ТРИГОНОМЕТРИЯ

Издательство ТГТУ

Министерство образования Российской федерации
Тамбовский государственный технический университет

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Тамбов
Издательство ТГТУ
2003

УДК 514(083)
ББК В151.я73
Г87

Рецензент
Доктор технических наук, профессор
В.М. Тютюник

Авторы:

Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, О.Г. Иванова,
Ю.А. Костылев, А.В. Лагутин, А.Ю. Сизикин

Г87 Тригонометрия: Учебное пособие / Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, О.Г. Иванова и др. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. 104 с.
ISBN 5-8265-0088-3

Учебное пособие знакомит иностранных учащихся с основными тригонометрическими функциями и их свойствами, также в нем приводятся основные методы решения тригонометрических уравнений. Пособие содержит тексты, лексико-грамматический материал и задачи, позволяющие студентам-иностранцам овладеть основами курса математики на русском языке.

Учебное пособие предназначено для студентов-иностранцев, проходящих предвузовскую подготовку.

УДК514(083)
ББК В151.я73

ISBN 5-8265-0088-3

Учебное издание

Громов Юрий Юрьевич,
Земской Николай Александрович,
Иванова Ольга Геннадьевна,
Костылев Юрий Александрович,
Лагутин Андрей Владимирович,
Сизикин Александр Юрьевич

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Редактор В. Н. Митрофанова
Компьютерное макетирование Е. В. Кораблевой

Подписано к печати 7.07.2003
Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Объем: 6,04 усл. печ. л.; 6,00 уч.-изд. л.
Тираж 150 экз. С. 463

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

1 Тригонометрические функции

1.1 Единичная окружность

Пусть имеется прямоугольная система координат *Oxy* (рис. 1.1.1). Проведём окружность радиуса $R = 1$ с центром в начале координат. Эту окружность будем называть единичной окружностью. Часть плоскости, ограниченную единичной окружностью будем называть единичным кругом.

Координатные оси *Ox* и *Oy* прямоугольной системы координат делят координатную плоскость на четыре части. Эти части называют квадрантами. Единичный круг также делится на четыре равные части. Их мы тоже будем называть квадрантами. В центре окружности поместим вектор $\overrightarrow{OA}$ такой, что $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 1$. При вращении этого вектора вокруг точки *O* в плоскости *xOy*, конец вектора всегда будет находится на единичной окружности. Угол $\alpha = \angle AOB$ образован вращением подвижного единичного радиуса-вектора в направлении, противоположном движению часовой стрелки. Другими словами под углом мы понимаем часть единичного круга, ограниченную двумя положениями подвижного радиуса-вектора (рис. 1.1.1).

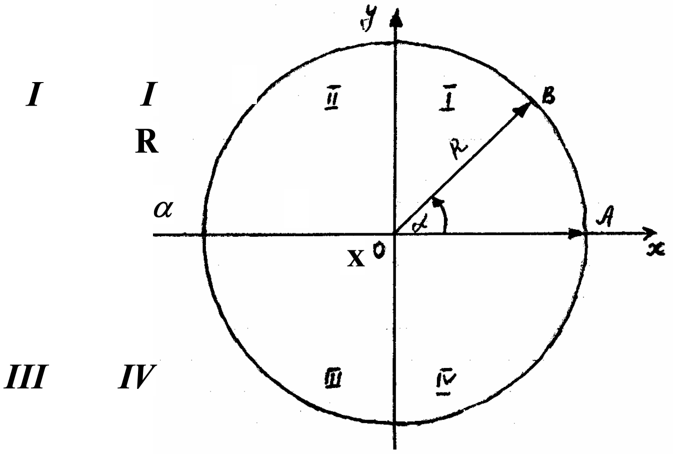
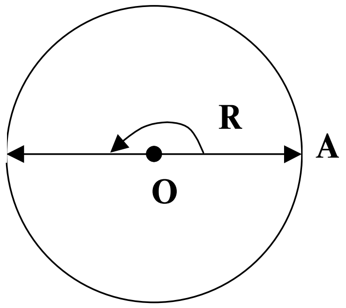


Рис. 1.1.1



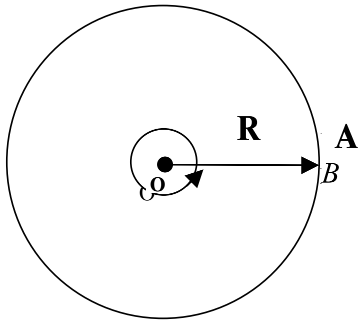


Рис. 1.1.2 **Рис. 1.1.3**

Другая часть единичного круга также называется углом. Он получается при вращении единичного радиус-вектора против часовой стрелки от положения *OB* к положению *OA*. Если начальное положение *OA* и конечное положение *OB* подвижного радиус-вектора лежат на диаметре как указано на рис. 1.1.2, то каждый из двух углов образуемых ими совпадает с половиной единичного круга. Такие углы мы будем называть развёрнутыми. Если начальное положение *OA* и конечное положение *OB* подвижного радиус-вектора совпадают (рис. 1.1.3), то один из углов называется нулевым, а другой полным углом. Полный угол занимает весь единичный круг. Угол, равный одной трёхсотшестидесятой (1/360) части полного угла, принимают за единицу измерения углов. Эту единицу измерения углов называют градусом. Ясно, что полный угол равен 360°, а развёрнутый угол – 180°. В первом квадранте угол изменяется в пределах от 0° до 90° ($0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$), во втором – от 90° до 180° ($90^\circ \le \alpha \le 180^\circ$), в третьем – от 180° до 270° ($180^\circ \le \alpha \le 270^\circ$), в четвёртом – от 270° до 360° ($270^\circ \le \alpha \le 360^\circ$).

Если подвижный радиус-вектор описал угол $\angle AOB$, то его конец описал дугу окружности *AB*. Дуги также как и углы измеряются в градусах.

Существует другая единица измерения углов и дуг. Эта единица называется 1 радиан. Угол в один радиан – это центральный угол, опирающийся на дугу, равную радиусу окружности. Прямой угол равен $\pi/2$ радиан, развёрнутый – π радиан и полный угол – 2π радиан. Очевидно, что $2\pi = 360°$. Отсюда π радиан = 180°.

Угол, больший полного, представляют в виде $2\pi n + \alpha$, где *n* – число полных оборотов радиуса-вектора.

Вращение подвижного радиуса вектора против часовой стрелки принято считать положительным, а по часовой стрелке – отрицательным. Угол, описанный при положительном вращении радиуса-вектора, называется положительный. Положительный угол измеряется положительным числом. Угол, описанный при отрицательном вращении радиуса-вектора, называется отрицательным. Отрицательный угол измеряется отрицательным числом.

Упражнения и задания

1) Углом какого квадрата является угол, равный: 75°; 320°; 135°; 280°; 92°; 280°; –35°; –135°; –92°; –300°; –89°; –271°.

2) Запишите угол α в виде $\alpha = 360°, n + \beta$, где *n* – целое число, а $O° \le \beta < 360°$; 270°; 415°;835°; 960°; 1,600°; –475°; –920°; –1,340°.

1.2 Тригонометрические функции произвольного угла

Пусть радиус-вектор $\vec{R} = \overrightarrow{OA}$ точки *A* образует угол α с осью *Ox*. Абсциссу и ординату точки *A* обозначим *x* и *y* соответственно. Величину угла α будем измерять в градусах или радианах.

Определение 1. Синусом угла α называется отношение ординаты *y* к длине радиуса-вектора $\vec{R}$. Синус угла α обозначается так: $\sin\alpha$. Итак,

$$\sin\alpha = \frac{y}{R}. \qquad (1.2.1)$$

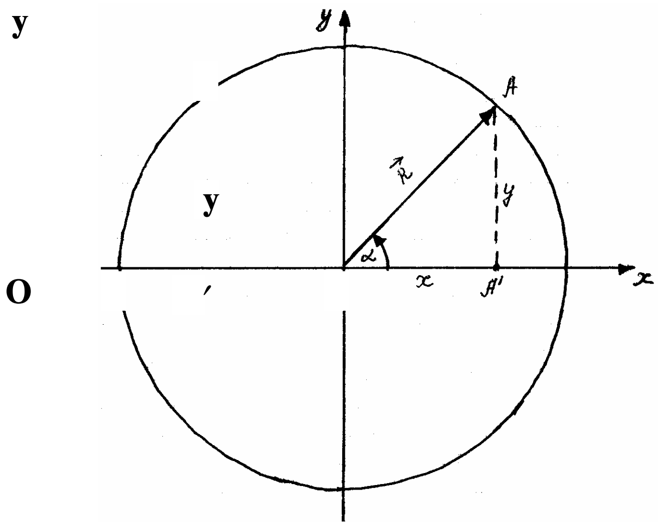


Рис. 1.2.1

Определение 2. Косинусом угла α называется отношение абсциссы x к длине радиуса-вектора $\vec{R}$. Косинус угла α обозначается так: $\cos\alpha$. Итак,

$$\cos\alpha = \frac{x}{y}. \tag{1.2.2}$$

Определение 3. Тангенсом угла α называется отношение ординаты y к абсциссе x. Тангенс угла α обозначается так: $\mathrm{tg}\,\alpha$. Итак,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}. \tag{1.2.3}$$

Определение 4. Котангенсом угла α называется отношение абсциссы x к ординате y. Котангенс угла α обозначается так: $\mathrm{ctg}\,\alpha$. Итак,

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}. \tag{1.2.4}$$

Легко убедиться (проделайте это самостоятельно), что

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \tag{1.2.5}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{1.2.6}$$

Определение 5. Секансом угла α называется величина обратная $\cos\alpha$. Секанс угла α обозначается $\sec\alpha$. Итак,

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}. \tag{1.2.7}$$

Определение 6. Косекансом угла α называется величина обратная $\sin\alpha$. Косеканс угла α обозначается $\mathrm{cosec}\,\alpha$. Итак,

$$\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}. \tag{1.2.8}$$

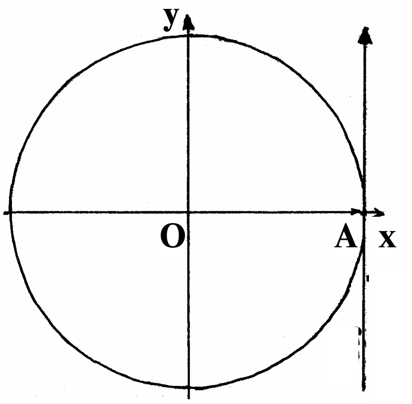
Мы рассматриваем единичную окружность. Её радиус-вектор $R = 1$. Поэтому определения тригонометрических функций перепишем в виде:

$$\sin\alpha = y; \qquad \cos\alpha = x; \tag{1.2.9}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}; \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}; \tag{1.2.10}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{x}; \qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{y}. \tag{1.2.11}$$

Мы видим, что синус угла α равен ординате конца подвижного единичного радиуса-вектора. Косинус угла α равен абсциссе конца подвижного единичного радиуса-вектора. Для геометрического истолкования тангенса и котангенса вводят понятия оси тангенсов и оси котангенсов (рис. 1.2.2 и 1.2.3).



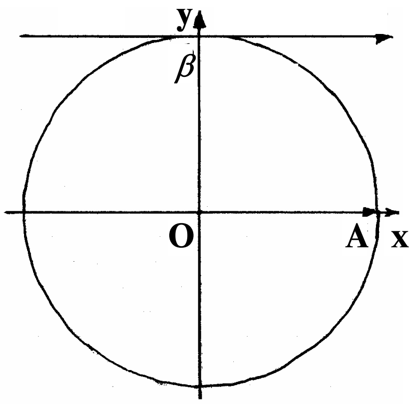


Рис. 1.2.2 Рис. 1.2.3

Осью тангенсов называется перпендикуляр, восстановленный в точке A (рис. 1.2.2) к радиусу-вектору $\overrightarrow{OA}$.

Положительное направление на оси тангенсов – это направление снизу вверх. Введём понятие соответствующей точки оси тангенсов. Рассмотрим угол $\alpha = \angle\ AOB$. Если точка B единичной окружности расположена справа от оси ординат, то соответствующей ей точкой оси тангенсов называем точку B_1 (рис. 1.2.4).

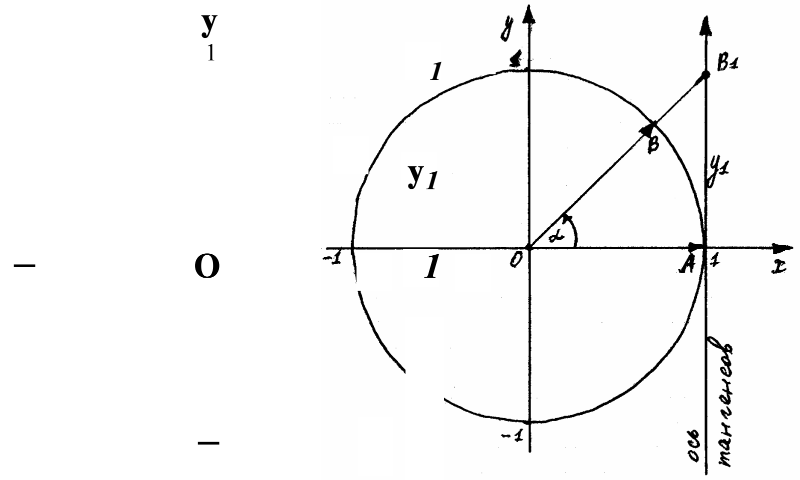


Рис. 1.2.4

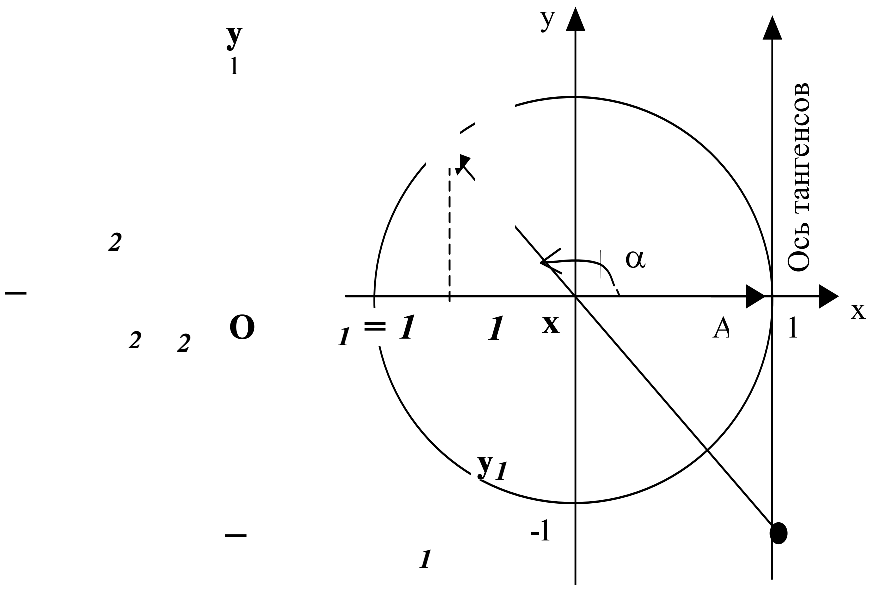


Рис. 1.2.5

Если точка B единичной окружности лежит слева от оси ординат, то соответствующей ей точкой оси тангенсов назовём точку B_1 (рис. 1.2.5).

Тангенс угла α всегда численно равен ординате y_1 соответствующей точки оси тангенсов, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = y_1$. Докажем это для углов первой и второй четвертей.

1) $0^\circ \le \alpha < 90^\circ$ (рис. 1.2.4). $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_1}{1} = y_1 \ge 0$, где y_1 – ордината точки B_1.

2) $90^\circ < \alpha \le 180^\circ$ (рис. 1.2.5). $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2}{x_2} \le 0$, где x_2 и y_2 – абсцисса и ордината точки M. Из рис. 1.2.5 $\Delta OBB_2 \sim \Delta OB_1A$. Поэтому $\frac{|y_2|}{|x_2|} = \frac{|y_1|}{|x_1|} = \frac{|y_1|}{1}$ или $\frac{y_2}{-x_1} = \frac{-y_1}{1}$ или $\frac{y_2}{x_2} = y_1$. Итак, и в этом случае $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2}{x_2} = y_1 \le 0$. Аналогично доказывается, что $\operatorname{tg}\alpha = y_1$ для углов третьей и четвёртой четвертей.

Если точка B лежит на оси ординат, то соответствующей ей точки оси тангенсов не существует. В этих точках $\operatorname{tg}\alpha$ не существует.

Осью котангенсов называется перпендикуляр, восстановленный в точке B конца радиуса-вектора $\overrightarrow{OB}$, образующего с осью Ox угол 90°. За положительное направление оси котангенсов принимаем направление слева направо. Введём понятие соответствующей точки оси котангенсов. Если точка C единичной окружности лежит над осью абсцисс, то соответствующая ей точка оси котангенсов это точка C_1 (рис. 1.2.6).

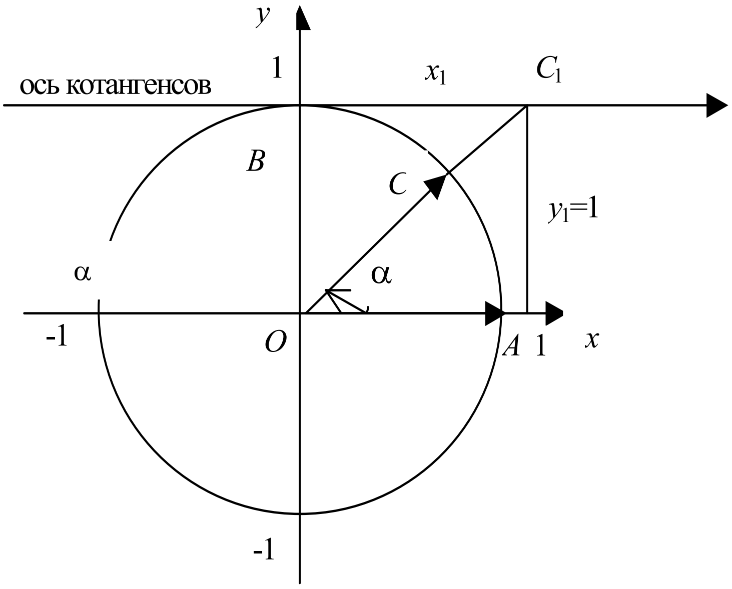


Рис. 1.2.6

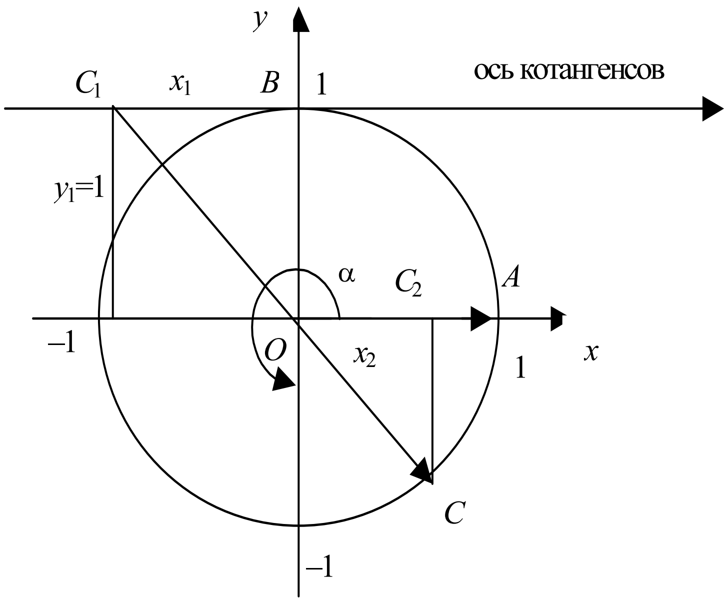


Рис. 1.2.7

Если точка C единичной окружности лежит под осью абсцисс, то соответствующей ей точкой оси котангенсов называют точку C_1 (рис. 1.2.7).

Можно легко доказать, что всегда котангенс угла α равен абсциссе x_1 соответствующей точки оси котангенсов, т.е. $\operatorname{ctg}\ \alpha = x_1$. Если точка C лежит на оси абсцисс, то соответствующей ей точки оси котангенсов не существует. В этом случае $\operatorname{ctg}\ \alpha$ не существует.

Упражнения и задания

1) Может ли синус угла быть равным:

$$\frac{1}{2};\ \frac{5}{6};\ \frac{4}{5};\ \frac{8}{7};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{6}}{2};\ -\frac{\sqrt{5}}{3};\ -\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{5}{4};-\frac{6}{5}.$$

2) Может ли косинус угла быть равным: 0,2; 0,5; 0,75; 0,9; 1,05; 1,52; –0,3; –0,7; –0,99; –2,3; –1,25.

3) Углом какого квадранта является угол α, у которого: а) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$; б) $\sin\alpha > 0, \cos\alpha < 0$; в) $\text{tg}\ \alpha > 0$, $\sin\alpha < 0$?

4) Как изменяется секанс и косеканс при изменении угла от 0° до 360°?

1.3 Возрастающие и убывающие функции

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей в некотором промежутке, лежащем в её области определения, если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Другими словами, функция $y = f(x)$ называется возрастающей, если бо́льшему значению аргумента соответствует бо́льшее значение функции. Например, функция, график которой изображён на рис. 1.3.1 возрастает в интервале $]x_1; x_2[$.

Функция $y = f(x)$ называется убывающей в некотором промежутке, лежащем в области её определения, если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$

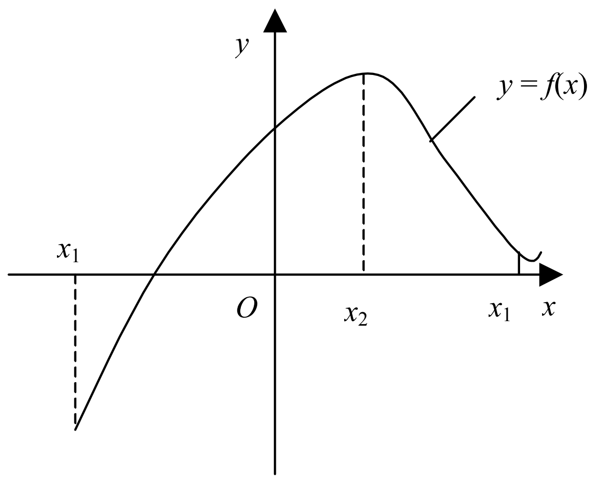


Рис. 1.3.1

следует $f(x_1) > f(x_2)$. Другими словами, функция $y = f(x)$ называется убывающей, если бо́льшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Например, функция, график которой изображён на рис. 1.3.1 убывает в интервале $]x_2; x_3[$.

Интервал, на котором функция убывает или возрастает, называется интервалом монотонности функции. Для функции, график которой изображён на рис. 1.3.1 интервалами монотонности служат интервалы $]x_1; x_2[$ и $]x_2; x_3[$. На первом из них функция монотонно возрастает, на втором монотонно убывает.

1.4 Характер изменения тригонометрических функций

Теперь выясним, как изменяются введённые нами тригонометрические функции по абсолютной величине и знаку при изменении угла α от 0° до 2π.

1) $\sin\alpha$. Мы знаем (см. 1.2.9), что $\sin\alpha = y$, где y – ордината конца подвижного единичного радиуса-вектора (см. рис. 1.2.1).

а) $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ (первый квадрант). Если α_1 и α_2 таковы, что $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 \le \frac{\pi}{2}$ (рис. 1.4.1), то $y_1 < y_2$. Следовательно, $\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2$. Другими словами при возрастании угла α от 0 до $\frac{\pi}{2}$ $\sin\alpha$ монотонно возрастает от 0 до 1.

б) $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$ (второй квадрант). Углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $\frac{\pi}{2} \le \alpha_1 < \alpha_2 \le \pi$ (рис. 1.4.2). Из рисунка видим, что $y_1 > y_2$. Следовательно, $\sin\alpha_1 > \sin\alpha_2$. При возрастании угла α от $\frac{\pi}{2}$ до π $\sin\alpha$ монотонно убывает от 1 до 0.

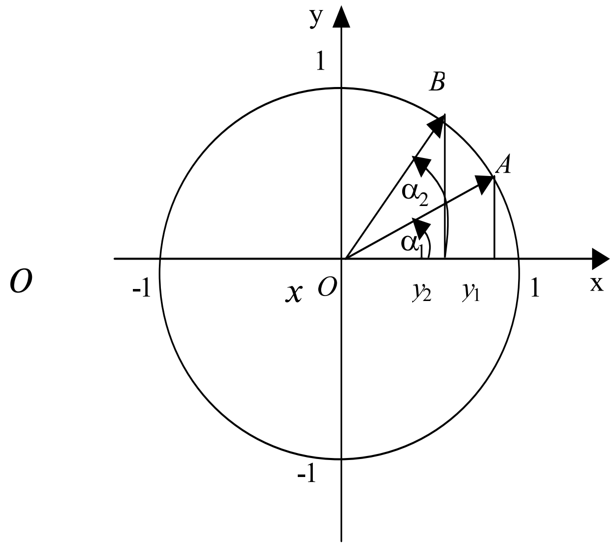


Рис. 1.4.1

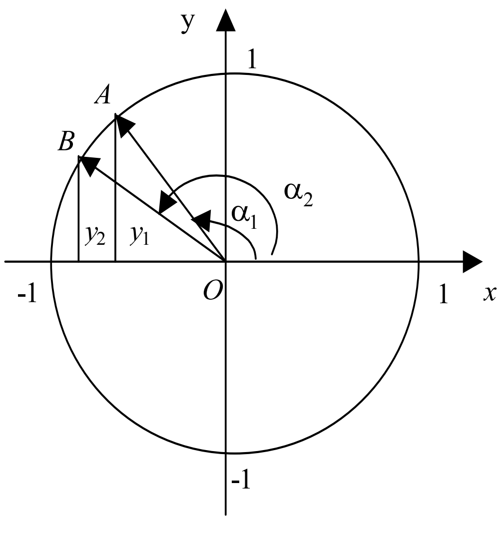


Рис. 1.4.2

в) Третий квадрант $\left(\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}\right)$. Углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $\pi \le \alpha_1 < \alpha_2 \le \frac{3\pi}{2}$ (рис. 1.4.3). Из рисунка видно, что $y_1 > y_2$. Следовательно, $\sin\alpha_1 > \sin\alpha_2$. При возрастании угла α от π до $\frac{3\pi}{2}$ $\sin\alpha$ монотонно убывает от 0 до –1.

г) Четвёртый квадрант $\left(\frac{3\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi\right)$. Углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $\frac{3\pi}{2} \le \alpha_1 < \alpha_2 \le 2\pi$ (рис. 1.4.4). Из рисунка видим, что $y_1 < y_2$. Следовательно, $\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2$. При возрастании угла α от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π $\sin\alpha$ монотонно возрастает от –1 до 0.

Итак: $\sin\alpha$ – это монотонная функция угла α и при любом угле α абсолютная величина $\sin\alpha$ не превосходит единицы, $-1 \le \sin\alpha \le 1$.

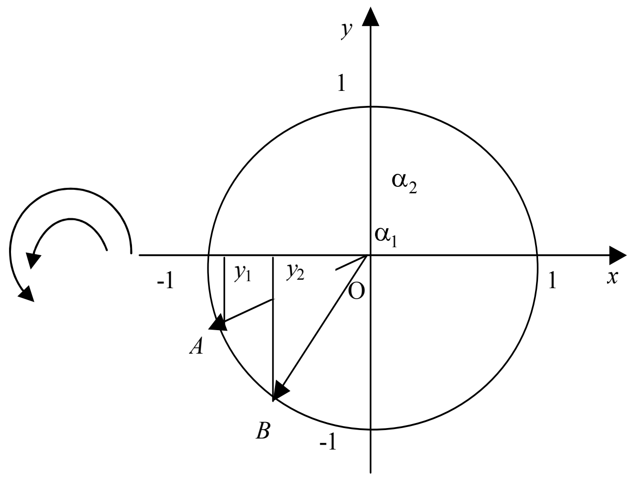


Рис. 1.4.3

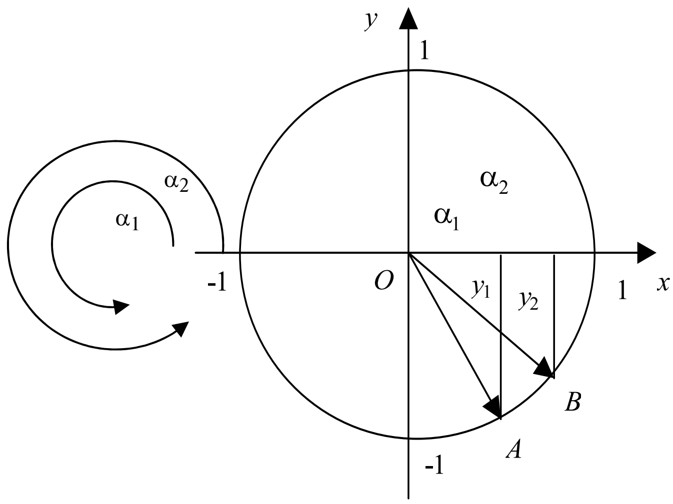


Рис. 1.4.4

2) $\cos\alpha$. Из 1.2.9 $\cos\alpha = x$, где x – это абсцисса конца подвижного единичного радиуса-вектора.

а) Первый квадрант $\left(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$. Углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 \le \frac{\pi}{2}$ (рис. 1.4.5). Из рисунка видно, что $x_1 > x_2$. Следовательно, $\cos\alpha_2 < \cos\alpha_1$. При возрастании угла α от 0 до $\frac{\pi}{2}$ $\cos\alpha$ монотонно убывает от 1 до 0.

б) Второй квадрант $\left(\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi\right)$. Углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $\frac{\pi}{2} \le \alpha_1 < \alpha_2 \le \pi$ (рис. 1.4.6). Из рисунка видим, что $OB_1 < OB_2$ или $x_2 < x_1$. Следовательно, $\cos\alpha_2 < \cos\alpha_1$. При возрастании угла α от $\frac{\pi}{2}$ до π $\cos\alpha$ монотонно убывает от 0 до –1.

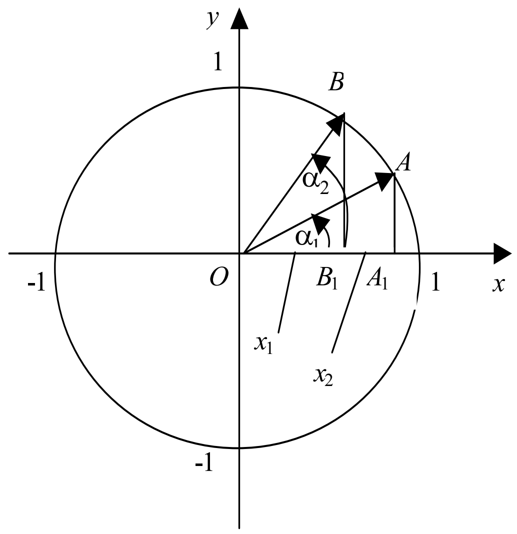


Рис. 1.4.5

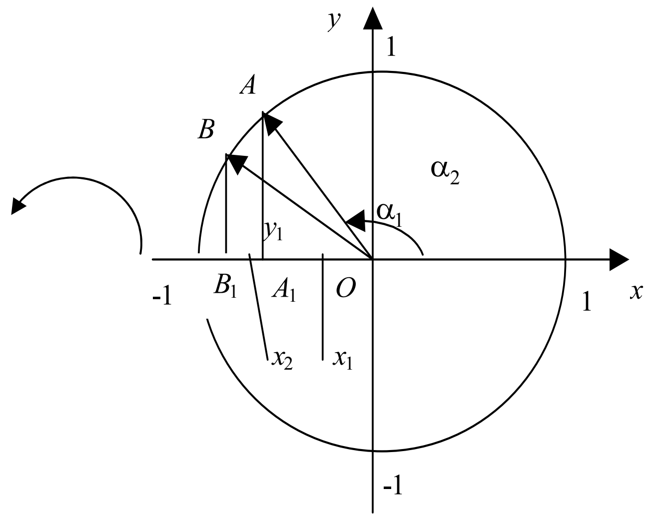


Рис. 1.4.6

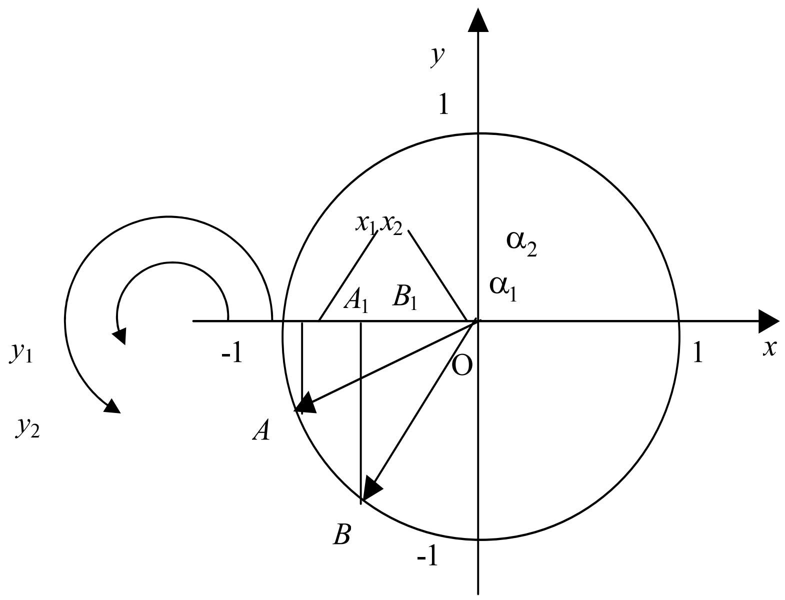


Рис. 1.4.7

в) Третий квадрант $\left(\pi \le \alpha \le \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $\pi \le \alpha_1 < \alpha_2 \le \dfrac{3\pi}{2}$ (рис. 1.4.7). Из рисунка видно, что $x_1 < x_2$. Следовательно, $\cos\alpha_1 < \cos\alpha_2$. При возрастании угла α от π до $\dfrac{3\pi}{2}$ $\cos\alpha$ монотонно возрастает от –1 до 0.

г) Четвёртый квадрант $\left(\dfrac{3\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi\right)$. Углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $\dfrac{3\pi}{2} \le \alpha_1 < \alpha_2 \le 2\pi$ (рис. 1.4.8). Из рисунка видим, что $x_1 < x_2$. Следовательно, $\cos\alpha_1 < \cos\alpha_2$. При возрастании угла α от $\dfrac{3\pi}{2}$ до 2π $\cos\alpha$ монотонно возрастает от 0 до 1.

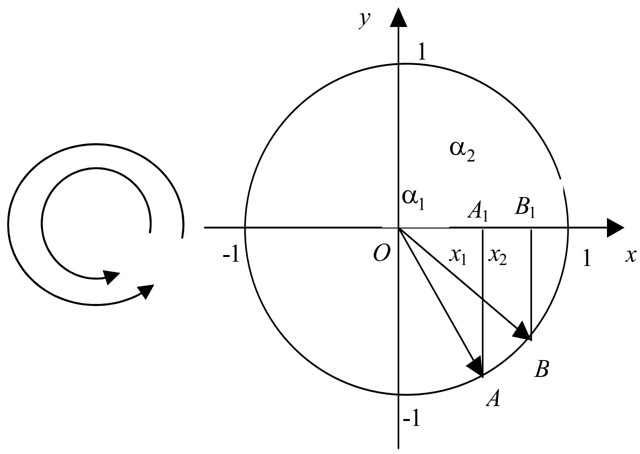


Рис. 1.4.8

Итак, $\cos\alpha$ – это монотонная функция угла α и при любом угле α абсолютная величина $\cos\alpha$ не превосходит единицы, т.е. $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

3) $\mathrm{tg}\,\alpha$. Тангенс угла α численно равен ординате соответствующей точки оси тангенсов, так как для всех точек оси тангенсов $x = 1$ (см. 1.2.10).

а) Первый квадрант $\left(0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}\right)$. Углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 \le \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 1.4.9). Из рисунка видно, что $y_2 > y_1$. Следовательно, $\mathrm{tg}\,\alpha_2 > \mathrm{tg}\,\alpha_1$. При возрастании угла α от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ $\mathrm{tg}\,\alpha$ неограниченно возрастает.

б) Второй квадрант $\left(\dfrac{\pi}{2} < \alpha \le \pi\right)$. Углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $\dfrac{\pi}{2} < \alpha_1 < \alpha_2 \le \pi$ (рис. 1.4.10). Из рисунка

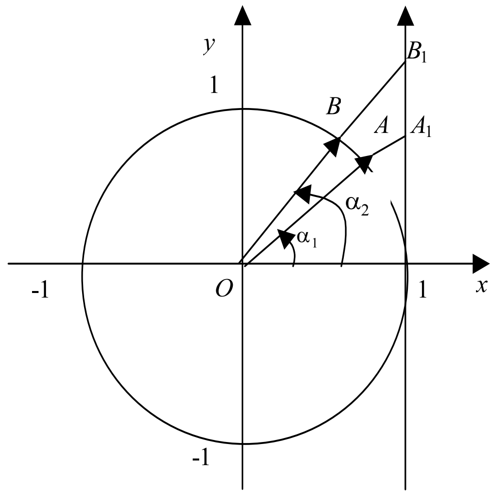


Рис. 1.4.9

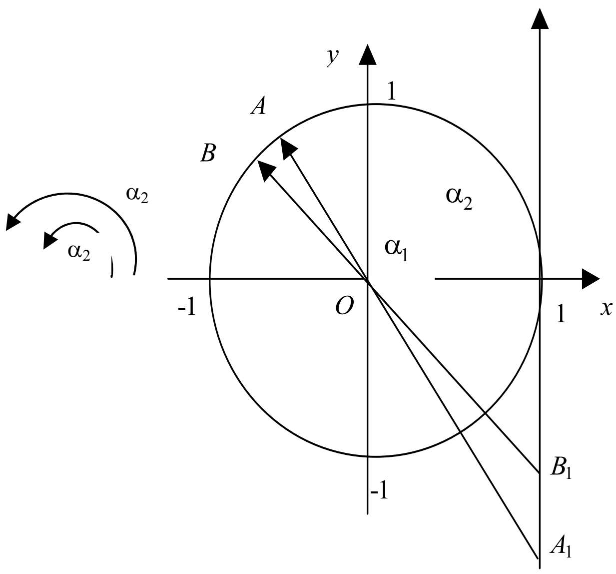


Рис. 1.4.10

видно, что $y_1 < y_2$. Следовательно $\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2$. При возрастании угла α от $\frac{\pi}{2}$ до π $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает до нуля. Если угол α стремится к $\frac{\pi}{2}$, оставаясь больше $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, но всегда отрицателен.

в) Третий квадрант $\left(\pi \le \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$. Углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $\pi \le \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{3\pi}{2}$ (рис. 1.4.11). Из рисунка видно, что $y_1 < y_2$. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2$. Тангенс в третьем квадранте при возрастании угла α от π до $\frac{3\pi}{2}$ возрастает от 0 до $+\infty$. Если угол α приближается к $\frac{3\pi}{2}$, оставаясь меньше $\frac{3\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha$ стремится к плюс бесконеч- ности.

г) Четвёртый квадрант $\left(\frac{3\pi}{2} < \alpha \le 2\pi\right)$. Углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $\frac{3\pi}{2} < \alpha_1 < \alpha_2 \le 2\pi$ (рис. 1.4.12). Из рисунка видим, что $y_1 < y_2$. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2$. При возрастании угла α от

$\frac{3\pi}{2}$ до 2π $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает от $-\infty$ до 0. Если α приближается к $\frac{3\pi}{2}$, оставаясь больше $\frac{3\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha$ стремится к минус бесконечности.

4) $\operatorname{ctg}\alpha$. Котангенс угла α численно равен абсциссе соответствующей точки оси котангенсов, так как для всех точек оси котангенсов $y = 1$ (см. 1.2.10).

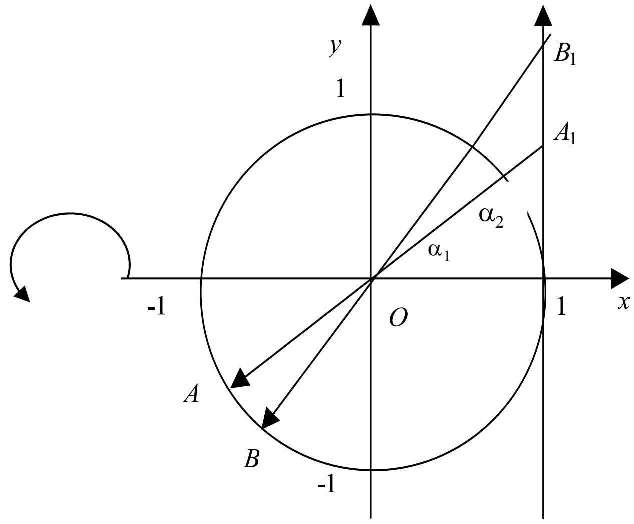


Рис. 1.4.11

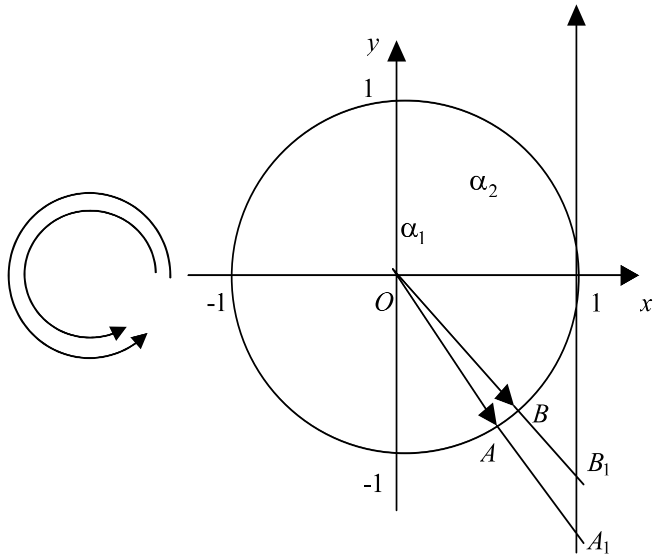


Рис. 1.4.12

а) Первый квадрант $\left(0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$. Углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \le \frac{\pi}{2}$ (рис. 1.4.13). Из рисунка видно, что $x_1 > x_2$. Следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha_1 > \operatorname{ctg}\alpha_2$. При возрастании угла α от 0 до $\frac{\pi}{2}$ $\operatorname{ctg}\alpha$ убывает до 0. Если α стремится к нулю, оставаясь больше нуля, то $\operatorname{ctg}\alpha$ стремится к плюс бесконечности.

б) Второй квадрант $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$. Углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $\frac{\pi}{2} \le \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$ (рис. 1.4.14). Из рисунка видно, что $x_1 > x_2$. Следовательно $\operatorname{ctg}\alpha_1 > \operatorname{ctg}\alpha_2$. При увеличении угла α от $\frac{\pi}{2}$ до π $\operatorname{ctg}\alpha$ убывает от 0 до $-\infty$. Если угол α

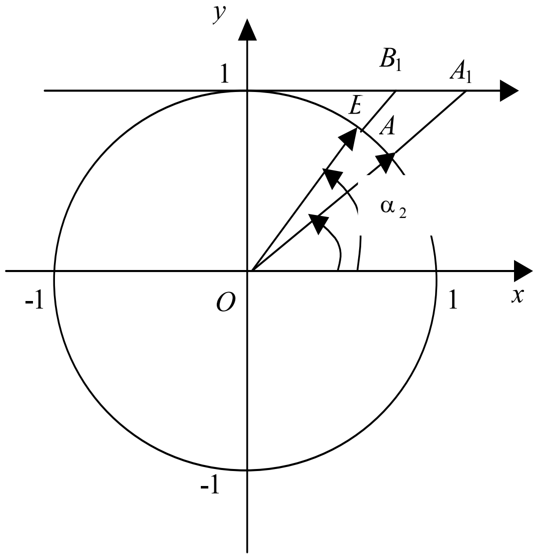


Рис. 1.4.13

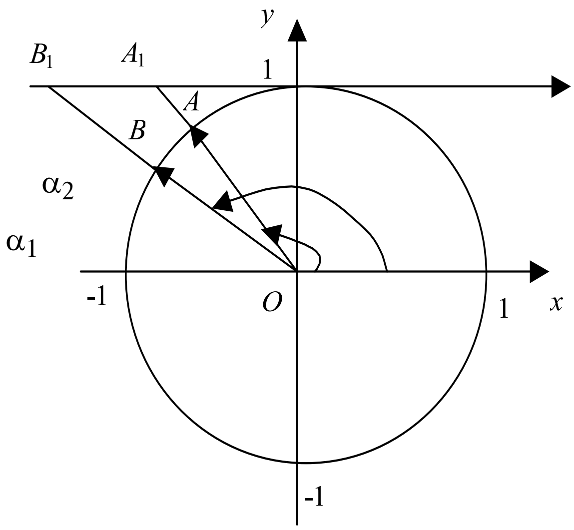


Рис. 1.4.14

приближается к π, оставаясь меньше π, то $\operatorname{ctg}\alpha$ стремится к минус бесконечности.

в) Третий квадрант $\left(\pi < \alpha \le \frac{3\pi}{2}\right)$. Углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $\pi < \alpha_1 < \alpha_2 \le \frac{3\pi}{2}$ (рис. 1.4.15). Из рисунка видно, что $x_1 > x_2$. Следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha_1 > \operatorname{ctg}\alpha_2$. При увеличении угла α от π до $\frac{3\pi}{2}$ $\operatorname{ctg}\alpha$ убывает $+\infty$ до 0. Если угол α приближается к π, оставаясь больше π, то $\operatorname{ctg}\alpha$ стремится к плюс бесконечности.

г) Четвёртый квадрант $\left(\frac{3\pi}{2} \le \alpha < 2\pi\right)$. Углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $\frac{3\pi}{2} \le \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi$ (рис. 1.4.16). Из рисунка видно, что $x_1 < x_2$. Следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha_1 > \operatorname{ctg}\alpha_2$. При увеличении угла α от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π $\operatorname{ctg}\alpha$ убывает от 0 до $-\infty$. Если угол α приближается к 2π, оставаясь меньше 2π, то $\operatorname{ctg}\alpha$ стремится к минус бесконечности.

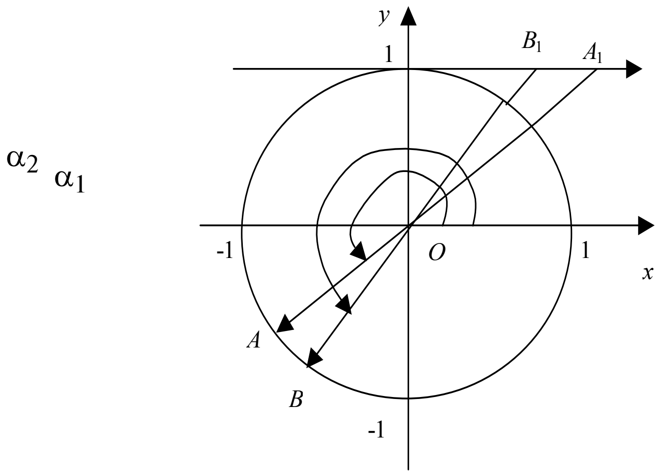


Рис. 1.4.15

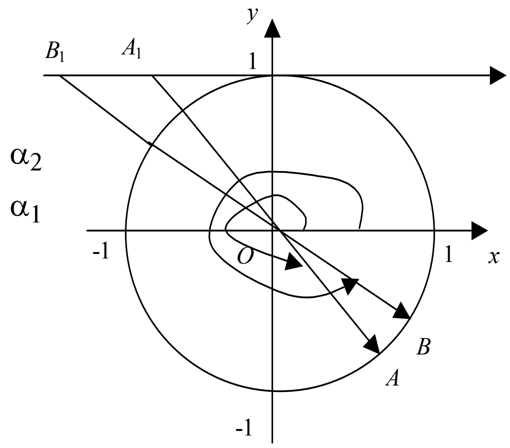


Рис. 1.4.16

1.5 Чётные и нечётные функции

Функция $y = f(x)$, область определения которой симметрична относительно начала отсчёта называется чётной, если для любого значения независимой переменной выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Например, функция $y = x^2$ – чётная. Действительно $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. С функцией $y = x^2$ мы хорошо знакомы. Её графиком является парабола (рис. 1.5.1). Она симметрична относительно оси Oy. Это общее свойство графиков чётных функций.

Функция $y = f(x)$, область определения которой симметрична относительно начала отсчёта называется нечётной, если для любого значения независимой переменной выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. В качестве примера рассмотрим функцию $y = \frac{1}{2}x^3$. Её графиком является кубическая парабола (рис. 1.5.2). Кубическая парабола симметрична относительно начала координат. Это общее свойство нечётных функций.

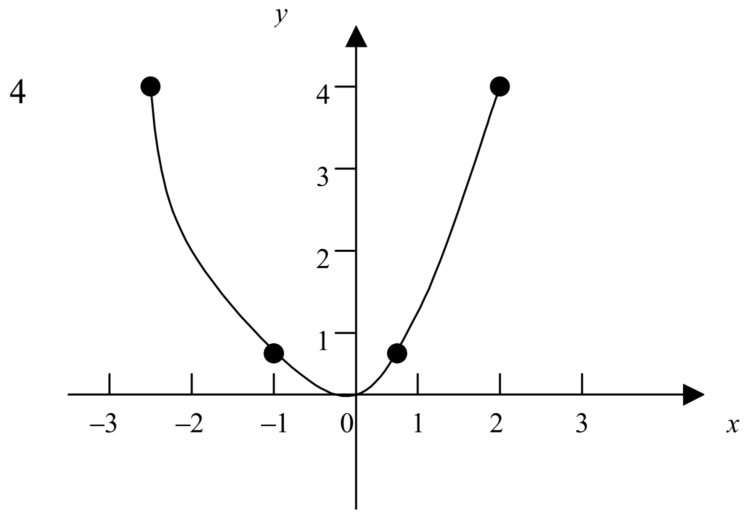


Рис. 1.5.1

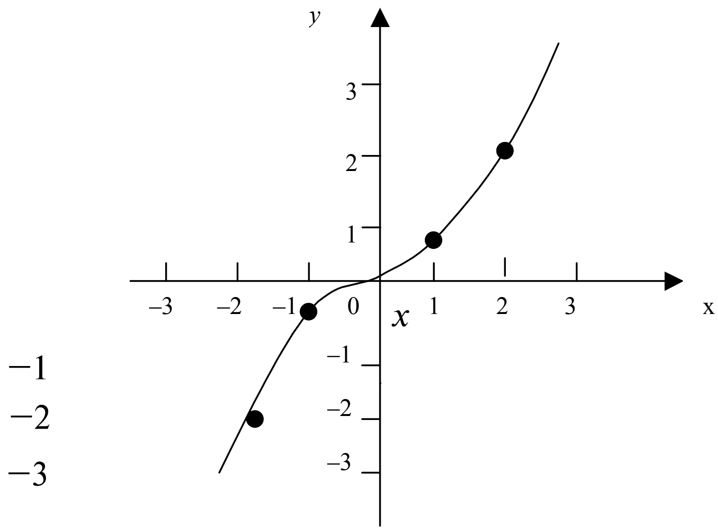


Рис. 1.5.2

Многие функции не являются ни чётными, ни нечётными. Например, функция $y = x^2 + x$ не является ни чётной, ни нечётной.

1.6 Чётность и нечётность тригонометрических функций

Применим представления о чётности и нечётности функций к тригонометрическим функциям.

Теорема. Функции $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$ являются чётными, а функции $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ являются нечётными.

Доказательство:

а) В начале докажем чётность $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$. Для этого достаточно убедиться, что $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. С этой целью обратимся к рис. 1.6.1. На этом рисунке $\alpha = \angle\ COA$ и $-\alpha = \angle\ COB$.

Мы видим, что абсцисса x точек A и B одна и та же. Согласно определения косинуса угла имеем: $\cos\alpha = x$ и $\cos(-\alpha) = x$. Следовательно $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Это равенство справедливо для любого числа α. Итак, мы доказали, что:

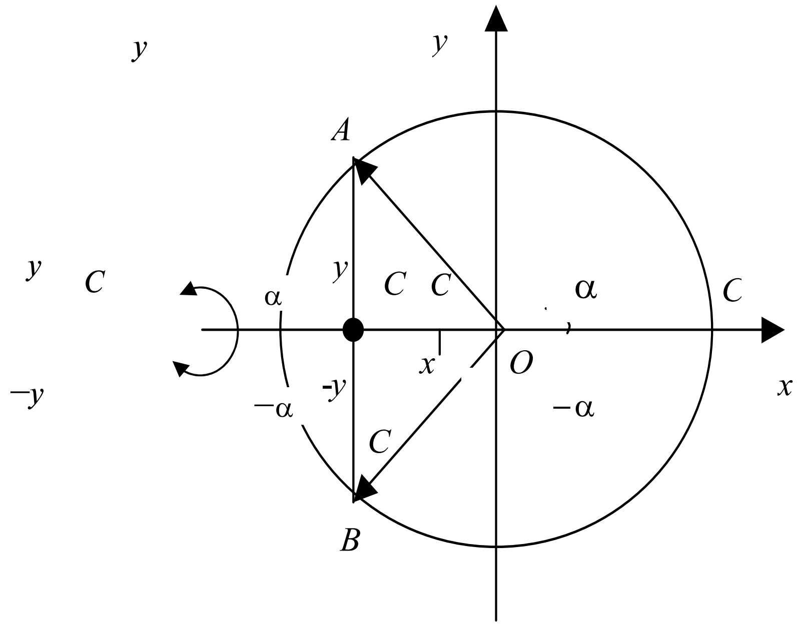


Рис. 1.6.1

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha\,. \tag{1.6.1}$$

т.е. функция $y = \cos\alpha$ является чётной функцией.

Чётность функции $y = \sec\alpha$ доказывается следующим образом

$$\sec(-\alpha) = \frac{1}{\cos(-\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha\,.$$

Итак:

$$\sec(-\alpha) = \sec\alpha\,. \tag{1.6.2}$$

б) Теперь докажем нечётность sin α, tg α, ctg α и cosec α. По определению $\sin\alpha = AC$ и $\sin(-\alpha) = BC$. Но $AC = y$ и $BC = -y$. Поэтому $\sin\alpha = y$ и $\sin(-\alpha) = -y$. Отсюда следует, что

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,. \tag{1.6.3}$$

Другими словами функция $y = \sin\alpha$ является нечётной.

Доказательство нечётности остальных трёх функций основывается на только что доказанных свойствах $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha\,.$$

Итак:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha\,; \tag{1.6.4}$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha\,.$$

Итак:

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha; \qquad (1.6.5)$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = \frac{1}{\sin(-\alpha)} = \frac{1}{-\sin\alpha} = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

Итак

$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha. \qquad (1.6.6)$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

Упражнения и задания

1) Покажите, что следующие функции являются чётными:

а) $y = x^2 + \operatorname{ctg}^2 x$;

б) $y = \sin|x|$;

в) $y = |\sin x|$;

г) $y = \dfrac{1 + 2\cos x}{x^4}$;

д) $y = \dfrac{\sin x \cdot \cos x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$;

е) $y = \dfrac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin x + \operatorname{ctg} x}$.

2) Покажите, что следующие функции являются нечётными:

а) $y = x + \operatorname{tg} x$;

б) $y = -\operatorname{tg}^3 x$;

в) $y = \operatorname{ctg}^5 x$;

г) $y = \dfrac{1 + \cos^4 x}{\sin^3 x}$;

д) $y = \dfrac{x^2 \operatorname{ctg} x}{1 + \sec x}$;

е) $y = \dfrac{x + \sin x}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2 x}$.

3) Установите какие функции являются чётными, а какие нечётными:

а) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$;

б) $y = \sin x + \cos x$;

в) $y = x^4 + \sin^2 x + 1$;

г) $x^3 + \sin^3 x + 1$;

д) $y = x\operatorname{tg} x$;

е) $y=\text{tg }x+\sin^2 x$.

1.7 Периодичность тригонометрических функций

Функция $y = f(x)$ называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любого x выполнено условие $f(x + T) = f(x)$. Число T называется периодом функции $y = f(x)$. Если T период функции $y = f(x)$, то любое из чисел nT, где $n = -1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \ldots$, также является периодом функции $y = f(x)$. Наименьший положительный период T функции $y = f(x)$ называется основным периодом.

Периодичность – это одно из важных свойств тригонометрических функций. Функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$ и $\text{cosec }\alpha$ являются периодическими функциями с основным периодом 2π. Функции $\text{tg }\alpha$ и $\text{ctg }\alpha$ также являются периодическими функциями. Основной период $\text{tg }\alpha$ и $\text{ctg }\alpha$ равен π.

Упражнения и задания

1) Какие из следующих функций являются периодическими?

а) $y=\cos^2 x$; б) $y = x\text{tg }x$; в) $y=\sin x+\cos x$; г) $y=\text{ctg }x+2$.

2) Укажите основной период (если он существует) следующих функций:

а) $y=\frac{1}{2}\sin x$;

б) $y=x\text{tg }x$;

в) $y=\sin\frac{x}{2}$;

г) $y=\cos x+\text{ctg }x$;

д) $y=2\text{tg }x+\sin x$;

е) $y=2\text{tg }x+3\text{ctg }x$.

1.8 Свойства функции $y = \sin x$ и ее график

Свойства функции $y=\sin x$

1 Область определения функции – множество всех действительных чисел: $D(y)=R$.

2 Множество значений – промежуток $[-1;1]$: $E(y)=[-1;1]$.

3 Функция $y=\sin x$ является нечетной: $\sin(-x)=-\sin x$.

4 Функция периодическая, наименьший положительный период равен 2π: $\sin(x+2\pi)=\sin x$.

5 График функции пересекает ось Ox при $x=\pi n$, $n\in Z$.

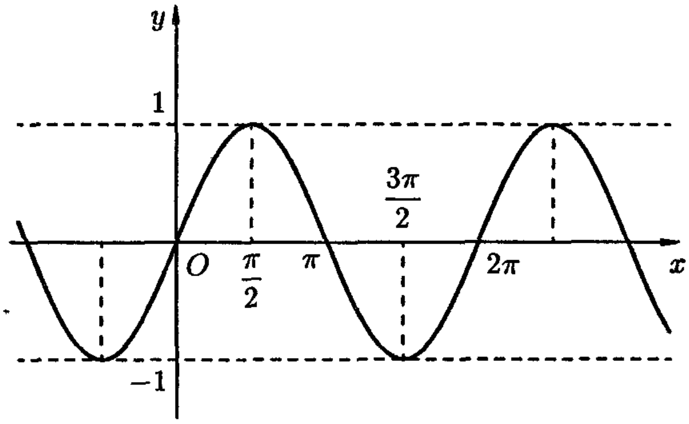
6 Промежутки знакопостоянства: $y > 0$ при $(2\pi n+0; \pi+2\pi n)$, $n\in Z$ и $y < 0$ при $(\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n)$, $n\in Z$.

7 Функция непрерывна и имеет производную при любом значении аргумента: $(\sin x)' = \cos x$.

8 Функция $y=\sin x$ возрастает при $x\in(-\pi/2+2\pi n; \pi/2+2\pi n)$, $n\in Z$, и убывает при $x\in(\pi/2+2\pi n;\ 3\pi/2+2\pi n)$, $n\in Z$.

9 Функция имеет минимум при $x=-\pi/2+2\pi n$, $n\in Z$ и максимум при $x=\pi/2+2\pi n$, $n\in Z$.

График функции $y=\sin x$ называется *синусоидой* и имеет следующий вид:



Слова и словосочетания

Область определения функции Промежуток знакопостоянства

Множество значений **Синусоида**

? 1 Что называется синусом?
Какова область определения синуса?
Каково множество значений синуса?
Четная или нечетная функция $y = \sin x$?
Чему равен наименьший положительный период синуса?
В каких точках график синуса пересекает ось Ox?
Каковы промежутки знакопостоянства синуса?
При каких значениях аргумента синус имеет производную?
Чему равна производная синуса?
При каких значениях аргумента синус возрастает? Убывает?
При каких значениях аргумента синус имеет минимум? Максимум?
Как называется график функции $y = \sin x$?

1.9 Свойства функции $y = \cos x$ и ее график

Свойства функции $y = \cos x$

1 Область определения функции – множество всех действительных чисел $D(y) = R$.

2 Множество значений – промежуток $E(y) = [-1;\ 1]$.

3 Функция $y = \cos x$ является четной: $\cos(-x) = \cos x$.

4 Функция периодическая, наименьший положительный период равен 2π: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

5 График функции пересекает ось Ox при $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$.

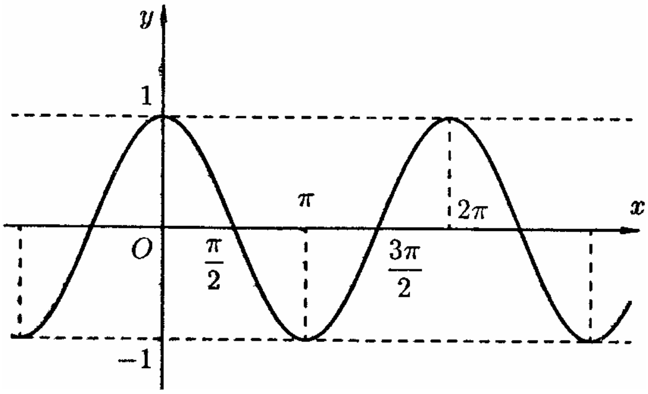
6 Промежутки знакопостоянства: $y > 0$ при $x \in (-\pi/2 + 2\pi n;\ \pi/2 + 2\pi n)$, $n \in Z$ и $y < 0$ при $x \in (\pi/2 + 2\pi n;\ 3\pi/2 + 2\pi n)$, $n \in Z$.

7 Функция непрерывна и имеет производную при любом значении аргумента: $(\cos x)' = -\sin x$.

8 Функция $y = \cos x$ возрастает при $(-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n)$, $n \in Z$, и убывает при $(2\pi n,\ \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$.

9 Функция имеет минимум при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ и максимум при $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

График функции $y = \cos x$ имеет следующий вид:



? 1 Что называется косинусом?

2 Какова область определения косинуса?

3 Каково множество значений косинуса?

4 Четная или нечетная функция $y = \cos x$?

5 Чему равен наименьший положительный период косинуса?

6 В каких точках график косинуса пересекает ось Ox?

7 Каковы промежутки знакопостоянства косинуса?

8 При каких значениях аргумента косинус имеет производную?

9 Чему равна производная косинуса?

10 При каких значениях аргумента косинус возрастает? Убывает?

11 При каких значениях аргумента косинус имеет максимум? Минимум?

12 Как называется график функции $y = \cos x$?

1.10 Свойства функции $y = \mathrm{tg}\, x$ и ее график

Основные свойства функции $y = \mathrm{tg}\, x$

1 Область определения функции – множество всех действительных чисел, кроме чисел $x = \pi/2 + \pi n$.

2 Множество значений – множество всех действительных чисел

3 Функция $y = \mathrm{tg} x$ является нечетной: $\mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}\, x$.

4 Функция периодическая, наименьший положительный период равен π: $\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}\, x$.

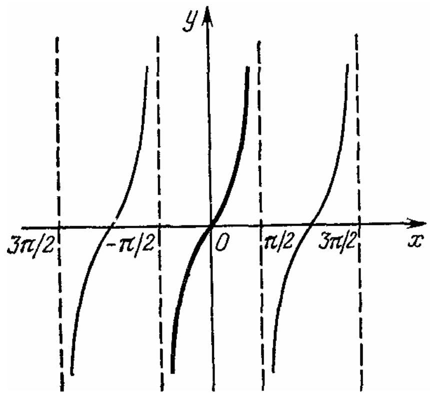
5 График функции пересекает ось Ox при $x = \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.

6 Промежутки знакопостоянства: $y > 0$ при $x \in (\pi n;\ \pi/2 + \pi n\ )$, $n \in \mathrm{Z}$ и $y < 0$ при $x \in (-\pi/2;\ \pi n\ )$, $n \in \mathrm{Z}$.

7 Функция непрерывна и имеет производную при любом значении аргумента из области определения функции: $(\mathrm{tg}\, x)' = 1/\cos^2 x$.

8 Функция $y = \mathrm{tg}\ x$ возрастает в каждом промежутке $(-\pi/2 + \pi n;\ \pi/2 + \pi n)$, $n \in Z$.

График функции $y = \mathrm{tg}\ x$ называется тангенсоидой и имеет следующий вид:



? 1 Что называется тангенсом?
Какова область определения тангенса?
Каково множество значений тангенса?
Четная или нечетная функция $y = \text{tg}\, x$?
Чему равен наименьший положительный период тангенса?
В каких точках пересекает ось Ox график тангенса?
Каковы промежутки знакопостоянства тангенса?
При каких значениях аргумента тангенс имеет производную?
Чему равна производная тангенса?
В каких промежутках функция $y = \text{tg}\, x$ возрастает?

1.11 Свойства функции $y = \text{ctg}\, x$ и ее график

Катангенсом числа α называется отношение косинуса этого числа к его синусу: $\text{ctg}\,\alpha = \cos\alpha / \sin\alpha$.

Основные свойства функции $y = \text{ctg}\, x$

1 Область определения функции – множество всех действительных чисел, кроме чисел $x = \pi n$.

2 Множество значений – множество всех действительных чисел.

3 Функция $y = \text{ctg}\, x$ является нечетной: $\text{ctg}\,(-x) = -\text{ctg}\, x$.

4 Функция периодическая, наименьший положительный период равен π: $\text{ctg}\,(x + \pi) = \text{ctg}\, x$.

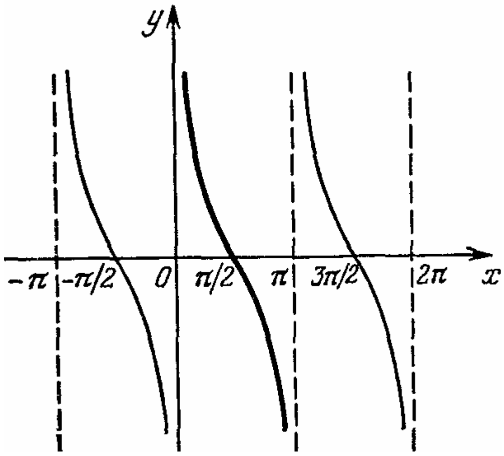
5 Нули функции: $y = 0$ при $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$.

6 Промежутки знакопостоянства: $y > 0$ при $x \in (\pi n;\ \pi/2 + \pi n\ )$, $n \in Z$ и $y < 0$ при $x \in (\pi/2 + \pi n;\ \pi(n+1)\ )$, $n \in Z$.

7 Функция непрерывна и имеет производную при любом значении аргумента из области определения функции: $(\text{ctg}\, x)' = -1/\sin^2 x$.

8 Функция $y = \text{ctg}\, x$ убывает в каждом промежутке $(\pi n;\ \pi(n+1))$, $n \in Z$.

График функции $y = \text{ctg}\, x$ имеет следующий вид:



? 1 Что называется котангенсом?

2 Какова область определения котангенса?

3 Каково множество значений котангенса?

4 Четная или нечетная функция y = ctg x?

5 Чему равен наименьший положительный период котангенса?

6 В каких точках график котангенса пересекает ось Ox?

7 Каковы промежутки знакопостоянства котангенса?

8 При каких значениях аргумента котангенс имеет производную?

9 Чему равна производная котангенса?

10 В каких промежутках убывает котангенс?

1.12 Обратные тригонометрические функции

1 *Арксинус* (y = arcsin x). Арксинус – это функция обратная функции $y = \sin x$. На всей оси Ox функция $y = \sin x$ однозначной

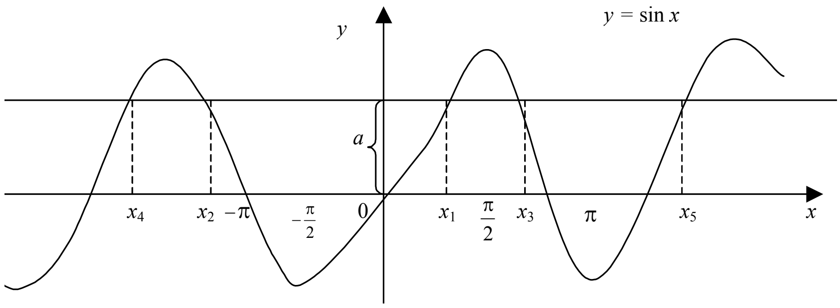


Рис. 1.12.1

обратной функции иметь не может. Это станет очевидным, если вспомнить некоторые свойства функции $y = \sin x$. Область определения функции $y = \sin x$ вся ось Ox, а область значений – отрезок [–1; +1] оси Oy. Пусть $y = \sin x = a$, где $-1 \le a \le 1$. Сколько значений x удовлетворяет этому уравнению? Таких значений бесчисленное множество. Действительно, любое из значений (x_1, x_2, x_3, …) удовлетворяют этому уравнению (см. рис. 1.12.1). Поэтому об обратной функции по отношению к функции $y = \sin x$ можно говорить только на отрезке [–1; +1] оси Oy и на отрезке оси Ox, где функция $y = \sin x$ монотонно возрастает или монотонно убывает. Функция $y = \sin x$ монотонно возрастает от –1 до +1 на любом отрезке оси Ox вида $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$, где $n = 0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$.

Функция $y = \sin x$ убывает от –1 до +1 на любом отрезке оси Ox вида $\left[\frac{\pi}{2}+2n\pi, \frac{3\pi}{2}+2n\pi\right]$, где $n = 0$; ±1; ±2; … Выберем один из этих отрезков. Пусть это будет отрезок оси Ox вида $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. На этом отрезке функция $y = \sin x$ монотонно возрастает от –1 до +1. Следовательно, для любого y_0 из отрезка [–1, +1] оси Oy существует единственное значение x_0 из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ оси Оx такое, что $y_0 = \sin x_0$. Другими словами для функции $y = \sin x$ на рассматриваемом отрезке существует однозначная обратная функция. Эту функцию принято называть арксинусом и обозначать $y = \arcsin x$. Известно, что график обратной функции симметричен с графиком основной функции относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов. Поэтому график функции $y = \arcsin x$ будет иметь вид, показанный на рис. 1.12.2.

Перечислим свойства функции $y = \arcsin x$:

1) Область определения: отрезок [–1, +1].
2) Область значений: отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
3) Функция $y = \arcsin x$ нечётная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
4) Функция $y = \arcsin x$ монотонно возрастающая.
5) График функции $y = \arcsin x$ проходит через начало системы координат.
6) $\text{Arcsin}\, x \begin{cases} \geq 0 & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ < 0 & \text{при } -1 \leq x < 0. \end{cases}$.

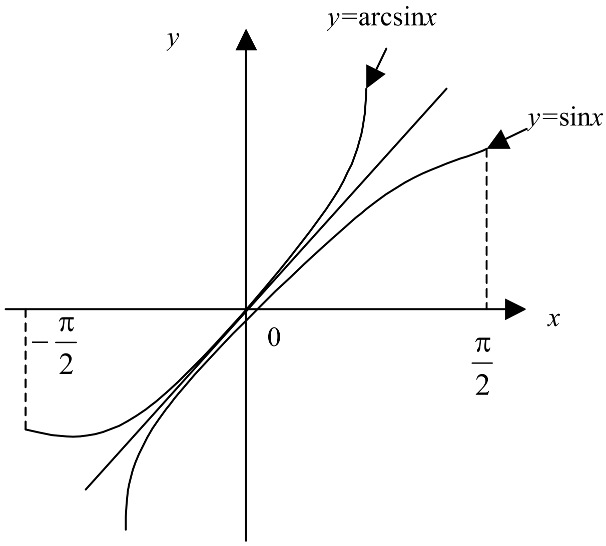


Рис. 1.12.2

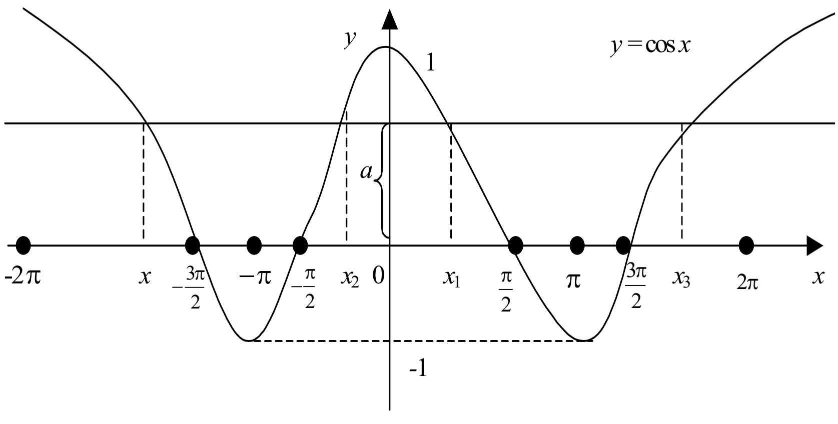


Рис. 1.12.3

2 *Арккосинус* (y = arccos x). Функция $y = \cos x$ определена на всей оси Ox и принимает значения на отрезке [–1, +1] оси Oy. Пусть $y = \cos x = a$. Этому уравнению удовлетворяет бесчисленное множество значений x. Это можно видеть на рис. 1.12.3.

Это означает, что для определения функции, обратной функции $y = \cos x$, нужно взять наибольший отрезок оси Ox, на котором она монотонно возрастает или монотонно убывает. Функция $y = \cos x$ монотонно возрастает от –1 до +1 на каждом отрезке вида $[(2n – 1)\pi, 2n\pi]$, где $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3\ldots$. Эта функция монотонно убывает от –1 до +1 на каждом отрезке вида $[2n\pi, \quad (2n+1)\pi]$. Выберем в качестве отрезка, на котором будет определяться обратная функция отрезок $[0, \pi]$. На этом отрезке функция $y = \cos x$ монотонно убывает от значения +1 до –1. Следовательно, для любого $y_0 \in [-1, 1]$ оси Oy существует только одно значение $x_0 \in [0, \pi]$, такое, что $y_0 = \cos x_0$.

Другими словами, на отрезке $[0, \pi]$ для функции $y = \cos x$ существует однозначная обратная функция. Эту функцию называют арккосинусом и обозначают $y = \arccos x$. График функции $y = \arccos x$ симметричен с графиком функции $y = \cos x$ относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов (рис. 1.12.4).

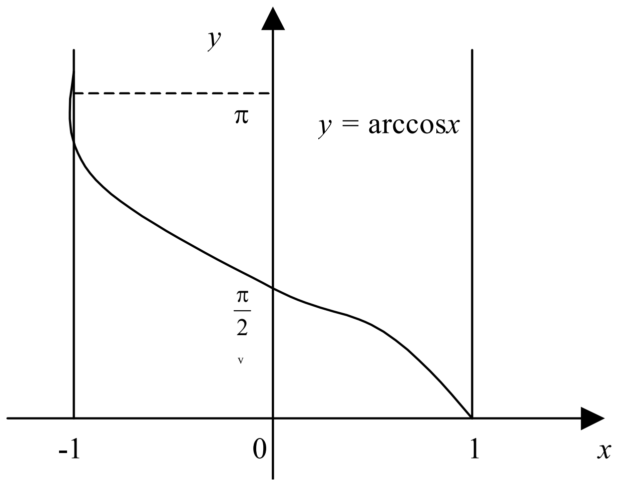


Рис. 1.12.4

Свойства функции $y = \arccos x$ следующие:

1) Область определения: отрезок [–1, +1].
2) Область значений: отрезок $[0, \pi]$.
3) Функция $y = \arccos x$ ни чётная, ни нечётная. Для неё выполняется тождество $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.
4) Функция $y = \arccos x$ монотонно убывающая.
5) График функции $y = \arccos x$ пересекает ось Ox в точке (1, 0), а ось Oy в точке $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
6) $Y = \arccos x \geq 0$ на всём отрезке [–1, 1].

3 *Арктангенс* (y = arctg x). Функция $y = \mathrm{tg}\, x$ определена всюду на оси Ox, за исключением точек вида $x_n = \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, где $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3\ldots$. Область значений функции $y = \mathrm{tg}\, x$ – вся ось Oy. Поэтому об обратной функции по отношению к функции $y = \mathrm{tg}\, x$ можно говорить для всей оси Oy. Пусть $\mathrm{tg}\, x = a$. Это уравнение имеет бесчисленное множество решений. В этом легко убедиться, рассматривая рис. 1.12.5.

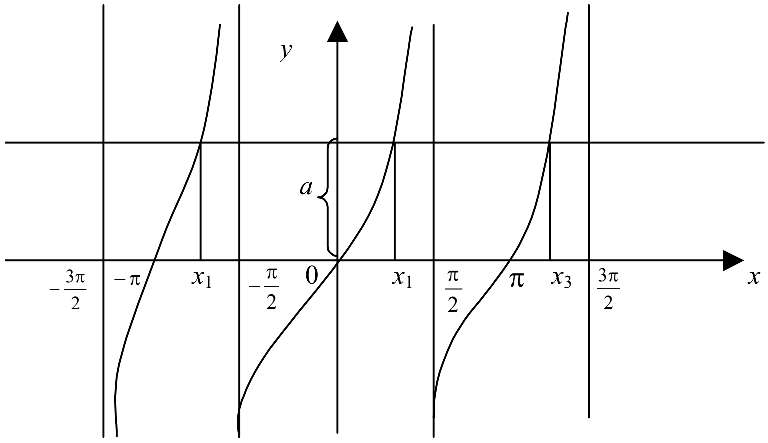


Рис. 1.12.5

Для нахождения однозначной обратной функции нужно выбрать какой-либо наибольший интервал оси *Ox*, на котором функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастает. Функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ на любом интервале вида $[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2n\pi]$, где $n = 0;\ \pm1;\ \pm2;\ \dots$. В качестве интервала оси, на котором функция $y = \operatorname{tg} x$, а также однозначная обратная функция существуют одновременно выберем интервал $]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$. На этом интервале функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, для любого y_0, лежащего на оси *Oy* существует единственное значение x_0 из интервала $]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$ такое, что $y_0 = \operatorname{tg} x_0$. Другими словами, для функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$ существует однозначная обратная функция. Эту функцию называют арктангенсом и обозначают $y = \operatorname{arctg} x$. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен с графиком функции $y = \operatorname{tg} x$ относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов (рис. 1.12.6).

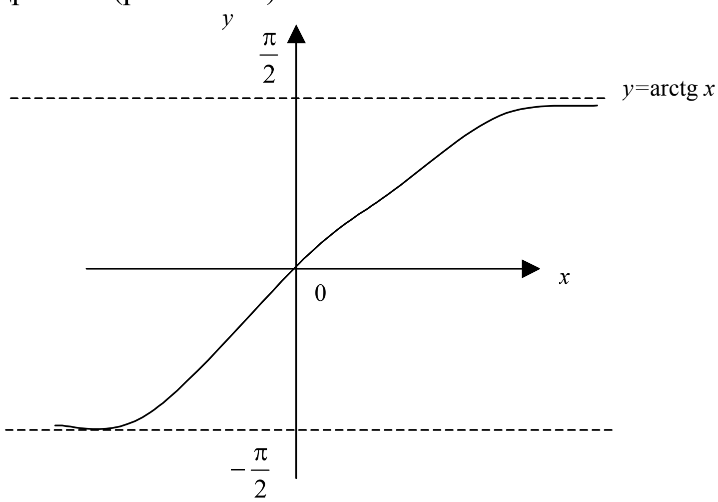


Рис. 1.12.6

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ обладает следующими свойствами, вытекающими из соответствующих свойств функции $y = \operatorname{tg} x$:

1) Область определения: интервал $]-\infty, +\infty[$.
2) Область значений: интервал $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3) Функция $y = \operatorname{arctg} x$ нечётная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

4) Функция $y = \operatorname{arctg} x$ монотонно возрастающая.

5) График функции $y = \operatorname{arctg} x$ проходит через начало координат.

6) Функция $\operatorname{arctg} x < 0$ при $-\infty < x < 0$ и $\operatorname{arctg} x > 0$ при $0 < x < +\infty$.

7) Функция $y = \operatorname{arctg} x$ имеет две горизонтальные асимптоты $y = -\dfrac{\pi}{2}$ и $y = \dfrac{\pi}{2}$.

4 *Арккотангенс* ($y = \operatorname{arcctg} x$). Функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена всюду на оси Ox за исключением точек вида $x_n = n\pi$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Область её значений – это вся ось Oy. Рассматривая рис. 1.12.7 легко убедиться, что уравнение $y = \operatorname{tg} x$ имеет бесчисленное множество решений.

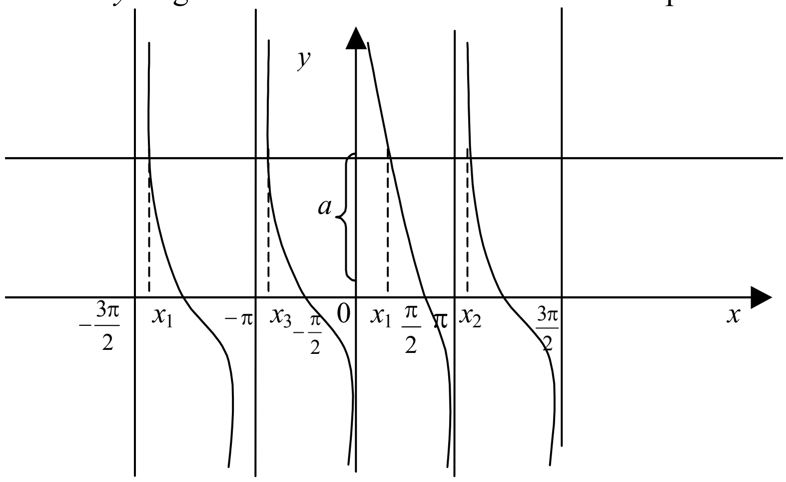


Рис. 1.12.7

Поэтому для нахождения функции обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$, достаточно рассмотреть какой-либо наибольший интервал оси Ox, на котором она монотонно убывает. В качестве интервала оси Ox, на котором рассматривается функция $y = \operatorname{ctg} x$ и обратная к ней функция берут обычно интервал $]0, \pi[$. На этом интервале функция $y = \operatorname{ctg} x$ монотонно убывает от $+\infty, -\infty$. Следовательно, для каждого y_0, лежащего на оси Oy, существует единственное значение $x_0 \in]0, \pi[$, такое, что $y_0 = \operatorname{ctg} x_0$. Другими словами, на интервале $]0, \pi[$ существует однозначная функция обратная к функции $y = \operatorname{ctg} x$. Эту функцию называют арккотангенсом и обозначают $y = \operatorname{arcctg} x$. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ симметричен с графиком функции $y = \operatorname{ctg} x$ относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов (рис. 1.12.8).

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ обладает следующими свойствами:

1) Область определения: интервал $]-\infty, +\infty[$.

2) Область значений: интервал $]0, \pi[$.

3) Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ ни чётная, ни нечётная. Для неё выполняется тождество $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

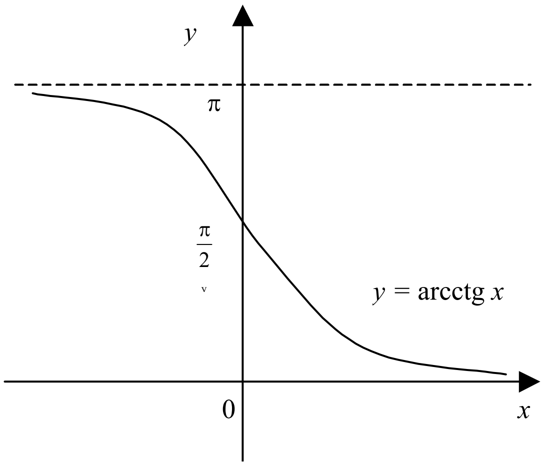


Рис. 1.12.8

4) Функция y = arcctg x монотонно убывающая.

5) График функции y = arcctg x пересекает ось Oy в точке $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

6) Функция y = arcctg $x > 0$ при любых значениях x.

7) Функция y = arcctg x имеет две горизонтальные асимптоты $y = 0$ и $y = \pi$.

1.13 Операции над обратными тригонометрическими функциями

Из свойств тригонометрических функций вытекают следующие формулы:

$$\sin\,(\arcsin x) = x,\ |x| \le 1; \qquad (1.13.1)$$

$$\cos\,(\arccos\,x) = x,\ |x| \le 1; \qquad (1.13.2)$$

$$\operatorname{tg}\,(\operatorname{arctg}\,x) = x,\ -\infty < x < +\infty; \qquad (1.13.3)$$

$$\operatorname{ctg}\,(\operatorname{arcctg}\,x) = x,\ -\infty < x < +\infty; \qquad (1.13.4)$$

$$\sin\,(\arccos\,x) = +\sqrt{1-x^2},\ |x| \le 1; \qquad (1.13.5)$$

$$\cos\,(\arcsin\,x) = +\sqrt{1-x^2},\ |x| \le 1; \qquad (1.13.6)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x},\ \ x \ne 0; \qquad (1.13.7)$$

$$\operatorname{ctg}\,(\operatorname{arcctg}\,x) = \frac{1}{x},\ \ x \ne 0; \qquad (1.13.8)$$

$$\operatorname{tg}\,(\arcsin\,x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1; \qquad (1.13.9)$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty; \qquad (1.13.10)$$

$$\sin\ (\operatorname{arcctg}\ x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty; \qquad (1.13.11)$$

$$\operatorname{tg}\ (\arccos\ x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad 0 < |x| \le 1; \qquad (1.13.12)$$

$$\cos\ (\operatorname{arctg}\ x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty; \qquad (1.13.13)$$

$$\cos\ (\operatorname{arcctg}\ x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty; \qquad (1.13.14)$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad 0 < |x| \le 1; \qquad (1.13.15)$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos\ x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1; \qquad (1.13.16)$$

Доказательство этих формул достаточно простое. Продемонстрируем это на примере формул (1.13.5), (1.13.7) и (1.13.9).

а) $y = \sin(\arccos x)$. Положим $\arccos x = \alpha$. Отсюда $x = \cos\alpha$. Итак,

$$\sin(\arccos x) = \sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} = +\sqrt{1-x^2}.$$

б) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}\ x)$. $\qquad \operatorname{tg}\ (\operatorname{arcctg}\ x) = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}\ x)}\ \dfrac{1}{x}.$

в) $y = \operatorname{tg}(\arcsin\ x)$. $\qquad \operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{\sin(\arcsin\ x)}{\cos(\arcsin\ x)} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

С помощью формул (1.13.16) получаются следующие формулы:

$$\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}, \quad |x| \le 1; \qquad (1.13.17)$$

$$\sin(2\arccos\ x) = 2x\sqrt{1-x^2}, \quad |\mathrm{x}| \le 1; \qquad (1.13.18)$$

$$\cos\ (2\arccos\ x) = 2x^2 - 1, \quad |x| \le 1; \qquad (1.13.19)$$

$$\operatorname{tg}\ (2\operatorname{arctg}\ x) = \frac{2x}{1-x^2}, \quad |x| \ne 1; \qquad (1.13.20)$$

$$\sin\ (2\operatorname{arctg}\ x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty; \qquad (1.13.21)$$

$$\cos\ (2\operatorname{arctg}\ x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty; \qquad (1.13.22)$$

Теперь получим формулы для тригонометрических функций от половины обратной тригонометрической функции. Рассмотрим $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$. Обозначим $\arccos x = \alpha$. Тогда $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$. Так как $\alpha = \arccos x$, то $0 \le \alpha \le \pi$. Значит, $0 \le \frac{\alpha}{2} \le \frac{\pi}{2}$. Поэтому перед корнем нужно взять знак "+".

Итак:

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) = \sqrt{\frac{1+x}{2}},\ |x| \le 1; \qquad (1.13.23)$$

Аналогично,

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) = \sqrt{\frac{1-x}{2}},\ |x| \le 1; \qquad (1.13.24)$$

Используя формулы сложения для тригонометрических функций можно получить следующие формулы:

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2}; \qquad (1.13.25)$$

$$\sin(\arccos x + \arccos y) = y \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \sqrt{1-y^2}; \qquad (1.13.26)$$

$$\cos(\arccos x + \arccos y) = y \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \sqrt{1-y^2},\ |x| \le 1 \text{ и } |y| \le 1; \qquad (1.13.27)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{x+y}{1-xy},\ xy \ne 1; \qquad (1.13.28)$$

и многие другие.

? 1 Что называется арксинусом?

2 Какова область определения функции $y = \arcsin x$?

3 Каково множество значений функции $y = \arcsin x$?

4 Четная или нечетная функция $y = \arcsin x$?

5 Что называется арккосинусом?

6 Какова область определения функции $y = \arccos x$?

7 Каково множество значений функции $y = \arccos x$?

8 Что называется арктангенсом?

9 Какова область определения функции $y = \operatorname{arctg} x$?

10 Каково множество значений функции $y = \operatorname{arctg} x$?

11 Четная или нечетная функция $y = \operatorname{arctg} x$?

Упражнения и задания

а) Вычислите значения следующих функций:

1) $\sin(\arcsin 0{,}35)$; 2) $\cos(\arccos(-0{,}24))$; 3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 25)$; 4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-245))$; 5) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; 6) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$; 7) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{5}\right)$; 8) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 9) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$; 10)

$\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; 11) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$; 12) $\sin(\operatorname{arctg}(-3))$; 13) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$; 14) $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; 15) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$.

б) Проверьте равенства:

1) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)=\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$; 2) $\sin\left(4\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\sin\left(4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

в) Вычислите:

1) $\sin\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; 2) $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$; 3) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)$; 4) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{5}{13}\right)$; 6) $\operatorname{ctg}\left(2\arccos\frac{5}{13}\right)$; 7) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}\right)$; 8) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}\right)$; 9) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

г) Вычислите:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{3}\right)$; 3) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-\operatorname{arctg}(-2)\right)$; 4) $\sin\left(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}-\arccos\frac{5}{13}\right)$; 6) $\sin^2\left(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

1.14 Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Основные тригонометрические тождества и определения

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \qquad (1.14.1)$$

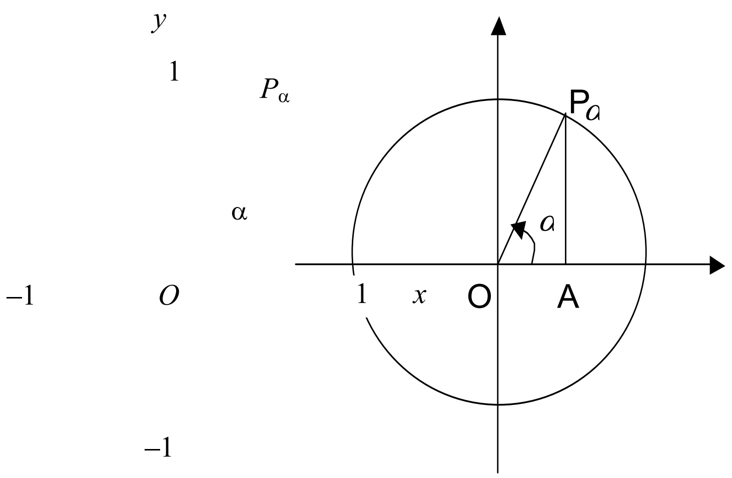


Рис. 1.14.1

Пусть α – произвольный угол. Отметим на единичной окружности точку P_α (см. рис. 1.14.1). В треугольнике OAP_α : $OA=\cos\alpha$, $AP_\alpha=\sin\alpha$, $OP_\alpha=1$. По теореме Пифагора $OA^2+AP_\alpha{}^2=OP_\alpha{}^2$, т.е. $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z \text{ по определению.} \qquad (1.14.2)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z \text{ по определению.} \qquad (1.14.3)$$

Из (1.14.2) и (1.14.3) следует:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z. \qquad (1.14.4)$$

Разделив почленно (1.13.1) на $\cos^2\alpha \neq 0$ получим:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad (1.14.5)$$

Разделив же на $\sin^2\alpha \neq 0$, получим:

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (1.14.6)$$

Выражение одних тригонометрических функций

через другие

Из (1.14.1) следует $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$.
Из (1.14.6) следует

$$\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

так как $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ (см. (1.13.4)).

Из (1.14.1) следует $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.
Из (1.14.5) следует

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

так как $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ (см. (1.14.4)).

Понятно, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}};$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha};$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Заметим, что в формулах, содержащих радикалы, знак следует брать в зависимости от того, в какой четверти оканчивается угол α.

Упражнения и задания

1) Докажите тождества:

а) $\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\sec^2\alpha}$;

б) $\frac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}$;

в) $\frac{\sin^2\alpha}{\sec^2\alpha-1}+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}=1$;

г) $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\sec^2\alpha}$;

д) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}=1$;

е) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

2) Упростите выражения:

а) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

б) $\frac{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)(\sec^2\alpha-1)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{cosec}\alpha}$;

в) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha-\sin^4\alpha\cdot\sec^2\alpha$.

3) Получите формулы, выражающие $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

4) Вычислите, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}8$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

1.15 Формулы приведения

Формулами приведения называются формулы, выражающие тригонометрические функции от аргументов

$$-\alpha,\ \frac{\pi}{2}\pm\alpha,\ \pi\pm\alpha,\ \frac{3\pi}{2}\pm\alpha,\ 2\pi\pm\alpha$$

через функции от аргумента α.

Таблица формул приведения

Угол Функция	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

При пользовании формулами приведения можно пользоваться *правилами*:

1 если угол α откладывается от горизонтального диаметра, то в обоих частях формулы функция имеет одно и то же название; от вертикального – функция меняет название на сходное;

2 знак приведенной функции совпадает со знаком приводимой функции, т.е. чтобы определить знак, с которым следует брать функцию в правой части, достаточно, считая угол острым, определить знак по знаку левой части.

Формулы приведения в особом доказательстве не нуждаются. Так, формулы первого столбца выражают свойства четности и нечетности функции. Последние два столбца получены с учетом периодичности тригонометрических функций.

Другие формулы вытекают из теорем сложения для тригонометрических функций. И так далее… Например,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{3\pi}{2}\cos\,\alpha-\sin\frac{3\pi}{2}\sin\alpha=0+\sin\alpha=\sin\alpha\,,$$

т.е.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha;$$

$$\sin(\pi+\alpha)=\sin\pi\cos\alpha+\cos\pi\sin\alpha=0-\sin\alpha=-\sin\alpha,$$

т.е.

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha,$$

т.е.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\ \alpha.$$

Упражнения и задания

1) Дан угол $\alpha=\dfrac{13\pi}{3}$. Найдите sin α, cos α, tg α, ctg α.

2) Дан угол $\alpha=-1410^\circ$. Найдите sin α, cos α, tg α, ctg α.

3) Доказать тождество.

а) $\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sec^2(\pi+\alpha)-1}+\dfrac{\cos^2(2\pi-\alpha)}{\operatorname{cosec}^2(2\pi+\alpha)-1}=1;$

б) $\left[\sin^4\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin^4(3\pi+\alpha)\right]-2\left[\sin^6\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin^6(5\pi-\alpha)\right]=1.$

4) Найдите $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{10}{11}$.

5) Вычислите:

а) $3\sin\dfrac{\pi}{2}+4\cos\dfrac{2\pi}{3}+6\sin\dfrac{13\pi}{6};$

б) $2\operatorname{tg}180^\circ-\dfrac{1}{2}\sin(-270^\circ)+\dfrac{1}{2}\cos180^\circ.$

6) Упростите выражение:

$$\frac{\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}.$$

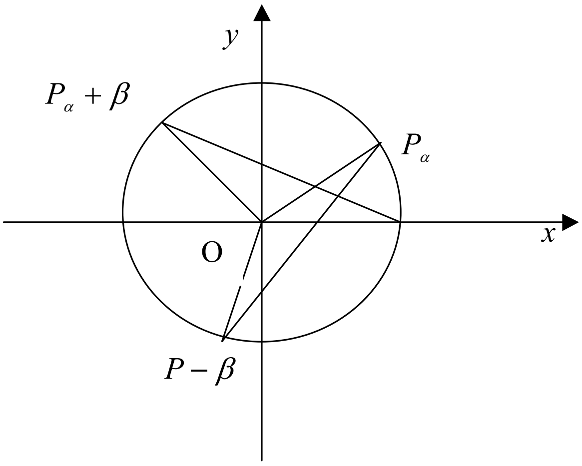
1.16 Формулы для синуса и косинуса суммы двух аргументов

Рассмотрим единичную окружность с центром в $O(0,\ 0)$, а на ней точки $P_\alpha, P_{\alpha+\beta}, P_{-\beta}$ (см. рис. на стр. 56). Им соответствуют углы α, α + β, –β. Очевидно, что

$$\left|P_\alpha P_{-\beta}\right|=\left|P_0P_{\alpha+\beta}\right|. \qquad (1.16.1)$$

Воспользуемся формулой расстояния между двумя точками $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$.

$$\alpha=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$



У нас

$$P_\alpha(\cos\alpha, \sin\alpha),\ P_{-\beta}(\cos\beta, -\sin\beta),\ P_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta));$$

и теперь из равенства (1.15.1) получаем:

$$\sqrt{(\cos(\alpha+\beta)-1)^2 + (\sin(\alpha+\beta)-0)^2} =$$
$$= \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2},$$

т.е.

$$\cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 + \sin^2(\alpha+\beta) =$$
$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta.$$

т.е. $\quad -2\cos(\alpha+\beta) + 2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta,$

т.е.

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.}$$

Заменим β на $-\beta$, получаем:

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.}$$

Получим теперь формулу для синуса суммы двух аргументов:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

т.е.

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.}$$

Заменяя β на $-\beta$ и учитывая, что

$$\sin(-\beta) = -\sin\beta, \qquad \cos(-\beta) = \cos\beta,$$

получаем:

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.}$$

Упражнения и задания

1) Вычислите $\cos\frac{13\pi}{12}$; $\cos 105^\circ$; $\cos 285^\circ$.

2) Вычислите $\sin\frac{13\pi}{12}$; $\sin 105^\circ$; $\sin 285^\circ$.

1.17 Формула тангенса суммы двух аргументов

Имеет место формула

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

При выведении формулы учитывали, что $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$, т.е. функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ определены.

Заменяя β на $-\beta$ и учитывая, что $\operatorname{tg}(-\beta)=-\operatorname{tg}\beta$ получим

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Упражнения и задания

1) Вычислите $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{12}$; $\operatorname{tg}105^\circ$; $\operatorname{tg}15^\circ$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$.

2) Вычислите $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{12}$; $\operatorname{ctg}105^\circ$; $\operatorname{ctg}15^\circ$; $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$.

1.18 Тригонометрические функции двойного аргумента

1) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$ (1.18.1)

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Заменив $\cos^2\alpha$ на $1-\sin^2\alpha$, получим

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha. \qquad (1.18.2)$$

Заменив $\sin^2\alpha$ на $1-\cos^2\alpha$, получим

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1. \qquad (1.18.3)$$

Наконец, получим еще одну формулу для косинуса двойного угла:

$$\cos 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{1} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

(разделили числитель и знаменатель на $\cos^2\alpha \neq 0$), т.е.

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z. \qquad (1.18.4)$$

2) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$ (1.18.5)

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

И еще:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

(разделили числитель и знаменатель на $\cos^2\alpha \neq 0$), т.е.

$$\sin 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z. \qquad (1.18.6)$$

3) $\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k, \quad k \in Z.$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \mathrm{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}. \qquad (1.18.7)$$

Заметим, что аналогично рассуждая, можно получить формулу

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

Упражнения и задания

1) Докажите:

а) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$;

б) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$;

в) $\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha - 2\,\mathrm{ctg}\,2\alpha - 4\,\mathrm{tg}\,4\alpha = 8\,\mathrm{ctg}\,8\alpha$.

2) Упростите:

а) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$;

б) $\left(1 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right) : \left(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

1.19 Тригонометрические функции половинного аргумента

Положим $\alpha = \frac{x}{2}$ в формулах

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Получим

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1, \quad \cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Отсюда находим, что

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$

Стало быть,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\ x}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\ x}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\ x}{1+\cos\ x}},$$

т.е. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\ x}{1+\cos\ x}}, \quad x \neq \pi + 2\pi k, \quad k \in Z.$

Знак перед радикалом зависит от того, в какой четверти оканчивается угол α.
Например,

$$\sin 15^\circ = +\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Упражнения и задания

1) Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ если $\alpha = 22^\circ 30$.

2) Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$, зная, что $\sin\alpha = -0{,}8$, где $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

3) Упростите: $\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{5\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+4}{3}\right)^2}$.

4) Докажите тождества:

а) $\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4}\sin 2\alpha$;

б) $\frac{(1+\sin\alpha)\ (\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\ \alpha$.

1.20 Преобразование в сумму выражений $\sin\alpha\cdot\cos\beta$, $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ и $\sin\alpha\cdot\sin\beta$

Возьмём формулы для синуса суммы и разности двух углов:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Сложим их и разделим на 2. Тогда получим:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (1.20.1)$$

Возьмём формулы для косинуса суммы и разности двух углов:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned} \qquad (*)$$

Сложим их и разделим на 2. Тогда получим:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (1.20.2)$$

Возьмём из формулы 2 (*) формулу 1 (*). Тогда получим:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}. \qquad (1.20.3)$$

Упражнения и задания

1) Вычислите:

а) $\sin 52^\circ 30'\cdot\cos 7^\circ 30'$;

б) $\cos 52^\circ 30'\cdot\cos 7^\circ 30'$;

в) $\sin 52^\circ 30'\cdot\sin 7^\circ 30'$;

г) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$;

д) $\sin 20^\circ\sin 50^\circ\cos 80^\circ$;

е) $\cos 10^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ$;

ж) $\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}$.

1.21 Преобразование в произведение сумм

$$\sin\,\alpha \pm \sin\,\beta,\;\; \cos\,\alpha \pm \cos\,\beta,\;\; \mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta,\;\;\text{ и }\; \mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta$$

1 *Сумма синусов*

Перепишем формулу:

$$\sin\alpha'\cdot\cos\beta' = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha'+\beta') + \sin(\alpha'-\beta')\right]$$

в виде:

$$\sin(\alpha'+\beta') + \sin(\alpha'-\beta') = 2\sin\alpha'\cdot\cos\beta'.$$

Положим: $\alpha' = \frac{\alpha+\beta}{2}$ и $\beta' = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Очевидно, $\alpha'+\beta' = \alpha,\; \alpha' - \beta' = \beta$.

Тогда:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1.21.1)$$

Сумма двух синусов равна удвоенному произведению

синуса полусуммы на косинус полуразности их аргументов

2 *Разность синусов*

Заменим в формуле (1.21.1) β на $-\beta$ и учтём нечётность синуса. Тогда получим:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (1.21.2)$$

Разность двух синусов равна удвоенному произведению синуса полуразности на косинус полусуммы их аргументов

3 *Сумма косинусов*

Запишем формулу:

$$\cos\alpha'\cdot\cos\beta' = \frac{\cos(\alpha'+\beta') + \cos(\alpha'-\beta')}{2}$$

в виде:

$$\cos(\alpha'+\beta') + \cos(\alpha'-\beta') = 2\cos\alpha'\cdot\cos\beta'.$$

Положим в этой формуле $\alpha' = \frac{\alpha+\beta}{2}$ и $\beta' = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Тогда:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1.21.3)$$

Сумма двух косинусов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на косинус полуразности их аргументов.

4 *Разность косинусов*

Запишем формулу:

$$\sin\alpha'\cdot\sin\beta' = \frac{\cos(\alpha'-\beta')-\cos(\alpha'+\beta')}{2}$$

в виде:

$$\cos(\alpha'-\beta')-\cos(\alpha'+\beta') = 2\sin\alpha'\cdot\sin\beta'.$$

Положим: $\alpha' = \frac{\alpha+\beta}{2}$ и $\beta' = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Тогда получим:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1.21.4)$$

Разность двух косинусов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на синус полуразности их аргументов, взятому со знаком минус.

5 *Сумма тангенсов*

$$\operatorname{tg}\,\alpha + \operatorname{tg}\,\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

Отсюда:

$$\operatorname{tg}\,\alpha + \operatorname{tg}\,\beta = \frac{\sin\,(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}. \qquad (1.21.5)$$

Сумма двух тангенсов равна частному от деления синуса суммы их аргументов на произведение косинусов этих же аргументов.

6 *Разность тангенсов*

Заменим в формуле (1.21.5) β на $-\beta$. Тогда с учётом чётности косинуса и нечётности тангенса получим:

$$\operatorname{tg}\,\alpha - \operatorname{tg}\,\beta = \frac{\sin\,(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}. \qquad (1.21.6)$$

Разность двух тангенсов равна частному от деления синуса разности их аргументов на произведение косинусов этих же аргументов.

7 *Сумма котангенсов*

$$\operatorname{ctg}\,\alpha + \operatorname{ctg}\,\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Итак:

$$\operatorname{ctg}\,\alpha + \operatorname{ctg}\,\beta = \frac{\sin\,(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}. \qquad (1.21.7)$$

Сумма двух котангенсов равна частному от деления синуса суммы их аргументов на произведение синусов этих же аргументов.

8 *Разность котангенсов*

Заменим в формуле (1.21.7) β на $-\beta$. Тогда с учётом нечётности синуса и котангенса. Тогда получим:

$$\operatorname{ctg}\,\alpha - \operatorname{ctg}\,\beta = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}. \qquad (1.21.8)$$

Разность двух котангенсов равна взятому со знаком минус частному от деления синуса разности их аргументов на произведение синусов этих же аргументов.

Упражнения и задания

1) Упростите:

а) $\sin^2\left(\frac{9}{8}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{19}{8}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)$;

б) $\sin 5\alpha\cdot\sin 4\alpha+\sin 4\alpha\cdot\sin 3\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha$;

в) $\operatorname{ctg}80^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{ctg}40^\circ+\operatorname{tg}80^\circ$;

г) $\sin 7\alpha-\sin 5\alpha-\frac{4}{3}\sin 9\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha$.

2) Доказать тождества:

а) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=2\cos\alpha$;

б) $\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=4\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$;

в) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{5}{2}\alpha$.

1.22 Использование вспомогательного аргумента

Рассмотрим некоторые виды сумм, которые можно свести к произведениям, подобрав подходящим образом вспомогательный аргумент.

1) $a\cdot\sin\alpha+b\cdot\cos\alpha$ где $a\neq 0$ и $b\neq 0$. Подберём аргумент φ и положительный множитель ρ, так, чтобы:

$$a=\rho\cdot\cos\varphi \quad \text{и} \quad b=\rho\cdot\sin\varphi.$$

Возведём выражения для a и b в квадрат и сложим полученные равенства. Мы получим $\rho^2=a^2+b^2$. Отсюда:

$$\rho = +\sqrt{a^2+b^2}.$$

Вспомогательный аргумент φ найдём из соотношений:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{+\sqrt{a^2+b^2}} \text{ и } \sin\varphi = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{+\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Теперь выражение $a\cdot\sin\alpha + b\cdot\cos\alpha$ преобразуем так:

$$a\cdot\sin\alpha + b\cdot\cos\alpha = \rho\cos\varphi\sin\alpha + \rho\sin\varphi\cos\alpha =$$
$$= \rho(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) = \rho\sin(\alpha+\varphi).$$

Итак:

$$a\cdot\sin\alpha + b\cdot\cos\alpha = \rho\sin(\alpha+\varphi). \qquad (1.22.1)$$

2) $a\cdot\sin\alpha + b$ и $a\cdot\cos\alpha + b,\ 0<|b|\le|a|$. Вначале преобразуем первое выражение. $a\cdot\sin\alpha + b = a\cdot\left(\sin\alpha + \frac{b}{a}\right)$. По предположению $\left|\frac{b}{a}\right|\le 1$. Поэтому можно положить $\frac{a}{b} = \sin\varphi$.

Тогда $a\cdot\sin\alpha + b = a\cdot(\sin\alpha + \sin\varphi) = 2a\cdot\sin\frac{\alpha+\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\varphi}{2}$.

Итак:

$$a\cdot\sin\alpha + b = 2a\cdot\sin\frac{\alpha+\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\varphi}{2}. \qquad (1.22.2)$$

Второе выражение преобразуем аналогично. Положим $\frac{b}{a} = \cos\varphi$. Тогда

$$a\cdot\cos\alpha + b = a\cdot(\cos\alpha + \frac{b}{a}) = a\cdot(\cos\alpha+\cos\varphi) = 2a\cdot\cos\frac{\alpha+\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\varphi}{2}.$$

Итак:

$$a\cdot\cos\alpha + b = 2a\cdot\cos\frac{\alpha+\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\varphi}{2}. \qquad (1.22.3)$$

3) $a\cdot\mathrm{tg}\ \alpha + b,\ a\ne 0$. Так как тангенс угла изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, то можно положить $\frac{b}{a} = \mathrm{tg}\ \varphi$.

Тогда:

$$a\cdot\mathrm{tg}\ \alpha + b = a\cdot\left(\mathrm{tg}\ \alpha + \frac{b}{a}\right) = a\cdot(\mathrm{tg}\ \alpha + \mathrm{tg}\ \varphi) = \frac{a\cdot\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha\cdot\cos\varphi}.$$

Итак:

$$a\cdot\mathrm{tg}\ \alpha + b = \frac{a\cdot\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha\cdot\cos\varphi}. \qquad (1.22.4)$$

Упражнения и задания

Преобразуйте в произведение:

$2\sin\alpha+1;\ 2\cos\alpha+\sqrt{2};\ 3-4\cos^2\alpha;\ 3\mathrm{tg}\alpha+\sqrt{3};\ \sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha;$
$\sin\alpha-\cos\alpha:\sqrt{3}-2\sin\alpha;\ 3-4\sin^2\alpha;\ \sqrt{3}\mathrm{tg}2\alpha+3;\ 1-3\mathrm{tg}^2\alpha;\ 3-9\mathrm{tg}^2 4\alpha.$

1.23 Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Тождественным преобразованием называется замена одного выражения другим, ему тождественно равным (например, $a^2-2ab+b^2$ можно заменить на $(a-b)^2$).

При решении примеров на упрощение тригонометрических выражений производят ряд тождественных преобразований с использованием формул параграфов 1.14 – 1.22.

При доказательстве тригонометрических тождеств используются приемы:

1 Более громоздкая часть доказываемого тождества с помощью тождественных преобразований приводится к менее громоздкой, простой;

2 Если обе части тождества громоздкие (не упрощенные), то их преобразуют до полного совпадения;

3 В ряде случаев удобно (целесообразно) найти разность между доказываемыми частями тождества и убедиться, что она равна нулю.

В отдельных случаях применяются специальные приемы.

Примеры. 1) Доказать тождество

$$\frac{\mathrm{tg}2\ \alpha+\mathrm{ctg}\ 3\beta}{\mathrm{ctg}2\ \alpha+\mathrm{tg}\ 3\beta}=\frac{\mathrm{tg}\ 2\alpha}{\mathrm{tg}\ 3\beta}.$$

Решение. Обозначим, для краткости записи, левую часть доказываемого тождества через A, а правую через B и найдем их разность:

$$A-B=\frac{\mathrm{tg}\ 2\alpha\,\mathrm{tg}\ 3\beta+\mathrm{ctg}\ 3\beta\,\mathrm{tg}\ 3\beta-\mathrm{tg}\ 2\alpha\,\mathrm{ctg}\ 2\alpha-\mathrm{tg}\ 2\alpha\,\mathrm{tg}\ 3\beta}{(\mathrm{ctg}\ 2\alpha+\mathrm{tg}\ 3\beta)\,\mathrm{tg}\ 3\beta}=$$
$$=\frac{1-1}{(\mathrm{ctg}\ 2\alpha+\mathrm{tg}\ 3\beta)\,\mathrm{tg}\ 3\beta}=0.$$

значит $A = B$. Тождество доказано.

2) Доказать тождество

$$\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\mathrm{tg}^4\alpha .$$

Решение. Преобразуем левую, более громоздкую, часть:

$$\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\frac{3-4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1}{3+4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1}=$$

$$=\frac{2-4\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+2\cdot\left(\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\right)^2}{2+4\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+2\cdot\left(\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\right)^2}=$$

$$=\frac{1+2\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha-2+2\mathrm{tg}^4\alpha+1-2\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha}{1+2\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha+2-2\mathrm{tg}^4\alpha+1-2\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha}=\mathrm{tg}^4\alpha.$$

В ходе решения воспользовались формулой 1.18.4. Тождество доказано.

3) Доказать тождество

$$\frac{\cos(3\pi-2\alpha)}{2\sin^2\left(\dfrac{5}{4}\pi+\alpha\right)}=\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right).$$

Решение. Упрощаем левую часть доказываемого тождества:

$$\frac{\cos(3\pi-2\alpha)}{2\sin^2\left(\dfrac{5}{4}\pi+\alpha\right)}=\frac{\cos(\pi-2\alpha)}{2\sin^2\left(\pi+\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)}=\frac{-\cos 2\alpha}{2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}=$$

$$=\frac{-\cos 2\alpha}{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)}=\frac{-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=-\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=-\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}.$$

Теперь упрощаем правую часть

$$\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)=-\mathrm{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=-\frac{1-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}=-\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot(\cos\alpha+\sin\alpha)}=-\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}.$$

Как видим, левая и правая части одинаковы. Тождество доказано.

4) Доказать, что

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

Решение. Применим *искусственный прием*: умножим и разделим левую часть тождества на $2\sin\frac{\pi}{7}$, а затем воспользуемся формулой 1.20.1.

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}.$$

Итак, тождество доказано.

5) Доказать, что $\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}40^\circ\cdot\operatorname{tg}80^\circ=\sqrt{3}$.

Решение. Преобразуем отдельно числитель и знаменатель левой части тождества.

$$\sin20^\circ\cdot\sin40^\circ\cdot\sin80^\circ=\frac{1}{2}\left(\cos20^\circ-\cos60^\circ\right)\cdot\sin80^\circ=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin80^\circ\cdot\cos20^\circ-\frac{1}{2}\sin80^\circ\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\sin100^\circ+\sin60^\circ\right)-\frac{1}{2}\sin80^\circ\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin80^\circ+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\sin80^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{8},$$

(воспользовались равенством $\sin100^\circ=\sin80^\circ$).

$$\cos20^\circ\cdot\cos40^\circ\cdot\cos80^\circ=\frac{2\sin20^\circ\cdot\cos20^\circ\cdot\cos40^\circ\cdot\cos80^\circ}{2\sin20^\circ}=$$

$$=\frac{\sin40^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ}{2\sin20^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin80^\circ\cos80^\circ}{2\sin20^\circ}=\frac{1}{8}\frac{\sin160^\circ}{\sin20^\circ}=\frac{1}{8}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}40^\circ\cdot\operatorname{tg}80^\circ=\frac{\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ}{\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ}=\frac{\sqrt{3}/8}{1/8}=\sqrt{3}.$$

Тождество доказано.

Замечание: Если воспользоваться формулами 1.21.1 и 1.21.5, то легко получить

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}\,\alpha \cdot \operatorname{tg}(60° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(60° + \alpha).$$

Положив здесь $\alpha = 20°$, получаем сразу $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\,20° \cdot \operatorname{tg}\,40° \cdot \operatorname{tg}\,80°$.

6) Упростить

$$\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)}{2\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1 - \cos(4\alpha - \pi)}{\sin^3 2\alpha} - \frac{\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right)}{2\sin^2\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)}.$$

Решение. Обозначим, для краткости записи, данное выражение через А. Прежде всего, воспользуемся формулами приведения.

г) Преобразовать в произведение.

1) $3 + 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha$;

2) $2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{5}{2}\pi + \alpha\right) - 1$;

3) $\sqrt{1 + \sin\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}, \quad 0 < \alpha \le 180°$;

4) $2 - \operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{ctg} 4\alpha$;

5) $\dfrac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi - 2\alpha\right) + 2\sin^2\left(2\alpha - \frac{5}{2}\pi\right) - 1}{1 + \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(6\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)}$.

$2\sin\alpha + 1$;

$2\cos\alpha + \sqrt{2}$;

$3 - 4\cos^2\alpha$;

$3\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{3}$;

$\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$;

$\sin\alpha - \cos\alpha : \sqrt{3} - 2\sin\alpha$;

$3 - 4\sin^2\alpha$;

$\sqrt{3}\operatorname{tg} 2\alpha + 3$;

$1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha$;

$3 - 9\operatorname{tg}^2 4\alpha$.

1.24 Решение уравнений $\sin x = \alpha, \quad \cos x = \alpha, \quad \operatorname{tg}\, x = \alpha$

1) $\sin x = \alpha$ **.**

Уравнение имеет смысл при –1 ≤ α ≤ 1. Так как функция $y = \sin x$ **имеет период 2π, то достаточно найти решение уравнения** $\sin x = \alpha$ **на участке длиной 2π.**

Возьмем участок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$**. Он состоит из двух участков** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$**. Если** $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$**, то решением уравнения** $\sin x = \alpha$ **является**

$$x = \arcsin\alpha, \qquad \textbf{(1.24.1)}$$

по определению арксинуса.

Если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$**, то уравнение** $\sin x = \alpha$ **запишем в виде** $\sin(\pi - x) = \alpha$. **Это верно, так как** $\sin x = \sin(\pi - x)$**, но аргумент** $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$**, что вытекает из следующей цепочки**

$$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \;\Rightarrow\; -\frac{3\pi}{2} \le -x \le -\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; -\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}.$$

Из равенства $\sin(\pi - x) = \alpha$, $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **следует, что** $\pi - x = \arcsin\alpha$**, т.е.**

$$x = \pi - \arcsin\alpha. \qquad \textbf{(1.24.2)}$$

Все решения уравнения $\sin x = \alpha$ **получим, прибавив к найденным решениям (1.24.1) и (1.24.2) выражение** $2\pi k$, $k \in Z$**. Получим:**

$$x = \arcsin\alpha + 2\pi k \quad \text{и} \quad x = -\arcsin\alpha + \pi + 2\pi k.$$

Найденные решения обычно записывают в виде одной формулы:

$$x = (-1)^n \arcsin\alpha + \pi n, \quad n \in Z.$$

(При $n = 2k$ **получается первое решение, при** $n = 2k + 1$ **– второе решение.)**

2) $\cos x = \alpha, \quad -1 \le \alpha \le 1.$

Найдем решение этого уравнения на участке $[-\pi, \pi]$**. На второй его половине, (**$x \in [0, \pi]$**) решением уравнения** $\cos x = \alpha$ **является**

$$x = \arccos\,\alpha \qquad \textbf{(1.24.3)}$$

по определению арккосинуса.

Если $x \in [-\pi, 0]$**, то уравнение** $\cos x = \alpha$ **перепишем в виде** $\cos(-x) = \alpha$, так как $\cos(-x) = \cos x$, **но при этом** $-x \in [0, \pi]$**. По определению арккосинуса находим** $-x = \arccos\,\alpha$**, т.е.**

$$x = -\arccos\,\alpha. \qquad \textbf{(1.24.4)}$$

Прибавив к полученным решениям (1.24.3) и (1.24.4) числа $2\pi k$, $k \in Z$**, получим все решения уравнения, а именно:**

$$x = \pm\arccos\,\alpha + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

3) $\mathrm{tg}\; x = \alpha$.

Найдем решение уравнения $\mathrm{tg}\; x = \alpha$ **на участке длиной** π**.**

Возьмем участок $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$**. Тогда из равенства** $\mathrm{tg}\; x = \alpha$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ **следует**

$$x = \mathrm{arctg}\;\alpha, \qquad \textbf{(1.24.5)}$$

по определению арктангенса. Прибавив к найденному решению (1.24.5) числа πn, $n \in Z$ **получим все решения уравнения** $\mathrm{tg}\; x = \alpha$**, а именно:**

$$x = \mathrm{arctg}\;\alpha + \pi n, \quad n \in Z.$$

2 Тригонометрические уравнения.

Основные методы решений

2.1 Простейшие уравнения

К простейшим уравнениям относятся уравнения вида $\sin x = \alpha, \cos x = \alpha, \operatorname{tg} x = \alpha, \operatorname{ctg} x = \alpha.$ Они решаются по формулам:

$$\begin{array}{lll}
\sin x = \alpha, \quad -1 \le \alpha \le 1, & x = (-1)^n \arcsin \alpha + \pi n, & n \in Z; \\
\cos x = \alpha, \quad -1 \le \alpha \le 1, & x = \pm \arccos \alpha + 2\pi k, & k \in Z; \\
\operatorname{tg} x = \alpha, & x = \operatorname{arctg} \alpha + \pi l, & l \in Z; \\
\operatorname{ctg} x = \alpha, & x = \operatorname{arcctg} \alpha + \pi m, & m \in Z.
\end{array}$$

В частных случаях при $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = -1$ решение уравнения *можно* находить не по готовой формуле, а исходя из тригонометрического круга. Так,

$$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

$$\left(\text{по формуле } x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right);$$

$$\sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$\left(\text{по формуле } x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + \pi n\right);$$

$$\sin x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\cos x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

При использовании формул решения тригонометрических уравнений учитывать, что

$$\arcsin(-\alpha) = -\arcsin\alpha, \qquad \arccos(-\alpha) = \pi - \arccos\alpha,$$
$$\operatorname{arctg}(-\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha, \qquad \operatorname{arcctg}(-\alpha) = \pi - \operatorname{arcctg}\alpha.$$

Примеры. 1) $\operatorname{tg}3x = 1995.$

Решение.

$$3x = \operatorname{arctg}1995 + \pi l, \quad \text{т.е.} \quad x = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}1995 + \frac{\pi l}{3}, \quad l \in Z.$$

2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$

Решение.

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,$$

$$\text{т.е.} \quad x - \frac{\pi}{4} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k.$$

Полученное решение можно записать в виде двух формул:

$$x = \frac{11}{12}\pi + 2\pi k \quad \text{и} \quad x = -\frac{5}{12}\pi + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

3) $\sin\frac{1}{2}x = \frac{\pi}{3}$.

Решение: $x \in \varnothing$, так как $\frac{\pi}{3} > 1$.

4) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$.

Решение. Запишем уравнение иначе $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

$x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n$,

т.е. $x = \frac{\pi}{3} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z$.

Полученное решение можно записать в виде двух формул:

если $n = 2k$ (четное), то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

если $n = 2k - 1$ (нечетное), то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$.

5) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение: $x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi m$, т.е. $x = \frac{\pi}{3} + \pi m, \quad m \in Z$.

Решить уравнения.

1) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$;

2) $\cos x^2 = 1$;

3) $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$;

4) $\cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos x - \sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin x = \frac{\pi}{6}$;

5) $2|x - 2|\cos x = x - 2$.

2.2 Общий прием

Он заключается в том, что все тригонометрические функции, которые входят в уравнение, выражают через какую-нибудь одну тригонометрическую функцию, зависящую от одного и того же аргумента.

Примеры. 1) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.

Решение. Заменяем $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$.

$$2\left(1 - \sin^2 x\right) + 5\sin x - 4 = 0, \text{ т.е. } 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0.$$

Отсюда $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = 2.$ Так как 2 > 1, то остается только вариант $\sin x = \frac{1}{2},$ из которого получаем

Ответ: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$

2) $4\sin^4 x - 2\sin^2 x \cos x + 4\cos 2x = 2\cos^3 x - \sin^2 2x + 2.$

Решение. Перейдем к функции $\cos x.$

$4\left(1-\cos^2 x\right)^2 - 2\left(1-\cos^2 x\right)\cos x + 4\left(2\cos^2 x - 1\right) = 2\cos^3 x -$

$-4\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right) + 2,$

т.е. $4 - 8\cos^2 x + 4\cos^4 x - 2\cos x + 2\cos^3 x + 8\cos^2 x - 4 -$

$-2\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos^4 x - 2 = 0,$

т.е. $4\cos x - 2\cos x - 2 = 0,$ т.е. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \quad \Rightarrow$

$\cos x = 1$ и $\cos x = -\frac{1}{2}.$

Ответ: $x = 2\pi k, \quad k \in Z$ и $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in Z.$

Решить уравнения.

1) $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2};$

2) $3\sin^3 x + \sin^2 x + 3\cos^2 x = 2\cos 2x - 3\sin x \cos^2 x;$

3) $6\mathrm{ctg}^2 x - 2\cos^2 x = 3;$

4) $\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin 2x + \sin^2 2x = 0;$

5) $8\sin^6 x + 3\cos 2x + 2\cos 4x + 1 = 0$ (перейти к $\cos 2x$);

6) $25\sin^2 x + 100\cos x = 89.$

2.3 Методы группировки

Путем группировки слагаемых уравнение привести к виду, когда левая часть разложена на множители, а правая часть равна нулю. Уравнение распадается на несколько более простых уравнений.

Примеры. 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$

Решение. Запишем уравнение в другом виде

$\left(\sin x + \sin 3x\right) + \sin 2x = \left(1 + \cos 2x\right) + \cos x,$

т.е. $2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 2\cos^2 x + \cos x,$

т.е. $\sin 2x\left(2\cos x + 1\right) - \cos x\left(2\cos x + 1\right) = 0,$

т.е. $\left(2\cos x + 1\right)\left(\sin 2x - \cos x\right) = 0,$

но $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, поэтому $\left(2\cos x + 1\right)\cdot \cos x \cdot \left(2\sin x - 1\right) = 0.$

Отсюда

$2\cos x + 1 = 0;$	$\cos x = 0;$	$2\sin x - 1 = 0;$
$\cos x = -\frac{1}{2};$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$	$\sin x = \frac{1}{2};$
$x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k,$		$x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m.$

Ответ:

$$x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \quad k \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z;$$

$$x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in Z.$$

2) $\cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2} = \sin 2x.$

Решение.

$$\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right)\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 2\sin x \cos x,$$

т.е. $1\cos x - 2\sin x \cos x = \cos x(1 - 2\sin x) = 0.$

Отсюда $\cos x = 0$ и $\sin x = \frac{1}{2}$. Следовательно, получаем

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \qquad x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in Z.$

Решить уравнения.

1) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0;$

2) $3\sin^2 x = 5\sin x;$

3) $\sin x - 1 = \sin x \cos x - \cos x;$

4) $\sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0;$

5) $\sin 3x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

2.4 Уравнения, решаемые понижением степени

Если тригонометрическое уравнение содержит $\sin x, \cos x$ в четной степени, то применим формулы понижения степени

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

Примеры. 1) $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x.$

Решение.

$\frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2} = \frac{1-\cos 10x}{2} + \frac{1-\cos 12x}{2}$, т.е.

$2 - \cos 6x - \cos 8x - 2 + \cos 10x + \cos 12x = 0,$ т.е.

$(\cos 10x + \cos 12x) - (\cos 8x + \cos 6x) = 2\cos 11x \cos x - 2\cos 7x \cos x =$

$= 2\cos x(\cos 11x - \cos 7x) = -2\cos x \sin 9x \sin 2x = 0.$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{lll} \cos x = 0; & \sin 9x = 0; & \sin 2x = 0; \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, & 9x = \pi k; & 2x = \pi l; \\ & x = \dfrac{\pi k}{9}, & x = \dfrac{\pi l}{2}. \end{array}\right.$$

Решение $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ является частью множества корней $x = \dfrac{\pi l}{2}$ $(\text{при } l = 2n + 1)$..

Ответ: $x = \dfrac{\pi k}{9}, \quad k \in Z; \quad x = \dfrac{\pi l}{2}, \quad l \in Z.$

2) $4 + 2\cos x = 3\cos^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right).$

Решение.

$$4 + 2\cos x = 3 \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad \text{т..е.}$$

$$8 + 4\cos x = 3(1 + \sin x), \text{ т.е. } \quad 3\sin x - 4\cos x = 5.$$

Это уравнение можно решать разными способами (см. 5). Решим его, перейдя к функции $\cos x$ (см. 2):

$$\pm 3\sqrt{1 - \cos^2 x} - 4\cos x = 5, \quad \text{т.е.} \quad 5 + 4\cos x = 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

(берем знак "+", так как слева выражение положительное).

$25 + 40\cos x + 16\cos^2 x = 9 - 9\cos^2 x, \quad 25\cos^2 x + 40\cos x + 16 = 0,$

т.е. $\quad (5\cos x + 4)^2 = 0,$

отсюда $5\cos x + 4 = 0, \quad \cos x = -\dfrac{4}{5}$ и получаем

Ответ: $x = \pm\left(\pi - \arccos\dfrac{4}{5}\right) + 2\pi k, \quad k \in Z.$

Решить уравнения.

1) $\cos^2\dfrac{x}{2} + \cos^2\dfrac{3}{2}x = \sin^2 2x + \sin^2 4x;$

2) $6\operatorname{tg}^2 x - 2\cos^2 x = \cos 2x;$

3) $\cos^4 x + \cos^4\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4};$

4) $\sin 3x + \sin 5x = 2\,(\cos^2 2x - \sin^2 2x);$

5) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} + t\right) = \sin t + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} - t\right).$

2.5 Универсальная подстановка

При решении уравнений вида $a\cos x + b\sin x = c$ удобно применять универсальную подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, а $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Уравнение становится рациональным. После нахождения его решения надо проверить, не удовлетворяют ли исходному уравнению числа $x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$.

(Делая подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$, считаем, что

$\cos\frac{x}{2} \neq 0, \quad$ т.е. $\ x \neq \pi + 2\pi k$).

Примеры. 1) $3\sin x - 4\cos x = 5$ (см. 4, п. 2).

Решение. Сделаем подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \ \left(\cos\frac{x}{2} \neq 0\right)$.

Тогда

$$\frac{3 \cdot 2t}{1+t^2} - \frac{4\left(1-t^2\right)}{1+t^2} = 5, \quad \text{т.е.} \quad t^2 - 6t + 9 = 0, \quad (t-3)^2 = 0, \quad t = 3.$$

Значит $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 3$. Отсюда $x = 2\operatorname{arctg}3 + 2\pi k, \quad k \in Z$.

Проверяем, является ли $x = \pi + 2\pi n$ решением данного уравнения:

$$3\sin(\pi + 2\pi n) - 4\cos(\pi + 2\pi n) = 4 \neq 5,$$

значит, не является.

Ответ: $x = 2\operatorname{arctg}3 + 2\pi k, \quad k \in Z$.

Замечание. Сравнивая найденный ответ с ответом в предыдущем примере (4, п. 2), видим лишь внешнее различие. Но если $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 3$, то

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-9}{1+9} = -\frac{4}{5}.$$

2) $3\sin 5z - 2\cos 5z = 3$.

Решение. Можно положить $5z = x$, а затем сделать подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Тогда

$$\frac{6t}{1+t^2} - \frac{2\left(1-t^2\right)}{1+t^2} = 3.$$

Далее ясно.

Ответ: $z = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \quad z = \frac{2}{5}\operatorname{arctg}5 + \frac{2\pi k}{5}, \quad k \in Z.$

Решить уравнения.

1) $2 + \cos x = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

2) $2\sin x + \cos^2\frac{x}{2} + 2 + \cos x = 0$;

3) $\sqrt{3}\sin x + \cos x - 2 = 0$;

4) $\sin 3x + 5\cos 3x = -1$;

5) $4\sin x + \cos x = 4$.

2.6 Однородные уравнения и приводимые к ним

Однородные уравнения, т.е. уравнения вида

$$a\cos x + b\sin x = 0,$$
$$a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x = 0$$

и т.д. (у всех слагаемых сумма показателей одинакова) приводятся к алгебраическим относительно $\operatorname{tg} x$ путем деления обеих частей уравнения на $\cos x \neq 0$ и $\cos^2 x \neq 0$ соответственно.

Некоторые уравнения можно сделать однородными путем замены 1 на $\cos^2 x + \sin^2 x$, путем различных преобразований функций, входящих в уравнение и т.д. Например:

$$a\cos x + b\sin x = c \quad\Rightarrow\quad a\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) + 2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} =$$
$$= c\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) \quad\Rightarrow (a-c)\cos^2\frac{x}{2} + 2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} -$$
$$-(a+c)\sin^2\frac{x}{2} = 0,$$

получили однородное уравнение (сравнить с 5 п. 2, 4 п. 2).

Примеры. 1) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0.$

Решение. Делим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$ (если $\cos x = 0$, то получим, что и $\sin x = 0$, что невозможно: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Получаем

$$\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0, \quad \operatorname{tg} x = 3, \quad \operatorname{tg} x = -1.$$

Отсюда сразу следует

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$ и $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, \quad k, n \in Z.$

2) $3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0.$

Решение. Это однородное уравнение, но делить на $\cos x$ нельзя, так как $\cos x$ может быть равен нулю. Запишем уравнение иначе: $\cos x\,(3\sin x - 2\cos x) = 0.$ Отсюда $\cos x = 0,$ $\left(x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$ и $3\sin x -$ $2\cos x = 0$ – однородное уравнение 1-ой степени. Разделим на $\cos x \neq 0$.

$$3\operatorname{tg} x - 2 = 0, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2}{3}, \quad x = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \quad x = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} + \pi k, \quad k \in Z.$

3) $\sin x\cos x - \cos^2 x = 1.$

Решение. Так как $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, то уравнение принимает вид
$\sin x\cos x - \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x,$
т.е. $\sin^2 x - \sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0;$

это уравнение – однородное! Делим на $\cos^2 x \neq 0$:

$$\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\ x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2}, \quad x \in \varnothing.$$

Ответ: Решений нет.

4) $2\cos^3 x + \sin x - 3\sin^2 x \cos x = 0.$

Решение. Это уравнение легко привести к однородному, заменив $\sin x$ на $\sin x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$.

$$2\cos^3 x + \sin^3 x + \sin x \cos^2 x - 3\sin^2 x \cos x = 0,$$

делим на $\cos^3 x \neq 0$:

$$2 + \mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}\ x - 3\mathrm{tg}^2 x = \mathrm{tg}^3 x - 3\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\ x + 2 = 0.$$

Перепишем это уравнение так:

$$\mathrm{tg}^3 x - 2\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}\ x - \mathrm{tg}\ x + 2 = 0, \quad \text{т.е.}$$
$$\mathrm{tg}^2 x \cdot (\mathrm{tg}\ x - 2) - \mathrm{tg}\ x \cdot (\mathrm{tg}\ x - 2) - (\mathrm{tg}\ x - 2) = (\mathrm{tg}\ x - 2)\left(\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\ x - 1\right) = 0.$$

Отсюда

$\mathrm{tg}\ x = 2$ и $\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\ x - 1 = 0$

$x = \mathrm{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in Z$ $\quad (\mathrm{tg}\ x)_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$

Ответ:

$x_1 = \mathrm{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in Z;$

$x_{2,3} = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) + \pi n, \quad n \in Z.$

5) $\dfrac{40\left(\sin^3 \dfrac{t}{2} - \cos^3 \dfrac{t}{2}\right)}{16\sin\dfrac{t}{2} - 25\cos\dfrac{t}{2}} = \sin t.$

Решение. Из условия следует

$40\left(\sin^3 \dfrac{t}{2} - \cos^3 \dfrac{t}{2}\right) = \left(16\sin\dfrac{t}{2} - 25\cos\dfrac{t}{2}\right)\sin t,$

$16\sin\dfrac{t}{2} \neq 25\cos\dfrac{t}{2}, \quad \text{т.е.} \quad \mathrm{tg}\dfrac{t}{2} \neq \dfrac{25}{16}.$

Заменим $\sin t$ на $2\sin\dfrac{t}{2} \cdot \cos\dfrac{t}{2}$. Получаем

$$40\left(\sin^3 \frac{t}{2} - \cos^3 \frac{t}{2}\right) = \left(16\sin\frac{t}{2} - 25\cos\frac{t}{2}\right) \cdot 2\sin\frac{t}{2} \cdot \cos\frac{t}{2},$$
$$20\sin^3 \frac{t}{2} - 16\sin^2 \frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} + 25\sin\frac{t}{2}\cos^2 \frac{t}{2} - 20\cos^3 \frac{t}{2} = 0,$$

т.е. однородное уравнение. Делим на $\cos^3 \dfrac{t}{2} \neq 0$:

$20x^3-16x^2+25x-20=0,\quad$ где $\quad x=\mathrm{tg}\dfrac{t}{2};$

$4x^2(5x-4)+5(5x-4)=0,\quad (5x-4)\left(4x^2+5\right)=0\quad\Rightarrow$

$5x=4\qquad$ и $\qquad 4x^2+5=0$

$x=\dfrac{4}{5}\qquad\qquad\qquad x\in\varnothing.$

Итак, $\mathrm{tg}\dfrac{t}{2}=\dfrac{4}{5}$, т.е. получаем

Ответ: $t=2\mathrm{arctg}\dfrac{4}{5}+2\pi k,\quad k\in Z.$

Решить уравнения.

1) $\sin x-2\cos x=0;$

2) $1-3\cos^2 x=\sin 2x;$

3) $\cos^6 x+\sin^6 x=\dfrac{1}{4}\sin^2 2x;$

4) $8\sin^2\dfrac{x}{2}+3\sin x-4=0;$

5) $2\sin^3 x=\cos x;$

6) $\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0;$

7) $\dfrac{1}{\cos x}=4\sin x+6\cos x.$

2.7 Способ подстановки

Рассмотрим уравнения, для решения которых удобно применить различные подстановки.

Примеры. 1) $\sin^4 x+\cos^4 x-\sin 2x+\dfrac{1}{2}=0$.

Решение.

Воспользуемся формулой $a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2$ и перепишем данное уравнение иначе:

$\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-2\sin x\cos x+\dfrac{1}{2}=0,$

т.е. $2(\sin x\cos x)^2+2(\sin x\cos x)-\dfrac{3}{2}=0.$

Обозначим $\sin x\cos x=t,\quad$ т.е. $\quad\sin 2x=2t$. Тогда получаем

$$2t^2+2t-\frac{3}{2}=0,\quad \text{т.е.}\quad 4t^2+4t-3=0,$$

$$t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{4},\quad t_1=\frac{1}{2},\quad \text{и}\quad t_1=-\frac{3}{2}.$$

Тогда

$\sin 2x=1\qquad\qquad$ и $\qquad\qquad \sin 2x=-3$

$2x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\qquad\qquad\qquad x\in\varnothing.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z.$

2) $5(1 - \sin 2x) - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0$.

Решение. В примере встречаются разность синуса и косинуса и их произведение. Обозначим $\sin x - \cos x = t$. Отсюда следует

$$\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = t^2,$$
$$\text{т.е. } 2\sin x \cos x = \sin 2x = 1 - t^2.$$

Уравнение принимает вид $5(1 - (1 - t^2)) - 16t + 3 = 0.$

Решаем его. $5t^2 - 16t + 3 = 0, \quad t_1 = 3, \quad t_2 = \frac{1}{5}.$ Стало быть,

$\sin x - \cos x = 3 \quad \Rightarrow \quad x \in \varnothing, \quad$ так как $\quad |\sin x - \cos x| \leq \sqrt{2}$

и $\quad \sin x - \cos x = \frac{1}{5}, \quad$ т.е. $\quad \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5}.$

Отсюда $x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{\sqrt{2}}{10} + \pi n.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \cdot \arcsin\frac{\sqrt{2}}{10} + \pi n, \quad n \in Z.$

Замечание. Можно было бы сразу уравнение переписать:

$$5(\sin x - \cos x)^2 - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0,$$

так как $\quad 1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2.$

3) $2(1 + \sin 2x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$

Решение. Обозначим $\; x + \frac{\pi}{4} = t, \quad$ т.е. $\quad x = t - \frac{\pi}{4}.$

Тогда получаем

$$2\left(1 + \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \operatorname{tg} t,$$

т.е. $\quad 2 - 2\cos 2t = 2(1 - \cos 2t) = \operatorname{tg} t \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 2\sin^2 t = \frac{\sin t}{\cos t}$

Отсюда:

а) $\sin t = 0, \quad t = \pi k, \quad$ т.е. $\quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \quad$ и

б) $4\sin t \cos t = 1, \quad \sin 2t = \frac{1}{2},$

т.е. $\sin 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x = \frac{1}{2},$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad$ т.е. $\quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k.$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z.$

Решить уравнения.

1) $\sin 2x + 12 = 12(\sin x - \cos x)$;

2) $\frac{1}{2}\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) = \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos x$;

3) $\frac{1 + \cos 3x}{2 - \cos 3x} = 2\cos^2 3x$;

4) $\sqrt[3]{2 - \mathrm{tg}\, x} + \sqrt[3]{7 + \mathrm{tg}\, x} = 3$;

5) $\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right)$.

2.8 Введение вспомогательного угла

Суть метода в том, что некоторую величину представляют как тригонометрическую функцию соответствующего аргумента φ, а затем производят тригонометрические преобразования. Поясним на *примерах.*

1) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$.

Решение.

Данное уравнение можно решить многими способами: свести к однородному; применить универсальную подстановку; сгруппировать и разложить на множители и т.д. Решим уравнение следующим образом: введем угол φ такой, что $\mathrm{tg}\varphi = \sqrt{3}$, т.е. $\varphi = 60°$. Тогда получаем:

$\mathrm{tg}60° \cdot \sin x - \cos x = 1$,

т.е. $\sin 60° \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos 60° = \cos 60°$,

т.е. $\cos x \cdot \cos 60° - \sin x \cdot \sin 60° = -\frac{1}{2}$,

т.е. $\cos\,(x + 60°) = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x + 60° = \pm 120° + 360°k$,

или $\left[\begin{array}{l} x = -180° + 360°k, \\ x = 60° + 360°k. \end{array}\right.$

Ответ: $x = -60° \pm 120° + 360°k, \quad k \in Z$.

2) $8\cos x + 15\sin x = 17$.

Решение. Разделим обе части уравнения на 15:

$$\frac{8}{15}\cos x + \sin x = \frac{17}{15}.$$

Введем угол φ такой, что $\mathrm{tg}\varphi = \frac{8}{15}$, т.е. $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{8}{15} \approx 28°$.

Тогда получаем

$\mathrm{tg}\;\varphi\;\cos\;x + \sin x = \frac{17}{15}$,

т.е. $\sin\varphi\;\cos x + \cos\varphi \sin x = \frac{17}{15}\cos\varphi$,

$\sin\;(x + \varphi) = \frac{17}{15}\cos\varphi$,

но $\frac{17}{15}\cos\varphi = \frac{17}{15}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\varphi}} = \frac{17}{15}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + 64/225}} = 1$.

Имеем:

$\sin\,(x+\varphi)=1,\quad$ т.е. $\quad x+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\quad x=-\varphi+\dfrac{\pi}{2}+2\pi n.$

Ответ: $x=-\operatorname{arctg}\dfrac{8}{15}+\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z.$

Решить уравнения.

1) $2\sin 17x+\sqrt{3}\cos 5x+\sin 5x=0;$

2) $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x-2=0;$

3) $\sin 5x-\cos 2x=\sqrt{3}(\cos 5x+\sin 2x);$

4) $4\sin 2x-3\cos 2x=5;$

5) $\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

2.9 Искусство

Ищем решение данного нестандартного тригонометрического уравнения путем рассуждений, путем сведения к системе уравнений и т.д.

Примеры. 1) $\quad 2^{\cos x}=\cos x+\dfrac{1}{\cos x}.$

Решение. Левая часть уравнения не больше 2, т.е. $2^{\cos x}\le 2,$ так как $|\cos x|\le 1.$ Равенство возможно лишь при условии, что $\cos x=1.$

Правая часть должна быть положительна, так как $2^{\cos x}>0,$ а значит, $\cos x>0.$ Кроме того, из этого следует, что $\cos x+\dfrac{1}{\cos x}\ge 2.$ Равенство возможно лишь при условии, что $\cos x=1.$

Таким образом, исходное уравнение имеет решение только при условии, что $\cos x=1.$ (тогда $2^1=1+\dfrac{1}{1}$). Отсюда следует

Ответ: $x=2\pi k,\quad k\in Z.$

2) $\quad \sin^2 5x+1=\cos^2 3x.$

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sin^2 5x+1-\cos^2 3x=0,$ т.е. $\sin^2 5x+\sin^2 3x=0.$ Но это возможно лишь при условии, что $\sin 5x=0$ и $\sin 3x=0,$ т.е. данное уравнение равносильно системе уравнений $\begin{cases}\sin 5x=0,\\ \sin 3x=0,\end{cases}$ отсюда $\begin{cases}5x=\pi k, & k\in Z,\\ 3x=\pi n, & n\in Z,\end{cases}$ т.е. $\begin{cases}x=\dfrac{\pi k}{5}, & k\in Z,\\ x=\dfrac{\pi n}{3}, & n\in Z.\end{cases}$ (1)

Приравнивая правые части этих равенств, получаем уравнение $\dfrac{\pi k}{5}=\dfrac{\pi n}{3},$ т.е. $3k=5n,$ где k и n – целые числа. Это уравнение имеет решение $\begin{cases}k=5l,\\ n=3l,\end{cases}$ где $l\in Z.$. Подставляя значения k и n в равенства (1), получаем $x=\pi l.$

Ответ: $x=\pi l,\quad l\in Z.$

3) $\quad \cos 3x+\cos\dfrac{5}{2}x=2.$

Решение. Так как $|\cos 3x| \le 1$ и $\left|\cos\frac{5}{2}x\right| \le 1$, то сумма $\cos 3x + \cos\frac{5}{2}x$ равна 2 только в том случае, когда $\cos 3x = 1$ и $\cos\frac{5}{2}x = 1$ одновременно. Следовательно, данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos 3x = 1, \\ \cos\frac{5}{2}x = 1, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} 3x = 2\pi k, \\ \frac{5}{2}x = 2\pi n, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3}\pi k, \\ x = \frac{4}{5}\pi n. \end{cases}$$

Отсюда получаем $\frac{2}{3}\pi k = \frac{4}{5}\pi n$, т.е. $5k = 6n$, где k и n – целые числа. Это уравнение имеет решение $\begin{cases} k = 6l, \\ n = 5l, \end{cases}$ где $l \in Z$. Следовательно, исходное уравнение имеет решение $x = 4\pi l$.

Ответ: $x = 4\pi l, \quad l \in Z$.

4) $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot \left(1 + \mathrm{tg}^2 2y\right) \cdot \left(3 + \sin 3z\right) = 4.$

Решение. Очевидно, что

$$\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \ge 2, \quad 1 + \mathrm{tg}^2 2y \ge 1, \quad 3 + \sin 3z \ge 2.$$

Перемножив почленно эти неравенства, получаем

$$\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot \left(1 + \mathrm{tg}^2 2y\right) \cdot \left(3 + \sin 3z\right) \ge 4.$$

Левая часть равна правой лишь при условии, что $\cos^2 x = 1$ и $\mathrm{tg}^2 2y = 0$ и $\sin 3z = -1$ одновременно. Следовательно, данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1, \\ \mathrm{tg}^2 2y = 0, \\ \sin 3z = -1, \end{cases} \quad \text{отсюда} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = -30^\circ. \end{cases}$$

ЗАДАЧИ

Доказать тождества:

1) $\sec\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \sec\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\sec 2\alpha$.

2) $\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin\alpha} - 2\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

3) $2\,\mathrm{cosec}\, 2\alpha + \mathrm{ctg}\, 2\alpha = \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} - \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

4) $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \mathrm{tg}\,(45^\circ + \alpha)$.

5) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

6) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}-\alpha\right)=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$.

7) $\dfrac{2\cos^2-1}{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}=1$.

8) $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

9) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha$.

10) $\dfrac{\sin\alpha+\cos(2\beta-\alpha)}{\cos\alpha-\sin(2\beta-\alpha)}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)$.

11) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha$.

12) $\dfrac{\sin\alpha+\cos(2\beta-\alpha)}{\cos\alpha-\sin(2\beta-\alpha)}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)$.

13) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

14) $\dfrac{\sin\alpha+\cos(2\beta-\alpha)}{\cos\alpha-\sin(2\beta-\alpha)}=\dfrac{1+\sin 2\beta}{\cos 2\beta}$.

15) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)\cdot\sec^2\alpha\cdot\sec^2\beta$.

16) $\dfrac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha$.

17) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1$.

18) $\dfrac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha$.

19) $\dfrac{\sin\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha$.

20) $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\gamma)=4\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}$.

21) $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=0$.

22) $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right)=0$.

23) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}+2\alpha\right)=\sin 2\alpha$.

24) $\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha$.

Решить уравнения:

1) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$.
2) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$.
3) $\cos 2x-\cos 8x+\cos 6x=1$.
4) $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$.
5) $\sin 5x+\sin x+2\sin^2 x=1$.
6) $\cos 4x+2\cos^2 x=0$.

7) $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\sin x.}$

8) $\sin 3x = \cos 2x.$

9) $\sin^4 \dfrac{x}{3} + \cos^4 \dfrac{x}{3} = \dfrac{5}{8}.$

10) $3\mathrm{tg}^2 x - \sec^2 x = 1.$

11) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x.$

12) $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0.$

13) $6\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 2.$

14) $\sin^2 x + \dfrac{3}{2}\cos^2 x = \dfrac{5}{2}\sin x \cos x.$

15) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1.$

16) $\sin x + \cos x = 1.$

17) $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x.$

18) $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}.$

19) $\sin x \cdot \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x.$

20) $\cos x \cdot \sin 7x = \cos 3x \cdot \sin 5x.$

21) $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \dfrac{1}{4}\sin 4x.$

22) $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x.$

23) $5\cos 2x = 4\sin x.$

24) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \mathrm{tg}\ x - 2 = 0.$

25) $8\mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{2} = 1 + \sec x.$

26) $\sin x - \cos x - 4\cos^2 x \sin x = 4\sin^3 x.$

27) $\mathrm{ctg}\ x + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = 2.$

28) $\dfrac{1 - \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{1 - \mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}} = 2\sin\dfrac{x}{2}.$

29) $\sin(\pi - x) + \mathrm{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = \sec(-x) - \cos(2\pi - x).$

30) $\sec^2 x - \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos 2x \sec^2 x.$

31) $\sin^3 x(1 + \mathrm{ctg}\ x) + \cos^3 x(1 + \mathrm{tg}\ x) = \cos\ 2x.$

32) $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, 2x = \mathrm{tg}\, 3x.$

33) $1 + \sin x + \cos x = 2\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right).$

34) $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right).$

35) $(\sin x + \cos x)^2 = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right).$

36) $(1 - \mathrm{tg}\ x)(1 + \sin 2x) = 1 + \mathrm{tg}\ x.$

37) $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = 1 - 2\sin^2 x.$

38) $\sin 3x = 4\sin x \cos 2x.$

39) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg} x.$

40) $\operatorname{tg}(x+\alpha)+\operatorname{tg}(x-\alpha)=2\operatorname{ctg} x.$

Вычислить:

1) $\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right].$

2) $\sin\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right].$

3) $\operatorname{ctg}\left[\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right].$

4) $\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

5) $\sin\left(3\operatorname{arctg}\sqrt{3}+2\arccos\frac{1}{2}\right).$

6) $\cos\left[3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right].$

Доказать тождества:

1) $\operatorname{arctg}(3+2\sqrt{2})-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$

2) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$

3) $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}.$

4) $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)=\arccos\left(-\frac{13}{14}\right).$

5) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\operatorname{arctg}\frac{32}{43}.$

6) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$

Решите уравнения:

1) $4\operatorname{arctg}(x^2-3x-3)-\pi=0.$

2) $6\arcsin(x^2-6x+8{,}5)=\pi.$

3) $\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}(x+1)=\frac{\pi}{4}.$

4) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{4}.$

5) $\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}}-\arcsin\sqrt{1-x}=\arcsin\frac{1}{3}.$

6) $\arcsin 3x=\arccos 4x.$

7) $\arcsin x=\arcsin\frac{10x}{13}.$

Список литературы

1 Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Федоро- ва Н.Е., Шабунин М.И. Алгебра и начала анализа. М.: Просвещение, 1998.

2 Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.Н., Шабу-нин М.Н., Федосова Б.В. Задачи по элементарной математике. М.: Наука, 1973.

3 Дерофеева Г.В. Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. М.: Наука, 1973.

4 Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К. Задачи вступительных экзаменов по математике. М.: Наука, 1983.