Министерство образования Российской Федерации
Тамбовский государственный технический университет

РЯДЫ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методические разработки
для студентов 2 курса заочного отделения

Тамбов • Издательство ТГТУ • 2002

УДК 517.537:511.37:519.22/25(07)
ББК В17 я73-5
Н34

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Р е ц е н з е н т
Кандидат технических наук, доцент ТГТУ
В. И. Галаев

Н34   **Ряды. Теория вероятностей и математическая статистика:** Учебно-метод. разработки / Сост. А. Д. Нахман. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2002. 32 с.

Изложены основные теоретические сведения, типовые задачи (с образцами решений) и контрольные задания по курсу "Числовые и функциональные ряды. Элементы теории вероятностей и математической статистики".

Предназначены для студентов 2 курса заочного отделения.

УДК 517.537:511.37:519.22/25(07)
ББК В17 я73-5

РЯДЫ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

• Издательство ТГТУ •

Учебное издание

РЯДЫ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методические разработки

Составитель
НАХМАН Александр Давидович

Редактор Т. М. Глинкина
Компьютерное макетирование И. В. Евсеевой

Подписано к печати 16.12.2002
Гарнитура Times New Roman. Формат 60 × 84/16. Бумага газетная.
Печать офсетная. Объем: 1,86 усл. печ. л.; 1,9 уч.-изд. л.
Тираж 200 экз. С. 778

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методические разработки содержат основные сведения по следующим разделам курса математики: "Числовые ряды", "Степенные ряды", "Ряды Фурье", "Элементы теории вероятностей и математической статистики". Предложены типовые задачи и образцы их решений, ознакомившись с которыми, следует приступать к выполнению контрольных заданий. Контрольные работы № 10, 11, 12 содержат по 5 заданий, номера которых определяет кафедра (в соответствии с учебным номером студента).

I. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1°. Основные понятия. Пусть дана бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$. Числовым рядом называется формально составленная бесконечная сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad . \tag{1}$$

Ряд (1) называется сходящимся (и имеющим сумму S), если существует и конечен предел вида

$$S = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) ,$$

и расходящимся в противном случае.

2°. Достаточный признак расходимости ряда. Если

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 ,$$

то ряд (1) расходится. В случае же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся (его поведение зависит от вида последовательности $\{a_n\}$).

3°. "Обобщенный гармонический ряд"

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \ \ldots \ + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

является сходящимся при $p > 1$ и расходящимся при $p \leq 1$.

4°. Достаточные признаки Даламбера и Коши сходимости рядов с положительными членами. Пусть дан ряд (1), в котором $a_n > 0$.

Признак Даламбера. Если существует предел вида

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} ,$$

то при $D < 1$ ряд – сходящийся, при $D > 1$ – расходящийся.

Признак Коши. Если существует предел вида

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} ,$$

то при $K < 1$ ряд – сходящийся, при $K > 1$ – расходящийся.

З а м е ч а н и е. В случаях $D = 1$ или $K = 1$ соответствующий признак не дает ответа на вопрос о сходимости ряда; требуется применить другие признаки.

5°. Признак сравнения знакоположительных рядов. Предположим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \ b_n > 0 \ \ (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

имеет заранее известное поведение и существует предел вида

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} .$$

Если $L \neq 0$ и $L \neq \infty$, то поведение ряда такое же, как и ряда (2).

З а м е ч а н и е. Ряд (2), определяющий поведение данного ряда, называют эталонным. Часто в качестве эталона выбирают обобщенный гармонический ряд.

6°. Достаточный интегральный признак (Коши) сходимости знакопо-ложительных рядов. Построим функцию $f(x)$, заменив n на x в аналитическом выражении общего члена a_n.

Если $f(x)$ непрерывна и убывает на $[1; +\infty)$, то знакоположительный ряд является сходящимся в случае сходимости несобственного интеграла

$$J = \int_1^{\infty} f(x)dx , \tag{3}$$

(то есть в случае, если J – число). Если же интеграл (3) является расходящимся ($J=+\infty$), то ряд расходится. Если члены ряда нумеруются, начиная с $n=\ell$ ($\ell>1$), то интеграл вида (3) берется по $x\in\left[\ell;\infty\right)$.

7°. Сравнительная характеристика признаков. При исследовании конкретного ряда следует удачно выбрать соответствующий признак. Здесь можно пользоваться следующими рекомендациями:

1) если члены ряда быстро убывают (растут), то бывает эффективен признак Даламбера;

2) если выражение для a_n имеет вид блока в степени, кратной n (так что легко извлекается корень n-й степени), то эффективен признак Коши;

3) если выражение для a_n содержит арифметические действия над степенными функциями, то при больших значениях n члены ряда ведут себя как $\dfrac{1}{n^p}$, и, следовательно, в качестве эталона для сравнения выбирают обобщенный гармонический ряд с соответствующим значением p . Обычно эффективен признак сравнения в предельной форме;

4) если для функции $f(x)$, полученной при замене n на x в выражении a_n, достаточно легко вычисляется первообразная $F(x)$, то бывает эффективен интегральный признак.

Указанные рекомендации не охватывают, естественно, все возможные случаи и служат лишь в качестве наводящих соображений.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Исследовать сходимость ряда:

$$\text{а) }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)5^n}{n^2}\,;\quad \text{б) }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+2}\,;\quad \text{в) }\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}\,.$$

Р е ш е н и е: а) Общий член знакоположительного ряда

$$a_n=\frac{(2n+1)5^n}{n^2}$$

содержит множителем показательную функцию. Согласно п. 7°, целесообразно применить признак Даламбера (4°). Найдем a_{n+1}, взяв $(n+1)$ вместо n в аналитическом выражении для a_n:

$$a_{n+1}=\frac{(2(n+1)+1)5^{n+1}}{(n+1)^2}=\frac{(2n+3)5^{n+1}}{(n+1)^2}\,.$$

Теперь вычисляем соответствующий предел:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)5^{n+1}}{(n+1)^2}:\frac{(2n+1)5^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\frac{5^{n+1}}{5^n}=$$

$$=5\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}\left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^2=5\cdot\frac{2}{2}\cdot 1=5>1.$$

Имеем: $D>1$; согласно признаку Даламбера, ряд расходится.

б) Имеем, очевидно, ряд с положительными членами. При больших значениях n поведение общего члена a_n определяется старшими степенями n (см. п. 7°). Выбираем эталон для сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\ \left(\text{поскольку } a_n\approx\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{n^{3/2}}\ \text{ при } n\to\infty\right);$$

этот ряд – сходящийся $p=3/2>1$. Согласно признаку сравнения в предельной форме (п. 5°, б)) находим

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+2}:\frac{1}{n^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{2}{n^2}}=1.$$

Поскольку $L=1$, то есть $L\neq 0$, $L\neq\infty$, то поведение исходного ряда – такое же, как и эталонного. Итак, ряд сходится.

в) функция $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ непрерывна при $x\geq 3$ и убывает с ростом x (так как растет знаменатель дроби). Применяем интегральный признак

$$J=\int_3^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_3^{\infty}\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln\left|\ln x\right|\Big|_3^{\infty}=\ln(\ln\infty)-\ln(\ln 3)=\ln\infty-\ln(\ln 3)=\infty\,.$$

Несобственный интеграл оказался расходящимся; следовательно ряд – расходится.

Перейдем к рассмотрению рядов с произвольными членами.

8°. Достаточный признак сходимости. Если дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \ (u_n – \text{произвольны, } n = 1, 2, ...) \tag{4}$$

и если ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \tag{5}$$

сходящийся, то и данный ряд (4) – сходящийся. Его сходимость в этом случае называется *абсолютной* (согласно этому определению сходимость ряда с положительными членами есть сходимость абсолютная).

Однако возможен случай, когда ряд (4) – сходящийся, тогда как соответствующий ряд из модулей (5) – расходится. Сходимость ряда (4) в этом случае называется *условной*.

Возможен, конечно, и третий случай – ряд (4) – расходящийся.

Исследование обычно начинают с рассмотрения ряда из модулей. В случае его сходимости делают вывод: данный ряд сходится абсолютно. Иначе (расходимость (8)) ряд (7) абсолютной сходимостью не обладает. Чтобы проверить, обладает ли он условной сходимостью (или расходится), следует обратиться к исследованию данного ряда (7).

В случае "чередования знаков" его членов используют следующий результат.

9°. Достаточный призрак Лейбница сходимости знакочередуюшихся рядов. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n , \qquad u_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{6}$$

Если (с ростом n) последовательность $\{u_n\}$ – убывающая и

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 , \tag{7}$$

то ряд (6) сходится.

Заметим, что:

а) признак не указывает на характер сходимости (абсолютная или условная) ряда (4);

б) если условие (7) не выполнено (см. п. 2°), то ряд (4) – расходящийся.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Исследовать ряд на абсолютную (условную) сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{12\sqrt{n}+5} .$$

Р е ш е н и е. Имеем знакочередующийся ряд. Ряд из модулей имеет общий член

$$a_n = \frac{\left|(-1)^n\right|}{12\sqrt{n}+5} = \frac{1}{12\sqrt{n}+5} .$$

Применив признак сравнения в предельной форме (п. 7°, 5°) к полученному знакоположительному ряду, убеждаемся, что он расходится.

.

Последовательность $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{1}{12\sqrt{n}+5}$, убывает с ростом n (так как знаменатель дроби растет, а числитель постоянен) и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{12\sqrt{n}+5} = 0 .$$

Следовательно (согласно признаку Лейбница), ряд сходится. Поскольку абсолютной сходимостью он не обладает, то сходится условно.

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

10°. Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{n-0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots ,$$

построенный по степенным функциям $y = x^n$ и заданной числовой последовательности $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Он является важнейшим представителем функциональных рядов. Точка $x = x_0$ называется точкой сходимости, если соответствующий числовой ряд сходится. Областью сходимости степенного ряда, то есть совокупностью всех его точек сходимости, является интервал с центром в начале координат радиуса R ("радиус сходимости"), то есть $(–R, R)$ либо $[–R, R)$, $(–R, R]$, $[–R, R]$. Вне этого интервала степенной ряд расходится.

Заметим, что в интервале $(-R, R\,)$ степенной ряд сходится абсолютно.

11°. Рассмотрим задачу: функцию $y = y(x)$, дифференцируемую сколь угодно много раз в точке x_0 и некоторой ее окрестности $(–R, R)$, представить в виде суммы степенного ряда:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n, \qquad x\in(-R,\ R)\ .$$

Оказывается, что такое представление (разложение), если оно возможно, должно иметь вид

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots\ . \tag{8}$$

Разложение (8) называется рядом Маклорена. Для основных элементарных функций справедливы следующие представления в виде суммы соответствующих рядов Маклорена (параметр n в общем члене каждого ряда принимает значения 0, 1, 2, ...):

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots; \qquad x\in(-\infty,\infty)\ ;$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\ ; \qquad x\in(-\infty;\infty)\ ;$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\ ; \qquad x\in(-\infty;\infty)\ ;$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots; \qquad x\in(-1;\ 1);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots; \qquad x\in(-1;\ 1]\ . \tag{9}$$

12°. Разложения Маклорена многих элементарных функций могут быть получены из указанных, если воспользоваться свойствами сходящихся рядов (одновременное умножение всех членов ряда и его суммы на число; одновременное сложение суммы ряда и любого из его членов с некоторым числом; почленное сложение рядов и др.). Кроме того, в интервале сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать степенные ряды. В частности, возможно почленное интегрирование ряда (8) по всему промежутку [a, b], целиком содержащемуся в соответствующем интервале значений x.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Разложить функцию в ряд Маклорена

$$y=\frac{x}{2}-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right).$$

Р е ш е н и е. За основу, очевидно, следует взять разложение (9). Заменяя в нем x на $-\frac{x}{2}$, и при этом требуя, чтобы аргумент содержался в интервале (–1, 1], то есть

$$-1<-\frac{x}{2}\le 1,\ \text{или}\ \ -2\le x<2,$$

получаем:

$$\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)=-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(-\frac{x}{2}\right)^3-\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}\left(-\frac{x}{2}\right)^{n+1}+\ldots\ .$$

Чтобы получить разложение функции $y=\frac{x}{2}-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$, последовательно рассмотрим $\left(-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)\right)$ и $y=-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}$.

Умножим обе части последнего разложения на (-1) и прибавим к обеим частям выражение $\frac{x}{2}$:

$$\frac{x}{2}-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)=x+\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\frac{x^3}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}+\ldots\ .$$

Это соотношение справедливо при $-2\le x<2$.

2. , . , (0,001).

$$\int_0^1\frac{\sin x^2-x^2}{x^6}dx\ .$$

Р е ш е н и е . Задачу можно решить по следующей схеме:

а) воспользоваться разложением $y=\sin x$, заменив в нем x на x^2;

б) прибавить $(-x^2)$ к обеим частям полученного разложения;

в) умножить обе части разложения на $\frac{1}{x^6}$ (см. замечание ниже);

г) почленно проинтегрировать полученный ряд по отрезку [0; 1];

д) произвести приближенные вычисления.

Последовательно имеем:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{\left(x^2\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots ; x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\sin x^2 - x^2 = -\frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \ldots ;$$

$$\frac{\sin x^2 - x^2}{x^6} = -\frac{1}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n-4}}{(2n+1)!} + \ldots ;$$

$$\tau = \int_0^1 \frac{\sin x^2 - x^2}{x^6} dx = -\int_0^1 \frac{1}{3!} dx + \int_0^1 \frac{x^4}{5!} dx - \int_0^1 \frac{x^8}{7!} dx + \ldots + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{4n-4}}{(2n+1)!} dx + \ldots .$$

Осталось вычислить интегралы:

$$\tau = -\frac{1}{3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{9 \cdot 7!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(4n-3)(2n+1)!} + \ldots ;$$

$$\tau \approx -0{,}167 + 0{,}002 - 0{,}000 = -0{,}165.$$

З а м е ч а н и е. В точке $x = 0$ значение функции $y = \frac{\sin x^2 - x^2}{x^6}$ доопределяется суммой соответствующего степенного ряда, то есть значе- нием $\left(-\frac{1}{6}\right)$.

3. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ задачи Коши

$$\begin{cases} y' = 1 + e^{-y} + xy; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Разложение в степенной ряд всякой (дифференцируемой сколь угодно много раз) функции (если это разложение возможно), должно иметь вид (8). Поэтому достаточно найти лишь его коэффициенты

$$a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!},$$

то есть определить числа $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$ и т.д. Значение $y(0) = 0$ – дано; зависимость y' от x и y известна:

$$y' = 1 + e^{-y} + xy .$$

В точке $x = 0$ имеем:

$$y'(0) = 1 + e^{-y(0)} + 0 \cdot y(0) = 1 + e^0 = 2.$$

Далее,

$$y'' = \left(1 + e^{-y} + xy\right)' = 0 + e^{-y}(-y)' + x'y + xy' = -e^{-y}y' + y + xy'$$

(использована формула дифференцирования сложной функции, поскольку y является функцией от x). Подставляя $x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, получаем:

$$y''(0) = -e^0 \cdot 2 + 0 + 0 = -2 .$$

Осталось найти еще один ненулевой коэффициент. Имеем:

$$y''' = \left(-e^{-y}y' + y + xy'\right) = -\left(e^{-y}(-y)'y' + e^{-y}(-y')'\right) + y' + x'y' + x(y')' =$$
$$= e^{-y}(y')^2 - e^{-y}y'' + 2y' + xy''$$

и $$y'''(0) = e^0 \cdot 2^2 - e^0(-2) + 2 \cdot 2 + 0 = 10.$$

Подставляя найденные значения в разложение (13), получаем

$$y(x) = 2x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \ldots .$$

13°. Рассмотрим теперь последовательность $\{z^n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ степенных функций переменного $z = x + yi$ (где $x, y \in R$, $i^2 = -1$) и произвольную последовательность $\{a_n\}$ комплексных чисел; $n = 0, 2, \ldots$ Ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

называется степенным. При каждом значении z ряд обращается в числовой с комплексными членами, определение сходимости и суммы которого дается в точности так же, как в п. 1°. Областью сходимости степенного ряда является круг $|z| < R$ некоторого радиуса R с центром в начале координат. Как оказывается, внутри этого круга он сходится абсолютно, вне круга – расходится, возможны случаи круга сходимости "нулевого радиуса" (единственной точкой сходимости служит $z_0 = 0$) и "бесконечного радиуса" (областью сходимости является вся комплексная плоскость).

Радиус сходимости можно найти по одной из формул

$$R = \frac{1}{D} \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{K},$$

где D и K – соответственно, числа Даламбера и Коши (см. п. 4°).

Найти круг сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2n+3}.$$

Р е ш е н и е. Запишем общий член ряда в виде $\frac{1}{2n+3} z^n$;

можно считать, что $a_0 = 0;\quad a_n = \frac{1}{2n+3};\ n = 1, 2, \ \dots$. Число Даламбера

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)+3} : \frac{1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+5} = 1;$$

теперь $R = \frac{1}{D}$, т.е. $R = 1$. Круг сходимости определяется неравенством $|z| < 1$.

14°. За основу определений основных элементарных функций комплексной переменной возьмем разложения в степенные ряды соответствующих функций действительного переменного, в котором формально "x" заменено на "z"; например,

$$\frac{1}{1+z} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots; \quad |z| < 1. \tag{10}$$

Определенные соответствующими соотношениями функции служат примером так называемых аналитических функций комплексного переменного. Вообще, элементарная функция комплексного переменного называется аналитической в области G, если в каждой точке этой области существует ее производная (определение и правила дифференцирования формулируются точно так же, как для функции действительного переменного). Точка z_0, в которой функция $f(z)$ неаналитична, называется ее особой точкой. Например, функция $\frac{1+z^2}{z}$ обладает особой точкой $z_0 = 0$ (в ней функция даже не определена). В общем случае разложение по степеням z имеет вид

$$f(z) = \dots + c_{-m} z^{-m} + c_{-m+1} z^{-m+1} + \dots + c_{-2} z^{-2} + c_{-1} z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n .$$

Члены с отрицательными степенями z образуют так называемую главную часть степенного ряда; при $m > 0$ (главная часть содержит какие-либо члены) точка $z_0 = 0$ служит особой точкой $f(z)$.

Если $C_{-n} \neq 0$, тогда как $C_{-m} = 0 \ (m > n)$, то z_0 называют полюсом n-го порядка.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Разложить в ряд по степеням z данную функцию комплексного переменного. Выяснить характер особой точки $z = 0$.

$$f(z) = \frac{4}{z^2(2+z)}.$$

Р е ш е н и е . Воспользуемся базовым разложением (10). Для этого $f(z)$ запишем в соответствующем виде:

$$f(z) = \frac{4}{z^2 \cdot 2\left(1 + \frac{z}{2}\right)} = \frac{2}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}}.$$

Выбирая аргументом значение $\frac{z}{2}$ и умножая обе части на $\frac{z}{2}$, имеем при $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$

$$\frac{2}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} = \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{2^n} \cdot \frac{2}{z^2} + \dots,$$

т.е.

$$f(z) = \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \dots + (-1)^n \frac{z^{n-2}}{2^{n-1}} + \dots$$

для всех $z \neq 0$ из круга $|z| < 2$; особая точка $z = 0$ является плюсом порядка $m = 2$.

РЯДЫ ФУРЬЕ

15°. Функция $f(x)$, заданная на $(-\pi, \pi)$ и 2π-периодическим образом продолженная на всю числовую ось, имеет разложение в ряд по простейшим тригонометрическим функциям (синусам и косинусам) в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (11)$$

с коэффициентами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx; \quad n = 1, 2, \ldots ;$$

предполагается пока, что указанное разложение возможно; (11) называется рядом Фурье.

Пусть $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям (условия Дирихле):

а) $f(x)$ непрерывна на $(-\pi, \pi)$ или имеет на $(-\pi, \pi)$ лишь конечное количество разрывов и только первого рода (разрывы первого рода могут быть и в концевых точках $x = \pm\pi$);

б) $f(x)$ не имеет экстремумов на $(-\pi, \pi)$ или имеет лишь конечное их количество.

Тогда ряд (11) является сходящимся в каждой точке $x \in (-\pi, \pi)$ и его сумма совпадает со значениями $f(x)$ в тех точках x, где функция $f(x)$ непрерывна. В точках же $x = x_0$ разрыва первого рода сумма $S(x_0)$ ряда Фурье есть

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right),$$

где $f(x_0 - 0)$ – левосторонний предел $f(x)$ в точке x_0; $f(x_0 + 0)$ – соответствующий правосторонний предел.

16°. Ряд Фурье функции $f(x)$, 2ℓ -периодическим образом продолженной с основного интервала $(-\ell, \ell)$, $\ell \neq \pi$, имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi}{\ell}nx + b_n \sin\frac{\pi}{\ell}nx ;$$

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nxdx; \quad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi}{\ell}nxdx.$$

Условия п. 15° сходимости ряда Фурье сохраняются и в применении к интервалу $(-\ell, \ell)$.

17°. Задача о разложении в ряд Фурье значительно упрощается, если $f(x)$ *четна* $(f(-x) = f(x))$ или *нечетна* $(f(-x) = -f(x))$ на основном интервале. Так,

а) если $f(x)$ четна на $(-\ell, \ell)$, то

$$b_n = 0; \quad a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx; \quad a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nxdx; \quad n = 1, 2, \ldots ;$$

ряд Фурье содержит, таким образом, только косинусы.

б) если $f(x)$ нечетна на $(-\ell, \ell)$, то

$$a_0 = 0; \quad a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi}{\ell}nxdx; \quad n = 1, 2, \ldots ;$$

то есть разложение – лишь по синусам.

Указанные формулы справедливы, конечно, и при $\ell = \pi$ (случай п. 15°).

В случае, когда *f*(*x*) задается на интервале $(0, \ell)$, она может быть продолжена в симметричный интервал $(-\ell, 0)$ как четным образом (если предполагается разложить ее в ряд по косинусам), так и нечетным (разложение по синусам).

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, \; -\pi < x < 0; \\ 0, \;\; 0 \le x < \pi \end{cases}$$

в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$.

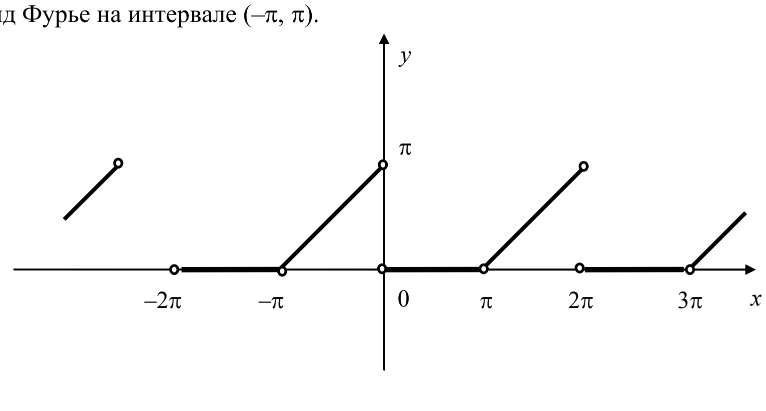

Рис. 1

Р е ш е н и е. На рис. 1 изображен график данной функции, продолженной на всю числовую ось 2π-периодическим образом.

Найдем коэффициенты ряда. Поскольку $f(x)$ меняет аналитическое выражение при переходе через точку $x = 0$, то интеграл по $(-\pi, \pi)$ представляем в виде суммы интегралов по $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} 0\cdot\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)\cos nx dx.$$

Интегрируя по частям $\left(u = \pi + x;\ du = dx;\ dv = \cos nx dx;\ v = \frac{\sin nx}{n}\right)$, имеем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left((\pi + x)\frac{\sin x}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{\sin x}{n}dx\right) = \frac{1}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} =$$

$$= \frac{1 - \cos n\pi}{\pi n^2} = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2}.$$

Здесь и в дальнейшем используются очевидные соотношения:

$$\sin 0 = 0; \quad \cos 0 = 1; \quad \sin n\pi = 0; \quad \cos n\pi = (-1)^n; \quad n = 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Результат не проходит при $n = 0$ (n содержится в знаменателе); следовательно, вычисляем a_0 отдельно:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)dx + \int_{0}^{\pi} 0dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\pi x\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2}x^2\Big|_{-\pi}^{0}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогичным образом получаем: $b_n = -\frac{1}{n}$. Пользуясь найденными значениями a_0, a_n, b_n, запишем ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2}\cos nx - \frac{1}{n}\sin nx.$$

Осталось исследовать сходимость ряда. Условия Дирихле для данной $f(x)$, очевидно, выполнены. Сумма ряда $S(x)$ во всех точках $x \in (-\pi, \pi)$, где функция непрерывна (то есть в точках $x \neq 0$), совпадает с соответствующими значениями $f(x)$ (то есть $S(x) = \pi + x$ при $-\pi < x < 0$ и $S(x) = 0$ при $0 < x < \pi$). В точке разрыва I рода $x_0 = 0$ имеем (см. рис. 1)

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0}(\pi + x) = \pi;$$

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} 0 = 0.$$

Следовательно, $S(0) = \frac{1}{2}(\pi + 0) = \frac{\pi}{2}$.

II. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1°. Основными понятиями теории вероятностей являются понятия события и его вероятности. Случайным называется такое событие, которое (при осуществлении некоторых условий) как результат опыта может произойти или не произойти. Каждому опыту сопоставим множество всех элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, дающее полную информацию о предполагаемых результатах. Здесь ω_i удовлетворяют следующим условиям:

а) обязательно произойдет один из исходов ω_i (то есть имеется "полная группа" результатов ω_i);

б) ω_i, ω_k для всех i, k, $i \neq k$ несовместны, то есть появление одного исхода исключает возможность появления другого;

в) ω_i – равновозможны.

Среди элементов множества Ω имеются исходы, благоприятствующие событию A, то есть те, в результате которых событие A наступает.

2°. Вероятностью (классической вероятностью) события A называется отношение числа m благоприятных результатов к числу n всевозможных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Для вычисления количества всевозможных и благоприятных исходов опыта часто пользуются следующими формулами комбинаторики.

3°. Рассмотрим произвольную совокупность из N элементов и всевозможные выборки (подмножества), содержащие k элементов; $1 \le k \le N$.

Упорядоченные выборки (важен порядок следования элементов в наборе) называют размещениями; число всевозможных размещений из N по k элементов вычисляется по формуле

$$A_N^k = \frac{N!}{(N-k)!}.$$

В частности, размещения из N по N элементов называют перестановками; число всевозможных перестановок

$$P_N = N!$$

Неупорядоченные выборки (порядок следования элементов неважен) называют сочетаниями; число всевозможных сочетаний из N по k есть

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}.$$

4°. Суммой n событий A_1, A_2, ..., A_n называется событие B, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий. Обозначение:

$$B = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{k=1}^{n} A_k.$$

Произведением n событий A_1, A_2, … , A_n называется событие B, состоящее в совместном появлении этих событий. Обозначение:

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n.$$

Случайные события A_1, A_2, ..., A_n называются несовместными, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Событие A и $\overline{A}$ называются противоположными, если они несовместны и образуют полную группу.

5°. Теоремы сложения и умножения вероятностей событий.

1) Если A и B несовместны, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

2) Если события A и $\overline{A}$ противоположны, то

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

3) Пусть $P_A(B)$ означает вероятность события B, вычисленную при условии, что A произошло, тогда

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Если же вероятность события B постоянна в условиях данного опыта (не зависит от наступления или ненаступления A), то A и B называются независимыми событиями; тогда

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

4) Если A и B совместны, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. В урне 6 белых и 4 черных шара. Наудачу извлекли два шара. Найти вероятность следующих событий:

а) оба шара белых;

б) только один шар белый;

в) хотя бы один шар белый.

Р е ш е н и е: а) Событие A – оба извлеченных шара белые. Исходы опыта – выборки.

Используем (1) и комбинаторные формулы. Так как набор из двух шаров неупорядочен, то число возможных исходов $n = C_{10}^2 = \frac{10!}{8!2!} = 45$. Число благоприятных исходов $m = C_6^2 = \frac{6!}{4!2!} = 15$ (выбор двух шаров из шести белых). Следовательно,

$$P(A) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$

б) Событие B – только один извлеченный шар белый, тогда $m = m_1 m_2 = 6 \cdot 4 = 24$:

$$P(B)=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}.$$

в) C – хотя бы один шар белый. Противоположным к C является событие $\overline{C}$ – оба шара черных. Следовательно,

$$P(\overline{C})=P(\overline{A}_1)\,P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{15},\;\; P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}.$$

6°. Формула Бернули (повторные испытания). Рассмотрим задачу: имеется n испытаний (событий). Вероятность появления события A в каждом отдельном испытании постоянна и равна p. Тогда вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится ровно k раз в n испытаниях, можно найти по формуле Бернулли

$$P_n(k)=C_n^k P^k q^{n-k},\quad \text{где}\quad q=1-p\,. \tag{2}$$

7°. При больших значениях n и $0 < p < 1$ значение $P_n(k)$ можно приближенно вычислить по "локальной" формуле Лапласа

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)\,,$$

где

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}};\quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Значения функции $\varphi(x)$ находятся по таблицам, имеющимся во многих учебных пособиях. При этом используется четность функции φ: $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Если количество n опытов велико, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A произойдет не менее k_1 и не более k_2 раз, можно найти по интегральной формуле Лапласа

$$P_n(k_1,\,k_2)\approx\Phi(x_1)-\Phi(x_2)\,,$$

где

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}};\quad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}};\quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Значения $\Phi(x)$ находят по таблицам. При этом используется нечетность $\Phi(x)$:

$$\Phi(-x)=-\,\Phi(x).$$

8°. Если вероятность P появления события A в каждом из n опытов мала (n – велико) и $\lambda = nP$, то

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\ \text{(формула Пуассона)}.$$

9°. Рассмотрим так называемый поток событий, т.е. последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени. Предположим, что вероятность $p_t(k)$ появления ровно k событий за промежуток времени длительности t зависит только от k и t (свойство "стационарности"). При этом считаем, что указанная вероятность не зависит от того, появились или не появились события потока в момент времени, предшествовавшие началу рассматриваемого промежутка t ("отсутствие последствия") и что вероятность появления за малый промежуток времени более одного события пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью появления только одного события (свойство "ординарности"). Поток, обладающий указанными свойствами, называется простейшим (пуассоновским), а его интенсивностью λ называется среднее число событий, которые появляются в единицу времени. Если λ – постоянна, то $p_t(k)$ определяется формулой Пуассона

$$p_t(k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\,.$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Найти вероятность того, что событие A появится в пяти независимых опытах: а) два раза; б) менее двух раз, если вероятность появления события A в одном опыте $p=0{,}4$.

Р е ш е н и е. а) Пусть событие B состоит в появлении A ровно два раза в пяти опытах. Тогда по формуле (2)

$$P(B)=P_5(2)=C_5^2(0{,}4)^2\cdot(0{,}6)^2=0{,}3456.$$

б) Если событие C означает появление A менее двух раз, то есть или ни разу ($k = 0$) или один раз ($k = 1$), то

$$P(C)=P_5(k=0\ \text{ или }\ k=1)=P_5(0)+P_5(1)=C_5^0\cdot 0{,}4^0\cdot 0{,}6^5+C_5^1\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^4=$$
$$=0{,}14256+0{,}4752=0{,}61776.$$

2. Среднее число автомобилей, подъезжающих к АЗС в течение одной минуты, равно трем. Какова вероятность, что в течение двух минут для заправки топливом к АЗС подъедут 1) ровно четыре автомобиля; 2) не менее двух автомобилей. Последовательность автомобилей, подъезжающих к АЗС считать простейшим (пуассоновским) потоком событий.

Р Е Ш Е Н И Е. ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ, ИНТЕНСИВНОСТЬ ПОТОКА $\lambda=3$, ПРОМЕЖУТОК $t=2$.

1) ИСПОЛЬЗУЕМ ФОРМУЛУ ПУАССОНА ПРИ $k = 4$. ИМЕЕМ

$$p_2(4) = \frac{(3 \cdot 2)^4 e^{-3 \cdot 2}}{4!} = \frac{6^4 \cdot e^{-6}}{24} \approx 0{,}134.$$

2) ПУСТЬ A – СОБЫТИЕ ЗАПРАВКИ НЕ МЕНЕЕ ДВУХ АВТОМОБИЛЕЙ, ТОГДА ПРОТИВОПОЛОЖНОЕ СОБЫТИЕ $\overline{A}$ – ЗАПРАВКА МЕНЕЕ ДВУХ АВТОМОБИЛЕЙ, Т.Е. $\overline{A} = A_0 + A_1$, ГДЕ A_j – ЗАПРАВКА J АВТОМОБИЛЕЙ $(j = 0, 1)$. ПОСКОЛЬКУ A_0 И A_1 НЕСОВМЕСТНЫ, ТО

$$p(\overline{A}) = p_2(0) + p_2(1) = \frac{(3 \cdot 2)^0 e^{-3 \cdot 2}}{0!} + \frac{(3 \cdot 2)^1 e^{-3 \cdot 2}}{1!} = 7 \cdot e^{-6} = 0{,}017.$$

ЗНАЧИТ,

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - 0{,}017 = 0{,}983.$$

10°. Случайной величиной называется числовая величина X, которая в каждом опыте принимает одно и только одно значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин. Если все возможные значения величины X можно указать в виде числовой последовательности $\{x_n\}$, n = 1, 2, ... (конечной или бесконечной), то X называется дискретной; если же возможные значения X заполняют целиком некоторый числовой интервал, то величина X называется непрерывно распределенной на этом интервале.

11°. Законом распределения дискретной случайной величины X называется соответствие между ее возможными значениями x_k и вероятностями $p_k = P(X = x_k)$ события, состоящего в принятии величиной X значения именно x_k. Обычный способ задания такого закона – ряд (таблица) распределения. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Числовыми характеристиками дискретной величины X являются ее математическое ожидание (среднее значение) и дисперсия; соответственно,

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \ ;$$

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 p_k - (M(X))^2 .$$

12°. Универсальным способом описания всякой случайной величины X является функция распределения (синонимы: интегральный закон распределения, интегральная функция), имеющая вид

$$F(x) = P(X < x),$$

то есть соотносящая каждому $x \in (-\infty; +\infty)$ вероятность события, состоящего в принятии величиной X значения левее точки x.

Из свойств $F(x)$ отметим возможность определять с ее помощью вероятность попадания значений X в заданный интервал:

$$F(a \le X < b) = F(b) - F(a) .$$

13°. Плотностью распределения (дифференциальной функцией) назовем функцию вида

$$f(x) = F'(x) .$$

Числовыми характеристиками непрерывных случайных величин являются ее математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

и дисперсия

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2 .$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ 1 - x^2, & -1 < x \le 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения, $M(X)$ и $D(X)$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ -2x, & -1 < x \le 0; \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

далее

$$M(X) = \int_{-1}^{0} x(-2x)dx = -\frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{0} = -\frac{2}{3};$$

$$D(X) = \int_{-1}^{0} x^2(-2x)dx - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{4}x^4\Big|_{-1}^{0} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

14°. Генеральная совокупность и выборка. Пусть имеется множество, состоящее из конечного (но достаточно большого) числа некоторых объектов и изучается количественный признак X, так что каждый объект характеризуется одним из возможных значений x_i величины X. Такое множество назовем генеральной совокупностью; в свою очередь, совокупность из n случайно отобранных объектов назовем выборкой объема n. Пусть n_1 объектов из выборки характеризуются значением x_1, n_2 объектов – значением x_2, ..., n_k объектов – значением x_k . Числа x_1, x_2, ..., x_k называются вариантами; соответственно, n_1, n_2, ..., n_k – их частотами, а таблица, задающая соответствие между ними – вариационным рядом.

Относительными частотами значений x_i называются соответствующие числа вида $w_i = \frac{n_i}{n}$, где $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$; справедливо соотношение $w_1 + w_2 + \ ... \ + w_k = 1.$

15°. Выборочная средняя $\bar{x}_в$ есть среднее арифметическое всех наблюдаемых (в выборке) значений x_i. Нетрудно установить, что:

$$\bar{x}_в = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i \quad \text{или} \quad \bar{x}_в = x_1\frac{n_1}{n} + x_2\frac{n_2}{n} + ... + x_k\frac{n_k}{n}. \tag{3}$$

Степень рассеяния значений x_i относительно их средней $\bar{x}_в$ характеризуется выборочной дисперсией

$$D_в = (x_1)^2\frac{n_1}{n} + (x_2)^2\frac{n_2}{n} + ... + (x_k)^2\frac{n_k}{n} - (\bar{x}_в)^2 . \tag{4}$$

16°. Статистические оценки параметров распределения. Предположим, что нас интересует неизвестное значение θ некоторого параметра, характеризующего количественный признак X генеральной совокупности. Проводятся эксперименты, в результате которых получаем соответствующие значения параметра θ^*, дающие некоторое представление о величине θ. Точечной оценкой параметра θ называют оценку, которая определяется одним числом (например, оценка среднего значения X генеральной совокупности есть выборочная средняя). Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала. Надежностью (доверительной вероятностью) оценки θ по θ^* называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $\left|\theta - \theta^*\right| = \gamma$. Наиболее часто задают надежность, равную 0,95; 0,99; 0,995. Интервал (θ^* – δ, θ^* + δ) называют доверительным интервалом.

17°. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ. Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен с плотностью $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ ("нормальное распределение"); здесь параметр a есть значение математического ожидания, σ – среднее квадратическое отклонение (для X). Предположим, что среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно, и извлечена выборка объема n. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\bar{x}_в$ с заданной надежностью γ. Пусть t – значение аргумента функции Лапласа Φ(t) (п. 7°), для которого γ = 2Φ(t). Тогда

$$P\left(\left|\bar{x}_в - a\right| < t\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) .$$

Число t определяется из равенства $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}.$ Следовательно, с надежностью γ доверительный интервал $\left(\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки есть $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка. Известен вариационный ряд

x_i	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
n_i	10	25	40	15	10

Найти: а) выборочную среднюю $\bar{x}_в$; б) выборочную дисперсию $D_в$.

Р е ш е н и е. Объем выборки

$$n = 10 + 25 + 40 + 15 + 10 = 100.$$

а) По формуле (3) имеем

$$\bar{x}_в = 1{,}1 \cdot \frac{10}{100} + 1{,}2 \cdot \frac{25}{100} + 1{,}3 \cdot \frac{40}{100} + 1{,}4 \cdot \frac{15}{100} + 1{,}5 \cdot \frac{10}{100} = 1{,}29.$$

б) Согласно (4)

$$D_в = (1{,}1)^2 \cdot 0{,}1 + (1{,}2)^2 \cdot 0{,}25 + (1{,}3)^2 \cdot 0{,}4 + (1{,}4)^2 \cdot 0{,}15 +$$
$$+ (1{,}5)^2 \cdot 0{,}1 - (1{,}29)^2 = 0{,}0319.$$

2. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратичным отклонением $\sigma = 4$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочной средней $\bar{x}_в = 3{,}6$, если объем выборки 64 и задана надежность оценки $\gamma = 0{,}95$.

Р е ш е н и е . Найдем t из соотношения $\Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$, соответствующее $t = 1{,}96$; точность оценки $\delta = \frac{1{,}96 \cdot 4}{\sqrt{64}} = 0{,}98$. Следовательно, имеем доверительный интервал (3,6 – 0,98; 3,6 + 0,98), то есть $2{,}62 < a < 4{,}58$.

III. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

10

1 − 10. :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+1)^n}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4n}{8^{1+2n}}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1-n}}{\sqrt{n+1}}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n)!}{2^n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2+n}\right)^n$. 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot n}{(n+1)!}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty} (9n+1)4^{1+n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n+1}}{3^{n+1}}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(4+\frac{1}{n}\right)^n$.

11 – 20. Исследовать сходимость числового ряда:

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n+1}}$. 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\frac{\pi}{3n^2}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{5n+2}$. 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^2+5}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n+1}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{n+1}}$. 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2}$. 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$.

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n\sqrt{n}}$. 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$.

21 – 30. С помощью интегрального признака сходимости исследовать сходимость числового ряда:

21. $\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{1-n^2}$. 22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{2n}$. 23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9+n^2}$. 24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$. 26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{2(n+1)}$. 27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1-2\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5n^4-1}$. 29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1)^3}$. 30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{1+\ln n}}$.

31 – 40. Исследовать ряд на сходимость (абсолютная, условная или расходимость):

31. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+5}$. 32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{\sqrt{n^2+1}}$. 33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1+\sqrt{n-1}}$. 34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)^n}$.

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+8}}$. 36. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$. 37. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{n^2+16}$. 38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+3}}{n(n+1)}$.

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}$. 40. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+3)\sqrt{n+3}}$.

41 – 50. Найти круг сходимости степенного ряда (z – комплексная переменная) и изобразить его на комплексной плоскости:

41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n-1}}$. 42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n z^n}{n}$. 43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n z^n}{n+1}$. 44. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2 z^n$. 45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\sqrt{n}}$.

46. $\sum_{n=1}^{\infty}4^{n-1}n z^n$. 47. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)(n+2)}$. 48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n z^n}{n\cdot 7^{n+1}}$.

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\cdot 7^{n+1}}$. 50. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}z^n}{n^2}$.

11

61 − 70.   ,   .   ,   (0,001):

51. $\int_0^{0,5}\frac{\mathrm{sh}2x}{2x}dx\left(\mathrm{sh}t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)$. 52. $\int_0^{0,1}\frac{\ln\left(1-2x^2\right)+2x^2}{x^3}dx$.

53. $\int_0^{2}\sin\frac{x^2}{2}dx$. 54. $\int_0^{\sqrt[3]{0,5}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$. 55. $\int_0^{\sqrt{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{2x^2}dx$. 56. $\int_0^{0,5}\frac{2x\,dx}{1+2x^3}$.

57. $\int_0^{1}e^{-2x^2}dx$. 58. $\int_0^{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{4x}dx$. 59. $\int_0^{0,5}\frac{e^{2x}-1}{2x}dx$. 60. $\int_0^{\sqrt{2}}\cos\frac{x^2}{3}dx$.

61 − 70. $y=y(x)$:

61. $\begin{cases}y'=x^2+y^2+3x+2;\\ y(0)=0.\end{cases}$ 62. $\begin{cases}y'=x^2+9y+e^y+4;\\ y(0)=0.\end{cases}$

63. $\begin{cases}y'=11+2y^2+x^2;\\ y(0)=0.\end{cases}$ 64. $\begin{cases}y'=2e^y+x+3y;\\ y(0)=0.\end{cases}$

65. $\begin{cases}y'=7\cos x-3x+\cos y+7;\\ y(0)=0.\end{cases}$ 66. $\begin{cases}y'=e^x+2xy+\sin x+2;\\ y(0)=0.\end{cases}$

67. $\begin{cases}y'=\frac{x^2}{2}+5\sin y+4;\\ y(0)=0.\end{cases}$ 68. $\begin{cases}y'=\frac{x^3}{3}+e^{2x}+6y;\\ y(0)=0.\end{cases}$

69. $\begin{cases}y'=2\sin 2x+3e^y+1;\\ y(0)=0.\end{cases}$ 70. $\begin{cases}y'=\sin^2 x+3\sin y-6;\\ y(0)=0.\end{cases}$

71 − 80. z . $z=0$.

71. $f(z)=\frac{2}{z\left(1-z^2\right)}$. 72. $f(z)=\frac{1}{2z}e^{-z}$. 73. $f(z)=\frac{\cos z-1}{z^3}$.

74. $f(z)=\frac{1}{z^2(1+2z)}$. 75. $f(z)=\frac{\cos 2z}{2z}$. 76. $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2}$.

77. $f(z)=\dfrac{\sin 3z}{z^4}$. 78. $f(z)=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2z}$. 79. $f(z)=\dfrac{\sin z - z}{z^5}$.

80. $f(z)=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2z^2}$.

81 – 90. $f(x)$ (π,π):

81. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi+x}{3}, & -\pi<x<0;\\ 0, & 0<x<\pi.\end{cases}$

82. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0;\\ \dfrac{2x-2\pi}{3}, & 0<x<\pi.\end{cases}$

83. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0;\\ -4, & 0<x<\pi.\end{cases}$

84. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<-\dfrac{\pi}{2};\\ -1, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$

85. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{2}, & -\pi<x<0;\\ 0, & 0<x<\pi.\end{cases}$

86. $f(x)=\begin{cases}-4x, & -\pi<x<0;\\ 0, & 0<x<\pi.\end{cases}$

87. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0;\\ -\dfrac{x}{3}, & 0<x<\pi.\end{cases}$

88. $f(x)=\begin{cases}-5, & -\pi<x<\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$

89. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0;\\ \dfrac{\pi-x}{4}, & 0<x<\pi.\end{cases}$

90. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & -\pi<x<0;\\ \dfrac{-2}{\pi}, & 0<x<\pi.\end{cases}$

91 – 100. $f(x)$ $(0,\ell)$, $(-\ell,0)$:

91. $f(x)=\dfrac{8x}{3}$, $x\in(0,2)$ – .

92. $f(x)=-\dfrac{7}{12}$, $x\in(0,4)$ – .

93. $f(x)=\dfrac{36-6x}{5}$, $x\in(0,6)$ – .

94. $f(x)=\dfrac{2x^2}{5}$, $x\in(0,1)$ – .

95. $f(x)=\dfrac{2x-1}{3}$, $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ – .

96. $f(x)=x^2-4$, $x\in(0,2)$ – .

97. $f(x)=5-5x$, $x\in(0,1)$ – .

98. $f(x)=4x-1$, $x\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ – .

99. $f(x)=\dfrac{2x}{5}$, $x\in(0,5)$ – .

100. $f(x)=\dfrac{1-x^2}{2}$, $x\in(0,1)$ – .

Контрольная работа № 12

101. , $p=0{,}8$. , ?

102. - 5 . , $\dfrac{1}{3}$. , ?

103. . , ?

104. , , $p_1=0{,}9$; $p_2=0{,}8$; $p_3=0{,}75$. , ?

105. – . . , ?

106. , $p_1 = 0{,}6$; B – $p_2 = 0{,}7$. , ?

107. 4 , $p = \frac{1}{3}$. , ?

108. , . $p = \frac{4}{5}$. , ?

109. , , $p_1 = 0{,}7;\ p_2 = 0{,}9;\ p_3 = 0{,}6.$. , ?

110. Что вернее: выиграть у равносильного шахматиста три партии из шести, или четыре из восьми?

111 – 115. , λ . , t ? ( ) :

111. $\lambda = 5;\ t = 2;$ 112. $\lambda = 4;\ t = 3;$ 113. $\lambda = 2;\ t = 4;$

114. $\lambda = 3;\ t = 2;$ 115. $\lambda = 1;\ t = 4$.

116 – 120. , , λ . , t . ( ) :

116. $\lambda = 3;\ t = 4.$ 117. $\lambda = 3;\ t = 5.$ 118. $\lambda = 2;\ t = 2.$

119. $\lambda = 4;\ t = 6.$ 120. $\lambda = 5;\ t = 3.$

121 – 130. X ( ) $F(x)$. :) $f(x)$ ( );) X;) X $(0;1)$:

121. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ \dfrac{x^2 - 4x + 4}{4}, & 2 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$

122. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}, & -1 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

123. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{8}, & 1 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

124. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{18} + \dfrac{x}{6}, & 0 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

125. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3; \\ \dfrac{x - 3}{7}, & 3 < x \le 10; \\ 1, & x > 10. \end{cases}$

126. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ \dfrac{1}{5}x - \dfrac{2}{5}, & 2 < x \le 7; \\ 1, & x > 7. \end{cases}$

127. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \dfrac{x^3 - x}{24}, & 1 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

128. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3; \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{6}, & 3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$

129. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3; \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{3}{6}, & -3 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

130. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0{,}5; \\ \dfrac{2x^2 - x}{6}, & 0{,}5 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

131 – 140. . x_i n_i . - ( ):

131.

x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
n_i	10	26	12	18	16	18

132.

x_i	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
n_i	18	10	16	24	24	8

133.

x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
n_i	5	10	30	25	15	5	10

134.

x_i	2,0	2,2	2,4	2,6	28	30
n_i	26	15	12	18	16	13

135.

x_i	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
n_i	10	18	24	24	8	16

136.

x_i	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4
n_i	15	5	40	25	4	8	3

137.

x_i	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2
n_i	21	20	12	18	16	13

138.

x_i	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6
n_i	10	20	32	16	8	14

139.

x_i	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
n_i	10	5	30	25	15	5	10

140.

x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
n_i	20	13	12	16	15	24

141 − 150. a γ, $\bar{x}_в$, n σ.

141. $\bar{x}_в = 30{,}28;\ \sigma = 2;\ n = 64;\ \gamma = 0{,}9.$

142. $\bar{x}_в = 65{,}88;\ \sigma = 4;\ n = 144;\ \gamma = 0{,}99.$

143. $\bar{x}_в = 25{,}24;\ \sigma = 8;\ n = 64;\ \gamma = 0{,}95.$

144. $\bar{x}_в = 39{,}14;\ \sigma = 9;\ n = 81;\ \gamma = 0{,}9.$

145. $\bar{x}_в = 58{,}85;\ \sigma = 3;\ n = 144;\ \gamma = 0{,}99.$

146. $\bar{x}_в = 40{,}88;\ \sigma = 4;\ n = 64;\ \gamma = 0{,}95.$

147. $\bar{x}_в = 82{,}51;\ \sigma = 11;\ n = 121;\ \gamma = 0{,}9.$

148. $\bar{x}_в = 32{,}29;\ \sigma = 3;\ n = 144;\ \gamma = 0{,}99.$

149. $\bar{x}_в = 26{,}84;\ \sigma = 6;\ n = 144;\ \gamma = 0{,}95.$

150. $\bar{x}_в = 19{,}86;\ \sigma = 2;\ n = 144;\ \gamma = 0{,}9$.