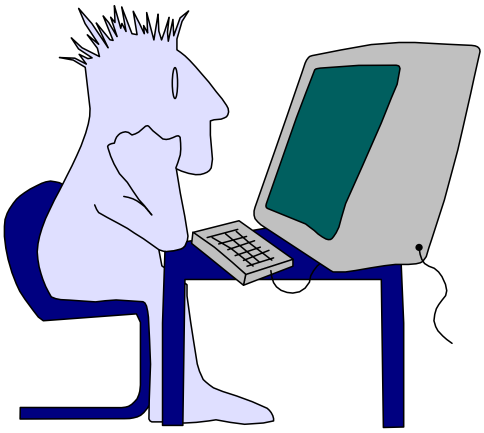
Н. П. Пучков, А. Л. Денисова, А. В. Щербакова

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ



♦ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ♦

Министерство образования Российской Федерации
Тамбовский государственный технический университет

Н. П. Пучков, А. Л. Денисова, А. В. Щербакова

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

Утверждено Ученым советом университета
в качестве учебного пособия

Тамбов
♦ Издательство ТГТУ ♦
2002

УДК 51:33
ББК В11я73
П909

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук, профессор
А. И. Булгаков

Заслуженный учитель РФ, главный методист ИПК РО
Л. П. Колмакова

Пучков Н. П., Денисова А. Л., Щербакова А. В.
П909 Математика в экономике: Учебное пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2002. 80 с.
ISBN 5-8265-0169-3

Основное внимание в пособии уделено вопросам математического моделирования простейших экономических явлений, когда не требуются специальные экономические знания, на использование процентов, алгебраических уравнений, нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.

Даны указания по решению уравнений в целых числах и применению методов линейного программирования к решению математических задач с экономическим содержанием.

Сформулированы задачи с экономическим содержанием для самостоятельного решения.

Предназначено для учащихся экономических лицеев, школ и классов с углубленным изучением экономики и абитуриентов, поступающих на экономические специальности вузов.

УДК 51:33
ББК В11я73

ISBN 5-8265-0169-3

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

ПУЧКОВ Николай Петрович,
ДЕНИСОВА Анна Леонидовна,
ЩЕРБАКОВА Антонина Васильевна

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

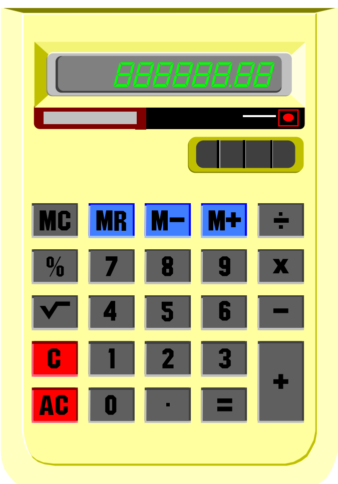
Учебное пособие

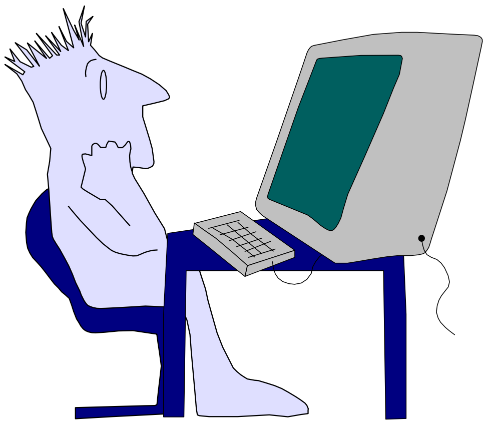
Редактор Т. М. Г л и н к и н а
Инженер по компьютерному макетированию М. Н. Р ы ж к о в а

ЛР № 020851 от 27.09.99
$П_{лр}$ № 020079 от 28.04.97

Подписано в печать 24.04.2002.
Гарнитура Times New Roman. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем: 4,65 усл. печ. л.; 4,5 уч.-изд. л.
Тираж 400 экз. С. 266.

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14





ВВЕДЕНИЕ

Одна из важнейших задач, решаемых школой на современном этапе, – развитие у учащихся способностей самостоятельно решать жизненно важные задачи. В условиях перехода к рыночной экономике особую актуальность приобретает формирование у учащихся экономического мышления, обеспечивающего понимание сущности происходящих экономических процессов.

Одним из самых распространенных средств воспитания экономической грамотности на уроках математики являются задачи, фабулы которых связаны с производственной и другими видами экономической деятельности. В учебниках по математике мы находим задачи, в которых используются такие экономические понятия, как себестоимость, прибыль, рентабельность, доход, объем производства продукции (работ и услуг). Но учащиеся часто видят в задаче только повод для математических действий. Ее экономическое содержание проходит мимо внимания подростков. Поэтому учителю желательно посвятить специальную беседу познавательному элементу задачи.

Перед решением задачи целесообразно пояснить учащимся понятие о нахождении процентного отношения чисел, нахождение процентов данного числа, сложного процента, понятие рентабельности, себестоимости, затрат, производительности труда, фондоотдачи, материалоотдачи.

Процент – одна из самых трудных тем для школьников. Это можно объяснить, в частности, тем, что понятие процента не является математическим, а относится к экономическим и производственным категориям.

Задачи на вычисление сложных процентов имеют особое экономическое содержание, посредством которого определяется уровень риска в процессе принятия решений по оптимизации производства; определению направления вложения ресурсов и т.д.

Только войдя в курс дела, привыкнув к новым словам, ученик может понять, почему получается такое несоответствие: если число x увеличить на число y, а затем полученный результат уменьшить на y, то снова получится x, но, если число x увеличить на 10 %, а затем полученный результат уменьшить на 10 %, то получится не x, а $0{,}99x$.

Процент в экономическом понимании характеризует уровень выполнения задания.

Задачи линейного программирования широко используются в обосновании принимаемых хозяйственных решений, направленных на выбор оптимального варианта в отношении производительности труда; объема производства; рентабельности производства и т.д.

Оптимизационные задачи используются для выбора оптимальных экономических решений в ходе реализации программы, на основе определения благоприятного варианта перераспределения ресурсов.

Использование математического аппарата во взаимосвязи с конкретными экономическими проблемами, а также использование знаний организации информационных процессов обработки экономической информации позволяет:

- повысить восприятие учащимися информационного содержания экономических понятий;
- сформировать навыки умения решений экономических задач;
- развить элементы экономического мышления на основе математического аппарата и информационных технологий обработки экономической информации.

Решению этих задач и способствует данное пособие, которое содержит краткие пояснения к изучению теоретического материала, примеры решения задач, задачи для самостоятельной работы.

Издание предназначено для учащихся экономических лицеев, школ и классов с углубленным изучением экономики, а также для учителей, средних и специальных учебных заведений.

В связи с существенным расширением в последние годы международного сотрудничества России цена продукции в ряде задач дана в условных денежных единицах (д. е.), которыми могут быть рубли, доллары США, марки Германии и т.д.

1 ЗАДАЧИ НА ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОЦЕНТОВ

В экономических и статистических расчетах, а также во многих отраслях науки части величин принято выражать в процентах (сотых долях). Это имеет свои практические удобства, ибо выражение частей чисел в одних и тех же (сотых) долях позволяет: быстро сравнивать величины частей числа со всем числом и между собой, упростить расчеты и в то же время добиться достаточной степени точности выражения частей величин целыми числами (в тех случаях, когда измерение в десятых долях было бы слишком грубым, а в тысячных – излишне точным).

Наиболее часто проценты применяются при финансовых расчетах (банковское дело, доходы от облигаций госзаймов, вкладов в сберегательные банки и т.п.), а также при учете роста хозяйственной продукции, выполнения производственных планов, роста народонаселения и т.д.

При финансовых расчетах число, показывающее, сколько процентов дохода в установленный срок (зачастую в год) приносит та или иная сумма, называется процентной таксой (ставкой), а сама сумма дохода – процентными деньгами. Для расчета процентных денег служат формулы *простых* и *сложных* процентов.

Если проценты начисляются по отношению к исходной сумме, то такой метод называется методом *простых* процентов.

Если проценты начисляются по отношению к величине, включающей первоначальную сумму и проценты, начисленные за прошедший период, то такой метод называется методом *сложных* процентов.

Обозначим:

B – первоначальная сумма вклада;
t – период начисления процентов – время, по истечении которого начисляются процентные деньги;
p – ставка простого процента – доля вклада, которая начисляется
вкладчику по истечению периода t;
P – процентные деньги за весь срок использования вклада;
T – срок использования вклада (банком);
$n = T/t$ – количество периодов начисления процентов за срок использования вклада;
S – сумма, образовавшаяся на вкладе к концу срока T, тогда

$$B \cdot p \text{ – процентные деньги за один период начисления;}$$

$$P = B \cdot p \cdot n \text{ – за срок использования вклада (за } n \text{ периодов);}$$

$S = B + B \cdot p \cdot n = B(1 + p \cdot n)$ – сумма, образовавшаяся к концу срока, –формула простых процентов,

где $(1 + p \cdot n)$ – множитель наращивания простых процентов.

Эта формула означает, что рост первоначальной суммы вклада по простым процентам идет по закону арифметической прогрессии, первый член которой равен B, а разность – $B \cdot p$. При этом сумма $S = B + B \cdot p \cdot n$ является линейной функцией от n (при постоянном p). Наличие функциональной зависимости $S(n)$ можно обозначить как S_n – сумма, образовавшаяся на вкладе после n раз начисления процентов: $S_n = B + B \cdot p \cdot n$.

Метод сложных процентов означает, что проценты, полученные за период t, указанный в договоре о вкладе как период начисления процентов, прибавляются к первоначальной сумме вклада B и в следующий период t проценты начисляются уже на эту новую сумму $B + B \cdot p$ (или $B(1 + p)$).

Таким образом, к концу второго периода размещения вклада сумма вклада, обозначим ее S_2, будет составлять:

$$S_2 = B(1+p) + B(1+p)\,p = B(1+p)(1+p) = B(1+p)^2.$$

Аналогично определяем, что к концу третьего периода

$$S_3 = B(1+p)^2 + B(1+p)^2\,p = B(1+p)^2\,(1+p) = B(1+p)^3,$$

а к концу всего срока $T = t\,n$ использования банком вклада (когда пройдет n периодов t) сумма вклада $S = S_n = B(1+p)^n$.

Эта формула называется формулой сложных процентов и означает, что рост первоначальной суммы вклада по сложным процентам идет по закону геометрической прогрессии, первый член которой равен B, а знаменатель $1 + p$. Величина $(1+p)^n$ – это множитель наращивания сложных процентов. Функция $S_n = B(1+p)^n$ – показательная относительно аргумента n.

К экономическим показателям, изучаемым в данном разделе, относятся:

1 N – количество продукции (объем реализованной продукции в натуральном выражении);

2 C – полная себестоимость реализованной продукции в условных денежных единицах – затраты, связанные с производством и сбытом продукции;

3 $S = C : N$ – себестоимость единицы произведенной продукции;

4 M – рыночная цена произведенной продукции;

5 $\Pi = MN - C$ – прибыль (д. е.) – финансовый результат деятельности предприятия, определяется как разность выручки от реализации продукции и полной себестоимости реализованной продукции;

6 $R = \Pi : C \cdot 100\ \%$ – рентабельность производства продукции (%) – отношение полученной прибыли к себестоимости, выраженное в процентах. Уровень рентабельности – один из главных показателей экономической эффективности работы предприятий.

Примеры решения задач

Задача 1. В сбербанке установлены следующие процентные ставки:

1) 2 % от суммы вклада с ежемесячной выплатой дохода;
2) 6 % от суммы вклада при условии его хранения в течение трех месяцев (депозит на три месяца);
3) 12,5 % от суммы вклада при условии его хранения в течение шести месяцев (депозит на полгода);
4) 25 % годовых при условии хранения вклада в течение года.

При каком условии хранения процентные деньги окажутся наибольшими, если вкладчик не будет их изымать в течение года?

Решение. Из условия задачи следует, что имеют место сложные проценты, поэтому экономико-математическая модель данной задачи выражается одной и той же формулой

$$S = B\left(1+\frac{p}{100}\right)^n,$$

где p принимает соответственно значения: 2; 6; 12,5; 25. Число n в первом случае равно 12, так как после каждого месяца (в течение года) производится перерасчет, во втором случае n равно, соответственно, 4, в третьем – 2, а в четвертом – 1.

Обозначим S_1, S_2, S_3, S_4 – суммы вклада после 1-го года хранения на условиях 1), 2), 3), 4) соответственно. Тогда

1) $S_1 = B\left(1+\frac{2}{100}\right)^{12} = B\cdot 1{,}02^{12} \approx 1{,}268B;$

2) $S_2 = B\left(1+\frac{6}{100}\right)^{4} = B\cdot 1{,}06^{4} \approx 1{,}262B;$

3) $S_3 = B\left(1+\frac{125}{1000}\right)^{2} = B\cdot 1{,}125^{2} \approx 1{,}266B;$

4) $S_4 = B\left(1+\frac{25}{100}\right)^{1} = B\cdot 1{,}25 = 1{,}25B.$

Сравнивая полученные числа, видим, что наибольшим является S_1, поэтому самым прибыльным является условие хранения с ежемесячным начислением процентов.

Задача 2. Улучшение организации производства повысило производительность труда рабочего на a %; последовавшее затем внедрение рационализаторского предложения повысило производительность труда еще на b %. На сколько процентов повысилась производительность труда по сравнению с первоначальной? Разработать экономико-математическую модель повышения производительности труда и проанализировать модель на конкретных данных (a = 10, b = 20).

Решение. Рассматриваем производительность труда рабочего как количество изготовляемой им продукции в единицу времени (за день или неделю, месяц).

Допустим, что первоначальная производительность труда была равна X. Изменение производительности труда за счет улучшения организации производства составляет

$$X\cdot a:100,$$

а сама производительность становится равной

$$X + X\cdot a:100 = X(1+a:100).$$

Изменение производительности труда за счет последовавшего затем внедрения рационализаторского предложения составляет

$$X(1+a:100)\cdot b:100,$$

а сама производительность становится равной

$$X(1+a:100) + X(1+a:100)\cdot b:100$$

или

$$X(1+a:100)(1+b:100). \qquad (1)$$

(*Легко обнаружить, что эта формула при a = b совпадает с формулой сложных процентов при двухкратном их начислении*).

Относительное повышение производительности труда по сравнению с первоначальной, выраженное в процентах, будет равно:

$$\frac{X(1+a:100)(1+b:100)-X}{X}\cdot 100\ \%$$

или $((1+a:100)(1+b:100)-1)\cdot 100\ \%$

или $$(a+b+a\cdot b:100)\%.$$

Это выражение является экономико-математической моделью последовательного повышения производительности труда на a %, а затем b %.

При a = 10, b = 20 производительность труда увеличится на

$$(10 + 20 + 10 \cdot 20 : 100)\ \% = 32\ \%.$$

Как и в случае сложных процентов, проценты не просто складываются:

$$10 + 20 = 30\ \%,$$

а происходит еще дополнительно начисление процентов на проценты:

$$(10\cdot 20:100)\% = 2\%.$$

Задача 3. Некто планирует разместить в банке вклад в 10 000 руб. на длительный срок. Процентная ставка в банке – 10 % годовых. Необходимо проанализировать возможный рост процентных денег на условиях простых и сложных процентов.

Решение. Имеем B = 10 000, p = 10 % (или 0,1).

Результаты расчетов представим следующей таблицей.

Год n	Простые проценты $S_n = B(1+np)$	Сложные проценты $S_n = B(1+p)^n$
1	11 000	11 000
2	12 000	12 100
3	13 000	13 310
4	14 000	14 641
5	15 000	16 105
6	16 000	17 716
7	17 000	19 487
8	18 000	21 436
9	19 000	23 579
10	20 000	25 937

Для большей наглядности представим на графике процесс наращивания процентных денег (данные таблицы за вычетом первоначальной суммы 10 000 руб.) при простых и сложных процентах.

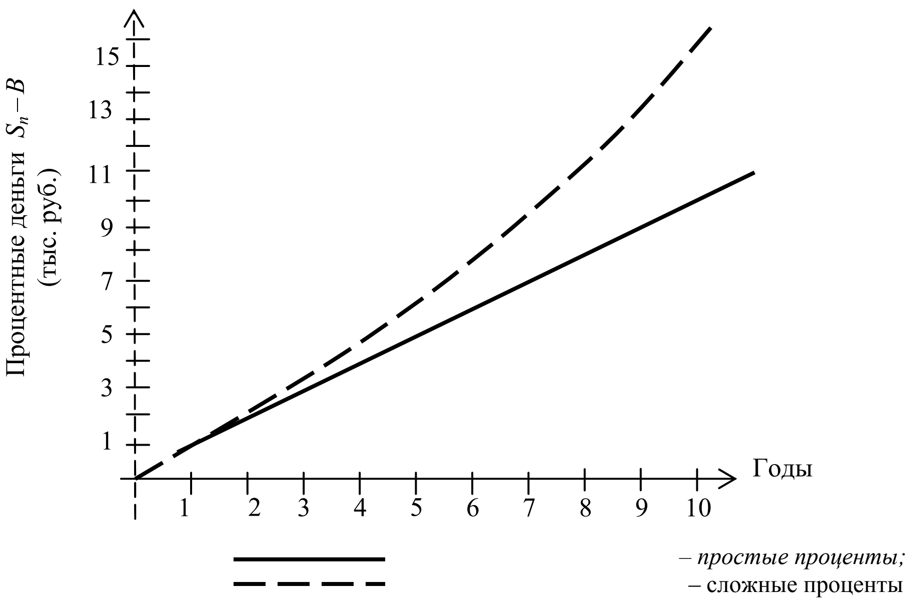


Рис. 1

Из таблицы и рис. 1 видно, что различие процентных денег при простых и сложных процентах с течением времени (с увеличением количества периодов начисления процентов) становится все более ощутимым и, если через 10 лет на простых процентах вклад удвоится, то на сложных увеличится почти в 2,6 раза.

Задачи для самостоятельной работы

1.1 Товар с перевозкой стоит 3900 руб.
Сколько процентов от стоимости товара составляют расходы по перевозке, если стоимость товара равна 3510 руб.?

1.2 Товар до снижения цены стоил 18 руб., а после снижения – 14,4 руб.
На сколько процентов снизили цену на товар?

1.3 Постройка дома стоила 98 тыс. руб. Из них 65 % заплатили за материал, а остальное – за работу.
Сколько заплатили за работу?

1.4 После снижения цен на 5 % стоимость 1 м материи стала равной 38 руб.
Сколько стоил 1 м материи до снижения?

1.5 Цена товара была увеличена на 20 %, а затем новая цена была снижена на 17 %. Как в итоге изменилась цена по отношению к первоначальной?

1) увеличилась; 2) уменьшилась; 3) не изменилась.

1.6 В результате инфляции цена на товар в первый месяц выросла на 5 %, а за второй месяц на 7 %.
На сколько процентов выросла цена товара за два месяца?

1.7 В государстве *А* в результате инфляционных процессов цены выросли на 300 %. Оппозиция потребовала от правительства возвращения цен к прежнему уровню.
На сколько процентов должны быть уменьшены цены?

1.8 Цена на товар изменялась в результате инфляции. На конец 1995 г. и последующих она составляла соответственно: 400 руб., 440 руб., 462 руб., 480 руб., 526 руб.
В каком году темп инфляции был наибольшим?

1.9 В автохозяйстве две автоколонны. Число автомобилей во второй из них на 30 % больше, а средняя грузоподъемность одного автомобиля второй автоколонны на 10 % больше, чем в первой.
На сколько процентов средняя грузоподъемность автомобиля по автохозяйству в целом меньше, чем во второй автоколонне?

1.10 В 1997 г. на шахте *А* добывалось угля в 3 раза больше, чем на шахте *В*. В течение двух лет добыча угля на шахте *А* росла на *p* % ежегодно, а на шахте *Б* уменьшалась на то же самое количество процентов ежегодно. В результате к концу 1999 г. на шахте *А* добывалось угля в 15 раз больше, чем на шахте *В*.
Укажите наиболее точное значение *p*.

1.11 После реконструкции поточной линии ее производительность за смену возросла на 60 %, расход электроэнергии за смену сократился на 20 %, а цена 1 кВт · ч электроэнергии за время реконструкции выросла на 40 %. На сколько процентов уменьшились затраты на электроэнергию в расчете на единицу продукции?

1) 40; 2) 30; 3) 20; 4) 25; 5) 35.

1.12 После перехода на новое оборудование затраты электроэнергии снизились на 16 %, а выпуск изделий вырос на 50 %.
На сколько процентов уменьшилось количество электроэнергии, расходуемое на производство одного изделия?

1.13 Пеня за несвоевременную квартирную плату начисляется в размере 0,1 % от неуплаченной суммы за каждый день просрочки.
На сколько дней была задержана квартирная плата, если на сумму 20 руб. была начислена пеня 1 руб.?

1.14 После уплаты всех налогов, которые в сумме составили 31 % от дохода, предприниматель оставил себе на законном основании 93 450 руб.
Какова была величина чистого дохода предпринимателя?

1.15 За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5 % в месяц, затем $11\frac{1}{9}$ %, потом $7\frac{1}{7}$ % и, наконец, 12 % в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма увеличилась на 180 %.
Определить срок хранения вклада.

1.16 Техническая реконструкция предприятия была проведена в четыре этапа. Каждый из этапов продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства составило на первом этапе 4 %, на втором – $6\frac{2}{3}$ %, на третьем – $6\frac{1}{4}$ % и на четвертом – $14\frac{2}{7}$ % в месяц. По окончании реконструкции первоначальный объем производства на предприятии сократился на 37 %.

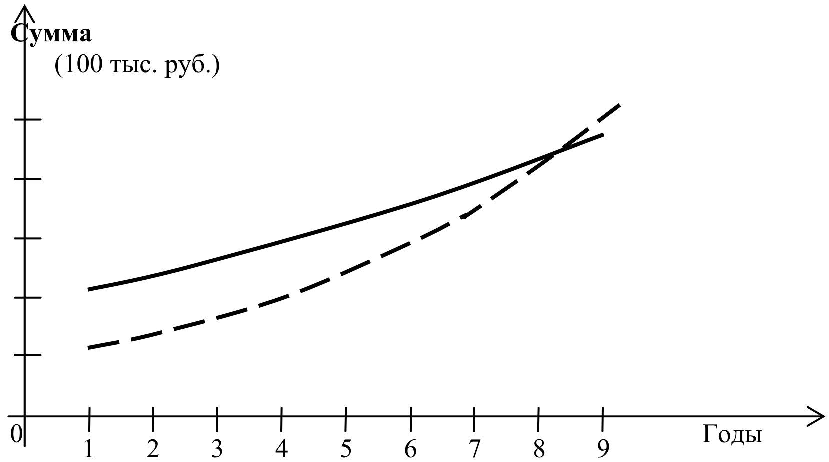
Определить продолжительность периода реконструкции.

1.17 В банк помещен вклад в размере 3900 руб. под 50 % годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725 %.

Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

1.18 В банк помещен вклад в размере 2100 руб. под 100 % годовых. В конце каждого из первых шести лет хранения после начисления процентов вкладчик снимал со счета одну и ту же фиксированную сумму. К концу седьмого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада уменьшился по сравнению с первоначальным на 20 %.

Какую сумму вкладчик ежегодно снимал со счета?



1.19 В первый год разработки месторождения было добыто 100 тыс. т железной руды. В течение нескольких следующих лет годовая добыча руды увеличивалась на 25 % по сравнению с каждым предшествующим годом, а затем на протяжении последующих 3 лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объем добытой руды за все время добычи составил 850 тыс. т.

Сколько лет разрабатывалось месторождение?

1.20 Технология изготовления дискет состоит из четырех этапов. На каждом из них увеличивается содержание кремния на определенное количество процентов по отношению к их количеству на предыдущем этапе: на первом этапе – на 25 %, на втором этапе – на 20 %, на третьем этапе – на 10 %, на четвертом этапе – на 8 %.

На сколько процентов в результате увеличится его содержание?

1.21 Какой должен быть первоначальный капитал, чтобы при начислении по 15 % в месяц, получить через полгода 23 130 руб.?

1.22 На одном и том же чертеже изображены рост вклада на сумму 100 тыс. руб. при процентной ставке 20 % годовых (пунктирная линия) и рост вклада на сумму 200 тыс. руб. при процентной ставке 10 % годовых (сплошная линия).

Через какое время суммы вкладов сравняются? Ответы проверьте с помощью вычислений.

1.23 На сколько лет нужно отдать в рост 20 тыс. руб. под 40 % годовых, чтобы получить не менее 100 тыс. руб. дохода?

1.24 Какой капитал надо отдать в рост под 40 % годовых, чтобы через три года получить вместе с процентами 100 тыс. руб.?

1.25 Коммерческий банк выплачивает доход вкладчику, исходя из следующих годовых процентных ставок:

3 мес	6 мес	9 мес	12 мес
30,4	31	31,6	32

Какую сумму (чистый доход вкладчика) выплатит банк за хранение 20 тыс. руб. по договору, заключенному:

а) на 3 месяца; б) на 6 месяцев; в) на 9 месяцев; г) на 12 месяцев?

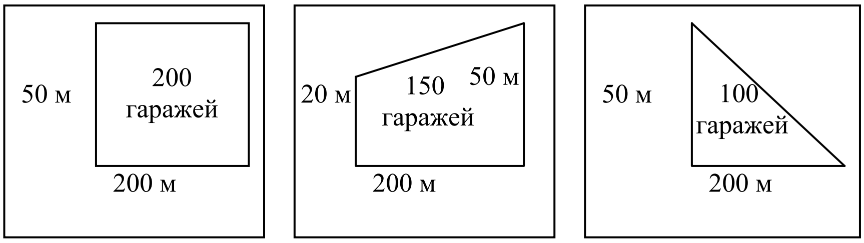
Сколько процентов годового дохода можно получить, если в течение года оформлять договор на 3 месяца и по окончании его действия каждый раз все полученные деньги вкладывать опять же на 3 месяца?

1.26 Некоторая фирма в течение пяти лет получала 7,2 % чистого дохода от торговли и все полученные деньги тратила на увеличение товарооборота.

На сколько процентов за эти пять лет возрос ее товарооборот?

1.27 В г. Тамбове ежегодный налог за участок земли под индивидуальными гаражами в пределах нормы (24 м^2) установлен в размере 3 % от ставки земельного налога. Налог на часть площади сверх нормы, но не более двойной нормы, устанавливается в размере 15 % от ставки земельного налога, а налог на часть площади свыше двойной нормы – по полной ставке земельного налога.

Зная, что в городе Тамбове ставка ежегодного земельного налога составляет 3,28 руб./м^2 вычислите величину ежегодного налога за изображенные на рисунках участки земли под индивидуальными гаражами:



а) *б*) *в*)

1.28 В г. Тамбове в случае неуплаты земельного налога городу в установленный срок (не позднее 15 сентября) начисляется пеня в размере 0,2 % неперечисленных сумм за каждый день просрочки.

Какая пеня будет начислена в случае уплаты земельного налога в сумме 436 руб.:

а) 11 ноября того же года; б) 1 января следующего года;
в) 7 февраля следующего года?

1.29 В процессе разгосударствления и приватизации в легкой промышленности города в госсобственности остается лишь 29 % предприятий. На долю смешанной формы собственности (акционерные общества, арендные предприятия, товарищества с ограниченной ответственностью) приходится 71 % предприятий и 80 % продукции, выпускаемой предприятиями отрасли.

На сколько процентов больше выпускают продукции предприятия смешанной формы собственности?

1.30 Трудовые ресурсы города составили 593,1 тыс. человек, или 68 % численности населения.

Экономически активное население составило 458,3 тыс. человек, или 53 % от численности населения. Во всех сферах народного хозяйства было занято 427,6 тыс. человек. Не имели занятий, но активно их искали 30,7 тыс. человек.

Численность безработных достигла 28,1 тыс., что в 11 раз выше зафиксированной и составила 6 % от экономически активного населения.

В отпусках по инициативе администрации («скрытая безработица») находилось 9,8 тыс. человек.

Сколько человек составляют жители города, не относящиеся к трудовым ресурсам? Сколько трудоспособных людей не работают, не являясь безработными (учащиеся, домохозяйки)? Сколько процентов от экономически активного населения составила «скрытая безработица»?

1.31 Двое рабочих вместе выполняют некоторую работу за a дней. За сколько дней выполнит ту же работу первый рабочий, работая один, если производительность труда второго рабочего на b % выше, чем первого. Разработать экономико-математическую модель решения данной задачи. Выполнить расчеты при $a = 20$, $b = 5$.

1.32 Стоимость жилья в г. Тамбове:

Средняя цена 1 м^2 общей площади, тыс. руб.			
Номер зоны	1-комн. кв.	2-комн. кв.	3-комн. кв.
1	8,75	9,06	9,31
2	6,28	6,47	6,59
3	6,39	6,59	6,68

Поправочные коэффициенты, влияющие на стоимость квартиры		
Параметры	Примечание	%
этаж	первый	–3
	последний	–1
	не крайний	0

4	5,96	6,24	6,35
5	5,74	6,04	6,22
6	6,11	6,31	6,64
7	6,05	6,24	6,48
8	6,16	6,35	6,52
9	7,13	7,28	7,43
10	7,21	7,42	7,69
11	6,22	6,39	6,58
12	6,69	6,84	6,79

лифт	нет	–1
	есть	+1
балкон	балкон или лоджия	+1
	без балкона	–1
мусоропровод	нет	–1,5
	есть	0
окна	двор	+2,5
	двор, улица	0
	улица	–2

а) Оцените, сколько примерно будет стоить трехкомнатная квартира на втором этаже с балконом, мусоропроводом, окнами во двор и без лифта, если она находится в четвертой зоне.

б) Что дороже: самая плохая однокомнатная квартира в первой зоне или самая хорошая трехкомнатная в десятой зоне?

1.33 Два работника получали одинаковую зарплату. Первому из них повысили зарплату на a %, а второму дважды на b %. Сколько процентов составляет новая зарплата второго работника относительно новой зарплаты первого работника. Разработать экономико-математическую модель решения данной задачи. Выполнить расчеты при $a = 100$, $b = 50$.

1.34 Средний годовой процент прироста добычи угля на одной из шахт из года в год остается постоянным. Если годовой процент прироста добычи угля был бы увеличен на a %, то через два года было бы добыто угля в b раз больше, чем в обычных условиях. Определите средний годовой процент прироста добычи угля (в обычных условиях). Разработать экономико-математическую модель решения данной задачи. Выполнить расчеты при $a = 10{,}5$, $b = 1{,}21$.

1.35 Сплав меди и цинка массой a кг содержит b % меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал меди и цинка поровну? Разработать экономико-математическую модель решения данной задачи. Выполнить расчеты при $a = 12{,}5$, $b = 40$.

1.36 Допустим, что американский доллар стоит на a % больше, чем один канадский доллар. Американский турист в Канаде заплатил за b-долларовый сувенир тридцать американских долларов.

Чему равна сдача в канадских долларах? Выполнить расчеты при $a = 30$, $b = 35$.

1.37 В начале года на сберегательную книжку было положено a д. е. и в конце года взято b д. е.

Сколько процентов начисляет сберкасса в год, если к концу второго года на книжке оказалось c д. е.? Разработать экономико-математическую модель решения данной задачи. Выполнить расчеты при $a = 1600$, $b = 848$, $c = 824$.

1.38 Бригада по плану должна выпустить a деталей. Первые восемь дней перевыполняла план на b %. Оставшиеся дни она перевыполняла план на c %. В результате бригада сделала на d деталей больше, чем требовалось по плану.

Сколько дней работала бригада? Разработать экономико-математическую модель решения данной задачи. Выполнить расчеты при $a = 360$, $b = 20$, $c = 25$, $d = 82$.

1.39 Количество студентов в университете, увеличиваясь на одно и то же число процентов ежегодно, возросло за три года с a до b человек.

На сколько процентов увеличивалось число студентов ежегодно? Разработать экономико-математическую модель решения данной задачи. Выполнить расчеты при $a = 5000$, $b = 6655$.

1.40 Две бригады из 10 и 15 человек за смену изготовляли a деталей. После усовершенствования технологии производительность труда этих бригад повысилась до b деталей за смену.

На сколько процентов увеличилась производительность труда обеих бригад, если каждый рабочий 1-й бригады в среднем повысил производительность на c %, а каждый рабочий второй бригады – на d %? Вычислить среднемесячную зарплату каждого рабочего после улучшения технологии производства деталей, если за каждую деталь оплачивают по 0,5 д. е. (число рабочих дней в месяце – 22). Разработать экономико-математическую модель решения данной задачи. Выполнить расчеты при $a = 620$, $b = 702$, $c = 20$, $d = 10$.

1.41 Спустя год после того, как некоторая сумма внесена на сберегательную книжку, вклад за счет процентов увеличился на 20,16 д. е. Добавив еще 79,84 д. е., вкладчик оставил свой вклад в сберегательной кассе еще на год. По истечении этого периода общая сумма на сберегательной книжке стала равна 628,16 д. е.

Какой процент годовых выплачивается сберегательной кассой, если первоначальный взнос должен быть не менее 5 д. е.?

1.42 В первый год разработки месторождения было добыто 400 тыс. т нефти. В течение ряда последующих лет объем добычи увеличивался ежегодно на 50 %, а затем в течение 9 лет не менялся. Общий объем добытой нефти составил 35 млн. 650 тыс. т.

Сколько всего лет разрабатывалось месторождение?

1.43 На один продукт два раза была снижена цена, каждый раз на 15 %. На другой продукт, имевший первоначально ту же цену, что и первый, снизили цену один раз на x %.

Каким должно быть число x, чтобы после всех указанных снижений оба продукта снова имели одну и ту же цену?

1.44 Из молока, жирность которого составляет 5 %, изготовляют творог жирностью 15,5 %, при этом остается сыворотка жирностью 0,5 %.

Сколько творога получается из 1 т молока?

1.45 Две шкурки ценного меха общей стоимостью в 225 д. е. были проданы на международном аукционе с прибылью в 40 %.

Какова стоимость каждой шкурки отдельно, если от первой было получено прибыли 25 %, а от второй 50 %?

1.46 Стоимость 60 экземпляров первого тома и 70 экземпляров второго тома составляет 270 д. е. В действительности за все эти книги уплатили только 237 д. е., так как была произведена скидка: на первый том в размере 15 %, на второй – в размере 10 %. Найти первоначальную цену этих книг.

1.47 От трех кафедр экономического факультета поступили заявки на приобретение дополнительного оборудования вычислительных лабораторий. Стоимость оборудования в заявке первой кафедры составляет 45 % от заявки второй кафедры, а стоимость оборудования в заявке второй кафедры – 80 % от заявки третьей. Стоимость оборудования в заявке третьей кафедры превышает заявку первой на 640 д. е.

Какова общая стоимость оборудования в заявках всех трех кафедр?

1.48 На некоторый товар были дважды снижены цены – сначала на 15 %, а затем еще на 20 %. Каков общий процент снижения цены?

1.49 Предприятие ежемесячно увеличивало объем выпускаемой продукции на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что за два года объем выпускаемой продукции возрос в два раза.

1.50 Первоначальная стоимость единицы продукции была равна 50 д. е. В течение первого года производства она повысилась на некоторое число процентов, а в течение второго года снизилась (по отношению к повышенной себестоимости) на такое же число процентов, в результате чего она стала равной 48 д. е. Определить проценты повышения и снижения себестоимости единицы продукции.

1.51 Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 0,6 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть – во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 670 д. е., к концу следующего года – 749 д. е. Было подсчитано, что если первоначально 0,6 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки была бы равной 710 д. е. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определите величину вклада по истечении двух лет.

1.52 В начале года на сберегательную книжку было положено 1600 д. е. и в конце года взято 848 д. е. В конце второго года на книжке оказалось 824 д. е. Разработать математическую модель определения процентов начисления в год.

1.53 За 1 кг одного продукта и за 10 кг другого заплатили 200 д. е. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15 %, а второй станет дешевле на 25 %, то за такое же количество этих продуктов будет заплачено 182 д. е.

Сколько стоит килограмм каждого продукта?

1.54 Мистер Джонсон – служащий банка с заработной платой 5000 долл., выиграл по лотерейному билету 1 млн. долл. После того, как улеглась первая буря радости, возникла трудная проблема: как наилучшим образом распорядиться свалившимися на него столь неожиданно деньгами. Поскольку мистер Джонсон, до того как стал миллионером, был банковским служащим, то первая мысль, которая пришла ему в голову – положить этот миллион в банк. Банк выплачивает по вкладам 8 % в год от вложенной суммы. Полученный доход позволил ему переехать в более фешенебельный район, купить новую машину и вообще жить, не работая, на проценты с капитала. Однако, как говорится, «аппетит приходит во время еды». Теперь, когда он стал миллионером, такой доход показался ему недостаточным. И мистер Джонсон решил стать предпринимателем. На 900 тыс. долл. он купил предприятие, оборудование по последнему слову техники, а 100 тыс. долл. оставил на выплату заработной платы рабочим и служащим в течение года. При этом особое внимание было уделено опытному управляющему.

В конце года управляющий представил мистеру Джонсону отчет, из которого видно, что за год было реализовано продукции на 350 тыс. долл. Из них 150 тыс. долл. составили затраты, связанные с оплатой стоимости сырья, износа оборудования и т.д. 100 тыс. долл. было уплачено 8 рабочим и служащим (включая самого управляющего) и 100 тыс. долл. составила прибыль мистера Джонсона.

Мистер Джонсон остался доволен сделанным год назад выбором и поблагодарил управляющего за хорошую работу.

1 Сравните доход, который получил мистер Джонсон в качестве хозяина предприятия, с доходом, который получил бы, вложив свои деньги в банк.

2 Сравните годовой доход мистера Джонсона – хозяина предприятия со среднегодовой зарплатой занятых у него рабочих и служащих.

3 Определите себестоимость единицы продукции предприятия мистера Джонсона, если было выпущено 250 тыс. единиц продукции. Чему равна рентабельность данного производства, если цена единицы продукции равна 5,5$?

4 Через сколько лет общая сумма прибыли мистера Джонсона будет равна начальному капиталу, вложенного им в производство (предполагается, что масштабы производства не меняются)?

5 Представьте, что Вы обладатель миллиона. Предложите свою технологию получения прибыли с тем, чтобы рентабельность производства составила 51 % и прибыль – 30 %.

1.55 Представьте себе, что Вы коммерсант, Ваш капитал составляет 100 000 д. е. Вы можете начать «дело» (например, заняться торговлей). Если Вы арендуете помещение в государственном магазине, то Вам гарантирован доход 50 % в год от всего капитала. Если же Вы откроете лавку в городе, то можете рассчитывать на 100 % годовых, но каждые два года Вы теряете половину накопленного капитала в результате конфликтных ситуаций. Как следует вести «дело», чтобы к концу 10-го года иметь наибольший капитал?

1.56 Определите изменение рентабельности производства, если затраты на изготовление продукции уменьшились на 10 % за счет внедрения новой технологии, и, учитывая потребительский спрос на продукцию, после двух последовательных повышений цен на одно и то же число процентов цена товара повысилась с *a* д. е. до *b* д. е.

На сколько процентов повышалась цена товара каждый раз?

1.57 Малое предприятие ориентировано на заготовку сухофруктов. Сырье закупается по цене 10 д. е. за 1 кг в количестве 10 т. Свежие фрукты содержат 28 % полезных веществ, а сухие – 80 %. Определите рентабельность производства и себестоимость единицы продукции (1 кг сухофруктов) в предложенных технологиях:

1 Получение продукции из сырья в течение 3 ч со 100 кг сырья, учитывая расходы на производство продукции в размере 5 % от прибыли. Определите чистую прибыль предприятия.

2 Получение продукции из сырья в течении 24 ч с 200 кг сырья, учитывая расходы на производство продукции в размере 2,5 % от прибыли. Определите чистую прибыль предприятия.

3 Определите оптимальную технологию (технологию, обеспечивающую предприятие наибольшей прибылью).

1.58 Фермер для обработки участка нанял тракториста первого класса на тракторе К-700.

Каковы будут затраты фермера на обработку участка, если размеры участка $9{,}5 \times 3{,}2$ км, норма выработки 95 га, оплата за норму 100 д. е., стоимость солярки 10 д. е. за литр, расход горючего составляет 50 л на 1 га, техническое обслуживание – 5 % от зарплаты тракториста?

2 РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Самые разные задачи практического содержания часто приводят к уравнениям, в которых неизвестные по своему смыслу могут принимать только целочисленные значения. Уравнения в целых числах рассматривались еще в глубокой древности. Особенно много ими занимался александрийский математик Диофант, имя которого и носят уравнения в целых числах.

Простейшим примером диофантова уравнения служит линейное уравнение

$$ax + by = c,$$

где a, b, c – целые числа, причем a и b – взаимно просты (не имеют общих делителей, кроме 1) и ни одно из них не равно нулю.

Рассмотрим сначала случай, когда $c = 0$:

$$ax + by = 0.$$

Решая это уравнение относительно x, получим $x = -\frac{b}{a}y$.

Очевидно, что x будет принимать целые значения только в том случае, когда y делится на a без остатка:

$$y = at; \ \ t \in Z.$$

В этом случае $x = -\frac{b}{a}y = -\frac{b}{a}at = -bt$ и мы получим формулы, содержащие все целые решения исходного уравнения $x = -bt; \ \ y = at; \ \ t \in Z$ (любое целое число).

Пусть теперь $c \neq 0$. Покажем, что для нахождения всех целых решений уравнения $ax + by = c$ достаточно знать какое-либо одно решение (пару чисел x_0, y_0, для которых $ax_0 + by_0 = c$).

Пусть $c = ax_0 + by_0$, тогда

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Такое уравнение мы уже рассматривали; его целочисленные решения имеют вид

$$x - x_0 = -bt; \ \ y - y_0 = at; \ \ t \in Z,$$

откуда $$x = x_0 - bt; \ \ y = y_0 + at; \ \ t \in Z.$$

Итак, если (x_0, y_0) – какое-нибудь решение уравнения $ax + by = c$ в целых числах, то все его целочисленные решения определяются формулами

$$x = x_0 - bt;\quad y = y_0 + at;\quad t \in Z.$$

С другой стороны, при любых значениях t имеем:

$$a(x_0 - bt) + b(y_0 + at) = ax_0 + by_0 = c,$$

т.е. ничего, кроме решений, эти формулы не задают.

Способ нахождения какого-нибудь целочисленного решения уравнения $ax + by = c,\ c \neq 0$ проиллюстрируем на примере.

Пусть дано уравнение $8x + 13y = 11$. Преобразуем отношение коэффициентов при неизвестных $\frac{8}{13}$ следующим образом:

$$\frac{8}{13} = \frac{1}{\frac{13}{8}} = \frac{1}{1+\frac{5}{8}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{8}{5}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{5}{3}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}.$$

Дальнейшее преобразование ничего не изменит.

Мы получили выражение, которое называется конечной цепной дробью или непрерывной дробью. Число $\frac{1}{2}$ называется последним звеном этой дроби. Отбросим последнее звено и произведем «обратный ход», превратив цепную дробь в простую.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}.$$

Запишем разность

$$\frac{8}{13} - \frac{3}{5} = \frac{8\cdot 5 - 13\cdot 3}{13\cdot 5} = \frac{1}{13\cdot 5}.$$

Очевидное равенство числителей $8\cdot 5 - 13\cdot 3 = 1$ умножим на 11 и запишем в виде $8(5\cdot 11) + 13(-3\cdot 11) = 11$.

Из сопоставления полученного равенства с уравнением $8\cdot x + 13\cdot y = 11$ следует, что $x_0 = 5\cdot 11 = 55;\ y_0 = -3\cdot 11 = -33$ являются одним из решений уравнения, а все целочисленные решения имеют вид:

$$x = 55 + 13t;\quad y = -33 - 8t;\quad t \in Z.$$

Полученный результат наводит на мысль о том, что и в общем случае для нахождения целочисленных решений уравнения $ax + by = c$ надо разложить отношение коэффициентов при неизвестных a / b в цепную дробь, отбросить ее последнее звено и проделать выкладки, подобные тем, которые были приведены выше.

Примеры решения задач

Задача 1. Для перевозки большого числа контейнеров по 170 кг и по 190 кг выделены трехтонные машины. Можно ли загрузить такими контейнерами машины полностью?

Решение. Составим математическую модель задачи. Обозначим через x количество контейнеров по 170 кг и через y – количество контейнеров по 190 кг. Тогда, в соответствии с условием задачи, должно быть:

$$170x + 190y = 3000, \text{ или } 17x + 19y = 300,$$

где x и y могут быть только целыми положительными числами.

Найдем одно из возможных целочисленных решений, используя разложение 17/19 в непрерывную дробь.

$$\frac{17}{19} = \frac{1}{\frac{19}{17}} = \frac{1}{1+\frac{2}{17}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{17}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{8+\frac{1}{2}}}.$$

Отбросив 1/2, получим $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{8}}=\dfrac{8}{9}$.

$$\frac{17}{19}-\frac{8}{9}=\frac{17\cdot 9+19\cdot(-8)}{19\cdot 9}=\frac{1}{19\cdot 9}$$

или

$$17\cdot(9\cdot 300)+19\cdot(-8\cdot 300)=300.$$

Из сопоставления полученного равенства с уравнением $17x + 19y = 300$ предполагаем, что $x_0=9\cdot 300=2700$, $y_0 = -2400$. Тогда общее решение задается формулами: $x = 2700 - 19t$; $y = -2400 + 17t$, $t \in Z$.

По условию задачи $x > 0$ и $y > 0$. Эти два неравенства определяют область возможных значений t:

$$\begin{cases} 2700-19t>0; \\ -2400+17t>0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} t<\dfrac{2700}{19}; \\ t>\dfrac{2400}{17}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} t<142\dfrac{2}{19}; \\ t>141\dfrac{3}{17}. \end{cases}$$

Итак, $141\dfrac{3}{17}<t<142\dfrac{2}{19}$.

Единственным целым значением t, удовлетворяющим этому двойному неравенству, является $t = 142$.

При $t = 142$

$$x=2700-19\cdot 142=2700-2698=2;$$
$$y=-2400+17\cdot 142=-2400+2414=14.$$

Ответ: если в каждую машину устанавливать 2 контейнера по 170 кг и 14 – по 190 кг, то машины будут загружены полностью.

Задача 2. Для перевозки зерна имеются мешки, в которые входят либо 60 кг, либо 80 кг зерна. Сколько надо иметь тех и других мешков для загрузки одной тонны зерна таким образом, чтобы все мешки были полными? Какое наименьшее количество мешков при этом может понадобиться?

Решение. Составим математическую модель задачи. Пусть x – количество мешков по 60 кг, а y – по 80 кг, необходимых для загрузки 1 т = = 1000 кг зерна, тогда

$$60x + 80y = 1000 \text{ или } 3x + 4y = 50.$$

Одно целочисленное решение последнего уравнения легко угадать.

Это $x_0 = -50$, $y_0 = 50$, так как $3\cdot(-50) + 4\cdot(50) = 50$.

Тогда общее решение задается формулами:

$$x=-50-4t;\quad y=50+3t,\quad t\in Z.$$

По условию задачи x и y могут быть только натуральными числами (ни x, ни y не могут быть равны нулю в уравнении $3x + 4y = 50$), поэтому

$$\begin{cases} -50-4t\ge 1; \\ 50+3t\ge 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} t\le -\dfrac{51}{4}=-12{,}75; \\ t\ge -\dfrac{49}{3}=-16\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Итак, $-16\,{}^{1}\!/\!{}_{3}\le t\le -12{,}75$.

В целых числах эта оценка записывается в виде: $-16\le t\le -13$.

$t_1 = -16$: $x_1 = -50 - 4(-16) = 14$, $y_1 = 50 + 3(-16) = 2$;

$t_2 = -15$: $x_2 = -50 - 4(-15) = 10$, $y_2 = 50 + 3(-15) = 5$;

$t_3 = -14$: $x_3 = -50 - 4(-14) = 6$, $y_3 = 50 + 3(-14) = 8$;

$t_4 = -13$: $x_4 = -50 - 4(-13) = 2$, $y_4 = 50 + 3(-13) = 11$.

В каждом из этих случаев для загрузки 1000 кг пшеницы потребуется целое число мешков (мешки будут наполнены полностью); при этом в первом случае необходимо 14 + 2 = 16 мешков, во втором – 10 + 5 = 15 мешков, в третьем – 6 + 8 = 14 мешков и в четвертом – 2 + 11 = 13 мешков – наименьшее количество.

Задача 3. Цены на яблоки подняли на *a* %. Для того, чтобы сменить ценник, продавцу оказалось достаточным поменять местами цифры стоимости 1 кг яблок. Сколько стоили яблоки до их подорожания, если эта цена выражалась двухзначным числом. Разработать экономико-математи-ческую модель задачи и выполнить расчеты при $a = 20$.

Решение. По условию задачи первоначальная цена яблок – двухзначное число:

$$\overline{xy} = 10x + y,$$

где $x = \overline{1,9}$, $y = \overline{1,9}$ ($y \neq 0$, так как при перестановке цифр число уменьшится).

После повышения цена яблок составила

$$\overline{xy} + (a : 100)\ \overline{xy}$$

или $(1 + a : 100)\ \overline{xy}$

или $(1 + a : 100)\ (10x + y)$.

В то же время должно выполняться условие

$$(1 + a : 100)\ (10x + y) = \overline{yx} = 10y + x.$$

Преобразуем это равенство следующим образом:

$$10x + y + 0{,}1ax + 0{,}01ay = 10y + x;$$

$$9x + 0{,}1ax - 9y + 0{,}01ay = 0;$$

$$(9 + 0{,}1a)x + (0{,}01a - 9)y = 0.$$

Последнее уравнение – экономико-математическая модель данной задачи. При $a = 20$ оно имеет вид $11x - 8{,}8y = 0$ или $x - 0{,}8y = 0$ или $5x - 4y = 0$. По условию x и y – целые числа. Общее решение, согласно теории, имеет вид

$$x = 4t;\quad y = 5t;\quad t \in Z.$$

Только при $t = 1$ x и y – однозначные числа (цифры). Поэтому $x = 4$, $y = 5$; первоначальная цена была 45 д. е., после повышения 54 д. е.

Задачи для самостоятельной работы

2.1 У продавца имеются 100-граммовые гирьки и консервные банки весом по 450 г.

Как с их помощью отвесить на чашечных весах 2,5 кг сахарного песка за один раз, используя при взвешивании наименьшее количество гирек и банок в общей сложности? Составить математическую модель решения задачи и проанализировать ее.

2.2 Мальчик купил черные карандаши по 3 д. е., красные по 5 д. е., синие по 7 д. е. Всего 8 карандашей за 42 д. е. Известно, что количество красных карандашей минус количество черных карандашей – полный квадрат.

Сколько куплено карандашей каждого вида? Составить математическую модель решения задачи.

2.3 Требуется на 100 д.е. купить 40 почтовых марок: по 1 д. е., по 4 д. е. и по 12 д. е.

Сколько окажется марок каждого достоинства? Проанализировать решение задачи на математической модели.

2.4 На станцию привезли *a* т угля в вагонах вместимостью по 15, 20, 25 т.

Сколько вагонов каждого вида было использовано, если известно, что всего было *b* вагонов? Составить математическую модель решения задачи и проанализировать ее при $a = 420$, $b = 27$.

2.5 В учебном корпусе на каждом этаже находится одинаковое количество аудиторий. Всего в корпусе 96 аудиторий, площадь каждой из них равна 46 м^2. При строительстве корпуса суммарные затраты на земляные, отделочные работы и оборудование не превысили 252 720 д. е., причем на отделочные работы было израсходовано по 2760 д. е. на каждый этаж постройки, на оборудование аудиторий по 2000 д. е. на каждую аудиторию и на земляные работы на отведенном под строительство участке земли по 14 д. е. на 1 м^2 земельного участка. Известно, что площадь всех аудиторий одного этажа в 5 раз меньше площади земельного участка.

Сколько этажей в корпусе? Составить математическую модель решения задачи.

2.6 Мощность цеха сборки составляет 100 изделий *А* и 300 изделий *В* в сутки. Отдел технического контроля в сутки может проверить не более 150 изделий. Изделие *А* вдвое дороже изделия *В*.

Сколько изделий обоих типов следует выпускать в сутки, чтобы общая стоимость продукции была максимальной?

2.7 Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго автомобильного завода первоначально составляет 95 % от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производительность машин в сутки на 23 % от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал их выпускать более 1000 штук в сутки.

Сколько автомобилей в сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое количество машин. Составить математическую модель определения количества выпускаемых автомобилей заводами до реконструкции.

2.8 В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в три раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но не менее, чем на 60.

Сколько деталей в каждом ящике? Составьте математическую модель определения деталей в каждом ящике.

2.9 В гараже стоят 40 автомобилей трех типов: легковые, грузовые и автобусы. Автобусов меньше, чем легковых.

Сколько в гараже автобусов, если легковых автомобилей в 12 раз меньше, чем грузовых? Составьте алгоритм решения задачи.

2.10 В магазин поступила тонна фруктов: яблоки в ящиках по 48 кг, груши в ящиках по 20 кг, сливы в коробках по 14 кг и вишня в коробках по 10 кг. При этом яблок поступило в два раза больше, чем груш, а вишен столько же, сколько слив.

Сколько фруктов каждого вида поступило в магазин? Составьте математическую модель решения задачи.

2.11 Некая леди, протянув почтовому служащему один доллар, сказала:

– Дайте мне двухцентовых марок в десять раз больше одноцентовых, а на остальные – пятицентовых марок.

Как служащий сумел выполнить это довольно головоломное задание? Составьте математическую модель решения задачи.

2.12 Из четырех жертвователей второй дал вдвое больше монет, чем первый, третий – втрое больше, чем второй, четвертый – вчетверо больше, чем третий, а все вместе они дали 132 монеты.

Сколько монет дал первый жертвователь?

2.13 В вагоне находятся 60 контейнеров трех типов: контейнеры первого типа весят 0,5 т каждый, второго типа – 0,4 т, третьего типа – 0,3 т. Стоимость одного контейнера каждого типа – соответственно 800, 700 и 600 руб. Общий вес всех контейнеров 25 т. Найдите их общую стоимость.

2.14 Иногда продавцы, принимая мелочь, взвешивают ее. Однажды продавцу дали 50 руб. монетами по 15 и 20 коп. Их общая масса оказалась равной 800 г.

Сколько было монет? (пятнадцатикопеечная весит 2,5 г, а двадцатикопеечная – 3 г).

2.15 Антон пошел в молочный магазин. Денег у него не было, но он взял пустые бутылки из-под молока – 6 литровых (по 20 д. е.) и 6 пол-литровых (по 15 д. е.). В магазине было только разливное молоко по цене 22 д. е. за литр. Антон решил сдать часть бутылок, а купленное на полученные деньги молоко налить в оставшиеся бутылки.

Какое наибольшее количество молока он сможет принести домой?

2.16 Красный карандаш стоит 17 д. е., синий карандаш – 13 д. е. На покупку карандашей можно затратить не более 495 д. е. Необходимо закупить максимально возможное суммарное количество красных и синих карандашей. При этом красных карандашей нужно закупить как можно меньше, но число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше, чем на пять.

Сколько красных и сколько синих карандашей следует закупить при указанных условиях?

2.17 В городе есть гостиницы трех типов. В каждой гостинице первого, второго и третьего типа имеются соответственно 150, 310 и 40 обычных номеров, а также 17, 37 и 5 номеров высшего разряда. Всего в гостиницах города имеется 1040 обычных номеров и 123 номера высшего разряда. Найти число гостиниц каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 10.

2.18 Доказать, что имеющимися в неограниченном количестве купюрами достоинством в 3 д. е. и 5 д. е. можно разменять любую сумму денег, большую 7 д. е.

2.19 Первая и вторая бригады вместе изготовили в два раза больше деталей, чем третья, а первая и третья вместе – в три раза больше, чем вторая.

Какая бригада изготовила наибольшее количество деталей?

2.20 В двух кошельках находится монетами по 98 д. е., причем в одном кошельке лежит 49 монет, а в другом – 50 монет.

Можно ли уверенно утверждать, что деньги из первого кошелька можно разделить на две равные части? А деньги из второго кошелька? О монетах какого достоинства может идти речь?

2.21 Роберт и Джон купили одинаковые тетрадки, каждая из которых стоила дороже 30 центов, но дешевле доллара. Роберт платил двадцатицентовыми монетами и получил 3 цента сдачи, а Джон – пятнадцатицентовыми и одной двадцатицентовой монетой.

Сколько стоит тетрадь?

2.22 Можно ли набрать сумму в 1000 руб. с помощью купюр достоинством в 1 руб., 10 руб., 100 руб. таким образом, чтобы всего было использовано ровно 40 купюр?

2.23 Докажите, что за любую покупку стоимостью в целое число рублей можно заплатить одними трехрублевыми купюрами, если у кассира имеются только пятирублевые купюры.

Какое наименьшее количество пятирублевых купюр достаточно при этом иметь кассиру?

2.24 Ученику прислали задание, состоящее из 20 задач. За каждую верно решенную задачу ему дают 8 баллов, за каждую неверно решенную – минус 5 баллов, за задачу, которую он не брался решать – 0 баллов. Ученик получил в сумме 13 баллов.

Сколько задач он брался решать?

2.25 Дама сдавала в багаж: диван, чемодан, саквояж, корзину, картину, картонку и маленькую собачонку. Диван весил столько же, сколько чемодан и саквояж, вместе взятые, и столько же, сколько картина, корзина и картонка. Картина, корзина и картонка весили поровну и каждая из них больше, чем собачонка. Когда выгружали багаж, дама заявила, что собака не той породы. При проверке оказалось, что собака перевешивает диван, если к ней на весы добавить саквояж или чемодан. Докажите, что претензия дамы была справедлива.

2.26 Несколько одинаковых ящиков весят вместе 10 т, причем каждый из них весит не больше 1 т.

Какое наименьшее количество машин-трехтонок заведомо достаточно, чтоб увезти за один раз весь этот груз?

2.27 На лугу растет трава. На этот луг пустили 30 коров, которые за 4 дня съели всю траву. Когда на лугу снова выросла трава, на него пустили 25 коров, которые съели всю траву за 6 дней.

Какое наибольшее количество коров может пастись на лугу все время (пока вообще растет трава)?

2.28 Линию, связывающую города *А* и *Б*, обслуживают самолеты трех типов. Каждый самолет первого, второго и третьего типа может принять на борт соответственно 240, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолеты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найдите число действующих на линии самолетов каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 8.

2.29 В течение нескольких дней двое рабочих изготовляли специальные детали, причем ежедневная выработка деталей у каждого рабочего была постоянной. В итоге за все эти дни второй рабочий изготовил на K деталей больше, чем первый, где число K удовлетворяет неравенствам $127 \le K \le 132$. Если бы первый рабочий увеличил ежедневную выработку в два раза, то за то же количество дней он изготовил на 77 деталей больше, чем второй.

Сколько дней рабочие изготовляли детали? Какова была ежедневная выработка у каждого из них?

2.30 По контракту работнику причитается по 48 франков за каждый отработанный день, а за каждый неотработанный день с него взыскивается 12 франков. Через 30 дней работник узнал, что ему ничего не причитается.

Сколько дней работал работник в течение этих 30 дней?

2.31 Предприятие *A* перечислило предприятию *B* определенную сумму денег, выраженную семизначным числом, оканчивающимся четырьмя нулями. В процессе банковских операций первые две цифры числа (в совокупности) и последующие две цифры числа (также в совокупности) ошибочно поменяли местами (например, 26 15 000 заменилось на 15 26 000), и на счет второго предприятия поступила иная сумма денег. Ошибка обнаружилась, когда предприятие *B* уже истратило 350 000 руб., при этом на его счете еще оставалась сумма, вдвое превышающая ту, которую перечислило предприятие *A*.

Какую сумму денег предприятие *A* перечисляло предприятию *B*?

3 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Многие задачи с экономическим содержанием имеют достаточно простые математические модели, выражаемые линейными, квадратными уравнениями или их системами. Основная сложность, возникающая при решении такого рода задач – построение самой математической модели – выбор неизвестной и запись условия задачи в формализованном виде. От того, насколько удачно выбрана неизвестная величина, зависит трудоемкость, а в некоторых случаях и возможность решения задачи.

На рассмотренных ниже примерах проиллюстрировано как составление математических моделей, так и методика решения получаемых алгебраических уравнений и их систем.

Примеры решения задач

Задача 1. Предприниматель взял в аренду на 4 года помещение на условиях ежегодной платы (в конце года) A руб. Имея некоторый первоначальный капитал, он удвоил его в течение года и оплатил аренду. Оставшийся капитал он опять удвоил в течение второго года и оплатил аренду. Такая схема деятельности осуществлялась все четыре года. В результате, в конце четвертого года деятельности, после оплаты аренды предприниматель имел капитал, в четыре раза превышающий первоначальный. Постройте экономико-математическую модель накопления капитала у предпринимателя и проведите ее анализ. Определите величину первоначального капитала, если аренда A составляла 16 000 руб.

Решение. Обозначая через x первоначальный капитал предпринимателя, можно записать условие задачи в следующем виде:

$2x - A$ – капитал после первого года деятельности;
$2(2x - A) - A = 4x - 3A$ – после второго года;
$2(4x - 3A) - A = 8x - 7A$ – после третьего года;
$2(8x - 7A) - A = 16x - 15A$ – после четвертого года.

Таким образом, накопление капитала K происходило по линейному закону относительно его первоначальной величины x: $K = 16x - 15A$.

Накопление имеет место, если $K > 0$, т.е. $16x - 15A > 0$, или $A < {}^{16}\!/_{15}\,x$ – арендная плата не превышает ${}^{16}\!/_{15}$ величины первоначального капитала.

По условию задачи $K = 4x$, т.е. имеет место уравнение

$$16x - 15A = 4x \text{ или } 12x - 15A = 0.$$

Таким образом, первоначальный капитал предпринимателя составил $x = \frac{15}{12}A = 1{,}25A$, т.е. превосходил арендную плату в 1,25 раза.

При A = 16 000 руб.

$$x = 1{,}25 \cdot 16\ 000 = 20\ 000 \text{ руб.}$$

Задача 2. Состоявшееся в конце года собрание акционеров некоторого предприятия постановило распределить прибыль 5 600 000 руб. следующим образом: большую часть прибыли направить в фонд развития предприятия, 25 % от этой суммы использовать для выплаты дивидендов акционерам, а 15 % – использовать на социальные нужды работников.

Кроме того, было решено выпустить дополнительно акции для продажи на бирже ценных бумаг на сумму, равную половине суммы выплаченных дивидендов, в количестве 250 обыкновенных и 100 привилегированных (в 1,5 раза более дорогих) акций.

Определить, сколько денег было выделено на каждое направление и какова стоимость акций?

Решение. Обозначим через x (руб.) часть прибыли, направленную в фонд развития предприятия, тогда $\frac{25}{100}x$ была направлена на выплату дивидендов и $\frac{15}{100}x$ – на социальные нужды. Зная, что суммарно эти величины составляют 5 600 000 руб., можно составить уравнение

$$x + \frac{25}{100}x + \frac{15}{100}x = 5\ 600\ 000, \text{ или}$$

$$\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{20}\right)x = 5\ 600\ 000, \text{ откуда}$$

$$x = 5\ 600\ 000 : \frac{28}{20} = 4\ 000\ 000 \text{ руб.}$$

Таким образом, в фонд развития было направлено 4 000 000 руб., на дивиденды – $4\ 000\ 000 \cdot 0{,}25 = 1\ 000\ 000$ руб., на социальные нужды – $4\ 000\ 000 \cdot 0{,}15 = 600\ 000$ руб.

Если y – стоимость обыкновенной акции, то справедливо еще одно уравнение

$$250y + 100 \cdot 1{,}5 \cdot y = 0{,}5 \cdot 1\ 000\ 000$$

или $400 \cdot y = 500\ 000,$

откуда $y = 1250$ руб.

Стоимость привилегированной акции равна 1,5y, т.е. 1825 руб.

Задача 3. Нефтяная компания ежедневно отправляет на свои автозаправочные станции 120 000 л бензина (равное количество на каждую станцию).

Подсчитано, что в выходные дни выгоднее четыре автозаправки закрывать, а предназначенный для них бензин распределять (в равной мере) среди остальных. При этом каждая автозаправка увеличит количество реализуемого бензина на 8 000 л (это их предельная вместимость).

Сколько автозаправочных станций имеет нефтяная компания? Какова предельная вместимость каждой автозаправки?

Решение. Обозначим через x – количество автозаправочных станций, которыми владеет нефтяная компания. Тогда 120 000 : x – количество реализуемого бензина на каждой автозаправке в обычные дни, а $\frac{120\ 000}{x} + 8000$ – в выходные дни. Так как в выходные дни не работают четыре автозаправки, то $\frac{120\ 000}{x-4}$ – также количество бензина, реализуемого на работающих в выходные дни автозаправках.

Имеем равенство двух выражений, содержащее неизвестное x:

$$\frac{120\ 000}{x} + 8000 = \frac{120\ 000}{x-4}$$

или $120\ 000(x-4) + 8000 \cdot x(x-4) = 120\ 000x.$

После тождественных преобразований получаем следующее квадратное уравнение

$$x^2 - 4x - 60 = 0,$$

откуда $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+60} = 2 \pm 8$.

$x_1 = 2 - 8 = -6$ – не имеет смысла, $x_2 = 2 + 8 = 10$.

Следовательно: нефтяная компания имеет 10 автозаправочных станций; предельная вместимость каждой из них равна

$$\frac{120\ 000}{10} + 8000 = 20\ 000 \text{ л.}$$

Задача 4. В течение года цена товара два раза увеличивалась на один и тот же процент. Первоначальная цена составляла 10 у. е. После второго повышения она составила 12,1 у. е. На сколько процентов повышалась цена товара оба раза?

Решение. Пусть x – искомый процент повышения цены товара, тогда $10\left(1+\frac{x}{100}\right)$ – цена товара после первого повышения, $10\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)$ – цена товара после второго повышения.

По условию задачи $10\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right) = 12{,}1$ или $\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 = 1{,}21$ – квадратное уравнение относительно неизвестного.

Имеем:

$$1+\frac{x}{100} = \pm\sqrt{1{,}21} = \pm 1{,}1.$$

$$x_1 = -1{,}1 \cdot 100 - 100 = -210 \text{ (не имеет смысла)}$$

$$x_2 = 1{,}1 \cdot 100 - 100 = 10\,(\%).$$

Следовательно, цена товара увеличивалась каждый раз на 10 %.

Задача 5. Автозавод выпустил автомобили двух марок (A и B) в количестве 52 000 штук. На следующий год запланировано увеличение выпуска автомобилей марки A на 75 %, а марки B – на 140 %. В результате выпуск автомобилей должен увеличиться в два раза. Сколько автомобилей каждой марки автозавод выпустил в текущем году и выпустит на следующий год?

Решение. Обозначим через x количество автомобилей марки A, выпущенных заводом в текущем году, а y – марки B. Тогда в следующем году будет выпускаться $1{,}75x$ автомобилей марки A и $2{,}4y$ автомобилей марки B.

Из условия задачи следует, что $x + y = 52\ 000$ и $1{,}75x + 2{,}4y = 104\ 000$. Эти линейные уравнения с двумя неизвестными необходимо рассматривать совместно, т.е. как систему:

$$\begin{cases} x + y = 52\ 000; \\ 1{,}75x + 2{,}4y = 104\ 000. \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения y = 52 000 – x и подставляя во второе, получим

$$1{,}75x + 52\ 000 \cdot 2{,}4 - 2{,}4x = 104\ 000, \text{ или}$$

$$0{,}65x = 0{,}4 \cdot 52\ 000, \text{ откуда } x = 32\ 000.$$

Тогда, y = 52 000 – 32 000 = 20 000 (шт.).

Следовательно:

1 Автозавод в текущем году выпустил 32 000 автомобилей марки A и 20 000 автомобилей марки B.
2 В следующем году автозавод выпустит $32\ 000 \cdot 1{,}75 = 56\ 000$ автомобилей марки A и $20\ 000 \cdot 2{,}4 = 48\ 000$ автомобилей марки B.

Задача 6. Работница кондитерского цеха имеет ежедневное задание на изготовление определенного количества тортов. Она подсчитала, что если ей удастся изготовлять на один торт в час больше, то она закончит работу на 0,5 ч раньше, если же в час будет изготавливаться на пять тортов больше, то задание будет выполнено на два часа раньше. Сколько тортов в обычном режиме надо изготовлять работнице за рабочий день?

Решение. Обозначим через x (час) время, необходимое работнице для выполнения ежедневного задания, а через y – количество тортов, которое необходимо изготовлять в течение одного часа. Тогда xy (шт.) – ежедневное задание для работницы. Из расчетов работницы следует, что

$$xy = (x - 0{,}5)(y + 1) \text{ и } xy = (x - 2)(y + 5) .$$

Рассматривая эти уравнения совместно, получим систему

$$\begin{cases} (x - 0{,}5)(y + 1) = xy\,; \\ (x - 2)(y + 5) = xy\,, \end{cases}$$

или после преобразования

$$\begin{cases} x - 0{,}5y = 0{,}5; \\ 5x - 2y = 10. \end{cases}$$

Из первого уравнения

$$x = 0{,}5 + 0{,}5y,$$

тогда $5(0,5 + 0,5y) - 2y = 10$, или $0,5y = 7,5$,

откуда $y = 15$.

Тогда $x = 0,5 + 0,5y = 0,5 + 7,5 = 8$.

Следовательно, ежедневное задание работницы кондитерского цеха составляло $8 \cdot 15 = 120$ тортов.

Задача 7. Два брата решили заняться земледелием на правах фермеров и взяли в аренду участок земли. По их расчетам, обрабатывая вместе, они смогли бы закончить работу за 12 дней. Однако у одного из них появилась другая интересная работа, поэтому он взялся обрабатывать лишь четвертую часть их общего участка. Более того, работая один, он самостоятельно завершил обработку взятого надела менее, чем за неделю. Второй брат также самостоятельно обработал свои три четверти участка. Вся работа братьев-фермеров заняла 27,5 дня.

Сколько времени потребовалось каждому из фермеров, чтобы обработать свой участок?

Решение. Обозначим через x количество дней, необходимых первому брату для обработки всего участка земли; y дней – второму брату для обработки всего участка.

Тогда $\frac{1}{x}$ – доля всего участка, обрабатываемого в день первым братом, $\frac{1}{y}$ – доля всего участка, обрабатываемого в день вторым братом. Из условия задачи $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$ – доля всего участка, обрабатываемого (по их расчетам) в один день при совместной работе.

С другой стороны, $\frac{1}{4}x$ – количество дней, затраченных первым братом на обработку своей доли участка, а $\frac{3}{4}y$ – количество дней, затраченных вторым братом на обработку своей доли. По условию задачи

$$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = 27,5 \quad \text{и} \quad \frac{1}{4}x < 7 \quad (x < 28).$$

Таким образом, имеем систему двух уравнений (одно из которых нелинейное) с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}; \\ \frac{x}{4} + \frac{3y}{4} = 27,5. \end{cases}$$

Из первого уравнения $\frac{1}{x} = \frac{1}{12} - \frac{1}{y} \equiv \frac{y-12}{12y}$.

Тогда $x = \frac{12y}{y-12}$. Подставляя это значение x во второе уравнение, получим

$$\frac{3y}{y-12} + \frac{3}{4}y = 27,5, \quad \text{или} \quad 3y + 0,75\left(y^2 - 12y\right) = 27,5(y-12).$$

Произведем следующие преобразования:

$$3y + 0{,}75y^2 - 9y = 27{,}5y - 330;$$

$$0{,}75y^2 - 33{,}5y + 330 = 0;$$

$$3y^2 - 134y + 1320 = 0.$$

Решаем полученное квадратное уравнение:

$$y = \frac{134 \pm \sqrt{17\,956 - 15\,840}}{6} = \frac{134 \pm \sqrt{2116}}{6} = \frac{134 \pm 46}{6};$$

$$y_1 = \frac{134 - 46}{6} = \frac{88}{6} = 14\frac{2}{3};$$

$$y_2 = \frac{134 + 46}{6} = \frac{180}{6} = 30,$$

тогда

$$x_1 = \frac{12 \cdot 14\,{}^{2}\!/_{3}}{14\,{}^{2}\!/_{3} - 12} = \frac{12 \cdot {}^{44}\!/_{3}}{{}^{8}\!/_{3}} = 66$$

(не удовлетворяет дополнительному условию: $x < 28$);

$$x_2 = \frac{12 \cdot 30}{30 - 12} = \frac{360}{18} = 20.$$

Следовательно, для обработки своего участка первый брат затратил $20 \cdot \frac{1}{4} = 5$ (дней), а второй: $30 \cdot \frac{3}{4} = 22{,}5$ (дня).

Задача 8. Огородник-любитель практиковал продажу излишек своей продукции на рынке. Рыночные отношения складывались так, что половину односортной продукции ему удавалось продать по одной цене в первой половине дня, а вторую – во второй, но уже по другой цене. Однако в течение двух последних дней эта традиция нарушилась. В первый день до обеда он продал на 2 кг меньше, чем обычно, и заработал 112 руб.; после обеда продал на 3 кг меньше и заработал 135 руб. Во второй день до обеда он продал на 3 кг меньше обычного, а после обеда на 2 кг меньше обычного и до обеда заработал на 32 рубля меньше, чем после обеда.

Какова обычная выручка огородника до и после обеда? Сколько килограмм продукции он обычно реализует?

Решение. Обозначим через x цену продукции до обеда, через y – цену после обеда, z – количество продукции, обычно реализуемой до и после обеда.

По условию задачи справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} (z-2)x = 112; \\ (z-3)y = 135; \\ (z-2)y-(z-3)x = 32, \end{cases}$$

где $x > 0$; $y > 0$; $z > 0$.

Таким образом, математическая модель задачи – система трех уравнений (нелинейных) с тремя неизвестными.

Выражая x из первого уравнения: $x = \dfrac{112}{z-2}$, y – из второго: $y = \dfrac{135}{z-3}$ и подставляя в третье, получим

$$\frac{135(z-2)}{z-3} - \frac{112(z-3)}{z-2} = 32 \quad \text{или}$$

$$135(z-2)^2 - 112(z-3)^2 = 32(z-3)(z-2).$$

Для сокращения выкладок обозначим $z - 2 = t$, тогда $z - 3 = t - 1$, $t > 1$ и уравнение запишется в виде

$$135t^2 - 112\left(t^2-2t+1\right) = 32(t-1)t, \quad \text{или}$$

$$9t^2 - 256t + 112 = 0.$$

Его решение

$$t = \frac{128 \pm \sqrt{16\,384 - 1008}}{9} = \frac{128 \pm \sqrt{15376}}{9} = \frac{128 \pm 124}{9}.$$

$$t_1 = \frac{128-124}{9} = \frac{4}{9} \text{ (не удовлетвор яет условию } t > 1\text{);}$$

$$t_2 = \frac{128+124}{9} = \frac{252}{9} = 28.$$

Используя связь между t, z, y и x, находим:

$$z_2 = 2 + 28 = 30; \quad y_2 = \frac{135}{27} = 5; \quad x_2 = \frac{112}{28} = 4.$$

Следовательно, огородник обычно реализует по 30 кг продукции в первой и во второй половине дня, зарабатывая, соответственно, $4 \cdot 30 = 120$ (руб.) и $5 \cdot 30 = 150$ (руб.).

Задача 9. Два предпринимателя совместно приобрели партию товара в 50 т по цене 10 д. е. за одну тонну. Второй предприниматель заплатил за товар, включая стоимость перевозки, на 112 д. е. больше, чем первый. Перевозка 10 т товара обошлась предпринимателям в одну д. е. за 100 км пути, причем первый предприниматель вез товар на расстояние 600 км, а второй – на расстояние 800 км.

1 Какое количество товара приобрели первый и второй предприниматели?
2 Сколько денег затратил каждый из предпринимателей на покупку и перевозку товара?

Решение. Обозначим через x количество товара (тонн), приобретенного первым предпринимателем, тогда

$(50 – x)$ тонн приобрел второй предприниматель;

$\left(10 + \frac{1}{10} \cdot \frac{600}{100}\right)$ д. е. – затраты первого предпринимателя на покупку и перевозку одной тонны товара;

$\left(10 + \frac{1}{10} \cdot \frac{800}{100}\right)$ д. е. – затраты второго предпринимателя на покупку и перевозку одной тонны товара.

Так как затраты второго предпринимателя на 112 д. е. больше, чем у первого, то справедливо уравнение

$$(50 - x)\left(10 + \frac{1}{10} \cdot \frac{800}{100}\right) - x\left(10 + \frac{1}{10} \cdot \frac{600}{100}\right) = 112,$$

или

$$(50 - x) \cdot 10{,}8 - x \cdot 10{,}6 = 112,$$

откуда

$$21{,}4x = 428, \text{ а } x = 20 \text{ т.}$$

Следовательно, первый предприниматель приобрел 20 т товара, а второй – 50 – 20 = 30 т.

Затраты первого предпринимателя на покупку и перевозку одной тонны товара составили

$$10 + \frac{1}{10} \cdot \frac{600}{100} = 10{,}6 \text{ д. е.,}$$

а второго

$$10 + \frac{1}{10} \cdot \frac{800}{100} = 10{,}8 \text{ д. е.}$$

Покупка и перевозка товара обошлась первому предпринимателю в $20 \cdot 10{,}6 = 212$ д. е., а второму – $30 \cdot 10{,}8 = 224$ д. е.

Задачи для самостоятельной работы

3.1 Предприятие за месяц (24 рабочих дня) производило некоторое количество краски. После реконструкции ежедневное производство краски возросло на 2 т. В связи с этим увеличенную на 8 т месячную норму стали производить на 4 дня раньше.

На сколько процентов возросла производительность труда на предприятии после реконструкции?

3.2 Акционерное общество израсходовало 0,2 своей годовой прибыли на реконструкцию производственной базы, 0,25 оставшихся денег потратило на строительство жилья для акционеров, выплатило 2 500 000 руб. дивидендов по акциям. После всех этих расходов осталась нераспределенной 0,1 прибыли.

Какова прибыль акционерного общества?

Достаточно ли ему оставшихся денег, чтобы заплатить 20 000 000 руб. в счет задолженностей по налогам?

3.3 Три подрядные строительные организации договорились освоить выделенные по проекту деньги в сумме 2 805 000 руб. следующим образом. Первая организация получает половину от суммы, которую получает вторая организация и еще 270 000 руб. на приобретение оборудования, третья организация получает половину от того, что получает первая организация и еще 360 000 руб. на проектные работы.

Сколько денег получает каждая организация?

3.4 Когда спросили знаменитого древнегреческого математика и философа Пифагора о том, сколько учеников посещают его беседы, он ответил, что половина его учеников изучают математику, четверть – музыку, седьмая часть пребывает в молчании; кроме того, присутствуют еще три женщины.

Сколько учеников было у Пифагора?

3.5 Автомобильный завод планирует выпустить в первом квартале 20 % от годового плана, во втором – увеличить производительность в 1,5 раза, в четвертом – выпустить 17 000 автомобилей. В третьем квартале, во время отпусков, как показывает статистика, выпускается половина от среднего арифметического количества выпускаемых автомобилей во втором и четвертом кварталах.

Какое количество автомобилей планируется выпустить на автозаводе в течение года?

3.6 Для нормального функционирования рынка необходимо, чтобы ежедневно на работе находилось 36 контролеров.

Сколько необходимо нанять контролеров, чтобы каждый из них при семидневной рабочей неделе имел один выходной день?

3.7 Легковой автомобиль «Жигули» сопровождал грузовой автомобиль ГАЗ с товаром на расстоянии 500 км и израсходовал на 60 л бензина меньше, чем ГАЗ. Известно, что на 1 литре бензина «Жигули» проезжает на 7,5 км больше, чем ГАЗ.

Сколько литров бензина израсходовала каждая машина?

3.8 Предприниматель привез на рынок 2 000 кг арбузов и наметил их продать за определенное время в течение дня. Однако ежечасно ему удавалось продавать, в среднем, на 50 кг арбузов больше, чем он предполагал. Это дало возможность реализовать весь товар на два часа раньше.

Сколько килограммов (в среднем) арбузов предприниматель продавал ежечасно?

3.9 На хлебозаводе выпекают батоны ржаного и пшеничного хлеба. За 8 часов работы изготовляется равное количество тех и других батонов. Однако в результате неисправности оборудования на линии по выпечке батонов пшеничного хлеба их выпуск сократился на 200 шт. При этом оказалось, что выпечка одного батона пшеничного хлеба (в среднем) происходила на 12 с дольше, чем выпечка одного батона ржаного хлеба.

Сколько батонов ржаного и пшеничного хлеба было выпечено в этот день?

Сколько времени (в среднем) расходуется на выпечку одного батона ржаного хлеба?

3.10 На сельскохозяйственном предприятии была установлена следующая прогрессивная оплата труда: за первые 5 кг (один ящик) собранной ягоды рабочий получает 5 руб., за второй – на 1 руб. больше и т.д. Кроме того, за выполнение дневной нормы сбора рабочему доплачивается 6 руб.

Какую дневную норму (ящиков) надо установить, чтобы средняя оплата труда за один собранный ящик ягод составляла 10 руб.?

3.11 Сельскохозяйственное предприятие решило сдать в аренду принадлежащий ему земельный участок площадью 30 га и имеющий форму прямоугольника. Одна часть этого участка шириной 100 м и периметром 1 000 м была поделена на более мелкие участки. Вторая часть также была поделена на более мелкие участки, каждый из которых имел площадь на 1 га меньше, чем участок из первой половины, но количественно их оказалось на 15 больше.

Какое количество участков земли двух видов было нарезано?

Какова площадь каждого из этих участков?

3.12 Акционерное общество по итогам своей деятельности решило из годовой прибыли выделить 720 000 руб. на выплату дивидендов по двум видам акций. По каждой акции первого вида полагалось получить на 2 000 руб. больше, чем по акции второго вида. Всего было необходимо «оплатить» 150 акций, причем количество денег, выделяемых на акции первого вида должно равняться количеству денег, выделяемых на оплату акции второго вида.

Сколько было акций каждого вида?

Сколько рублей причиталось на каждую акцию первого и второго вида?

3.13 Первоначально в научно-исследовательском отделе работало менее 25 человек и его годовой фонд заработной платы составлял 2 000 000 руб. После получения новых заказов, штатное расписание отдела было увеличено на 15 человек, фонд заработной платы увеличился до 3 250 000 руб., а средняя годовая заработная плата (относительно всех сотрудников) возросла на 50 000 руб.

Какова новая численность сотрудников отдела?

Какова средняя заработная плата (относительно всех сотрудников) после увеличения годового фонда?

3.14 На двух объектах постоянно работало определенное количество строителей. Однажды для форсирования работ с первого объекта на второй было переведено 40 рабочих, после чего в эти дни их на первом объекте стало в 6 раз меньше, чем на втором. В следующий раз со второго объекта на первый было переведено 10 рабочих и их количество на объектах стало равным.

Какое количество строителей работало на каждом объекте в обычные дни?

3.15 В издательстве «Фига-плюс» на оформление оригинала-макета рукописи объемом 4 авторских листа (примерно 64 стр.) тратится столько же времени, что и на оформление объема в 3 авторских листа в издательстве «Фига-минус».

Какова производительность труда каждого из издательств, если известно, что комплект рукописей объемом 120 авторских листов издательство «Фига-плюс» оформляет на два месяца раньше, чем «Фига-минус»?

3.16 Железнодорожный состав с платформами способен перевезти 175 автомашин. После переоборудования платформ каждая из них стала вмещать на две автомашины больше, что дало возможность уменьшить количество платформ на десять при перевозке в составе такого же количество автомобилей.

Сколько платформ используется в составе после их переоборудования, и сколько автомобилей стала вмещать каждая платформа?

3.17 Два цеха предприятия «Молот» изготавливают ежемесячно 800 единиц продукции. Два аналогичных цеха предприятия «Металлист» за счет более высокой производительности труда изготавливают ежемесячно на 140 единиц продукции больше.

Сколько единиц продукции изготавливают в каждом цехе предприятий «Молот» и «Металлист» с учетом того, что оба цеха предприятия «Металлист» имеют производительность труда соответственно на 30 % и 10 % выше аналогичных цехов предприятия «Молот».

3.18 При планировке дачного поселка садоводов 180 домиков (по числу садоводов) решили разместить в нескольких линиях, одинаковых по числу домов. За время строительства число членов садоводческого товарищества выросло до 288 человек. Это потребовало перепланировки: число линий увеличили на 4, а количество домов в каждой – на 3.

Сколько линий домов стало в садоводческом товариществе?

3.19 Чистый спирт в бочке емкостью 40 л разбавлялся водой два раза и стал содержать 29 % воды. Первый раз из бочки было отлито определенное количество спирта и столько же долито воды. Во второй раз из бочки было отлито столько же жидкости, сколько и в первый раз, и долито водой.

Сколько литров жидкости отливали из бочки в первый и второй раз?

3.20 Рулон обоев первого вида стоит 40 руб. и длина его на 4 м меньше, чем длина рулона второго вида. Рулон обоев второго вида стоит 36 руб. и цена одного метра на два рубля меньше, чем цена одного метра обоев первого вида.

Сколько метров обоев в каждом рулоне первого и второго вида?

3.21 Вследствие реконструкции оборудования производительность труда рабочего повышалась дважды в течение года на одно и то же число процентов.

На сколько процентов возрастала каждый раз производительность труда, если за одно и то же время рабочий раньше вырабатывал изделий на 2500 руб., а теперь на 2809 руб.?

3.22 За первый квартал автозавод выполнил 25 % годового плана выпуска автомашин. Число машин, выпущенных за второй, третий и четвертый кварталы, оказалось пропорционально числам 11, 25, 12 и 13,5. Определить перевыполнение годового плана в процентах, если во втором квартале автозавод дал продукции в 1,08 раза больше, чем в первом.

3.23 Трое изобретателей получили за свое изобретение премию в размере 14 100 руб., причем второй получил $\frac{1}{3}$ того, что получил первый, и еще 600 руб., а третий получил $\frac{1}{3}$ денег второго и еще 300 рублей.

Какую премию получил каждый?

3.24 В магазин привезли сахар и сахарный песок в 63 мешках, всего 4,8 т, причем мешков с сахарным песком было на 25 % больше, чем с сахаром. Масса каждого мешка с сахаром составляла $\frac{3}{4}$ массы мешка с сахарным песком.

Сколько привезли сахара и сахарного песка?

3.25 Заработные платы рабочего за октябрь и ноябрь относились, как $9:8$, а за ноябрь и декабрь, как $6:8$. За декабрь он получил на 225 руб. больше, чем за октябрь, и за перевыполнение квартального плана рабочему начислили премию в размере 20 % его трехмесячного заработка.

Найти размер премии.

3.26 Имеющиеся на складе 300 кг товара проданы в неравных количествах двум организациям по цене 12,5 руб. за кг. Первая организация перевозит купленный товар на расстояние 20 км, а вторая – на расстояние 30 км. Перевозка 10 кг товара обходится в 0,5 руб. за километр пути.

Зная, что вторая организация заплатила за покупку и перевозку товара на 900 руб. больше первой, определить, сколько килограммов товара купила каждая организация и какую сумму она заплатила за товар и его перевозку?

3.27 Две бригады, работая вместе, должны отремонтировать заданный участок шоссейной дороги за 18 дней. В действительности же получилось так, что сначала работала только одна первая бригада, а заканчивала ремонт участка дороги одна вторая бригада, производительность труда которой более высокая, чем у первой бригады. В результате ремонт заданного участка дороги продолжался 40 дней, причем первая бригада в свое рабочее время выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы.

За сколько дней был отремонтирован заданный участок дороги каждой бригадой отдельно?

3.28 За килограмм одного продукта и десять килограммов другого заплачено 200 руб. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15 %, а второй подешевеет на 25 %, то за такое же количество этих продуктов будет заплачено 182 руб.

Сколько стоит килограмм каждого продукта?

3.29 Для продажи через ларек привезли яблоки 1 сорта на сумму 912 руб. и яблоки 2 сорта на сумму 720 руб. При разгрузке привезенные яблоки случайно перемешались. Подсчет показал, что если теперь продавать все яблоки по одной цене – на 3 руб. 60 коп. ниже цены килограмма яблок 1 сорта, то будет выручена ранее намеченная сумма.

Сколько килограммов яблок привезено в ларек, если известно, что яблок 2 сорта было на 5 кг больше, чем 1 сорта?

3.30 Некоторый заказ выполняют в мастерской № 1 на 3,6 ч дольше, чем в мастерской № 2, и на 10 ч дольше, чем в мастерской № 3. Если при тех же условиях работы мастерские № 1 и 2 объединятся для выполнения заказа, то срок его выполнения будет таким же, как в одной мастерской № 3.

На сколько часов больше или меньше одного рабочего дня длится выполнение указанного заказа в мастерской № 3? Рабочий день – 7 ч.

3.31 Было намечено разделить премию поровну между наиболее отличившимися сотрудниками предприятия. Выяснилось, однако, что сотрудников, достойных премии, на 3 человека больше, чем предполагалось. В таком случае каждому пришлось бы получить на 160 руб. меньше. Профсоюз и администрация нашли возможность увеличить общую сумму премии на 3600 руб., в результате чего каждый премированный получил 1000 руб.

Сколько человек получили премию?

3.32 Два цеха молокозавода пастеризуют и разливают молоко по бутылкам. Оба цеха совместно должны обработать определенное количество литров молока поровну. Второй цех приступил к выполнению задания на a рабочих дней позже, но обрабатывал ежедневно на m л молока больше, чем первый. Прошло еще $5a/9$ рабочих дней от начала совместной работы этих цехов и осталась невыполненной только $\frac{1}{3}$ часть всего задания.

Сколько рабочих дней потребовалось для выполнения всего задания, если работа была окончена одновременно, и каждый цех обработал половину заданного количества литров молока?

3.33 Первоначальная себестоимость единицы продукции равнялась 50 руб. В течение первого года производства она повысилась на некоторое число процентов, а в течение второго года снизилась (по отношению к повышенной себестоимости) на такое же число процентов, в результате чего она стала равна 48 руб. Определить проценты повышения и снижения себестоимости единицы продукции.

3.34 Два рабочих были приняты на один и тот же срок выполнения сезонной работы с разной оплатой каждому за один день труда. Первый работал на a дней меньше срока и получил r рублей, а второй проработал на a дней больше срока и получил s рублей. Если бы первый работал столько дней, сколько второй, то они получили бы поровну. Определить установленный срок работы.

3.35 На предприятие, где изготавливают растворимый кофе, привезли в последних числах мая партию зерен кофе для переработки. Один механизм, перемалывающий зерна, был приведен в действие в понедельник 1 июня и перемалывал ежедневно по m кг. С 6 июня к выполнению этой работы подключили второй механизм, который перемалывал ежедневно по n кг. К концу рабочего дня 10 июня осталась не перемолотой только половина первоначального количества зерен.

Когда была закончена переработка всей партии зерен, если известно, что оба механизма перемололи поровну и, кроме воскресений, других перерывов в работе не имели?

3.36 При рытье колодца за первый метр глубины уплатили 20 руб., а за каждый следующий на 30 руб. больше, чем за предыдущий. Сверх того за весь колодец дополнительно было уплачено 800 руб. Средняя стоимость метра глубины оказалась равной 225 руб. Определить глубину колодца, если известно, что она выражается целым числом.

3.37 Куплено несколько килограммов товара двух сортов: первого сорта на 225 руб. и второго на 100 руб. Первого сорта куплено на 1 кг больше. Стоимость килограмма товара первого сорта на a руб. выше стоимости килограмма второго сорта.

Сколько килограммов товара каждого сорта куплено? Определить число решений в зависимости от возможных значений a.

3.38 Предприятие A, потребляющее лед, закупает его в пункте B по цене a руб. за тонну. Иногда этому предприятию приходится закупать лед в другом пункте C по цене $1{,}5a$ руб. за тонну. Оба изготовителя сами доставляют потребителю A закупленный им лед, начисляя за перевозку одинаково по p руб. за тонно-километр. Потеря в массе, происходящая при транспортировке от таяния льда, составляет n тысячных массы на километр пути. Предприятие A расположено между B и C, и каждая тонна фактически полученного льда обходится предприятию A одинаково (в рублях) при доставке как из пункта B, так и из пункта C.

Во сколько рублей обходится предприятию A тонна получаемого льда, если известно, что расстояние от B до C через A равно S км? При каких S и n задача имеет решение?

3.39 В магазин поступил товар первого и второго сортов на общую сумму в 45 000 руб. Дополнительная экспертиза установила, что весь поступивший товар можно продавать только по цене второго сорта, в результате чего фирма потерпела бы убыток в сумме 50 000 руб. Продавцы магазина безвозмездно не только устранили дефекты в товаре первого сорта, но и товар второго сорта довели до кондиции первого сорта. Получив после этого разрешение продавать весь товар по цене первого сорта, магазин дал фирме прибыль в сумме 3000 руб.

В какую сумму оценивался первоначально весь товар первого сорта и весь товар второго сорта отдельно?

4 НАИМЕНЬШЕЕ И НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Человеку часто приходится решать задачи оптимизации своей деятельности: или при наименьших затратах сил, средств и материалов получить заданный результат (например, изготовить металлическую емкость заданного объема, израсходовав наименьшее количество материала), или при заданных исходных данных получить наилучший (максимальный) результат (например, из данного листа металла изготовить емкость максимального объема).

Если зависимость между исходными и выходными данными задана функцией, то задача формулируется как поиск наименьшего и наибольшего значения этой функции в заданной области.

В реальных условиях исходные данные имеют ограниченный диапазон изменения, который и определяет эту область.

Рассмотрим, например, задачу: найти стороны x и y прямоугольника, имеющего при данном периметре p максимальную площадь.

Дано: Пусть S – площадь прямоугольника, тогда $S = xy$.

Из условия известно, что $2(x + y) = p$. Тогда $S = x\left(\dfrac{p}{2} - x\right)$ – функция одной переменной x.

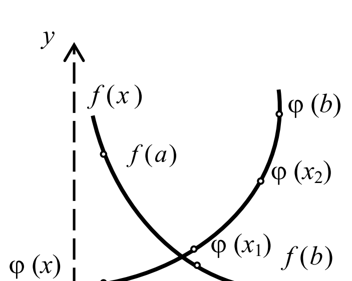
Так как $S \ge 0$, то $0 \le x \le \dfrac{p}{2}$ и задача ставится следующим образом: найти максимальное значение функции $S(x) = x\left(\dfrac{p}{2} - x\right)$ на отрезке $\left[0,\ \dfrac{p}{2}\right]$.

Процесс нахождения наименьшего (наибольшего) значения функции на отрезке определяется, во многом, свойствами самой функции. Так, если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения (теорема Вейерштрасса), т.е. решение задачи существует.

Поиск этого решения существенно упрощается, если дополнительно известно, что на этом отрезке функция монотонна: возрастает при $x_2 > x_1$ $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$ или убывает при $x_2 > x_1$ $\varphi(x_2) < \varphi(x_1)$.

В случае $\varphi(x)$, возрастающей на $[a, b]$, $\varphi(a)$ будет ее наименьшим, а $\varphi(b)$ – наибольшим значениями; в случае $f(x)$, убывающей на $[a, b]$, $f(a)$ – наибольшее, а $f(b)$ – наименьшее значения (рис. 2).

Если же (рис. 3) в точке $x_1 \in (a, b)$ меняется характер монотонности функции: возрастание – на убывание ($\varphi(x)$) или наоборот ($f(x)$), а других – таких точек нет, то наибольшее и наименьшее значения функции выбираются путем сравнения значений $f(a)$, $f(x_1)$ и $f(b)$ или $\varphi(a)$, $\varphi(x_1)$ и $\varphi(b)$.



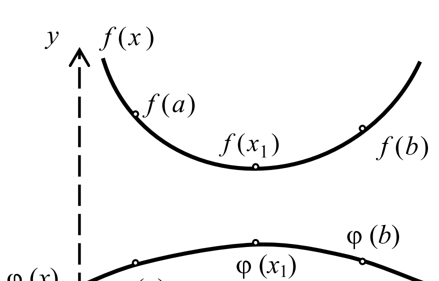


Рис. 2 Рис. 3

Вообще, если непрерывная функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ конечное число точек $x_1, x_2, ..., x_n$, в которых меняется характер монотонности, то, сравнивая значения функции в этих точках, а также в граничных $x = a$ и $x = b$, можно определить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a, b]$.

Точки, в которых меняется характер монотонности, являются так называемыми точками экстремума: максимума, если при возрастании аргумента возрастание функции меняется на убывание, и минимума, если убывание изменяется на возрастание. Определить точки, которые будут точками экстремума, можно, используя теорему (необходимое условие экстремума): если x_0 – точка экстремума для функции $f(x)$, то производная $f'(x_0)$ или равна нулю, или не существует.

Достаточным же условием экстремума является смена знака производной в окрестности точки x_0, где $f'(x_0) = 0$ или не существует. При смене знака с "+" на "–" x_0 – точка максимума, если наоборот, то минимума.

В подавляющем большинстве практических экономических задач точка экстремума на отрезке, где исследуется функция, одна, поэтому, определив ее характер (минимум или максимум), мы одновременно определим точку, где функция принимает, соответственно, наименьшее или наибольшее значения.

Пример. Исследуется функция $y = (x-2)^2$ на отрезке $[0, 3]$.

Решение. Найдем производную $y' = 2(x - 2)$; $y' = 0$ при $x = 2$.

При $x < 2$ $y' < 0$, при $x > 2$ $y' > 0$, поэтому $x = 2$ – точка минимума и функция $y = (x-2)^2$ достигает в этой точке наименьшего значения.

Действительно, сравнивая значения $f(0) = (0-2)^2 = 4$, $f(2) = (2-2)^2 = 0$ и $f(3) = (3-2)^2 = 1$, определяют, что в точке $x = 2$ функция достигает наименьшего значения.

Подытожив все теоретические выдержки, можно наметить схему решения задач на наибольшее и наименьшее значения:

1) построить математическую модель задачи (найти функцию $f(x)$);
2) определить отрезок $[a, b]$, исходя из условий задачи;
3) найти точки $x_1, ..., x_n$ интервала (a, b), в которых производная функции равна нулю или не существует;
4) вычислить значения $f(a)$, $f(x_1)$, ..., $f(n)$, $f(b)$, сравнить и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Примеры решения задач

Задача 1. Какими должны быть размеры жестяной консервной банки заданного объема V, чтобы затраты металла на ее изготовление были минимальными?

Определить, на что должна быть ориентирована технология изготовления банок, чтобы быть рентабельной.

Решение. При изготовлении банки заданного объема V оптимальными будут такие ее размеры, при которых на ее изготовление пойдет минимальное количество материала, т.е. площадь полной поверхности банки S должна быть минимальной.

Пусть банка представляет собой прямой круговой цилиндр с высотой h и радиусом основания r. Тогда $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Найдем соотношение между h и r, при котором площадь полной поверхности будет наименьшей.

Так как $V=\pi r^2 h$, то $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$ и тогда $S(r)=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$ – функция одной переменной r. Очевидно, что область определения и непрерывности функции S есть интервал (0; $+\infty$), а не отрезок, поэтому ответа на вопрос о существовании решений мы дать не можем (не выполнены условия теоремы Вейерштрасса). Однако попробуем воспользоваться указанной выше схемой, заменив вычисление значений функции на концах отрезка исследованием ее поведения на границах области определения.

Очевидно, что при $r\to 0$ и при $r\to+\infty$ функция

$$S(r)\to+\infty. \tag{1}$$

Найдем производную функции S: $S'(r)=4\pi r-\dfrac{2V}{r^2}$. Производная $S'(r)$ существует во всех точках интервала (0, $+\infty$) и обращается в нуль в единственной точке $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ из этого интервала. Поэтому S может менять характер монотонности только при $r=r_1=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. С учетом соотношений (1) заключаем, что в этой точке S имеет наименьшее значение.

При $r=r_1$

$$h=\frac{V}{\pi r_1^2}=\frac{V}{\pi\sqrt[3]{\dfrac{V^2}{(2\pi)^2}}}=\sqrt[3]{\frac{4V^3}{\pi V^2}}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=2r_1.$$

Следовательно, если процесс изготовления жестяных банок технологией ориентирован на то, что высота банки в два раза больше радиуса оснований, то при заданном объеме банки ее полная поверхность будет наименьшей и такую технологию можно считать самой рентабельной (по затратам металла).

Задача 2. Необходимо наладить производство металлических баков заданного объема V, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием; верхнее основание имеет отверстие с крышкой. Каждый бак изготовляется из прямоугольных листов металла путем их сварки по краям. Известно, что стоимость сварки шва составляет P_1 д. е. за один погонный метр, а цена металлических листов – P_2 д. е. за квадратный метр. Найти функцию, выражающую зависимость стоимости бака от его размеров (при заданном объеме) и ее минимальное значение (минимальные расходы на изготовление бака), если $V=0{,}25$ м^3; $P_1=1$; $P_2=2$.

Решение. Пусть x (м) – длина ребра в основании бака, тогда при заданном объеме V его высота равна V/x^2, а площадь поверхности (количество квадратных метров металла, затраченного на изготовление) равна:

$$S=S(x)=2x^2+4x\frac{V}{x^2}\quad\text{или}\quad S(x)=2x^2+\frac{4V}{x}.$$

Сумма длин всех ребер (общая длина сварных швов) равна:

$$l=l(x)=8x+4\frac{V}{x^2}.$$

При таких данных стоимость изготовления одного бака выражается функцией:

$$C(x)=P_1 l(x)+P_2 S(x)=8P_1x+\frac{4P_1V}{x^2}+2P_2x^2+\frac{4P_2V}{x}.$$

Это и есть функция, выражающая зависимость стоимости бака от его размеров (длины ребра основания при заданном объеме V).

При $V=0{,}25$ м^2, $P_1=1$ д. е., $P_2=2$ д. е. эта функция имеет вид

$$C(x)=4x^2+8x+\frac{2}{x}+\frac{0{,}25}{x^2}.$$

Для нахождения минимальных расходов на изготовление бака заданного объема решаем задачу: для целевой функции $C(x)$, $x>0$ найти точку $x=x_0$, в которой она принимает наименьшее значение и подсчитать это значение.

Таким образом будет определено и технологическое задание на изготовление баков – его оптимальные (в смысле минимума затрат) размеры.

Найдем производную $C'(x)$:

$$C'(x)=8x+8-\frac{2}{x^2}-\frac{0{,}5}{x^3}=\frac{8}{x^3}\left(x^4+x^3-\frac{x}{4}-\frac{1}{16}\right)=\frac{8}{x^3}\left(x^4-\frac{1}{16}+x\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\right)=$$

$$=\frac{8}{x^3}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{x^3}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{8}{x^3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)^3.$$

По условию $x > 0$, поэтому $C'(x) = 0$ только в одной точке $x = x_0 = 0{,}5$. При переходе через эту точку $C'(x)$ меняет знак с «минуса» на «плюс» и поэтому $x_0 = 0{,}5$ – точка минимума функции $C(x)$.

Таким образом, оптимальные (в смысле минимума затрат при заданном объеме) размеры бака таковы: длина ребра основания – 0,5 м, высота – $h = V / x^2 = 0{,}25 / 0{,}25 = 1$ м.

Определяем, что

$$C(0{,}5) = 4 \cdot 0{,}25 + 8 \cdot 0{,}5 + \frac{2}{0{,}5} + \frac{0{,}25}{0{,}25} = 1 + 4 + 4 + 1 = 10 \text{ д. е.}$$

Задача 3. Требуется оградить прямоугольный участок земли площадью 400 м^2. Определите оптимальные размеры участка, при которых затраты на ограду будут наименьшими (предполагается, что стоимость ограды пропорциональна ее длине).

Решение. Найдем прямоугольник площадью 400 м^2, в котором периметр наименьший. Пусть $x > 0$ – длина одной стороны прямоугольника, тогда длина смежной с ней стороны равна $\frac{400}{x}$. Периметр прямоугольника

$$P(x) = 2\left(x + \frac{400}{x}\right),$$

где $0 < x < \infty$.

Найдем производную

$$P'(x) = 2\left(1 - \frac{400}{x^2}\right), \quad x \in (0, +\infty).$$

Определим критические точки функции $P(x)$:

$$P'(x) = 0 \Rightarrow \left(2\left(1 - \frac{400}{x^2}\right) = 0\right) \Leftrightarrow (x = 20, x = -20).$$

Так как $x > 0$, то рассматриваем только $x = 20$.

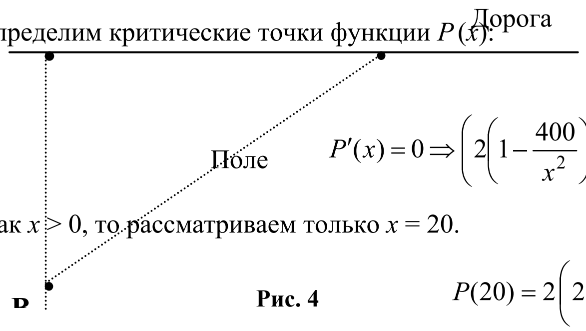


Рис. 4

$$P(20) = 2\left(20 + \frac{400}{20}\right) = 80 .$$

Функция $P(x)$ при $0 < x < \infty$ непрерывна и $P(x) \to \infty$, если $x \to 0$ или $x \to \infty$, поэтому $P(20)$ – минимальное значение $P(x)$.

Длина другой стороны прямоугольника также равна 20. Из условия задачи известно, что стоимость ограды $N(x)$ пропорциональна ее длине, $N(x) = kP(x)$. Следовательно, $N(x)$ получит наименьшее значение тогда, когда $P(x)$ имеет наименьшее значение, откуда $N_{\text{opt}}(x) = \min N(x) = 80k$ при $x = 20$.

Задачи для самостоятельной работы

4.1 Для посадки ценных культур нужно выделить участок прямоугольной формы, площадь которого S га.

Какие размеры должен иметь участок, чтобы затраты на постройку ограды вокруг него были наименьшими? Необходимо разработать модель решения задачи и провести анализ на конкретных данных ($S = 5{,}76$).

4.2 Спортплощадку площадью S га, имеющую форму прямоугольника, необходимо оградить с севера и юга деревянным забором, с востока и запада – проволочным. Установка 1 м деревянного забора обходится в 15 д. е., проволочного – в 6 д. е. На строительство выделено 3600 д. е.

Достаточно ли этой суммы, если $S = 0{,}9$ га?

4.3 Прямоугольную площадку земли в S м^2 требуется огородить и разделить на три равные части, параллельно одной из сторон площадки.

Каковы должны быть размеры сторон площадки, чтобы на постройку забора пошло наименьшее количество материала? Разработать математическую модель решения задачи и проанализировать ее при $S = 512$ м^2.

4.4 На странице текст должен занимать 384 см^2. Верхние и нижние поля должны быть по K см, правое и левое – по 2 см.

Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

4.5 Из пункта B (рис. 4), расположенного в поле, автоколонна возит зерно в пункт C. Скорость машин по полю 30 км/ч, по дороге 60 км/ч. Сколько времени сэкономит автоколонна из 50 машин, если выберет наиболее выгодный вариант, по сравнению с вариантами:

а) $B \to A \to C$, б) $B \to C$, где $BA = 9$ км, $AC = 12$ км?

Сколько дополнительно рейсов будет сделано за это время?

Рейсом считать дорогу из C в B, погрузку зерна в пункте B, дорогу из B в C, разгрузку зерна в пункте C. Время погрузки равно времени разгрузки и равно 0,04 ч. В расчетах принять $\sqrt{3}=1\frac{11}{15}$.

4.6 Расходы на топливо для парохода делятся на 2 части. Первая из них не зависит от скорости и равна 480 д. е./ч, а вторая часть расходов пропорциональна кубу скорости, причем при скорости 10 км/ч эта часть расходов равна 30 д. е./ч.

При какой скорости общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей?

4.7 Из прямоугольного листа жести размером 30×50 требуется изготовить открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом.

Каковы должны быть стороны вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

4.8 Определить размер прямоугольного бассейна данного объема V и глубиной H, чтобы на его облицовку потребовалось наименьшее количество материала.

4.9 Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема V. Стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление дна бака, равна P_1 – 1 д. е., а стенок P_2 – 2 д. е.

Каковы должны быть радиус дна и высота бака, чтобы затраты на материал были наименьшими?

4.10 При проектировании цеха по переработке плодоовощной продукции планируется строительство нескольких холодильных камер, каждая из которых имеет форму правильной четырехугольной призмы объемом 144 м^3. Для облицовки боковых стенок камеры используют материал, цена которого 15 д. е., а для облицовки дна – 20 д. е. за 1 м^2.

При каких размерах холодильной камеры стоимость ее облицовки будет наименьшей?

4.11 Заводу поручено изготовить резервуар емкостью 4 м^3, имеющий форму правильной четырехугольной призмы и открытый сверху. При этом внутренняя поверхность должна быть покрыта оловом.

Какие следует выбрать размеры резервуара, чтобы израсходовать наименьшее количество олова? (Толщиной стенок пренебречь).

4.12 Найдите размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 756 м^2 такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

4.13 Для огораживания земельного участка площадью 242 м^2, имеющего форму прямоугольника, выделено 2000 д. е. С трех сторон должен быть штакетник стоимостью 25 д. е. за метр, а с одной стороны – живая изгородь стоимостью 75 д. е. за метр.

Хватит ли отпущенных средств на устройство изгороди? Какова минимальная сумма, необходимая для этой цели?

4.14 Оросительный канал имеет сечение в форме равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию.

При каком угле наклона боковых сторон сечение канала будет иметь наибольшую площадь?

4.15 Из заготовки, имеющей форму цилиндра с диаметром основания d = 20 см, высотой H, вытачивается шар диаметром h.

При каком значении h объем удаляемой части заготовки минимален?

4.16 Планируется изготовление шоколадных кондитерских изделий в форме прямого кругового конуса, внутри которого располагается ягодка, имеющая форму шара радиуса R. Найти радиус основания и высоту такого конуса, который скрывал бы полностью ягодку и требовал наименьший расход шоколада.

4.17 Требуется изготовить из жести ведро без крышки данного объема V, цилиндрической формы.

Каковы должны быть высота цилиндра и радиус основания, чтобы на изготовление ведра ушло наименьшее количество материала?

4.18 Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен a.

При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

4.19 Буровая вышка расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой надо направить курьера в населенный пункт, расположенный по шоссе в 15 км от упомянутой точки (считаем шоссе прямолинейным). Скорость курьера на велосипеде по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч.

К какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь населенного пункта?

4.20 Бак, имеющий форму открытого параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать 13,5 л жидкости.

При каких размерах бака на его изготовление потребуется наименьшее количество металла?

4.21 В математической модели экономического роста хозяйства, производящего некоторый продукт для потребления и увеличения запасов основных фондов, P (ежегодное потребление продукта на душу занятых в производстве) и x (число занятых в производстве рабочих) связаны функциональной зависимостью

$$P(x) = \frac{x(M - x) - b}{x},$$

где M, b – постоянные, характеризующие производственные возможности хозяйства. При M = 250, b = 8464 определите число рабочих, соответствующее наибольшему значению $P(x)$ в хозяйствах с 80, 90, 120 и 150 рабочими местами.

4.22 Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема 144 м^3. Стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление дна бака, равна 200 д. е., а стенок 2000 д. е.

Каковы должны быть радиус дна и высота бака, чтобы затраты на материал для его изготовления были наименьшими?

4.23 Пункты A и B, находящиеся на расстоянии 500 км, связывает железная дорога. Завод N расположен в 10 км от пункта B. Для доставки продукции завода N в пункт A строится шоссе NP до пункта P, находящегося на линии железной дороги. Стоимость перевозки груза по шоссе вдвое больше, чем по железной дороге.

К какому пункту P нужно подвести шоссе, чтобы доставка груза из N в A была наименее дорогой?

4.24 Требуется изготовить полотняный шатер, имеющий форму прямого кругового конуса заданной вместимости V = 14,14 м^3.

Каковы должны быть размеры конуса (высота H и радиус основания R), чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна?

4.25 Требуется вырыть яму цилиндрической формы с круглым основанием и вертикальной боковой поверхностью заданного объема V = 25 м^3.

Каковы должны быть линейные размеры ямы (радиус R и высота H), чтобы на облицовку ее дна и боковой поверхности пошло наименьшее количество материала?

5 МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Методы линейного программирования состоят в нахождении наибольшего и наименьшего значений линейной функции нескольких переменных при заданных в виде линейных неравенств ограничениях для данных переменных.

Рассмотрим метод на примере функции двух переменных.

Дана функция $F(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2$, и дополнительно известно, что переменные x_1 и x_2 удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 \ge c_1; \\ a_2x_1 + b_2x_2 \ge c_2; \\ \quad \dots \\ a_nx_1 + b_nx_2 \ge c_2. \end{cases}$$

Требуется найти такие пары (x_1, x_2), при которых F принимает наибольшее (наименьшее) значение.

С геометрической точки зрения каждое линейное уравнение вида $ax_1 + bx_2 = c$ на плоскости OX_1X_2 определяет прямую, а неравенство $ax_1 + bx_2 > c$ – одну из полуплоскостей, на которые прямая $ax_1 + by_1 = c$ делит плоскость OX_1X_2. Поэтому система неравенств – результат пересечения полуплоскостей (их общая часть). В зависимости от условий это может быть замкнутая область (часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией – многоугольником) или неограниченная многоугольная область.

Существует доказательство, что если в плоскости OX_1X_2 перемещаться в направлении вектора $\overline{N} = \{A, B\}$ (перпендикулярного прямой $Ax_1 + Bx_2 = C$), то значения функции $F(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2$, будут увеличиваться (в противоположном направлении – уменьшаться).

Пусть на плоскости OX_1X_2 дана прямая l: $Ax_1 + Bx_2 = C$, а $\overline{N} = \{A,\ B\} \perp l$ (рис. 5). Выберем на прямой l точку $M_0(a_0, b_0)$, а вне прямой – точку M_1 (a_1, b_1). Находясь в одной полуплоскости, вектора $\overline{N}$ и M_0M_1 образуют острый угол α, поэтому их скалярное произведение

$$\left(\overline{N},\ \overline{M_0M_1}\right) > 0.$$

В координатной форме это условие запишется в виде: $A(a_1 - a_0)$ + + $B(b_1 - b_0) > 0$ или $Aa_1 + Bb_1 > Aa_0 + Bb_0$, но $Aa_1 + Bb_1 = F(a_1, b_1)$, а $Aa_0 + Bb_0 = = F(a_0, b_0)$ и, следовательно, $F(a_1, b_1) > F(a_0, b_0)$, т.е. значение функции F, подсчитанное в произвольной точке, взятой в направлении вектора $\overline{N}$, больше, чем значение F в точке M_0.

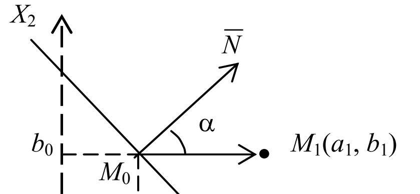


Рис. 5

Очевидно, что если M_1 расположить на прямой l, то скалярное произведение $\left(\overline{N},\ \overline{M_0M_1}\right)$ равно нулю, а $F(a_0, b_0) = F(a_1, b_1)$, т.е. значения линейной функции во всех точках прямой l равны между собой.

Это свойство линейной функции $F(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2$ возрастать в направлении вектора $\overline{N} = \{A,\ B\}$ можно использовать для нахождения ее наибольшего и наименьшего значений в точках плоскости, ограниченной многоугольником, или неограниченной многоугольной области.

Рассмотрим первый случай (рис. 6): пусть необходимо найти наибольшее и наименьшее значения функции $F(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2$ в точках многоугольной области $M_1M_2M_3M_4$. Вектор $\overline{N} = \{A,\ B\}$. Передвигаясь в направлении вектора $\overline{N}$, мы войдем в область многоугольника в точке M_1. Значение F в точке M_1 будет наименьшим, так как другие точки многоугольной области расположены по направлению вектора $\overline{N}$, а, следовательно, значение функции F в этих точках будет большим, чем $F(M_1)$. (Прямая l, перейдя в положение l', может иметь с областью $M_1M_2M_3M_4$ не одну общую точку M_1, а ребро M_1M_2; это не нарушает метода, так как в этом случае во всех точках ребра M_1M_2 функция F будет принимать одинаковые значения). Перейдя в положение l'' прямая l окажется на выходе из многоугольной области: M_3 – крайняя (последняя) точка области при движении в направлении вектора $\overline{N}$, поэтому значение $F(M_3)$ будет наибольшим по сравнению с ее значениями в других точках области.

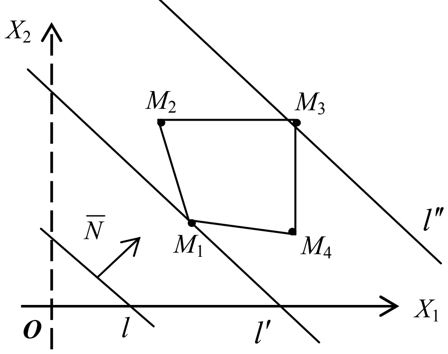


Рис. 6

Таким образом ищутся наименьшее и наибольшее значения линейной функции в точках многоугольной области; практически эти значения имеют место в вершинах многоугольника.

При постановке задачи в том виде, как мы рассмотрели, схема решения задачи линейного программирования выглядит следующим образом:

1) используя условие, записать целевую функцию $F(x_1, x_2)$;
2) используя условие, построить многоугольную область возможных значений x_1 и x_2;
3) найти координаты вершин многоугольника, подсчитать значение функции F в этих точках, сравнить их и выбрать наименьшее и наибольшее.

Если вершин у многоугольника настолько много, что задача нахождения их координат более трудоемкая, чем построение вектора $\overline{N}$ и "прохождение" им через многоугольник, то целесообразнее построить вектор и найти "крайние" точки, как это сделано в рассмотренном примере.

Зачастую некоторые или все переменные задачи являются целочисленными, т.е. их значениями могут быть только целые числа (как во втором разделе данного задачника). В общем случае многих переменных такие задачи решать достаточно сложно; если же задача целочисленного программирования имеет две переменные, то ее можно решить графически. Как и при решении обычной задачи линейного программирования, надо двигать линию уровня в направлении экстремума и уловить последнюю целочисленную точку. Она и дает искомое оптимальное целочисленное решение (см. ниже задачу 1).

Примеры решения задач

Задача 1. Найти наибольшее значение функции $F(x, y) = 10x + 6y$ в точках области: $\begin{cases} 15x + 16y \le 62; \\ 5x + 8y \le 26; \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$

Решение. Построим область допустимых значений переменных x и y (рис. 7). Система $x \geq 0$, $y \geq 0$ задает первый квадрант координатной плоскости, неравенство $15x + 16y \leq 62$ – полуплоскость, расположенную под прямой $15x + 16y = 62$, включая саму эту прямую; неравенство $5x + 8y \leq 26$ –полуплоскость, расположенную под прямой $5x + 8y = 26$, включая саму эту прямую.

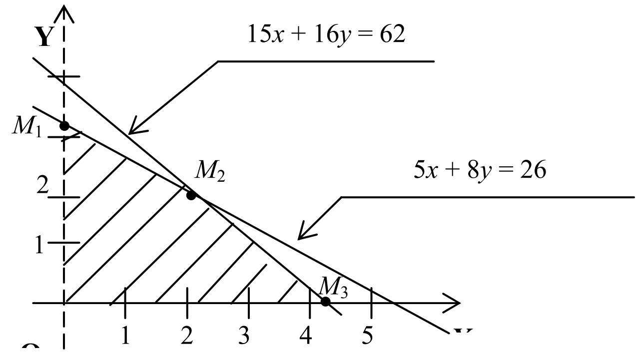


Рис. 7

Таким образом получаем, что множество точек, удовлетворяющее всем четырем неравенствам, – четырехугольная область $OM_1M_2M_3$.

Координаты вершин O (0, 0), M_1 (0, 3,25), M_2 (2, 2), M_3 (62/15, 0) находятся как координаты точек пересечения соответствующих прямых путем решения систем:

$$\begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0; \\ 5x + 8y = 26; \end{cases} \quad \begin{cases} 15x + 16y = 62; \\ 5x + 8y = 26; \end{cases} \quad \begin{cases} 15x + 16y = 62; \\ y = 0. \end{cases}$$

Имеем:

$$F(O) = 10 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0;$$

$$F(M_1) = 10 \cdot 0 + 6 \cdot 3{,}25 = \frac{39}{2} = 19{,}5;$$

$$F(M_2) = 10 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 32;$$

$$F(M_3) = 10 \cdot \frac{62}{15} + 6 \cdot 0 = \frac{124}{3} = 41\frac{1}{3}.$$

Очевидно, что наибольшее значение, равное $41\frac{1}{3}$, достигается функцией F в точке M_3.

Если данную задачу решать при условии, что переменные x и y могут принимать только целочисленные значения, то алгоритм решения будет выглядеть следующим образом.

Сначала найдем допустимое множество решений задачи – множество точек (x, y), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 15x + 16y \leq 62; \\ 5x + 8y \leq 26; \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

и условию, что x и y – целые числа.

Очевидно, что $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 3$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что допустимое множество решений задачи образуют точки: $A_0(0, 0)$, $A_1(0, 1)$, $A_2(0, 2)$, $A_3(0, 3)$, $B_1(1, 0)$, $B_2(1, 1)$, $B_3(1, 2)$, $C_1(2, 0)$, $C_2(2, 1)$, $C_3(2, 2)$, $D_1(3, 0)$, $D_2(3, 1)$, $E_1(4, 0)$. Всего их 13. Подсчет значений целевой функции во всех этих точках и выбор из них наибольшего несложен. Однако возможен и другой путь решения.

Отложим от точки A_0 (0, 0) (рис. 8) вектор $\overline{N} = \{10,\ 6\}$ и будем двигать прямую l, перпендикулярную $\overline{N}$, в направлении этого вектора. Последней из обозначенных точек, через которую пройдет прямая, будет E_1 (4, 0). В этой точке целевая функция достигает максимального значения E_1 (4, 0) $= 10 \cdot 4 + 6 \cdot 0 = 40$.

Рис. 8

Задача 2. Найти наименьшее значение функции $F(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2$ в области, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9; \\ x_1 + 2x_2 \geq 8; \\ x_1 + 6x_2 \geq 12; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Построим (рис. 9) область допустимых значений переменных x_1 и x_2. Этой областью будет неограниченная многоугольная область с угловыми точками A, B, C и D. Построим вектор $\overline{N} = \{4,\ 6\}$. (Его проекция на ось OX_1 равна 4, на ось OX_2 – 6). Прямая l, перпендикулярная вектору $\overline{N}$, при движении от точки O в его направлении впервые прикоснется к многоугольной области в точке B, в которой функция F примет наименьшее значение. Координаты точки B определим, решая систему

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9; \\ x_1 + 2x_2 = 8, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3(8 - x_2) + x_2 = 9; \\ x_1 = 8 - 2x_2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 = 3; \\ x_1 = 2. \end{cases}$$

Тогда $F\,(2, 3) = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26.$

Наименьшее значение функции равно 26.

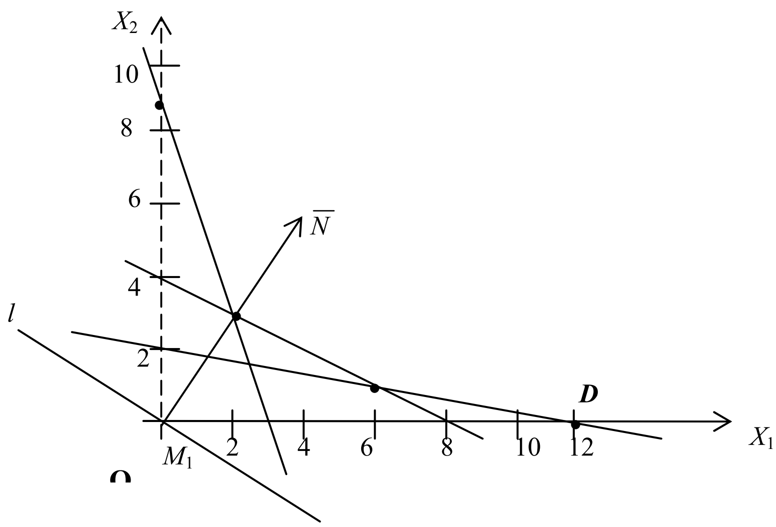


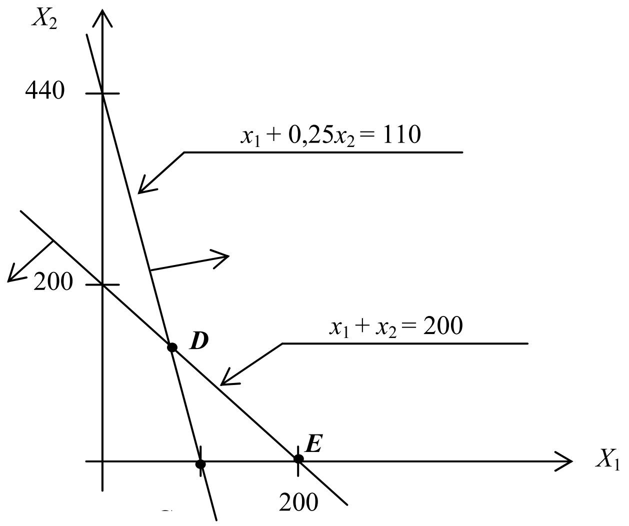
Рис. 9

Задача 3. Житель города выехал на рынок на личном автомобиле, чтобы приобрести продукты вида A и B. Грузоподъемность его автомобиля (без водителя) не превышает 200 кг; в то же время он должен сделать такую покупку, чтобы все продукты A и четверть веса продукта B в сумме составили не менее 110 кг. Какое максимальное количество денег должен иметь этот житель для осуществления такой покупки, если 1 кг продукта A стоит 12 руб., а продукта B – 15 руб.? Сколько килограммов продуктов каждого вида он при этом может приобрести?

Решение. Обозначим через x_1 (кг) количество продуктов вида *А*, а через x_2 (кг) – количество продуктов вида *В*, которое может приобрести на рынке житель города. Тогда цена покупки будет выражаться функцией $P(x_1, x_2) = 12x_1 + 15x_2$.

Из условия задачи следует, что $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_1 + x_2 \leq 200$; $x_1 + 0{,}25x_2 \geq 110$.

Построим область допустимых значений переменных x_1 и x_2 (рис. 10). Это будет треугольная область с угловыми



точками *С* (110, 0); *Е* (200, 0) и *D* (80, 120).

Рис. 10

Подсчитаем значения функции $P(x_1, x_2)$ в этих точках:

$$P(C) = 12 \cdot 110 + 15 \cdot 0 = 1320 \text{ руб.};$$

$$P(E) = 12 \cdot 200 + 15 \cdot 0 = 2400 \text{ руб.};$$

$$P(D) = 12 \cdot 80 + 15 \cdot 120 = 2760 \text{ руб.}$$

Таким образом, максимум функции $P(x_1, x_2)$ достигается в точке *D*.

Ответ: покупатель должен иметь 2760 руб.; за эти деньги он приобретет 80 кг продукта *А* и 120 кг продукта *В*.

Задача 4. Пусть в фермерском хозяйстве требуется распределить пашню между двумя культурами (1 и 2) по данным следующей таблицы:

Культура	Площадь, га	Урожай, ц/га	Затраты, д. е./га	Цена за 1 ц	Затраты тракторосмен на 1 га	Затраты человеко-дней на 1 га
1	x	10	50	6	0,1	2
2	y	15	80	8	0,24	10

Пусть кроме того, заданы ресурсы производства: земли – 1800 га, тракторо-смен – 300, человеко-дней – 8000 и потребность в культурах: первой – 10 000 ц и второй – 7500 ц.

Величины x и y являются неизвестными и подлежат определению. Решить задачу по оптимизации трех различных критериев:

1) по максимуму прибыли;
2) по максимуму рентабельности;
3) по максимуму прибыли с 1 га.

Решение. Ограничения задачи имеют следующий вид:

- ограничения по площади $x + y \leq 1800$;
- ограничения по тракторо-сменам:

$0{,}1x + 0{,}24y \leq 300$ или $x + 2{,}4y \leq 3000$;

- ограничения по человеко-дням: $2x + 10y \leq 8000$ или $x + 5y \leq 4000$,
- ограничения по потребностям в культурах:

$10x \geq 10000$ или $x \geq 1000$, $15y \geq 7500$ или $y \geq 500$.

Кроме того ясно, что $x \geq 0$, $y \geq 0$, но эти неравенства перекрываются условиями $x \geq 1000$, $y \geq 500$.

Графическое решение системы

$$\begin{cases} x + y \le 1800; \\ x + 2{,}4y \le 3000; \\ x + 5y \le 4000; \\ x \ge 1000, y \ge 500 \end{cases} \qquad (1)$$

дает многоугольник ограничений *CDEF* (заштрихованный на рис. 11).

Стрелки на рисунке указывают полуплоскость, задаваемую соответствующим неравенством.

Для определения прибыли и рентабельности согласно данным таблицы имеем формулы:

- себестоимость

$$C = 50x + 80y = 10(5x + 8y); \qquad (2)$$

- прибыль

$$П = 6 \cdot 10x + 8 \cdot 15y - (50x + 80y) = 10(x + 4y); \qquad (3)$$

- рентабельность

$$R = \frac{П}{C} = \frac{10(x+4y)}{10(5x+8y)} = \frac{x+4y}{5x+8y}\ . \qquad (4)$$

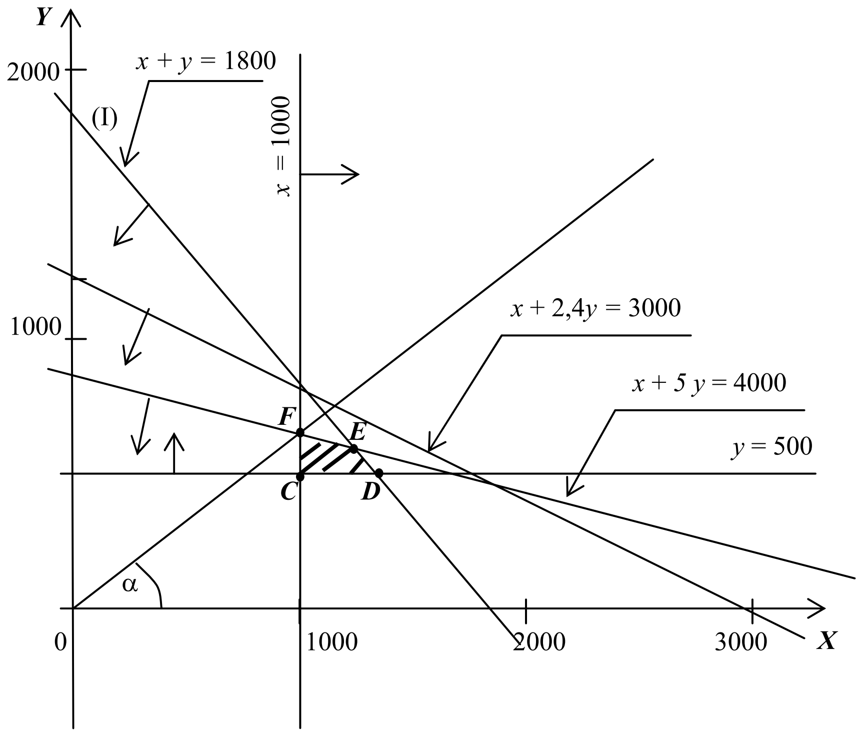


Рис. 11

Обозначим через $П_1$ прибыль с 1 га, тогда

$$П_1 = 10\frac{x+4y}{x+y}. \qquad (5)$$

1) Решение по максимуму прибыли.

Мы должны максимизировать прибыль, т.е. функцию $П(x, y) = 10(x + 4y)$ на четырехугольной области *CDEF*.

Так как свое наибольшее и наименьшее значения $П\,(x,\ y)$ может достигать в вершинах этого четырехугольника, то найдем координаты точек *C*, *D*, *E* и *F*, подсчитаем в этих точках значения $П(x, y)$ и выберем из них наибольшее.

Точка *C* – точка пересечения прямых $x = 1000$ и $y = 500$, поэтому *C* (1000, 500).

Точка *F* – точка пересечения прямых $x = 1000$ и $x + 5y = 4000$ и, следовательно, имеет координаты (1000, 600).

Точка *D* – точка пересечения прямых $x + y = 1800$ и $y = 500$. Следовательно, *D* (1300, 500).

Точка *E* – точка пересечения прямых $x + y = 1800$ и $x + 5y = 4000$. Рассматривая совместно эти два уравнения, получаем $x = 1250$, $y = 550$.

Имеем

$$\Pi(C)=\Pi(1000,500)=10(1000+4\cdot 500)=30\ 000;$$

$$\Pi(F)=\Pi(1000,600)=10(1000+4\cdot 600)=34\ 000;$$

$$\Pi(D)=\Pi(1300,500)=10(1300+4\cdot 500)=33\ 000;$$

$$\Pi(E)=\Pi(1250,550)=10(1250+4\cdot 550)=34\ 500.$$

Таким образом, наибольшая прибыль достигается при x = 1250 и y = 550, т.е. в фермерском хозяйстве целесообразно (в плане получения наибольшей прибыли) засеять 1250 га первой культурой и 550 га – второй.

2) Решение по максимуму рентабельности.

Для рентабельности имеем формулу (4), откуда

$$y=\frac{5R-1}{4-8R}x \tag{7}$$

или иначе, $y = kx$,

где $k=\dfrac{5R-1}{4(1-2R)}$.

Можно считать, что R не равно 1/2, так как если R = 1/2, то согласно формуле (4) имеем $2x + 8y = 5x + 8y$, т.е. x = 0, что противоречит ограничению $x \geq 1000$. Уравнение (7) представляет собой уравнение пучка прямых, проходящих через начало координат. Выясним, как изменяется k в зависимости от R. Найдем первую производную k по R. Имеем

$$\frac{dk}{dR}=\frac{3}{4(1-2R)^2}.$$

Так как $\dfrac{dk}{dR}>0$, то и $\dfrac{dR}{dk}$ также положительно, увеличение k влечет за собой увеличение R. Так как нам необходимо, чтобы R достигло наибольшего значения, то следует выбрать $k = \mathrm{tg}\alpha$ (рис. 11). Этот угол α будет наибольшим среди углов, образованных осью OX и прямыми, проходящими через начало координат и одну из точек многоугольника. На рисунке видим, что решение получается уже не в точке E, а в точке F. Так как точка F является точкой пересечения прямых x = 1000 и $x + 5y = 4000$, то решая систему, находим координаты точки и тем самым ответ в виде x = 1000 га, y = 600 га.

3) Решение по максимуму прибыли с гектара.

Прибыль с 1 га будет определяться по формуле (5), разрешая которую относительно y, имеем

$$y = kx,$$

где $k=\dfrac{\Pi_1-10}{40-\Pi_1}$.

При этом считаем, что Π_1 не равно 40, в противном случае из формулы (5) следует, что x = 0, что противоречит ограничению $x \geq 1000$. Для производной $\dfrac{dk}{d\Pi_1}$ имеем $\dfrac{dk}{d\Pi_1}=\dfrac{30}{(40-\Pi_1)^2}$, и так как $\dfrac{dk}{d\Pi_1}$, а следовательно и $\dfrac{d\Pi_1}{dk}$ положительны, то для увеличения Π_1 надо увеличивать поворотом луча $y = kx$ против часовой стрелки, т.е. опять получим решение в точке F (рис. 11). Следовательно, решения задачи 2 и 3 совпадают.

Задача решена.

Задачи для самостоятельной работы

5.1 На изготовление одного стола требуется 0,15 м^3 древесины, а одного шкафа 0,2 м^3, причем доход, полученный от реализации одного стола, равен 10 д. е., а одного шкафа 16 д. е. Сколько столов и сколько шкафов нужно изготовить из 60 м^3 древесины, чтобы обеспечить наибольший доход от их реализации?

Указание. **Ограничения имеют вид:**

$$\begin{cases}0{,}15x+0{,}2y=60;\\ x\geq 0, y\geq 0.\end{cases}$$

Целевая функция: $F(x, y) = 10x + 16y$.

5.2 Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики. Имеются ящики трех типов. Ящик первого типа вмещает 70 деталей, второго типа – 40 деталей, третьего типа – 25 деталей. Стоимость пересылки ящика первого типа 20 д. е., 2-го типа 10 д. е., 3-го типа 7 д. е. Какие ящики должны использоваться, чтобы стоимость пересылки была наименьшей. Недогрузка ящиков не допускается.

5.3 На 100 д. е. решено купить елочных игрушек. Елочные игрушки продаются наборами. Набор, состоящий из 35 игрушек стоит 6 д. е., набор, состоящий из 50 игрушек, стоит 10 д. е. Сколько и каких наборов нужно купить, чтобы было куплено наибольшее количество игрушек.

5.4 Известно, что 1 кг вишни содержит 150 мг, а 1 кг абрикосов 75 мг витамина *C*. Сколько вишни и абрикосов следует включить в дневной рацион, чтобы при минимальных затратах в нем оказалось 75 мг витамина *C* и не менее 0,25 кг вишни, если 1 кг вишни стоит 3 д. е., а 1 кг абрикосов 4 д. е.

5.5 Мебельная фабрика выпускает кресла двух видов. На изготовление кресла первого типа расходуется 2 м доски стандартного сечения, 0,8 м^2 обивочной ткани и затрачивается 2 человеко-часа, а на изготовление кресла второго типа соответственно 4 м, 1,25 м^2 и 1,75 человеко-часа. Известно, что цена одного кресла первого типа равна 15 д. е., а второго типа 20 д. е.

Сколько кресел каждого типа нужно выпускать, чтобы стоимость выпускаемой продукции была максимальной, если фабрика имеет в наличии 400 м досок, 1500 м^2 обивочной ткани и может затратить 3200 человеко-часов рабочего времени на изготовление этой продукции?

Указание. Ограничения имеют вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 400; \\ 0{,}8x_1 + 1{,}25x_2 \le 1500; \\ 2x_1 + 1{,}75x_2 \le 3200. \end{cases}$$

Целевая функция: $F(x_1, x_2) = 15x_1 + 20x_2$.

5.6 Хозрасчетной бригаде выделено для возделывания кормовых культур 100 га пашни. Эту пашню предполагается занять кукурузой и свеклой, причем свеклой решено занять не менее 40 га. Как должна быть распределена площадь пашни по культурам, чтобы получилось наибольшее число кормовых единиц? При этом должно быть учтено следующее: 1 ц кукурузного силоса содержит 0,2 ц кормовых единиц, 1 ц свеклы 0,26 ц кормовых единиц, на возделывание 1 га кукурузного и свекольного поля затрачивается соответственно, 43 и 158 человеко-часов, ожидаемый урожай кукурузы 500 ц с 1 га, а свеклы 200 ц с 1 га и, наконец, всего на возделывание кормовых культур можно затратить 4000 человеко-часов труда.

Указание. Ограничения имеют вид:

$$\begin{cases} x + y \le 100; \\ 43x + 158y \le 4000; \\ y \ge 40; \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Целевая функция: $F(x, y) = 500 \cdot 0{,}2x + 200 \cdot 0{,}26y = 100x + 52y$.

5.7 В одном населенном пункте живет больше людей, чем в другом.

В каком месте следует построить школу, чтобы общие затраты на перевозку детей были минимальными, если эти затраты пропорциональны как количеству детей, так и расстоянию от населенного пункта до школы?

5.8 На велосипедном заводе выпускаются гоночные и дорожные велосипеды. Производство построено так, что вместо двух дорожных велосипедов завод может выпустить один гоночный, который приносит в 1,5 раза больше прибыли, чем один дорожный. Завод может произвести 700 дорожных велосипедов в день, однако, склад может принять не более 500 велосипедов в день.

Сколько нужно выпускать в день гоночных и сколько дорожных велосипедов для того, чтобы завод получал максимальную прибыль?

5.9 В данном месяце завод может производить изделия двух видов *A* и *B* из материала, запас которого ограничен 36 т. На каждое изделие *A* затрачивается 4 т материала, на изделие *B* – 0,8 т. Каждое изделие *A* стоит 2000 д. е., изделие *B* – 300 д. е.

Какой должна быть производственная программа завода, чтобы доход от продажи продукции был наибольшим?

5.10 Для изготовления изделий вида A и B заводу необходимо 1,5 т стали. Затраты стали в килограммах и прибыль в д. е. на одно изделие указаны в следующей таблице.

Изделие	A	B
Затраты	3	5
Прибыль	4	5

Определите план выпуска продукции, при котором может быть достигнута наибольшая прибыль.

5.11 В корме для цыплят должно ежедневно содержаться не менее 10 единиц жиров, не менее 8 единиц белков, не менее 42 единиц углеводов и не менее 20 единиц витаминов. Единица массы комбикорма стоимостью 4 д. е. содержит этих веществ соответственно 2, 1, 3 и 1 единицу; единица массы измельченной соломы стоимостью 3 д. е. – соответственно 1, 1, 7 и 5.

Сколько необходимо иметь единиц массы комбикорма и измельченной соломы, чтобы была удовлетворена потребность в жирах, белках, углеводах и витаминах и стоимость корма была наименьшей?

5.12 Совхозу требуется не более 10 трехтонных автомашин и не более 8 пятитонных. Отпускная цена машины первой марки 2000 д. е., второй марки 4000 д. е. Совхоз может выделить для приобретения машин 40 000 д. е.

Сколько следует приобрести автомашин каждой марки в отдельности, чтобы их общая (суммарная) грузоподъемность была максимальной.

5.13 В строительном тресте 2 тяжелых и 10 легких экскаваторов. Необходимость в них есть на трех карьерах, выработка на которых (в м^3 за сутки на каждый тип экскаватора) соответственно равна: (150, 40), (180, 25), (200, 30). На один карьер можно направить не более 5 экскаваторов. Составьте и решите задачу определения числа тяжелых и легких экскаваторов, направляемых на каждый карьер, если требуется максимизировать суммарную суточную выработку всех экскаваторов.

5.14 Составьте задачу для нахождения минимального количества листов жести 13×6 м, если требуется не менее 40 листов 2×3 м и 60 листов 5×5 м. Рассмотрите всевозможные способы раскроя больших листов жести на средние и маленькие и найдите ответ к этой задаче.

5.15 Собственные средства банка в сумме с депозитами составляют 100 000 000 руб. Часть этих средств, но не менее 35 000 000 руб., должна быть размещена в кредитах. Кредиты являются неликвидными активами банка, так как в случае непредвиденной потребности в наличных деньгах обратить кредиты в деньги без существенных потерь невозможно.

В отличие от кредитов ценные бумаги можно продать в любой момент, получив некоторую прибыль, или без большого убытка.

Существует правило, согласно которому банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные активы – ценные бумаги, чтобы компенсировать неликвидность кредитов. Данный банк использовал следующее ограничение: ценные бумаги должны составлять не менее 30 % средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах.

При каких объемах средств, размещенных в кредитах и вложенных в ценные бумаги, банк получит максимальную прибыль от кредитов и ценных бумаг, если доходность кредитов составляет 0,15, а доходность ценных бумаг – 0,1?

5.16 Мебельный цех имеет 1 м^3 досок, из которых надо изготовить табуретки и столы. Известно, что на изготовление табуретки расходуется 0,0125 м^3, а на изготовление стола – 0,05 м^3 досок. При этом на изготовление табуретки расходуется 2, а стола – 3 человеко-часа, а продаются они по цене, соответственно, 90 и 400 руб.

Сколько необходимо изготовить табуреток и столов, чтобы, располагая резервом в 90 человеко-часов, получить максимальную прибыль?

5.17 Для изготовления открытого деревянного ящика с перегородкой посредине нужно вырезать из толстой фанеры (рис. 12) одну заготовку для дна (деталь A), две одинаковые заготовки для боковин (деталь $Б$) и три одинаковые заготовки для боковин и перегородки (детали B). Имеющиеся на мебельном комбинате листы фанеры таковы, что при первом способе раскроя (рис. 13) из одного листа можно изготовить одну деталь типа A, четыре детали типа $Б$ и восемь типа B, а при втором способе (рис. 14) три детали типа A, две типа $Б$ и две типа B.

Можно ли, имея 180 листов фанеры, изготовить 200 ящиков? Как осуществить раскрой материала, чтобы было использовано наименьшее число листов фанеры?

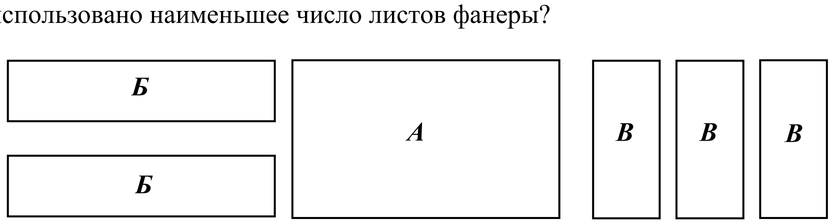


Рис. 12

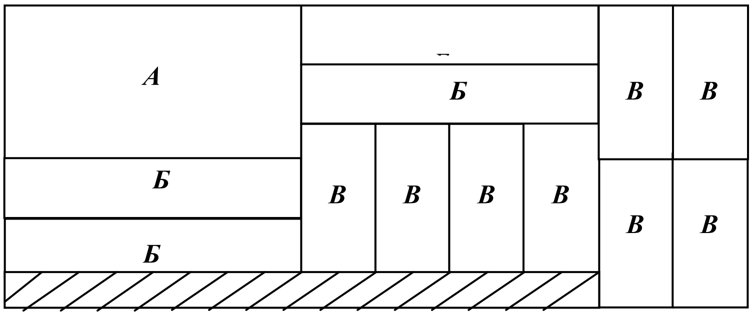


Рис. 13

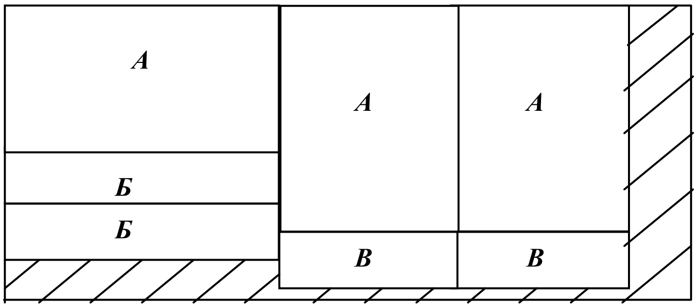


Рис. 14

5.18 На фабрике для производства двух видов продукции используется три вида сырья: *А*, *В* и *С*. Оно имеется на фабрике в следующих количествах: 13 единиц вида *А*, 9 единиц вида *В* и 8 единиц вида *С*. Потребности в этих видах сырья при производстве продукции *1* и *2* даны в таблице в тех же условных единицах.

Сырье / Продукция	*А*	*В*	*С*
1	2	0	2
2	2	3	0

Прибыль, получаемая фабрикой от реализации условных единиц продукции вида *1*, равна 3 тыс. руб., а вида *2* – 4 тыс. руб. Спланируйте работу фабрики так, чтобы обеспечить ей наибольшую прибыль.

5.19 Предприятие должно выпускать два вида продукции, используя при этом последовательно четыре различные группы производственного оборудования. Выпуск одного комплекта продукции *А* обеспечивает предприятию прибыль 2 тыс. руб., продукции *В* – 3 тыс. руб. Фонд времени работы (в днях) каждой группы оборудования и трудоемкость (также в днях) изготовления комплектов продукции обоих видов характеризует следующая таблица.

Группа производственного оборудования	Норма времени на выпуск одного комплекта продукции		Фонд времени
	А	*В*	
I	3	3	15
II	2	6	18
III	4	0	16
IV	1	2	8

Разработать такой план производства, который обеспечивает наибольшую прибыль для предприятия.

Оглавление