <1/(6,20)>, <1/(6,25)>,}.

(3) Правило преобразования высказываний импликативной формы

$$\text{<ЕСЛИ} \beta_x \text{ есть } \alpha_{x_1} \text{ ТО } \beta_y \text{ есть } \alpha_{y_1} \text{>} \to \text{<}(\beta_x, \beta_y) \text{ есть } \ddot{\alpha}_{x_1} \Diamond \ddot{\alpha}_{y_1} \text{>}$$

Знак $\Diamond$ означает пороговую сумму, определяемую как

$$(\forall\, x \in X)\ (\forall\, y \in Y)\ \mu_{\Diamond}(x,y) = 1 \wedge (1 - \mu_{\ddot{\alpha}_{X_1}}(x,y) + \mu_{\ddot{\alpha}_{Y_1}}(x,y)),$$

где $\mu_{\ddot{\alpha}_{X_1}}(x,y)$, $\mu_{\ddot{\alpha}_{Y_1}}(x,y)$ – функции принадлежности, соответствующие нечетким множествам $\ddot{C}_{x_1}$, $\ddot{C}_{y_1}$.

***Пример*:** Рассмотрим нечеткое высказывание:

<ЕСЛИ давление большое ТО диаметр малый>.

Это высказывание можно записать виде $\text{<}(\beta_x, \beta_y) \text{ есть } \ddot{\alpha}_{x_1} \Diamond \ddot{\alpha}_{y_1} \text{>}$

Определим функцию $\mu_{\Diamond}(x,y)$ (смотри задание примера 12):

$\mu_{\Diamond}(3,10) = 1 \wedge (1 - 0,3 + 1) = 1$; $\mu_{\Diamond}(3,15) = 1 \wedge (1 - 0,3 + 0,8) = 1$;

$\mu_{\Diamond}(3,20) = 1 \wedge (1 - 0,3 + 0,4) = 1$; $\mu_{\Diamond}(3,25) = 1 \wedge (1 - 0,3 + 0,2) = 0,9$;

$\mu_{\Diamond}(5,10) = 1 \wedge (1 - 0,7 + 1) = 1$; $\mu_{\Diamond}(5,15) = 1 \wedge (1 - 0,7 + 0,8) = 1$;

$\mu_{\Diamond}(5,20) = 1 \wedge (1 - 0,7 + 0,4) = 0,7$; $\mu_{\Diamond}(5,25) = 1 \wedge (1 - 0,7 + 0,2) = 0,5$;

$\mu_{\Diamond}(6,10) = 1 \wedge (1 - 1 + 1) = 1$; $\mu_{\Diamond}(6,15) = 1 \wedge (1 - 1 + 0,8) = 0,8$;

$\mu_{\Diamond}(6,20) = 1 \wedge (1 - 1 + 0,4) = 0,4$; $\mu_{\Diamond}(6,25) = 1 \wedge (1 - 1 + 0,2) = 0,2$.

Таким образом, нечеткая переменная $\ddot{\alpha}_{x_1} \Diamond \ddot{\alpha}_{y_1}$ будет характеризоваться нечетким множеством $C_{\Diamond}$ ={<1/(3,10)>, <1/(3,15)>, <1/(3,20)>, <0,9/(3,25)>, <1/(5,10)>, <1/(5,15)>, <0,7/(5,20)>, <0,5/(5,25)>, <1/(6,10)>, <0,8/(6,15)>,<0,4/(6,20)>, <0,2/(6,25)>}.

Рассмотрим более сложное высказывание импликативной формы:

$$\text{<ЕСЛИ } \beta_x \text{ есть } \alpha_{x_1} \text{ ТО } \beta_y \text{ есть } \alpha_{y_1} \text{ ИНАЧЕ } \alpha_{y_2} \text{>}$$

Представляя его в конъюнктивной форме получим

$$\text{<ЕСЛИ} \beta_x \text{ есть} \alpha_{x_1} \text{ ТО } \beta_y \text{ есть } \alpha_{y_1} \text{ И ЕСЛИ} \beta_x \text{ есть НЕ } \alpha_{x_1} \text{ ТО } \beta_y \text{ есть } \alpha_{y_2} \text{>}$$

Согласно ранее приведенным формулам получаем

$$\to \text{<}(\beta_x, \beta_y) \text{ есть } (\ddot{\alpha}_{x_1} \Diamond \ddot{\alpha}_{y_1}) \cap (\neg \ddot{\alpha}_{x_1} \Diamond \ddot{\alpha}_{y_2}) \text{>}.$$

8 Представление экспертной информации на трудно формализуемых этапах проектирования [1, 4]

Модели принятия решений, основанные на теории нечетких множеств предполагают задание: множества альтернатив выбора, критериев выбора, ограничений, отношений предпочтения, и т.д.

В зависимости от выбора решений все этапы проектирования можно разделять на два класса:

1) К первому классу относятся этапы, в результате которых происходит выбор значений параметров проектирования. В этом случае значениями определяемого параметра является подмножество множества действительных чисел. Для этих задач разработаны модели принятия решений, использующие нечеткие правила MODUS PONENS и индуктивную схему вывода.

2) Ко второму классу относятся этапы, цель которых – выбор варианта (схемы) проектирования или значения параметра изделия из конечного достаточно небольшого заранее заданного множества. Для решения таких задач также используется нечеткое правило MODUS PONENS, нечеткое индуктивная схема вывода, а так же модель, использующую нечеткую экспертную информацию второго рода.

9. Представление экспертной информации в виде систем нечетких высказываний [1, 4, 5]

Обозначим через X, Y, Z … – множество значений входных параметров процесса проектирования, существенно влияющих на выбор выходного параметра V. Введем лингвистические переменные: $<\beta_x, T_x, X_x, G_x, M_x>$, $<\beta_y, T_y, X_y, G_y, M_y>$, $<\beta_z, T_z, X_z, G_z, M_z>$, и $<\beta_v, T_v, X_v, G_v, M_v>$, определенные на множествах X, Y, Z … и V.

Системы логических высказываний, отражающие опыт эксперта в типовых ситуациях, представим в виде

$$\tilde{L}^{(1)} = \begin{cases} \tilde{L}_1^{(1)} :< \text{если } \tilde{E}_{11} \text{ или...или } \tilde{E}_{1n_1} \text{ то } \beta_v \text{ есть } \mu\alpha_{v1} > \\ ... \\ \tilde{L}_m^{(1)} : \langle \text{если } \tilde{E}_{m_1} \text{ или...или } \tilde{E}_{mn_m} \beta_v \text{ есть } \mu\alpha_{vm} > \end{cases}$$

или в виде

$$\tilde{L}^{(1)} = \begin{cases} \tilde{L}_1^{(1)} :< \text{если } \beta_v \text{ есть } \mu\alpha_{v1} \text{ то } \tilde{E}_{11} \text{ или...или } \tilde{E}_{1n_1} > \\ ... \\ \tilde{L}_m^{(1)} : \langle \text{если } \beta_v \text{ есть } \mu\alpha_{vm} \text{”} \tilde{E}_{m1} \text{ или...или} \tilde{E}_{mn_m} > \end{cases}$$

где m – число базовых значений лингвистической переменной β_v; E_{ji} ($i = 1 ... n, j = 1 ... m$ – высказывания вида

$$< \beta_x \text{ есть } \mu\alpha_{x_{ji}} \text{ И } \beta_y \text{ есть } \mu\alpha_{y_{ji}} \text{ И } \beta_z \text{ есть } \mu\alpha_{z_{ji}} \ldots > .$$

Высказывание E_{ij} представляет собой i-ю входную нечеткую ситуацию, которая может иметь место, если лингвистическая переменная β_v примет значение α_{vj}. Значения α_{Xji}, α_{Yji}, α_{Zji}, … α_{Vji} – нечеткие переменные с функциями принадлежности соответственно $\mu_{Xji}(x)$, $\mu_{\mathrm{Yji}}(y)$, $\mu_{\mathrm{Zji}}(z)$, … $\mu_{Vji}(v)$ ($x \in X, y \in Y, z \in Z, v \in V$).

Обе приведенные системы нечетких высказываний отражают два разных случая взаимосвязи между значениями входных и выходных параметров процесса проектирования. В первом случае в зависимости от базовых значений входных лингвистических переменных делается вывод о базовом значении выходной лингвистической переменной. Во втором случае в зависимости от возможных значений выходного параметра делается предположение о возможных значениях входных параметров.

Представим системы в более компактном виде.

Используя правило преобразования конъюнктивной формы, высказывание E_{ji} можно записать в более компактном виде

$$E_{ji} :< \beta_W \text{ ЕСТЬ } \alpha_{Eji}>,$$

где β_W – лингвистическая переменная, определенная на множестве $W = X * Y * Z * \ldots$ и принимающая базовые значения α_{Eji} с функцией принадлежности: $\mu_{Eji}(w) = \min\{\mu_{Xji}(x), \mu_{Yji}(y), \mu_{Zji}(z), \ldots\}$.

Далее согласно правилу преобразования дизъюнктивной формы высказывания $L_j^{(1)}$ и $L_j^{(2)}$ могут быть представлены в виде:

$$L_j^{(1)} = < \text{ЕСЛИ } \beta_W \text{ есть } \alpha_{Wj} \text{ ТО } \beta_V \text{ есть } \alpha_{Vi}>,$$
$$L_j^{(2)} = < \text{ЕСЛИ } \beta_V \text{ есть } \alpha_{Vj} \text{ ТО } \beta_W \text{ есть } \alpha_{Wi}>.$$

Здесь α_{Wi} – значение лингвистической переменной β_W с функцией принадлежности: $\mu_{Wj}(w) = \max \mu_{Eji}(w)$.

Обозначим через A_j и N_j высказывания $< \beta_W$ есть $\alpha_{Wj} >$ и $< \beta_V$ есть $\alpha_{Vj}>$.

Тогда системы нечетких высказываний запишутся в виде

$$\tilde{L}^{(1)} = \begin{cases} \tilde{L}_1^{(1)} :< \text{ЕСЛИ } \tilde{A}_1 \text{ ТО } \tilde{B}_1 > \\ \tilde{L}_2^{(1)} :< \text{ЕСЛИ } \tilde{A}_2 \text{ ТО } \tilde{B}_2 > \\ \cdots \\ \tilde{L}_m^{(1)} :< \text{ЕСЛИ } \tilde{A}_m \text{ ТО } \tilde{B}_m > \end{cases}$$

Эту систему назовем нечеткой системой первого типа.

$$\tilde{L}^{(2)} = \begin{cases} \tilde{L}_1^{(2)} :< \text{ЕСЛИ } \tilde{B}_1 \text{ ТО } \tilde{A}_1 > \\ \tilde{L}_2^{(2)} :< \text{ЕСЛИ } \tilde{B}_2 \text{ ТО } \tilde{A}_2 > \\ \dots \\ \tilde{L}_m^{(2)} :< \text{ЕСЛИ } \tilde{B}_m \text{ ТО } \tilde{A}_m >. \end{cases}$$

Эту систему назовем нечеткой системой второго типа.

Системы нечетких экспертных высказываний представимы в виде соответствий:

1) Система высказываний первого типа может быть задана соответствием

$$\Gamma^{(1)} = (T_V, T_W, F_1),$$

где T_W – область отправления (множество входных ситуаций); T_V – область прибытия (множество выходных ситуаций); $F_1 \subseteq T_W * T_V$ – график соответствия.

2) Система высказываний второго типа задается соответствием

$$\Gamma^{(2)} = (T_V, T_W, F_2),$$

где $F_2 \subseteq T_V * T_W$.

Графики соответствия представляются в виде графа, в левой части которого вершинам соответствуют области отправления, а в правой – области прибытия. Пример приведен на рис. 6.

Для анализа нечеткой информации вводится ряд понятий:

1) Система нечетких высказываний называется лингвистически не избыточной, если граф соответствия не содержит повторяющихся пар вершин.

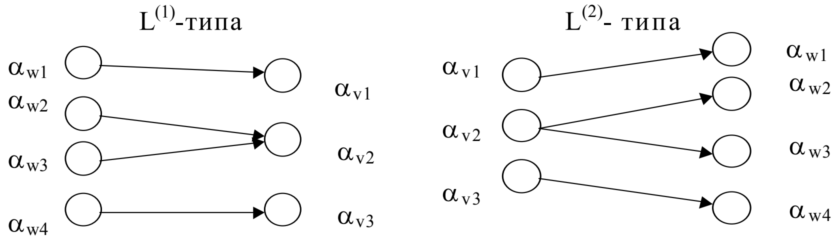


Рис. 6 Пример графиков соответствия

2) Система нечетких высказываний называется лингвистически полной, если граф системы первого типа в правой части, а системы второго типа в левой части не содержит изолированных вершин. В противном случае система является лингвистически вырожденной (пример на рис. 7).

3) Система нечетких высказываний называется лингвистически непротиворечивой, если в графе соответствия системы первого типа из каждой вершины левой части выходит не более одного ребра, а для системы второго типа в каждую вершину правой части входит не более одного ребра. Примеры противоречивых систем приведены на рис. 8.

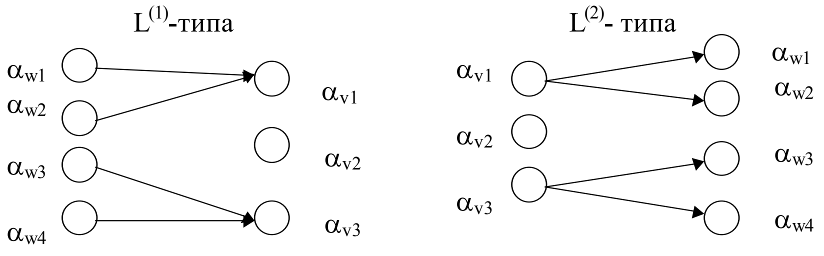


Рис. 7 Пример лингвистически вырожденых систем

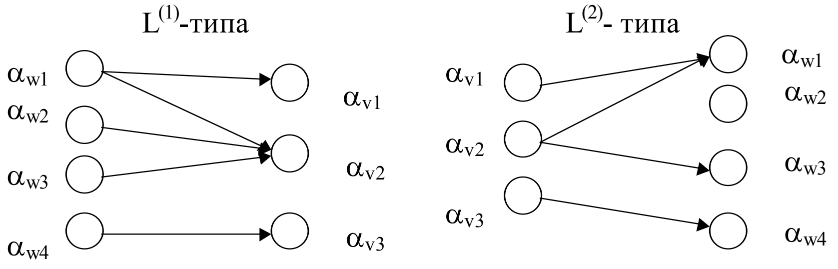


Рис. 8   Пример противоречивых систем

Рассмотренные понятия позволяют качественно оценить экспертную информацию. Естественным требованием к ней является то, что система нечетких высказываний должна быть лингвистически полной невырожденной и непротиворечивой.

Литература

1   Малышев Н.Г., Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Нечеткие модели для экспертных систем в САПР. М.: Энергоатомиздат,1991.

2   Заде Л. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решения // Математика сегодня: Сб. статей. М.: Знание, 1974.

3   Zimmerman H. J. Fuzzy Set Theory and its Applications. Boston etc. 1992.

4   Кафаров Б.Б., Дорохов И.Н., Марков Е.П. Системный анализ процессов химической технологии. Применение метода нечетких множеств. М.: Наука, 1986.

5   Кофман Л. Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982.

6   Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. М.: Наука, 1986.

7   Вощинин А.П., Сотиров Г.Р. Оптимизация в условиях неопределенности. М.: МЭП, НРБ: Изд-во "Техника", 1990.