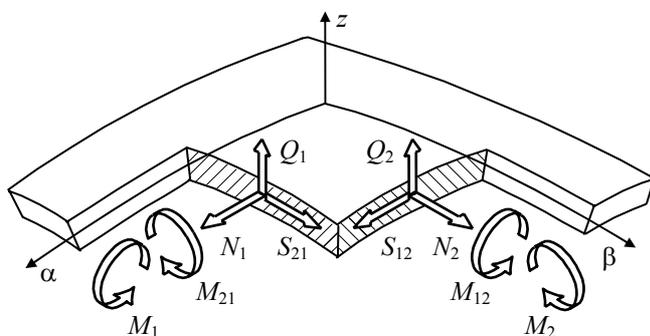


# ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ



◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ◆

УДК 624.04(075)  
ББК Ж 121 я 73-5  
Б90

Рецензент  
Кандидат технических наук, доцент  
*А. И. Антонов*

Составители:  
*В. Е. Буланов, А. Н. Гузачев*

Б90 Теория упругости и пластичности. Учебно-метод. пособие / Сост.: В. Е. Буланов, А. Н. Гузачев. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2002. 44 с.

Содержатся методические указания и контрольные задания по выполнению расчетов курса "Теория упругости и пластичности".

Предназначено для студентов заочного отделения специальности 2903.

© Тамбовский государственный  
технический университет, 2002  
Министерство образования Российской Федерации  
Тамбовский государственный технический университет

# **ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ**

Учебно-методическое пособие  
для студентов заочного отделения специальности 2903

Тамбов  
Издательство ТГТУ  
2002

Учебное издание

# **ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ**

Учебно-методическое пособие

Составители: БУЛАНОВ Владимир Евгеньевич,  
ГУЗАЧЕВ Александр Николаевич

Редактор З. Г. Чернова  
Компьютерное макетирование М. А. Филатовой

Подписано к печати 20.12.02.  
Формат 60×84/16. Гарнитура Times NR. Бумага офсетная. Печать офсетная  
Объем: 2,56 усл. печ. л.; 3,0 уч.-изд. л.  
Тираж 100 экз. С. 794<sup>М</sup>

Издательско-полиграфический центр  
Тамбовского государственного технического университета  
392000, Тамбов, ул. Советская, 106, к. 14

## ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

К изучению дисциплины "Теория упругости и пластичности" следует приступить лишь после усвоения полного курса сопротивления материалов.

Занятия по теории упругости и пластичности должны сопровождаться составлением конспекта, решением задач и ответами на вопросы для самопроверки, приведенных в учебно-методическом пособии по каждой теме программы. Необходимо также разбираться в выводах основных выражений и формул, обращая при этом внимание на физическую сущность рассматриваемых вопросов.

Каждый студент-заочник по курсу "Теория упругости и пластичности" выполняет одну контрольную работу. Номера задач, входящих в контрольную работу, определяет студент по последней букве шифра. Если последняя буква шифра "е" равна 1, 3, 5, 7 или 9, то следует решать задачи 1, 2 и 5. Если "е" равна 0, 2, 4, 6 или 8, то в контрольную работу следует включить задачи 1, 3 и 4. Варианты решаемых задач должны строго соответствовать учебному шифру студента.

Выполненную контрольную работу студент обязан без промедления выслать в университет с тем, чтобы указания и замечания

преподавателя были своевременно учтены. Если работа не зачтена, то вместе с исправленной работой следует прислать и первый

вариант ее решения.

Зачет по курсу "Теория упругости и пластичности" принимается после того, как зачтена контрольная работа.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ТЕМАМ ПРОГРАММЫ

### Т е м а 1

#### ВВЕДЕНИЕ

Л и т е р а т у р а: [1, гл. 1]; [6, введение, § 1, 2]; [7, введение]; [9, § 1].

Теория упругости изучает напряженное и деформированное состояния твердого упругого тела, вызванные различными внешними воздействиями. Аналогичными вопросами занимается и сопротивление материалов. Однако теория упругости решает свои задачи более общими и более точными методами, применяя сравнительно сложный математический аппарат. К теории упругости близко примыкает теория пластичности. Теория пластичности изучает общие законы образования напряжений и деформаций, возникающих на всех стадиях пластического деформирования тела.

Теория упругости имеет два назначения:

- 1) оценка точности и пределов применимости решений задач, полученных методами сопротивления материалов;
- 2) решение таких задач, которые не могут быть решены методами сопротивления материалов (расчет пластин, оболочек, балок-стенок, массивных тел и др.).

Необходимо познакомиться с основными этапами развития теории упругости и пластичности.

### Т е м а 2

#### ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

##### ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 2.01 – 2.10, 3.02 – 3.05]; [2, гл. 4, гл. 16, § 16.1]; [4, §§ 1 – 7]; [6, гл. 1, §§ 1 – 6]; [7, §§ 1 – 5]; [9, §§ 1 – 4, 74 – 75, 77 – 79, 84 – 85].

Требуется изучить напряженное состояние в области произвольной точки твердого тела. Для этого из тела выделяется бесконечно малый параллелепипед с тремя парами граней, параллельными координатным плоскостям. По каждой грани полное напряжение имеет три составляющих. Всего на всех гранях действуют 18 составляющих напряжений. Следует учесть, что одноименные напряжения на противоположных гранях параллелепипеда различаются друг от друга лишь на приращение по той координате, которая изменяется при переходе от одной грани к другой (число неизвестных становится равным девяти).

Составляют шесть условий равновесия, в результате чего получают три соотношения, выражающих хорошо известный из сопротивления материалов закон взаимности касательных напряжений, и три дифференциальных уравнения, содержащих девять неизвестных напряжений. Учитывая закон взаимности касательных напряжений, число неизвестных напряжений уменьшается до шести.

Если тело находится в движении, то к действующим силам добавляют силы инерции. Полученные три дифференциальных уравнения называются *дифференциальными уравнениями равновесия и движения, уравнениями Навье*.

Чтобы полностью изучить напряженное состояние в произвольной точке тела, надо знать составляющие полного напряжения по любой площадке, проходящей через эту точку.

Рассматриваем условия равновесия элементарного тетраэдра, выделенного из тела тремя плоскостями, параллельными координатным, и четвертой плоскостью, пересекающей все три координатные оси. Предполагая, что площадь наклонной грани в пределе стремится к нулю, получаем уравнения, связывающие напряжения по наклонной площадке, проходящей через рассматриваемую точку, и по площадкам, параллельным координатным плоскостям. Таким образом, напряженное состояние в данной точке тела вполне определяется шестью составляющими, или компонентами напряжения, по трем

координатным площадкам, проходящим через эту точку. Совокупность составляющих напряжений по трем координатным площадкам образует так называемый *тензор напряжений*. Итак, напряженное состояние в точке тела вполне определяется шестью компонентами тензора напряжений.

Следует внимательно проанализировать вывод кубического уравнения для определения главных напряжений. Так как значения главных напряжений не зависят от выбора координатной системы, то и коэффициенты кубического уравнения также не зависят от этой системы, т.е. они являются инвариантами преобразования координат. Эти коэффициенты называются *инвариантами напряженного состояния* или *инвариантами тензора напряжений*.

Следует познакомиться с разложением тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор напряжений и с инвариантами девиатора напряжений. Этот материал имеет важное значение для усвоения основ теории пластичности. В теории пластичности основную роль играют касательные напряжения, поэтому необходимо значительно дополнить свои знания в этой области из курса сопротивления материалов.

### Вопросы для самопроверки

- 1 Что представляют собой условия на поверхности тела?
- 2 Почему коэффициенты кубического уравнения относительно главных напряжений являются инвариантами напряженного состояния?
- 3 Каким деформациям соответствуют шаровой тензор напряжений и девиатор напряжений?

### ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 2.11 – 2.14, 3.06 – 3.08, 3.10]; [4, §§ 8 – 12]; [6, гл. 2, §§ 1 – 4]; [7, §§ 6 – 8]; [9, §§ 5, 80 – 83, 85 – 89].

Совокупность девяти компонентов деформаций образует тензор деформаций; он определяет деформированное состояние в данной точке тела. Тензор деформаций записывается в виде матрицы, аналогичной тензору напряжений, причем нормальным напряжениям соответствуют линейные деформации, а касательным напряжениям – половины угловых деформаций.

Ввиду взаимности сдвигов, аналогичной взаимности касательных напряжений, число неизвестных угловых деформаций равно трем. Поэтому тензоры напряжений и деформаций фактически характеризуются шестью компонентами. Для деформаций существуют три взаимно перпендикулярных направления, называемых главными осями деформаций. Волокна, направленные по ним, только удлиняются или укорачиваются, но не поворачиваются, т.е. сдвиги в главных осях деформаций равны нулю.

Кубическое уравнение для определения главных удлинений записывается аналогично соответствующему уравнению для главных напряжений путем замены компонентов тензора напряжений на соответствующие компоненты тензора деформаций.

Компоненты малой деформации связаны с тремя компонентами смещения в той же точке ( $u$ ,  $v$  и  $w$ ) шестью дифференциальными зависимостями, называемыми *соотношениями Коши*. Шесть уравнений, связывающих компоненты деформаций между собой, называются *уравнениями неразрывности* или *совместности деформаций* или *уравнениями Сен-Венана*. Физический смысл этих уравнений таков: тело, сплошное и непрерывное до деформации, остается сплошным и непрерывным и после деформации.

Следует познакомиться с разложением тензора деформаций на шаровой тензор деформаций и девиатор деформаций, необходимых для уяснения основ теории пластичности.

### Вопросы для самопроверки

- 1 Сформулируйте и обоснуйте правила знаков для линейных и угловых деформаций.
- 2 Напишите выражения для инвариантов тензора деформаций. Каков геометрический смысл первого инварианта тензора деформаций?
- 3 В чем заключается энергетический смысл уравнений неразрывности деформаций?

### ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 4.01 – 4.04, 4.06]; [2, гл. 6]; [4, §§ 17, 18]; [6, гл. 3, §§ 1 – 4]; [7, §§ 9, 10]; [9, § 6].

Для изотропного упругого тела в случае пространственной задачи обобщенный закон Гука устанавливает три зависимости между нормальными напряжениями и линейными деформациями и три зависимости между касательными напряжениями и сдвигами. Эти зависимости записывают либо в виде выражений деформаций через напряжения, либо в виде выражений напряжений через деформации.

### Вопросы для самопроверки

- 1 Какие тела называются однородными, изотропными, анизотропными, ортотропными?
- 2 Сколько независимых упругих постоянных имеется в случаях изотропного и анизотропного тел?
- 3 Напишите выражения закона Гука, связывающие объемную деформацию и среднее нормальное напряжение.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 7.01 – 7.05, 7.07, 12.01]; [2, §§ 16.4, 16.5]; [6, гл. 4, §§ 1 – 5, гл. 5, §§ 1 – 2]; [7, §§ 12 – 16]; [9, §§ 84 – 89, 96, 99 – 103].

Существуют два основных способа решения задач теории упругости: 1) в напряжениях, 2) в перемещениях.

В первом способе основными неизвестными являются напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$ . Для их нахождения располагаем тремя дифференциальными уравнениями равновесия Навье и шестью уравнениями неразрывности деформаций, выраженными в напряжениях, Бельтрами-Митчелла. При интегрировании уравнений появятся произвольные функции от координат, которые можно определить из условий на поверхности тела, выраженных в напряжениях. Во втором способе основными неизвестными являются перемещения  $u, v$  и  $w$ . Для их определения располагаем тремя дифференциальными уравнениями равновесия, выраженными через перемещения, Ляме. Произвольные функции от координат могут быть найдены из условий на поверхности тела, выраженные через перемещения.

Согласно теореме об однозначности решения уравнений теории упругости следует, что заданной нагрузке соответствует лишь единственное решение этих уравнений.

### Вопросы для самопроверки

- 1 Каким комплексом уравнений мы располагаем для определения неизвестных компонентов напряжений, деформаций и перемещений в точке тела?
- 2 Какие задачи теории упругости называются простейшими? Приведите примеры простейших задач.
- 3 Сформулируйте принцип Сен-Венана и приведите примеры его применения.
- 4 Укажите три типа граничных условий на поверхности тела.

### ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 14.01 – 14.08]; [2, §§ 21.1, 21.2]; [6, гл. 3, § 4, гл. 9, § 1]; [7, §§ 10, 11, 44, 45, 48, 49]; [9, §§ 90 – 93, прил. 1 – 5, 10].

Решение многих задач теории упругости удается выполнить лишь с помощью приближенных методов, в ряду которых важное значение имеют вариационные. Основная задача вариационного исчисления – определение экстремума заданного функционала. Понятие о функционале можно получить, рассмотрев задачу, решенную Лейбницем, Лопиталем, Ньютоном и Бернулли независимо друг от друга в конце XVII века. Материальная точка под действием силы тяжести скатывается без трения от точки  $A$  до точки  $B$  по некоторой кривой  $y(x)$ . Требуется выбрать такое очертание  $y(x)$ , чтобы падение произошло в минимальный промежуток времени  $t$ . Время  $t$  в этой задаче выполняет роль функционала, следовательно, аргументом функционала  $t$  здесь является функция  $y(x)$ . Вариацией функционала  $\square$  называется бесконечно малое его приращение, соответствующее бесконечно малому изменению функции. Можно установить аналогию между понятиями дифференциала функции и вариацией функционала  $\square$ . В задачах теории упругости полная энергия тела может рассматриваться как функционал

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(u, v, w).$$

При вариациях функций  $u, v, w$  (малых отклонениях, согласованных со связями) изменяется величина функционала.

Согласно принципу Лагранжа, если деформируемая система находится в равновесии под действием приложенных к ней внешних сил, то при всяком возможном бесконечно малом перемещении точек этой системы сумма работ ее внешних и внутренних сил равна нулю.

Принцип Лагранжа основан на вариации перемещений, между тем как вариационный принцип Кастильяно основан на вариации напряжений.

Вариационный метод Ритца вытекает из принципа Лагранжа. Согласно этому методу перемещения предполагают состоящими из функций, каждая из которых удовлетворяет геометрическим граничным условиям.

Одним из наиболее эффективных приближенных методов решения задач строительной механики и теории упругости является метод конечных элементов. Сплошная среда тела разбивается на некоторое количество конечных элементов: в плоской задаче – на треугольники и прямоугольники; в пространственной задаче – на тетраэдры, прямоугольные призмы и др. Внутри каждого элемента выбирают некоторые функции, однозначно определяющие перемещения точек элемента через перемещения его узловых точек. Последние являются основными неизвестными. Определяют узловые силы, уравновешивающие действующие на элементы нагрузки. После этого обычными приемами строительной механики исследуют поведение тела в целом. Установлена эквивалентность метода конечных элементов методу минимизации функционала энергии по узловым перемещениям; метод конечных элементов рассматривается тогда как вариант метода Ритца.

## Т е м а 3

### ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

#### ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 8.01 – 8.07, 11.01 – 11.05, 11.13, 14.01 – 14.08]; [2, §§ 17.1 – 17.4]; [6, гл. 6, §§ 1 – 9]; [7, §§ 17 – 24, 48, 49]; [9, §§ 8 – 11, 14 – 24, 120 – 124, прил. 1 – 8].

В практических приложениях часто встречаются задачи, в которых можно отбросить одну из осей координат, например ось  $Oz$ , и рассматривать явление как бы происходящим в одной плоскости  $Oxy$ , т.е. рассматривать плоскую задачу.

Необходимо отчетливо представить себе, проанализировав ряд примеров инженерных сооружений, два вида плоской задачи: плоскую деформацию и обобщенное плоское напряженное состояние. Для плоской деформации  $\varepsilon_z = 0, \sigma_z \neq 0$ ; для обобщенного плоского напряженного состояния  $\sigma_z = 0, \varepsilon_z \neq 0$ .

Для обоих видов плоской задачи имеют силу одни и те же дифференциальные уравнения равновесия, соотношения Коши и уравнения неразрывности деформаций; из шести уравнений неразрывности остается всего лишь одно; различен только вид физических уравнений (уравнений закона Гука).

При решении задачи в напряжениях три неизвестных напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  находим с помощью двух дифференциальных уравнений равновесия и одного уравнения неразрывности деформаций.

При решении задачи в перемещениях два неизвестных перемещения  $u$  и  $v$  находим с помощью двух дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях.

Дальнейшего облегчения решения задачи достигаем введением так называемой функции напряжений, или функции Эри  $\phi(x, y)$ . Эта функция ("разрешающая функция") должна удовлетворять бигармоническому уравнению плоской задачи теории упругости. Напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  получаем, дифференцируя эту функцию. Решение плоской задачи в случае, если объемной силой является собственный вес, постоянный для всех точек тела, сводится к нахождению функции  $\phi(x, y)$ , которая удовлетворяла бы бигармоническому уравнению и условиям на поверхности.

Для определения вида  $\phi(x, y)$  полезно рассмотреть сначала ряд простейших функций и установить, какую задачу каждая из них решает. Если контур имеет вид прямоугольника, а условия на контуре могут быть представлены целыми алгебраическими функциями, то функцию напряжений можно задать в виде полинома. Следует рассмотреть ряд задач:

- а) чистый изгиб балки;
- б) изгиб консольной балки силой, приложенной на конце балки;
- в) изгиб опертой по концам балки под действием равномерно распределенной нагрузки;
- г) треугольную подпорную стенку.

Если нагрузка не является непрерывной и закон ее распределения не может быть представлен целой алгебраической функцией, то решение можно найти при помощи тригонометрических рядов. Следует также рассмотреть расчет балки-стенки. Необходимо познакомиться с решением плоской задачи методами конечных разностей и конечных элементов.

### Вопросы для самопроверки

- 1 Какая разница между плоской деформацией и обобщенным плоским напряженным состоянием? Напишите основные уравнения для обоих видов плоской задачи.
- 2 Какая функция называется бигармонической?
- 3 Чему равна наивысшая степень полинома, при которой тождественно удовлетворяется бигармоническое уравнение плоской задачи?
- 4 Полиному какой степени соответствует однородное напряженное состояние?

### ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 9.01 – 10.06, 11.06 – 11.13, 12.02, 12.04, 12.05]; [2, гл. 18]; [6, гл. 6, §§ 1 – 13]; [7, §§ 25 – 27]; [9, §§ 27 – 30, 33, 36 – 39, 41 – 42, 140 – 142].

При выводе основных уравнений обратите внимание на все особенности, вызываемых новой системой координат. В практических задачах часто встречаются такие случаи, когда распределение напряжений симметрично относительно оси, перпендикулярной плоскости деформации; в этих случаях компоненты напряжений не зависят от полярного угла  $\theta$ , а зависят лишь от радиуса. Возникают только нормальные напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ , а касательные напряжения вследствие симметрии обращаются в нуль. К задачам такого рода относятся:

- а) расчет толстостенной трубы, находящейся под равномерным давлением (задачи Ляме и Гадолина);
- б) чистый изгиб кривого бруса (задача Головина);
- в) расчет клина.

В этих задачах совершенно исключаются возможности применения элементарных решений сопротивления материалов. Внимательно разберите рассмотренные задачи, самостоятельно производя все выводы.

Большое практическое применение в теории оснований и фундаментов имеют задачи о действии сосредоточенной силы, приложенной к границе полуплоскости и к границе полупространства (задача Буссинеска).

## Т е м а 4

### ИЗГИБ ПЛАСТИНОК

#### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 15.01 – 15.11, 15.14 – 15.19, 18.11]; [2, §§ 20.1 – 20.10]; [6, гл. 8, §§ 1 – 10]; [7, §§ 28 – 34, 36 – 39]; [9, §§ 102, 103].

Дифференциальное уравнение изгиба пластинки представляет собой распространение дифференциального уравнения изгиба балки на пластинку. В пластинке кроме изгиба в продольном направлении учитывают еще изгиб в поперечном направлении и кручение.

Решение задачи об изгибе пластинки заключается в нахождении выражения прогиба  $w(x, y)$ , которое удовлетворяло бы основному уравнению изгиба пластинки и условиям на опорном контуре. Используя выражение прогиба, находят затем изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы, а по ним – напряжения. Для прямоугольной пластинки решение основного дифференциального уравнения в замкнутой форме получить не удастся, приходится его искать в виде бесконечного ряда.

Навье предложил решение в двойных тригонометрических рядах для прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по краям. Более общим является решение Мориса Леви. Оно пригодно для прямоугольной пластинки, два противоположных края которой шарнирно оперты, а два других имеют любые граничные условия.

### Вопросы для самопроверки

- 1 Какие аналогии можно установить между цилиндрическим изгибом пластинки и изгибом простой балки?
- 2 В чем заключается явление чистого изгиба пластинки? Какую аналогию можно установить в дифференциальных уравнениях изогнутой поверхности пластинки и изогнутой оси балки при чистом изгибе?
- 3 Каковы условия на контуре для свободного края прямоугольной пластинки? Как объяснить кажущееся противоречие: в этом случае три условия, а в других случаях таких условий всего лишь два?
- 4 В чем заключается методика расчета пластинок Навье и Мориса Леви?
- 5 Следует проверить свои знания, выполнив 1 – 2 расчета прямоугольных пластинок, приведенных в разделе "Контрольная работа".
- 6 Объясните гипотезы, на основе которых производится расчет плиты на упругом основании.

### ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 15.12 – 15.13]; [2, §§ 20.12, 20.13]; [6, гл. 8, §§ 11 – 12]; [7, §§ 35, 42]; [9, §§ 131 – 133].

При расчете круглой пластинки удобно пользоваться полярными координатами. Задача значительно упрощается в случае осесимметричной нагрузки, т.е. когда нагрузка не зависит от полярного угла и по всем направлениям от центра пластинки распределяется одинаково. Следует иметь в виду особенности записи общего решения дифференциального уравнения изгиба сплошной и кольцевой пластинки (с вырезом в центре).

### Вопросы для самопроверки

- 1 Круглая сплошная пластинка радиуса  $R$  нагружена сплошной равномерно распределенной нагрузкой  $q$ . Для случая шарнирного опирания пластинки по контуру найти:
  - а) уравнения срединной поверхности и ее угол наклона;
  - б) наибольший прогиб;
  - в) угол наклона срединной поверхности на контуре;
  - г) выражения для изгибающих моментов.
- 2 Решить такую же задачу, только при условии заделки по контуру.
- 3 Круглая сплошная пластинка радиуса  $R$  шарнирно оперта по контуру и нагружена изгибающим моментом  $M$ , равномерно распределенным по контуру. Найти:
  - а) уравнение срединной поверхности;
  - б) выражения изгибающих моментов.

### ГИБКИЕ ПЛАСТИНКИ

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 15.14, 15.15]; [6, гл. 8, §§ 13]; [7, §§ 29 – 33]; [8, §§ 16.10, 17.8].

При прогибах, сравнимых с толщиной пластинки, следуя нелинейной теории изгиба, Карман свел задачу об изгибе пластинки к двум нелинейным дифференциальным уравнениям, в которые входят производные от функции напряжений  $\phi$  и прогиба  $w$ .

### ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИНОК

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 14.04, 15.09 – 15.11]; [2, §§ 20.11]; [6, гл. 9, §§ 1 – 7]; [7, §§ 40, 46 – 49]; [8, §§ 12.5, 17.6, 19.6].

Методы, которые основываются на интегрировании уравнения Софи Жермен – Лагранжа, часто требуют довольно громоздких выкладок и в ряде случаев приводят к непреодолимым пока математическим трудностям. Между тем для практических целей нередко бывает достаточно получить приближенное решение задачи.

Идея метода Ритца – Тимошенко в основном заключается в следующем. Задаются изогнутой поверхностью пластинки в виде ряда

$$w = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(x, y),$$

где  $a_k$  – обобщенные координаты упругой системы; функции  $\phi_k$  выбирают так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям пластинки. Составляют выражение полной энергии пластинки  $\mathcal{E}$ , выраженной через  $w$ , и из условий минимума функционала  $\mathcal{E}$  получают

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Последние равенства представляют собой систему  $n$  линейных алгебраических уравнений, из которых находят значения параметров  $a_k$ , определяющих изогнутую поверхность пластинки.

Ограничиваясь приведенными краткими замечаниями, рекомендуем познакомиться подробнее с приближенными методами Ритца – Тимошенко, Бубнова – Галеркина и Власова по литературе.

## Т е м а 5

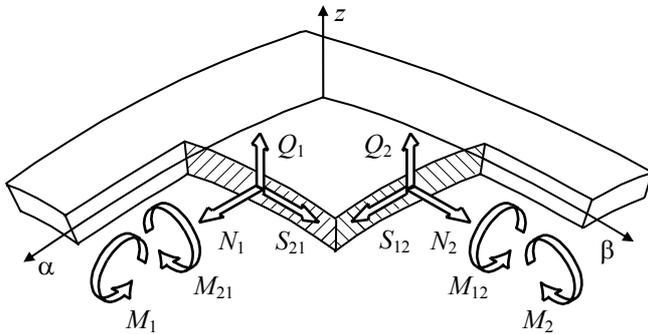
### ОСНОВЫ РАСЧЕТА ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 16.01 – 16.06]; [3, гл. 1, §§ 1.1 – 1.7, гл. 2, §§ 2.1 – 2.5, 2.9, гл. 3, §§ 3.1 – 3.14, гл. 4, §§ 4.1 – 4.5, гл. 6, §§ 6.1, 6.2, 6.5, 6.6]; [6, гл. 10, §§ 1 – 13]; [7, §§ 50 – 57]; [8, §§ 18.1 – 18.6].

Необходимо прежде всего вспомнить некоторые сведения из дифференциальной геометрии: способы задания кривой, способы задания поверхности, криволинейные координаты на поверхности, нормальное сечение, главные радиусы кривизны и главные кривизны, линейный элемент, первая квадратичная форма поверхности и др.

Необходимо четко представлять себе внутренние силы, действующие на элемент оболочки, в общем случае напряженного состояния:  $N_1, N_2$  – нормальные усилия;  $Q_1, Q_2$  – поперечные силы;  $S_{12}, S_{21}$  – сдвигающие силы;  $M_{12}, M_{21}$  – крутящие моменты;  $M_1, M_2$  – изгибающие моменты.

В рассматриваемой здесь системе координат  $\alpha$  и  $\beta$  являются криволинейными координатными линиями. Составив



условия равновесия рассматриваемого элемента оболочки, получим пять уравнений, содержащих десять неизвестных усилий.

Учитывая закон парности касательных напряжений и малость толщины оболочки по сравнению с радиусом ее кривизны, можно считать, что  $M_{12} = M_{21}$  и  $S_{12} = S_{21}$ . Следовательно, из условий равновесия имеем пять уравнений с восемью неизвестными усилиями.

Рассматривая геометрическую сторону задачи, получаем шесть уравнений, связывающих компоненты упругого перемещения и деформации оболочки.

Рассматривая физическую сторону задачи, приходим к шести соотношениям, связывающим усилия и деформации.

Итак, напряженно-деформированное состояние тонкой оболочки определяется решением 17 уравнений при заданных граничных условиях. Эти уравнения содержат 17 неизвестных: 8 усилий и 9 компонентов упругого перемещения и деформации.

В строительной практике встречаются задачи, напряженное состояние в которых характеризуется лишь нормальными  $N_1$  и  $N_2$  и сдвигающими  $S$  усилиями. Такое напряженное состояние называется *безмоментным*: оно статически определимо в бесконечно малом.

Если возникают значительные напряжения от изгиба, то для расчета тонкостенных пространственных конструкций используется моментная теория оболочек.

Ознакомление с применением моментной теории оболочек рекомендуется начать с задач о расчете круговых цилиндрических оболочек. Математический аппарат, используемый при их расчете, значительно упрощается. Прежде всего необходимо познакомиться с расчетом круглой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении (например, резервуар, наполненный жидкостью). Так как нижний край оболочки связан с днищем и не может свободно перемещаться, то здесь возникают изгибающие моменты и поперечные силы. Напряженное состояние оболочки представляет собой сумму безмоментного и моментного состояний.

Линии на поверхности оболочки, где полностью или частично нарушаются условия существования безмоментного напряженного состояния, называют *линиями искажения*. Около линии искажения возникает быстро затухающее изгибное напряженное состояние, называемое *краевым эффектом*.

Напряженное состояние открытых цилиндрических оболочек, широко применяемых в строительной практике, существенным образом зависит от соотношений их размеров в плане, отношения пролета  $l$  к длине волны  $l_1$ . Различают длинные оболочки, для которых  $l/l_1 > 4$ , оболочки средней длины  $4 \geq l/l_1 \geq 1$  и короткие оболочки  $l/l_1 \leq 1$ . Длинную оболочку можно рассчитывать как балку корытообразного сечения. Напряженное состояние такой оболочки в продольном направлении практически безмоментное, т.е.  $M_1 = Q_1 = 0$ . В оболочке средней длины становится существенным изгибное состояние вдоль волны; изгибом вдоль пролета можно пренебречь. Такое напряженное состояние называют *полумоментным*. Короткая оболочка полностью охвачена моментным состоянием как вдоль пролета, так и вдоль волны.

Полумоментная теория цилиндрических оболочек В. З. Власова основана на двух предположениях:

- безмоментное напряженное состояние в продольном направлении  $M_1 = Q_1 = M_{12} = M_{21} = 0$ ;
- отсутствие сдвигов и нерастяжимость оболочки в круговом направлении  $\varepsilon_2 = \gamma = 0$ .

Широкое распространение в различных областях получили пологие оболочки. Пологой называют оболочку, стрела подъема которой не превышает  $1/5$  наименьшего размера плана оболочки. Теория пологих оболочек, разработанная В. З. Власовым, построена на основе некоторых допущений, принятых в дополнение к основным гипотезам, положенным в основу расчета оболочек. Оболочку условно принимают настолько полой, что геометрию ее поверхности можно приближенно считать совпадающей с геометрией плоскости ее проекции. В уравнениях равновесия пренебрегают моментными членами, содержащими в качестве коэффициентов выражения кривизны и их производные.

### Вопросы для самопроверки

- 1 Что называется оболочкой?
- 2 Назовите основные гипотезы теории оболочек.

- 3 Каковы условия существования безмоментного напряженного состояния?
- 4 Приведите и объясните основные уравнения безмоментного напряженного состояния.
- 5 Что такое краевой эффект?
- 6 Что называется линией искажения?
- 7 Каков порядок расчета оболочки вращения с учетом краевого эффекта?
- 8 Приведите полный комплект уравнений теории оболочек.
- 9 Рассмотрите и объясните различные граничные условия на краях оболочки.
- 10 Как рассчитывают цилиндрические оболочки в зависимости от отношения пролета к длине волны?
- 11 Приведите и объясните основные уравнения полумоментной теории цилиндрических оболочек. Какова модель такой оболочки?

## Т е м а 6

### ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 4.07, 5.01 – 5.05, 6.01 – 6.08, 17.01 – 18.05, 18.11, 19.01 – 19.08, 20.01, 20.02, 20.04]; [2, гл. 22]; [4, §§ 18, 19, 23, 24, 27, 31, 32, 40 – 45, 58, 59, 64, 66, 67, 70, 72, 74 – 77, 83, 88 – 91, 92, 99, 100]; [6, гл. 11 – 14]; [7, §§ 58 – 65]; [8, §§ 1.5, 3.9, 6.5, 8.6, 8.7, 8.10, 12.9, 12.10].

Исходя из схематизированных диаграмм растяжения-сжатия материалов и учитывая, что при этом предел пропорциональности практически близок к пределу текучести, называют тело *идеально пластическим*, если площадка текучести имеет большое протяжение. Различают также модели тел: а) *идеально упругопластического*, б) *жесткопластического*. В первом теле площадка текучести простирается до бесконечности. Во втором теле пренебрегают упругой деформацией и принимают, что до предела текучести нет никаких деформаций, а после достижения напряжениями предела текучести площадка текучести простирается до бесконечности. В обоих телах после достижения  $\sigma_T$  диаграмма растяжения представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс.

При решении задач теории пластичности необходимо четко различать простое и сложное нагружения, процессы активной и пассивной деформаций. Наиболее распространенными критериями пластичности являются условия пластичности Сен-Венана и Мизеса. Теории пластичности можно разделить на две группы:

- 1) теории упругопластических деформаций;
- 2) теории пластического течения.

В первой группе устанавливаются связи между напряжениями и деформациями. Во второй группе устанавливаются зависимости между напряжениями и скоростями деформаций.

Относительно новой ветвью механики сплошных деформируемых сред является теория ползучести. Свойство ползучести материала состоит в том, что даже при постоянных нагрузках напряжения и деформации в материале изменяются во времени. Изменение во времени деформаций называется *ползучестью* или *последствием*. Изменение во времени напряжений называется *релаксацией*. Способность материала изменять во времени свое напряженно-деформированное состояние иногда называют *вязкостью*.

Ползучесть материала в качественном отношении хорошо отражают модели деформируемого тела Максвелла и Фойгта: первая представляет собой последовательное соединение упругого и вязкого элементов, а вторая – параллельное соединение упругого и вязкого элементов.

Для более глубокого изучения данной темы необходимо обратиться к литературе, указанной выше, а также ознакомиться с решением простейших задач по теории ползучести: изгиб вязкоупругой балки, кручение круглого бруса, труба под внутренним давлением, статически неопределимые системы и др.

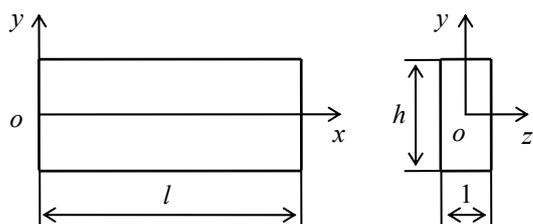
### Вопросы для самопроверки

- 1 Чем отличаются друг от друга простое и сложное нагружения?
- 2 Что представляют собой активная и пассивная деформации?
- 3 Как формулируются условия пластичности Сен-Венана и Мизеса?
- 4 Назовите и объясните основные законы теории малых упругопластических деформаций?
- 5 Сколько неизвестных функций подлежит определению при решении задач пластичности и какими уравнениями мы для этого располагаем?
- 6 Объясните явления ползучести и релаксации напряжений.
- 7 Объясните суть моделей упруговязких тел Максвелла и Фойгта.
- 8 В чем суть установившейся и неуставившейся ползучести?
- 9 Объясните основное содержание наследственной теории ползучести и теории старения.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

### З а д а ч а 1 ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

З а д а н и е. Дана прямоугольная полоса-балка (рис. 1.1) длиной  $l$ , высотой  $h$  и толщиной, равной 1. Выражения для функции напряжений  $\phi(x, y)$  и числовые значения выбрать из табл. 1.1. Объемными силами пренебречь. Требуется: 1) проверить, можно ли предложенную функцию  $\phi(x, y)$  принять для решения плоской задачи теории упругости; 2) найти выражения для напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ ; 3) построить эпюры напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  для сечений  $x = x_c$  и  $y = y_c$ ; 4)



**Рис. 1.1**

определить внешние силы (нормальные и касательные), примененные ко всем четырем граням полосы-балки, дать их изображение на рисунке полосы-балки; 5) выполнить статическую проверку для найденных внешних сил.

Таблица 1.1

№ строки	Функция напряжений $\phi(x, y)$	$a$	$b$	$l$	$h$	$x_c$	$y_c$
		M					
1	$a(x^4 - y^4) + bx^3y + xy^3$	1	1	5	1	1	0,2
2	$ax(x^2 + y^2) + bx^2y + xy$	2	1	6	1	2	0,3
3	$ay(x^2 + y^2) + bxy^2 + xy$	2	1	5	2	2	0,4
4	$ax^3 + bx^2y + xy^2 + xy$	1	2	6	1	2	0,3
5	$a(y^4 - x^4) + bxy^3 + x^2y$	1	2	6	2	2	0,5
6	$ax^4 - 3ax^2y^2 + bxy^3$	2	2	4	2	1	0,5
7	$ax^3y - 3bx^2y^2 + by^4$	2	1	4	2	1	0,5
8	$ax^4 - 3(a+b)x^2y^2 + by^4$	2	1	6	1	3	0,3
9	$axy^3 + x^3 + y^3 - bxy$	1	2	5	1	2	0,2
0	$ax^3y + 3bx^2y^2 - by^4$	2	1	5	2	2	0,4
е		д					

### Методические указания

Предложенная для решения плоской задачи теории упругости функция  $\phi(x, y)$  должна удовлетворять бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0. \quad (1.1)$$

2 Решить такую же задачу, только при условии заделки по контуру.

3 Круглая сплошная пластинка радиуса  $R$  шарнирно оперта по контуру и нагружена изгибающим моментом  $M$ , равномерно распределенным по контуру. Найти:

- уравнение срединной поверхности;
- выражения изгибающих моментов.

### ГИБКИЕ ПЛАСТИНКИ

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 15.14, 15.15]; [6, гл. 8, §§ 13]; [7, §§ 29 – 33]; [8, §§ 16.10, 17.8].

При прогибах, сравнимых с толщиной пластинки, следуя нелинейной теории изгиба, Карман свел задачу об изгибе пластинки к двум нелинейным дифференциальным уравнениям, в которые входят производные от функции напряжений  $\phi$  и прогиба  $w$ .

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 14.04, 15.09 – 15.11]; [2, §§ 20.11]; [6, гл. 9, §§ 1 – 7]; [7, §§ 40, 46 – 49]; [8, §§ 12.5, 17.6, 19.6].

Методы, которые основываются на интегрировании уравнения Софи Жермен – Лагранжа, часто требуют довольно громоздких выкладок и в ряде случаев приводят к непреодолимым пока математическим трудностям. Между тем для практических целей нередко бывает достаточно получить приближенное решение задачи.

Идея метода Ритца – Тимошенко в основном заключается в следующем. Задаются изогнутой поверхностью пластинки в виде ряда

$$w = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(x, y),$$

где  $a_k$  – обобщенные координаты упругой системы; функции  $\phi_k$  выбирают так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям пластинки. Составляют выражение полной энергии пластинки  $\mathcal{E}$ , выраженной через  $w$ , и из условий минимума функционала  $\mathcal{E}$  получают

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Последние равенства представляют собой систему  $n$  линейных алгебраических уравнений, из которых находят значения параметров  $a_k$ , определяющих изогнутую поверхность пластинки.

Ограничиваясь приведенными краткими замечаниями, рекомендуем познакомиться подробнее с приближенными методами Ритца – Тимошенко, Бубнова – Галеркина и Власова по литературе.

## Т е м а 5

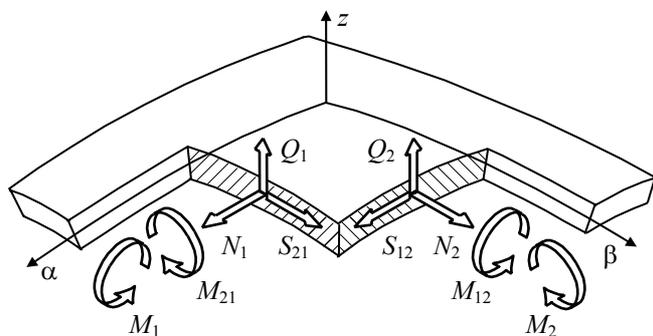
### ОСНОВЫ РАСЧЕТА ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 16.01 – 16.06]; [3, гл. 1, §§ 1.1 – 1.7, гл. 2, §§ 2.1 – 2.5, 2.9, гл. 3, §§ 3.1 – 3.14, гл. 4, §§ 4.1 – 4.5, гл. 6, §§ 6.1, 6.2, 6.5, 6.6]; [6, гл. 10, §§ 1 – 13]; [7, §§ 50 – 57]; [8, §§ 18.1 – 18.6].

Необходимо прежде всего вспомнить некоторые сведения из дифференциальной геометрии: способы задания кривой, способы задания поверхности, криволинейные координаты на поверхности, нормальное сечение, главные радиусы кривизны и главные кривизны, линейный элемент, первая квадратичная форма поверхности и др.

Необходимо четко представлять себе внутренние силы, действующие на элемент оболочки, в общем случае напряженного состояния:  $N_1, N_2$  – нормальные усилия;  $Q_1, Q_2$  – поперечные силы;  $S_{12}, S_{21}$  – сдвигающие силы;  $M_{12}, M_{21}$  – крутящие моменты;  $M_1, M_2$  – изгибающие моменты.

В рассматриваемой здесь системе координат  $\alpha$  и  $\beta$  являются криволинейными координатными линиями. Составив



условия равновесия рассматриваемого элемента оболочки, получим пять уравнений, содержащих десять неизвестных усилий.

Учитывая закон парности касательных напряжений и малость толщины оболочки по сравнению с радиусом ее кривизны, можно считать, что  $M_{12} = M_{21}$  и  $S_{12} = S_{21}$ . Следовательно, из условий равновесия имеем пять уравнений с восемью неизвестными усилиями.

Рассматривая геометрическую сторону задачи, получаем шесть уравнений, связывающих компоненты упругого перемещения и деформации оболочки.

Рассматривая физическую сторону задачи, приходим к шести соотношениям, связывающим усилия и деформации.

Итак, напряженно-деформированное состояние тонкой оболочки определяется решением 17 уравнений при заданных граничных условиях. Эти уравнения содержат 17 неизвестных: 8 усилий и 9 компонентов упругого перемещения и деформации.

В строительной практике встречаются задачи, напряженное состояние в которых характеризуется лишь нормальными  $N_1$  и  $N_2$  и сдвигающими  $S$  усилиями. Такое напряженное состояние называется *безмоментным*: оно статически определимо в бесконечно малом.

Если возникают значительные напряжения от изгиба, то для расчета тонкостенных пространственных конструкций используется моментная теория оболочек.

Ознакомление с применением моментной теории оболочек рекомендуется начать с задач о расчете круговых цилиндрических оболочек. Математический аппарат, используемый при их расчете, значительно упрощается. Прежде всего необходимо познакомиться с расчетом круглой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении (например, резервуар, наполненный жидкостью). Так как нижний край оболочки связан с днищем и не может свободно перемещаться,

то здесь возникают изгибающие моменты и поперечные силы. Напряженное состояние оболочки представляет собой сумму безмоментного и моментного состояний.

Линии на поверхности оболочки, где полностью или частично нарушаются условия существования безмоментного напряженного состояния, называют *линиями искажения*. Около линии искажения возникает быстро затухающее изгибное напряженное состояние, называемое *краевым эффектом*.

Напряженное состояние открытых цилиндрических оболочек, широко применяемых в строительной практике, существенным образом зависит от соотношений их размеров в плане, отношения пролета  $l$  к длине волны  $l_1$ . Различают длинные оболочки, для которых  $l/l_1 > 4$ , оболочки средней длины  $4 \geq l/l_1 \geq 1$  и короткие оболочки  $l/l_1 \leq 1$ . Длинную оболочку можно рассчитывать как балку корытообразного сечения. Напряженное состояние такой оболочки в продольном направлении практически безмоментное, т.е.  $M_1 = Q_1 = 0$ . В оболочке средней длины становится существенным изгибное состояние вдоль волны; изгибом вдоль пролета можно пренебречь. Такое напряженное состояние называют *полумоментным*. Короткая оболочка полностью охвачена моментным состоянием как вдоль пролета, так и вдоль волны.

Полумоментная теория цилиндрических оболочек В. З. Власова основана на двух предположениях:

- а) безмоментное напряженное состояние в продольном направлении  $M_1 = Q_1 = M_{12} = M_{21} = 0$ ;
- б) отсутствие сдвигов и нерастяжимость оболочки в круговом направлении  $\varepsilon_2 = \gamma = 0$ .

Широкое распространение в различных областях получили пологие оболочки. Пологой называют оболочку, стрела подъема которой не превышает  $1/5$  наименьшего размера плана оболочки. Теория пологих оболочек, разработанная В. З. Власовым, построена на основе некоторых допущений, принятых в дополнение к основным гипотезам, положенным в основу расчета оболочек. Оболочку условно принимают настолько полой, что геометрию ее поверхности можно приближенно считать совпадающей с геометрией плоскости ее проекции. В уравнениях равновесия пренебрегают моментными членами, содержащими в качестве коэффициентов выражения кривизны и их производные.

### Вопросы для самопроверки

- 12 Что называется оболочкой?
- 13 Назовите основные гипотезы теории оболочек.
- 14 Каковы условия существования безмоментного напряженного состояния?
- 15 Приведите и объясните основные уравнения безмоментного напряженного состояния.
- 16 Что такое краевой эффект?
- 17 Что называется линией искажения?
- 18 Каков порядок расчета оболочки вращения с учетом краевого эффекта?
- 19 Приведите полный комплект уравнений теории оболочек.
- 20 Рассмотрите и объясните различные граничные условия на краях оболочки.
- 21 Как рассчитывают цилиндрические оболочки в зависимости от отношения пролета к длине волны?
- 22 Приведите и объясните основные уравнения полумоментной теории цилиндрических оболочек. Какова модель такой оболочки?

### Т е м а 6

#### ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

Л и т е р а т у р а: [1, §§ 4.07, 5.01 – 5.05, 6.01 – 6.08, 17.01 – 18.05, 18.11, 19.01 – 19.08, 20.01, 20.02, 20.04]; [2, гл. 22]; [4, §§ 18, 19, 23, 24, 27, 31, 32, 40 – 45, 58, 59, 64, 66, 67, 70, 72, 74 – 77, 83, 88 – 91, 92, 99, 100]; [6, гл. 11 – 14]; [7, §§ 58 – 65]; [8, §§ 1.5, 3.9, 6.5, 8.6, 8.7, 8.10, 12.9, 12.10].

Исходя из схематизированных диаграмм растяжения-сжатия материалов и учитывая, что при этом предел пропорциональности практически близок к пределу текучести, называют тело *идеально пластическим*, если площадка текучести имеет большое протяжение. Различают также модели тел: а) *идеально упругопластического*, б) *жесткопластического*. В первом теле площадка текучести простирается до бесконечности. Во втором теле пренебрегают упругой деформацией и принимают, что до предела текучести нет никаких деформаций, а после достижения напряжениями предела текучести площадка текучести простирается до бесконечности. В обоих телах после достижения  $\sigma_T$  диаграмма растяжения представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс.

При решении задач теории пластичности необходимо четко различать простое и сложное нагружения, процессы активной и пассивной деформаций. Наиболее распространенными критериями пластичности являются условия пластичности Сен-Венана и Мизеса. Теории пластичности можно разделить на две группы:

- 3) теории упругопластических деформаций;
- 4) теории пластического течения.

В первой группе устанавливаются связи между напряжениями и деформациями. Во второй группе устанавливаются зависимости между напряжениями и скоростями деформаций.

Относительно новой ветвью механики сплошных деформируемых сред является теория ползучести. Свойство ползучести материала состоит в том, что даже при постоянных нагрузках напряжения и деформации в материале изменяются во времени. Изменение во времени деформаций называется *ползучестью* или *последствием*. Изменение во времени напряжений называется *релаксацией*. Способность материала изменять во времени свое напряженно-деформированное состояние иногда называют *вязкостью*.

Ползучесть материала в качественном отношении хорошо отражают модели деформируемого тела Максвелла и Фойгта: первая представляет собой последовательное соединение упругого и вязкого элементов, а вторая – параллельное соединение упругого и вязкого элементов.

Для более глубокого изучения данной темы необходимо обратиться к литературе, указанной выше, а также ознакомиться с решением простейших задач по теории ползучести: изгиб вязкоупругой балки, кручение круглого бруса, труба под внутренним давлением, статически неопределимые системы и др.

### Вопросы для самопроверки

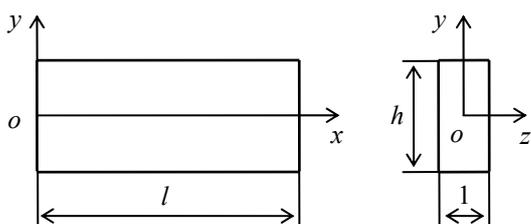
- 10 Чем отличаются друг от друга простое и сложное нагружения?
- 11 Что представляют собой активная и пассивная деформации?
- 12 Как формулируются условия пластичности Сен-Венана и Мизеса?
- 13 Назовите и объясните основные законы теории малых упругопластических деформаций?
- 14 Сколько неизвестных функций подлежит определению при решении задач пластичности и какими уравнениями мы для этого располагаем?
- 15 Объясните явления ползучести и релаксации напряжений.
- 16 Объясните суть моделей упруговязких тел Максвелла и Фойгта.
- 17 В чем суть установившейся и неустойчивой ползучести?
- 18 Объясните основное содержание наследственной теории ползучести и теории старения.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

### Задача 1

#### ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

**З а д а н и е.** Дана прямоугольная полоса-балка (рис. 1.1) длиной  $l$ , высотой  $h$  и толщиной, равной 1. Выращения для функции напряжений  $\phi(x, y)$  и числовые значения выбрать из табл. 1.1. Объемными силами пренебречь. Требуется: 1) проверить, можно ли предложенную функцию  $\phi(x, y)$  принять для решения плоской задачи теории упругости; 2) найти выражения для напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ ; 3) построить эпюры напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  для сечений  $x = x_c$  и  $y = y_c$ ; 4) определить внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосы-балки, дать их



**Рис. 1.1**

изображение на рисунке полосы-балки; 5) выполнить статическую проверку для найденных внешних сил.

Таблица 1.1

№ строки	Функция напряжений $\phi(x, y)$	$a$	$b$	$l$	$h$	$x_c$	$y_c$
		м					
1	$a(x^4 - y^4) + bx^3y + xy^3$	1	1	5	1	1	0,2
2	$ax(x^2 + y^2) + bx^2y + xy$	2	1	6	1	2	0,3
3	$ay(x^2 + y^2) + bxy^2 + xy$	2	1	5	2	2	0,4
4	$ax^3 + bx^2y + xy^2 + xy$	1	2	6	1	2	0,3
5	$a(y^4 - x^4) + bxy^3 + x^2y$	1	2	6	2	2	0,5
6	$ax^4 - 3ax^2y^2 + bxy^3$	2	2	4	2	1	0,5
7	$ax^3y - 3bx^2y^2 + by^4$	2	1	4	2	1	0,5
8	$ax^4 - 3(a+b)x^2y^2 + by^4$	2	1	6	1	3	0,3
9	$axy^3 + x^3 + y^3 - bxy$	1	2	5	1	2	0,2
0	$ax^3y + 3bx^2y^2 - by^4$	2	1	5	2	2	0,4
е		д					

Предложенная для решения плоской задачи теории упругости функция  $\phi(x, y)$  должна удовлетворять бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0. \quad (1.1)$$

Выражения для напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  решаемой задачи получают по следующим формулам:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \quad (1.2)$$

Для определения внешних сил (нормальных и касательных), приложенных ко всем четырем граням полосы-балки используют условия на поверхности тела (условия на контуре тела или статические граничные условия):

$$\begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x \cos(x, v) + \tau_{xy} \cos(y, v); \\ p_{yv} &= \tau_{yx} \cos(x, v) + \sigma_y \cos(y, v). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$  – проекции на оси  $Ox$  и  $Oy$  внешних сил, действующих на гранях полосы-балки;  $v$  – нормаль к грани;  $\cos(x, v)$ ,  $\cos(y, v)$  – направляющие косинусы нормали  $v$ .

Для проверки найденных внешних сил можно использовать условия равновесия полосы-балки под их действием:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_0 = 0.$$

**Пример 1.** Задана полоса-балка (рис. 1.1). Функция напряжений:  $\phi(x, y) = axy^3 + bx^3y + cx^2$ , где  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$ .

Размеры:  $l = 2$  м;  $h = 1$  м;  $x_c = 1$  м.

**Решение.**

1 Проверка пригодности  $\phi(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= ay^3 + 3bx^2y + 2cx; & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= 6bxy + 2c; & \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} &= 6by; & \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} &= 0; \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 3ay^2x + bx^3; & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= 6axy; & \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} &= 6ax; & \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= 3ay^2 + 3bx^2; & \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} &= 6bx; & \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Подставляем найденные производные в уравнение (1.1):  $0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0$ . Следовательно, заданное выражение тождественно удовлетворяет бигармоническому уравнению плоской задачи теории упругости и может быть принято для решения этой задачи.

2 Выражения для напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 6axy; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 6bxy + 2c; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -3ay^2 - 3bx^2.$$

3 Построение эпюр напряжений в сечении  $x = x_c = 1$  м. При  $x = 1$  имеем:  $\sigma_x = 6ay = 12y$ ;  $\sigma_y = 6y + 4$ ;  $\tau_{xy} = -6y^2 - 3$ .

По указанным выражениям для напряжений, изменяя  $y$  от  $-h/2$  до  $+h/2$ , строим их эпюры (рис. 1.2).

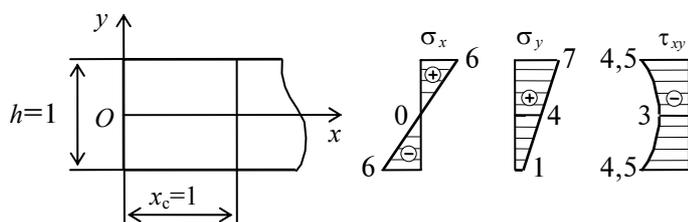


Рис. 1.2

4 Определяем внешние силы (нормальные и касательные), приложенные к граням балки (рис. 1.3).

Верхняя грань:

$$y = h/2 = 0,5 \text{ м};$$

$$\sigma_x = 6x; \quad \sigma_y = 3x + 4; \quad \tau_{xy} = -1,5 - 3x^2;$$

$$l = \cos(x, v) = \cos(x, y) = 0; \quad m = \cos(y, v) = \cos(y, y) = 1;$$

$$p_{xv}^B = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot 1 = \tau_{xy} = -1,5 - 3x^2; \quad p_{yv}^B = \tau_{xy} \cdot 0 + \sigma_y \cdot 1 = \sigma_y = 3x + 4.$$

Для сил, нормальных  $p_{yv}^B$  и касательных  $p_{xv}^B$  к этой грани, строим их эпюры, изменяя  $x$  от 0 до  $l = 2$  м.

Нижняя грань:

$$y = -h/2 = -0,5 \text{ м};$$

$$\sigma_x = -6x; \quad \sigma_y = -3x + 4; \quad \tau_{xy} = -1,5 - 3x^2;$$

$$l = \cos(x, v) = \cos(x, -y) = 0; \quad m = \cos(y, v) = \cos(y, -y) = -1;$$

$$p_{xv}^n = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot (-1) = -\tau_{xy} = 1,5 + 3x^2; \quad p_{yv}^n = \tau_{xy} \cdot 0 + \sigma_y \cdot (-1) = -\sigma_y = 3x - 4.$$

Для сил, нормальных  $p_{xv}^n$  и касательных  $p_{yv}^n$  к этой грани, строим их эпюры, изменяя  $x$  от 0 до  $l = 2$  м.

Левая грань:

$$x = 0;$$

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_y = 4; \quad \tau_{xy} = -6y^2;$$

$$l = \cos(x, v) = \cos(x, -x) = -1; \quad m = \cos(y, v) = \cos(y, -x) = 0;$$

$$p_{xv}^n = \sigma_x \cdot (-1) + \tau_{xy} \cdot 0 = -\sigma_x = 0; \quad p_{yv}^n = \tau_{xy} \cdot (-1) + \sigma_y \cdot 0 = -\tau_{xy} = 6y^2.$$

Для сил, нормальных  $p_{xv}^n$  и касательных  $p_{yv}^n$  к этой грани, строим их эпюры, изменяя  $y$  от  $-h/2 = -0,5$  м до  $h/2 = 0,5$  м.

Правая грань:

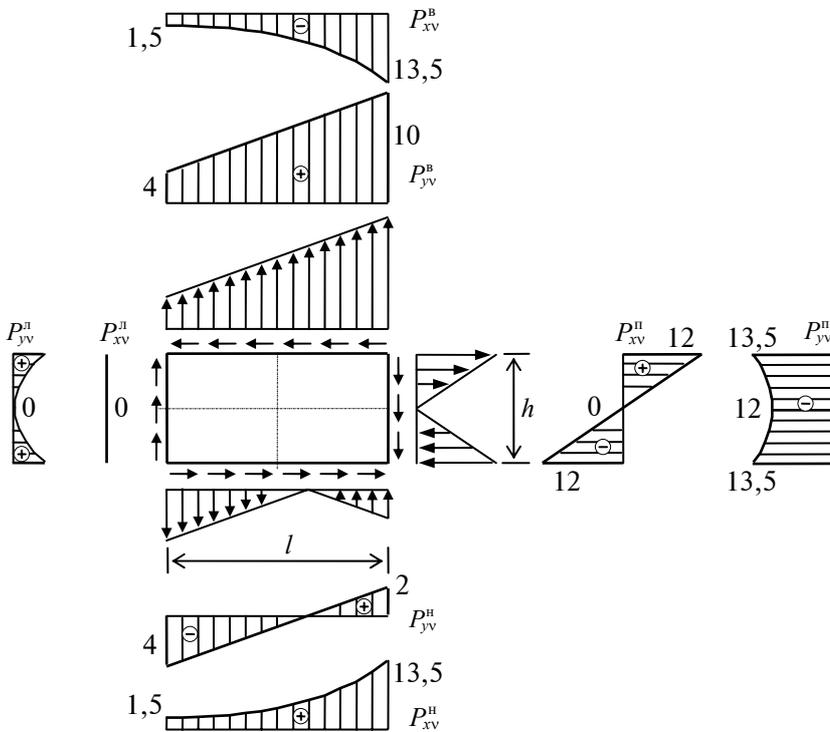
$$x = l = 2;$$

$$\sigma_x = 24y; \quad \sigma_y = 4 + 12y; \quad \tau_{xy} = -6y^2 - 12;$$

$$l = \cos(x, v) = \cos(x, x) = 1; \quad m = \cos(y, v) = \cos(y, x) = 0;$$

$$p_{xv}^n = \sigma_x \cdot 1 + \tau_{xy} \cdot 0 = \sigma_x = 24y; \quad p_{yv}^n = \tau_{xy} \cdot 1 + \sigma_y \cdot 0 = \tau_{xy} = -6y^2 - 12.$$

Для сил, нормальных  $p_{xv}^n$  и касательных  $p_{yv}^n$  к этой грани, строим их эпюры, изменяя  $y$  от  $-h/2 = -0,5$  м до  $h/2 = 0,5$  м. Эпюры сил, действующих на все четыре грани, приведены на рис. 1.3.



5 Проверим условия равновесия полосы-балки под действием внешних сил:

Рис. 1.3

$$\sum X = \int_0^l (P_{xv}^B + P_{xv}^H) dx + \int_{-h/2}^{+h/2} (P_{xv}^n + P_{xv}^n) dy;$$

$$\sum X = \int_0^l (-1,5 - 3x^2 + 1,5 + 3x^2) dx + \int_{-h/2}^{+h/2} (0 + 24y) dy = \int_0^l 0 dx + \int_{-h/2}^{+h/2} 24y dy = 0;$$

$$\sum Y = \int_0^l (P_{yv}^B + P_{yv}^H) dx + \int_{-h/2}^{+h/2} (P_{yv}^n + P_{yv}^n) dy;$$

$$\sum Y = \int_0^l (3x + 4 + 3x - 4) dx + \int_{-h/2}^{+h/2} (6y^2 - 6y^2 - 12) dy;$$

$$\sum Y = 3l^2 - 12h = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 1 = 12 - 12 = 0;$$

$$\sum M_0 = \int_0^l \left[ (P_{xv}^B - P_{xv}^H) \frac{h}{2} - (P_{yv}^B + P_{yv}^H) x \right] dx + \int_{-h/2}^{+h/2} \left[ (P_{xv}^n + P_{xv}^n) y + P_{yv}^n 0 - P_{yv}^n l \right] dy;$$

$$\sum M_0 = \int_0^l \left[ (-1,5 - 3x^2 - 1,5 - 3x^2) \frac{h}{2} - (3x + 4 + 3x - 4) x \right] dx +$$

$$+ \int_{-h/2}^{+h/2} [(0+24y)y + 6y^2 \cdot 0 - (-6y^2 - 12)l] dy;$$

$$\sum M_0 = -\frac{3hl}{2} - hl^3 - 2l^3 + \frac{8h^3}{4} + \frac{2lh^3}{4} + 12lh =$$

$$= -\frac{3 \cdot 1 \cdot 2}{2} - 1 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^3 + \frac{8 \cdot 1^3}{4} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 1^3}{4} + 12 \cdot 2 \cdot 1 = 27 - 27 = 0.$$

Условия равновесия выполняются.

## Задача 2 ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

**З а д а н и е.** Стальной кубик находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (рис. 2.1). Требуется найти: 1) главные напряжения и направления главных площадок; 2) максимальные касательные напряжения; 3) относительные деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ; 4) относительное изменение объема; 5) удельную потенциальную энергию деформации. Данные взять из табл. 2.1.

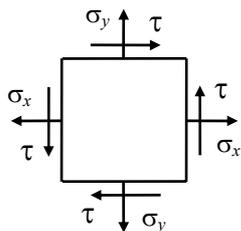


Рис. 2.1

Таблица 2.1

№ строки	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau$	№ строки	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau$
	МПа				МПа		
1	10	10	10	6	-60	-60	-60
2	20	20	20	7	-70	-70	-70
3	30	30	30	8	-80	-80	-80
4	40	40	40	9	-90	-90	-90
5	50	50	50	0	-100	-100	-100
	а	б	в		а	б	в

### Методические указания

Угол наклона главных площадок находят по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Эта формула дает два взаимно перпендикулярных направления с углами  $\alpha$  и  $\alpha + 90^\circ$ . Здесь положительное направление для отсчета углов принято против часовой стрелки.

Уравнения для главных напряжений на соответствующих площадках имеют вид

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha;$$

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau \sin 2\alpha.$$

Значения главных напряжений можно найти иначе:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Максимальные касательные напряжения возникают на площадках, наклоненных под углом  $45^\circ$  к главным, и равны полуразности главных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Для вычисления деформаций  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  по известным нормальным напряжениям  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  используют обобщенный закон Гука. При  $\sigma_z = 0$  имеем

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x); \quad \varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y).$$

Здесь  $E$  – модуль упругости;  $\mu$  – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

Относительное изменение объема

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Удельная потенциальная энергия деформации

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_{\max}^2 + \sigma_{\min}^2 - 2\mu\sigma_{\max}\sigma_{\min}).$$

**Пример 2.** Стальной кубик (рис. 2.2) находится в плоском напряженном состоянии:  $\sigma_x = 160$  МПа;  $\sigma_y = 120$  МПа;  $\tau = -60$  МПа. Требуется найти: положения главных площадок; значения главных напряжений; максимальные касательные напряжения; относительные деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ; относительное изменение объема; удельную потенциальную энергию деформации.

Для стали принимаем: модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа; коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ .

Решение.

Определяем положения главных площадок

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot (-60)}{120 - 160} = -3,$$

следовательно,  $2\alpha = -71^\circ 34'$ ;  $\alpha = -35^\circ 47'$ ;  $\bar{\alpha} = -(35^\circ 47' + 90^\circ) = -125^\circ 47'$ .

Отрицательное значение углов наклона главных площадок указывает на то, что поворот должен осуществляться по ходу часовой стрелки от направления оси  $x$  (рис. 2.2).

Находим значения главных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{\max/\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}; \\ \sigma_{\max/\min} &= \frac{160 + 120}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{160 - 120}{2}\right)^2 + 60^2} = 140 \pm 63 \text{ МПа}; \\ \sigma_{\max} &= 140 + 63 = 203 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\min} = 140 - 63 = 77 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

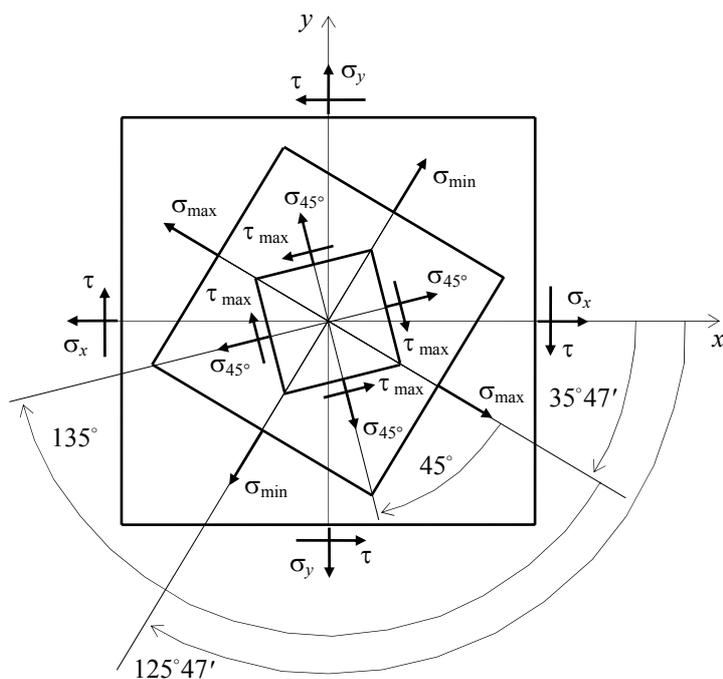


Рис. 2.2

Определяем максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{203 - 77}{2} = 63 \text{ МПа}$$

и соответствующие нормальные напряжения

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{203 + 77}{2} = 140 \text{ МПа}.$$

Вычисляем относительные деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y) = \frac{160 - 0,3 \cdot 120}{2 \cdot 10^5} = 62 \cdot 10^{-5}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x) = \frac{120 - 0,3 \cdot 160}{2 \cdot 10^5} = 36 \cdot 10^{-5}; \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{0,3(160+120)}{2 \cdot 10^5} = -42 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Находим относительное изменение объема

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 62 \cdot 10^{-5} + 36 \cdot 10^{-5} - 42 \cdot 10^{-5} = 56 \cdot 10^{-5}.$$

Определяем удельную потенциальную энергию деформации

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_{\max}^2 + \sigma_{\min}^2 - 2\mu\sigma_{\max}\sigma_{\min});$$

$$u = \frac{203^2 + 77^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot 203 \cdot 77}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} = 0,0943985 \text{ МПа} = 94398,5 \text{ Дж/м}^3.$$

### З а д а ч а 3

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЪЕМНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

**З а д а н и е.** Напряженное состояние в точке тела задано девятью компонентами: (рис. 3.1). Требуется: 1) определить главные напряжения и проверить правильность их нахождения; 2) определить положение одной из главных площадок (вычислить направляющие косинусы нормали к этой площадке); 3) определить положения двух других главных площадок (вычислить направляющие косинусы нормалей к этим площадкам). Это требование выполняется факультативно; 4) показать на рисунке нормали к главным площадкам. Числовые данные взять из табл. 3.1.

Таблица 3.1

№	□ <sub>x</sub>	□ <sub>y</sub>	□ <sub>z</sub>	□ <sub>xy</sub>	□ <sub>yz</sub>	□ <sub>zx</sub>
---	----------------	----------------	----------------	-----------------	-----------------	-----------------

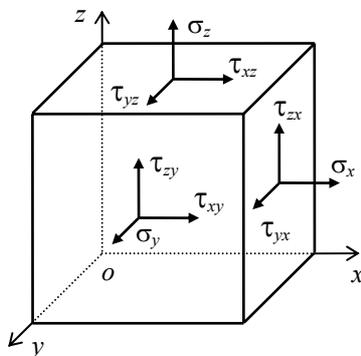


Рис. 3.1

строки	МПа					
1	30	-30	30	-30	30	-30
2	40	-40	40	-40	40	-40
3	50	-50	50	-50	50	-50
4	60	-60	60	-60	60	-60
5	70	-70	70	-70	70	-70
6	80	-80	80	-80	80	-80
7	90	-90	90	-90	90	-90
8	100	-100	100	-100	100	-100
9	110	-110	110	-110	110	-110
0	120	-120	120	-120	120	-120
	а	б	в	г	д	е

#### Методические указания

Главные напряжения в задаче на исследование напряженного состояния в точке тела находят, решая кубическое уравнение

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0. \quad (3.1)$$

Здесь коэффициенты являются инвариантами преобразования координат:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{const};$$

$$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \text{const}; \quad (3.2)$$

$$J_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \text{const}.$$

Уравнение (3.1) подстановкой  $\sigma = y + \frac{J_1}{3}$  приводим к виду

$$y^3 + py + q = 0. \quad (3.3)$$

Здесь новые коэффициенты соответственно равны:

$$p = J_2 - \frac{J_1^2}{3}; \quad q = -\frac{2}{27}J_1^3 + \frac{1}{3}J_1J_2 - J_3. \quad (3.4)$$

Корни кубического уравнения (3.3) выражаем через вспомогательный угол  $\varphi$ , определяемый из равенства  $\cos \varphi = \left| \frac{q}{2r^3} \right|$ , где  $r = \sqrt{|p|/3}$ . Получаем:

$$y_1 = -2r \cos \frac{\varphi}{3}; \quad y_2 = 2r \cos \left( 60^\circ - \frac{\varphi}{3} \right); \quad y_3 = 2r \cos \left( 60^\circ + \frac{\varphi}{3} \right). \quad (3.5)$$

Проверка

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0. \quad (3.6)$$

Главные напряжения равны:

$$\sigma' = y_1 + \frac{J_1}{3}; \quad \sigma'' = y_2 + \frac{J_1}{3}; \quad \sigma''' = y_3 + \frac{J_1}{3}. \quad (3.7)$$

Этим трем главным напряжениям в дальнейшем присваиваем обозначения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , где  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Контроль правильности решения кубического уравнения (3.1) проводим, используя инвариантность коэффициентов  $J_1, J_2, J_3$ :

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \quad J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \quad J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (3.8)$$

Для определения положения главных площадок вычисляем направляющие косинусы нормалей к главным площадкам  $l, m, n$ . Соответствующую систему однородных уравнений

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0; \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0; \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0 \end{aligned}$$

удобно представить в виде

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \frac{l}{n} + \tau_{xy} \frac{m}{n} &= -\tau_{xz}; \\ \tau_{yx} \frac{l}{n} + (\sigma_y - \sigma) \frac{m}{n} &= -\tau_{yz}; \\ \tau_{zx} \frac{l}{n} + \tau_{zy} \frac{m}{n} + (\sigma_z - \sigma) &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В системе (3.9) из трех уравнений только два независимые, поэтому, определив  $l/n$  и  $m/n$  из решения двух уравнений, третье уравнение используем для контроля найденных отношений  $l/n$  и  $m/n$ . Решение системы (3.9) в общем виде

$$\begin{aligned} \frac{l}{n} &= \frac{(\sigma_y - \sigma)\tau_{xz} - \tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{xy}^2 - (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)}, \\ \frac{m}{n} &= \frac{(\sigma_x - \sigma)\tau_{yz} - \tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{xy}^2 - (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вычислив  $l/n$  и  $m/n$ , далее, из соотношения между квадратами направляющих косинусов

$$(l/n)^2 + (m/n)^2 + 1 = 1/n^2 \quad (3.11)$$

находим два корня  $\pm n$ . Для дальнейшего расчета достаточно оставить только один корень, например,  $+n$ . Соответствующие знаки и величины  $l$  и  $m$  определяем из отношений  $l/n$  и  $m/n$ . Полученные  $l, m, n$  можно рассматривать как координаты некоторой точки  $A$  (рис. 3.2), лежащей на нормали  $\nu$  к соответствующей главной площадке.

Если направляющие косинусы нормали  $\nu_1$  к площадке главного напряжения  $\sigma_1$  обозначить через  $l_1, m_1, n_1$ , а нормалей  $\nu_2, \nu_3$  – соответственно через  $l_2, m_2, n_2$  и  $l_3, m_3, n_3$ , то из условия взаимной перпендикулярности нормалей к главным площадкам получим три контрольных равенства:

$$\begin{aligned} l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 &= 0; \\ l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3 &= 0; \\ l_3l_1 + m_3m_1 + n_3n_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

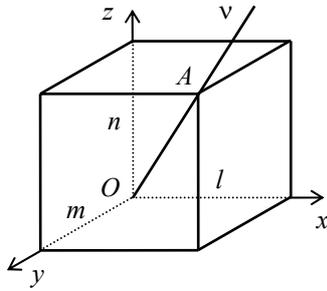


Рис. 3.2

**Пример 3.** Для напряженного состояния в точке тела (рис. 3.1) задано шесть компонентов:  $\sigma_x = -50$  МПа ;  $\sigma_y = 70$  МПа ;  $\sigma_z = 100$  МПа ;  $\tau_{xy} = -80$  МПа ;  $\tau_{yz} = -60$  МПа ;  $\tau_{zx} = 100$  МПа. Требуется определить значения главных напряжений и положения главных площадок.

**Решение.**

1 Определение значений главных напряжений. Согласно (3.2), имеем:

$$J_1 = -50 + 70 + 100 = 120; J_2 = -50 \cdot 70 + 70 \cdot 100 - 100 \cdot 50 - 80^2 - 60^2 - 100^2 = -21\,500;$$

$$J_3 = -50 \cdot 70 \cdot 100 + 2 \cdot 80 \cdot 60 \cdot 100 + 50 \cdot 60^2 - 70 \cdot 100^2 - 100 \cdot 80^2 = -550\,000.$$

По формулам (3.4) получаем:

$$p = -21\,500 - \frac{1}{3}120^2 = -26\,300;$$

$$q = -\frac{2}{27}120^3 - \frac{1}{3}120 \cdot 21\,500 + 550\,000 = -438\,000;$$

$$r = \sqrt{26\,300/3} = -93,6305;$$

$$\cos \varphi = \left| \frac{-438\,000}{2 \cdot (-93,6305)^3} \right| = 0,266804; \quad \varphi = 74,5258^\circ.$$

Используя (3,5), находим корни уравнения (3.3):

$$y_1 = -2(-93,6305)\cos(74,5258/3) = 169,934;$$

$$y_2 = 2(-93,6305)\cos(60 - 74,5258/3) = -153,098;$$

$$y_3 = 2(-93,6305)\cos(60 + 74,5258/3) = -16,835.$$

Проверка значений корней по (3.6)

$$169,934 - 153,098 - 16,835 = 0,001 \approx 0.$$

Вычисляем главные напряжения:

$$\sigma' = 169,934 + 120 / 3 = 209,934;$$

$$\sigma'' = -153,098 + 120 / 3 = -113,098;$$

$$\sigma''' = -16,835 + 120 / 3 = 23,165.$$

Принимаем:

$$\sigma_1 = 209,934 \text{ Мо а}; \quad \sigma_2 = 23,165 \text{ Мо а}; \quad \sigma_3 = -113,098 \text{ Мо а}.$$

Проверка главных напряжений по (3.8):

$$209,934 + 23,165 - 113,098 = 120,001 \approx 120;$$

$$209,934 \cdot 23,165 - 23,165 \cdot 113,098 - 113,098 \cdot 209,934 = -21\,499,9 \approx -21\,500;$$

$$-209,934 \cdot 23,165 \cdot 113,098 = -550\,009,3 \approx -550\,000.$$

2 Определение положений главных площадок.

Находим положение главной площадки, по которой действует напряжение  $\sigma_1 = 209,934$  Мо а . В (3.10) подставляем  $\sigma = 209,934$  Мо а :

$$\frac{l_1}{n_1} = \frac{(70,0 - 209,934)100,0 - 80,0 \cdot 60,0}{80,0^2 - (-50,0 - 209,934)(70,0 - 209,934)} = 0,627;$$

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{(-50,0 - 209,934) \cdot (-60,0) + 100,0 \cdot 80,0}{80,0^2 - (-50,0 - 209,934)(70,0 - 209,934)} = -0,78723.$$

Проверка по третьему уравнению системы (3.9):

$$100,0 \cdot 0,627 + 60,0 \cdot 0,78723 + (100,0 - 209,934) = 109,934 - 109,934 = 0.$$

Из уравнения (3.11) находим  $n_1$  :

$$0,627^2 + 0,78723^2 + 1 = \frac{1}{n_1^2} \text{ или } 2,01286 = \frac{1}{n_1^2}, \quad n_1 = \pm 0,7048.$$

Принимаем  $n_1 = 0,7048$ .

Получаем:

$$l_1 = 0,7048 \cdot 0,627 = 0,4419; \quad m_1 = 0,7048 \cdot (-0,78723) = -0,5548.$$

Находим положение главной площадки, по которой действует напряжение  $\sigma_2 = 23,165$  Мо а. В (3.10) подставляем  $\sigma = 23,165$  Мо а:

$$\frac{l_2}{n_2} = \frac{(70,0 - 23,165)100,0 - 80,0 \cdot 60,0}{80,0^2 - (-50,0 - 23,165)(70,0 - 23,165)} = -0,011855;$$

$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{(-50,0 - 23,165)(-60,0) + 100,0 \cdot 80,0}{80,0^2 - (-50,0 - 23,165)(70,0 - 23,165)} = 1,26084.$$

Проверка по третьему уравнению системы (3.9):

$$100,0 \cdot (-0,011855) - 60,0 \cdot 1,26084 + (100,0 - 23,165) = 76,835 - 76,836 \approx 0.$$

Из уравнения (3.11) находим  $n_2$ :

$$(-0,011855)^2 + 1,26084^2 + 1 = \frac{1}{n_2^2} \text{ или } 2,58986 = \frac{1}{n_2^2}, \quad n_2 = \pm 0,6214.$$

Принимаем  $n_2 = 0,6214$ .

Получаем:

$$l_2 = 0,6214(-0,011855) = -0,007364; \quad m_2 = 0,6214 \cdot 1,26084 = 0,7835.$$

Находим положение главной площадки, по которой действует напряжение  $\sigma_3 = -113,098$  Мо а. В (3.10) подставляем  $\sigma = -113,098$  Мо а:

$$\frac{l_3}{n_3} = \frac{(70,0 - (-113,098))100,0 - 80,0 \cdot 60,0}{80,0^2 - (-50,0 - (-113,098))(70,0 - (-113,098))} = -2,6216;$$

$$\frac{m_3}{n_3} = \frac{(-50,0 - (-113,098))(-60,0) + 100,0 \cdot 80,0}{80,0^2 - (-50,0 - (-113,098))(70,0 - (-113,098))} = -0,81777.$$

Проверка по третьему уравнению системы (3.9):

$$100,0 \cdot (-2,6216) - 60,0 \cdot (-0,81777) + (100,0 - (-113,098)) = 262,16 - 262,16 = 0.$$

Из уравнения (3.11) находим  $n_3$ :

$$(-2,6216)^2 + (-0,81777)^2 + 1 = \frac{1}{n_3^2} \text{ или } 8,5415 = \frac{1}{n_3^2}, \quad n_3 = \pm 0,3422.$$

Принимаем  $n_3 = 0,3422$ .

Получаем:

$$l_3 = 0,3422 \cdot (-2,6216) = -0,897; \quad m_3 = 0,3422 \cdot (-0,81777) = -0,2798.$$

Проверка направляющих косинусов согласно условиям (3.12):

$$0,4419(-0,007364) + (-0,5548)0,7835 + 0,7048 \cdot 0,6214 = 0,4379 - 0,4379 = 0;$$

$$-0,007364(-0,897) + 0,7835(-0,2798) + 0,6214 \cdot 0,3422 = 0,2192 - 0,2192 = 0;$$

$$-0,89702 \cdot 0,4419 + (-0,2798)(-0,5548) + 0,3422 \cdot 0,7048 = 0,3964 - 0,3964 = 0.$$

На рис. 3.3 изображены нормали к главным площадкам  $v_1, v_2, v_3$ ; главные площадки  $OBEC, BEFD, OADB$ ; главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

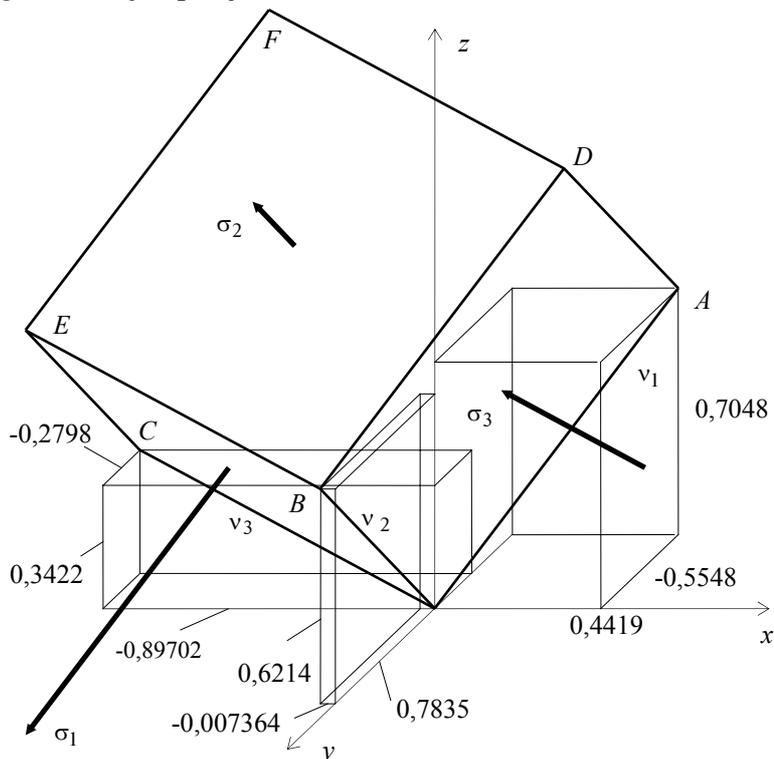


Рис. 3.3

#### Задача 4

#### ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК

**Задание.** Пластинка (рис. 4.1) изгибается под действием поперечной нагрузки. Задано уравнение упругой поверхности пластинки  $w(x, y)$ . Требуется: 1) установить, каким граничным условиям удовлетворяет предложенное уравнение упругой поверхности  $w(x, y)$ ; 2) определить постоянный коэффициент  $C$ , используя дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки; 3) составить выражения моментов и поперечных сил; 4) построить эпюры моментов и поперечных сил в сечениях  $x_c, y_c$ . Числовые данные взять из табл. 4.1.

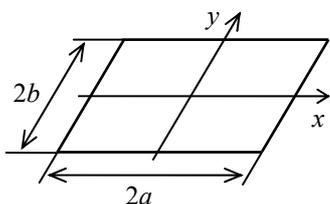


Рис. 4.1

Таблица 4.1

№ строки	Поверхность пластинки $w(x, y)$	Поперечная нагрузка $q(x, y)$	$a$	$b$	$h$	$x_c$	$y_c$	□
			м					
9	$C \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}$	$q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}$	3	3	0,1	1	1	0,25

2	$C \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{b}$	$q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{b}$	4	4	0,2	1	1	0,30
3	$C \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}$	$q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}$	5	5	0,1	1	1	0,35
4	$C \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{2\pi y}{b}$	$q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{2\pi y}{b}$	6	6	0,2	1	1	0,25
5	$C \sin \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$	$q_0 \sin \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$	3	3	0,1	2	2	0,30
6	$C \cos \frac{3\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{2b}$	$q_0 \cos \frac{3\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{2b}$	4	4	0,2	2	2	0,35
7	$C \sin \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}$	$q_0 \sin \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}$	5	5	0,1	2	2	0,25
8	$C \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{2b}$	$q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{2b}$	6	6	0,2	2	2	0,30
9	$C \sin \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$	$q_0 \sin \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$	4	4	0,1	3	3	0,35
0	$C \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi y}{2b}$	$q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi y}{2b}$	5	5	0,2	3	3	0,25
	е	е	а	б	в	а	б	г

#### Методические указания

Уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = q(x, y). \quad (4.1)$$

Изгибающие моменты:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \quad (4.2)$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$$

Крутящий момент

$$M_{xy} = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.3)$$

Поперечные силы:

$$Q_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right); \quad (4.4)$$

$$Q_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right).$$

**Пример 4.** Прямоугольная пластинка (рис. 4.1) изгибается под действием поперечной нагрузки интенсивности  $q(x, y)$ :

$$q(x, y) = q_0 \left[ \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{a^4} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{b^4} \cos \frac{\pi y}{b} \right];$$

$$q_0 = \text{const}.$$

Задано уравнение упругой поверхности пластинки

$$w(x, y) = C \left[ \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{a^4} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{b^4} \cos \frac{\pi y}{b} \right];$$

$$C = \text{const}; \quad a = 2 \text{ м}; \quad b = 1 \text{ м}; \quad \mu = 0,3.$$

Жесткость пластинки  $D = \text{const}$ . Требуется: установить, каким граничным условиям удовлетворяет предложенное уравнение упругой поверхности  $w(x, y)$ ; определить постоянный коэффициент  $C$ ; составить выражения моментов и поперечных сил; построить эпюры моментов и поперечных сил в сечении  $y_c = b/6$ .

**Решение.**

1. Определяем условия на контуре пластинки (граничные условия):

$$\begin{aligned} \text{при } x = \pm a \quad w &= 0; \\ \text{при } y = \pm b \quad w &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, пластинка оперта по всем четырем краям. Выясним, как она оперта: шарнирно или жестко. Уравнение углов поворота в направлении, параллельном  $Ox$ ,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -C \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \left( 1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right).$$

При  $x = \pm a$   $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ . Это значит, что левый и правый края защемлены.

Уравнение углов поворота в направлении, параллельном  $Oy$ ,

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -C \frac{\pi}{b} \sin \frac{\pi y}{b} \left( 1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right).$$

При  $y = \pm b$   $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ . Получаем, что верхний и нижний края тоже защемлены. Итак, пластинка жестко защемлена по всем четырем краям.

2. Определяем постоянную  $C$ . Для этого воспользуемся уравнением (4.1) и составим соответствующие производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -C \left( 1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{a}; \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= C \left( 1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) \left( \frac{\pi}{a} \right)^3 \sin \frac{\pi x}{a}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= C \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \cos \frac{\pi x}{a}; \\
\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} &= C \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\pi}{b}\right) \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \\
\frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} &= C \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}; \\
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -C \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cos \frac{\pi y}{b}; \\
\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= C \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^3 \sin \frac{\pi y}{b}; \\
\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= C \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \cos \frac{\pi y}{b}; \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= C \frac{\pi^2}{ab} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \\
\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} &= C \left(\frac{\pi}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}; \\
\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} &= C \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\pi}{b}\right) \sin \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi x}{a}.
\end{aligned}$$

Левая часть уравнения (4.1) принимает следующий вид

$$\begin{aligned}
&DC\pi^4 \left( \frac{1}{a^4} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{b^4} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{a^4} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + 2 \frac{1}{a^2 b^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{b^4} \times \right. \\
&\left. \times \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right) = DC\pi^4 \left[ \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{a^4} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{b^4} \cos \frac{\pi y}{b} \right].
\end{aligned}$$

Подставив в уравнение (4.1) левую и правую (см. заданное выражение для нагрузки) части, после сокращений получаем

$$C = \frac{q_0}{D\pi^4}.$$

3 Составляем выражения для внутренних усилий по формулам (4.2), (4.3), (4.4):

$$\begin{aligned}
M_x &= DC \left[ \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos \frac{\pi x}{a} + \mu \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cos \frac{\pi y}{b} \right]; \\
M_y &= DC \left[ \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cos \frac{\pi y}{b} + \mu \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos \frac{\pi x}{a} \right]; \\
M_{xy} &= -DC \frac{\pi^2}{ab} (1 - \mu) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \\
Q_x &= -DC \left[ \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 \sin \frac{\pi x}{a} + \left(\frac{\pi}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right]; \\
Q_y &= -DC \left[ \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^3 \sin \frac{\pi y}{b} + \left(\frac{\pi}{b}\right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi x}{a} \right].
\end{aligned}$$

Выражения для внутренних усилий с учетом найденного значения  $C$  имеют вид

$$\begin{aligned}
M_x &= \frac{q_0}{\pi^2} \left[ \frac{1}{a^2} \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{\mu}{b^2} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \cos \frac{\pi y}{b} \right]; \\
M_y &= \frac{q_0}{\pi^2} \left[ \frac{1}{b^2} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{\mu}{a^2} \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \cos \frac{\pi x}{a} \right]; \\
M_{xy} &= -\frac{q_0}{\pi^2 ab} (1 - \mu) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \\
Q_x &= -\frac{q_0}{\pi a} \left[ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \right]; \\
Q_y &= -\frac{q_0}{\pi b} \left[ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \sin \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{b^2} \sin \frac{\pi y}{b} \right].
\end{aligned}$$

Подставив в полученные уравнения заданные числовые значения, находим для усилий в требуемом сечении  $y = y_c = 1/6$  м следующие выражения:

$$M_x = \frac{q_0}{\pi^2} \left( 0,7265 \cos \frac{\pi x}{a} + 0,26 \right);$$

$$M_y = \frac{q_0}{\pi^2} \left( 1,006 \cos \frac{\pi x}{a} + 0,866 \right);$$

$$M_{xy} = -0,175 \frac{q_0}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{a};$$

$$Q_x = -0,666 \frac{q_0}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a};$$

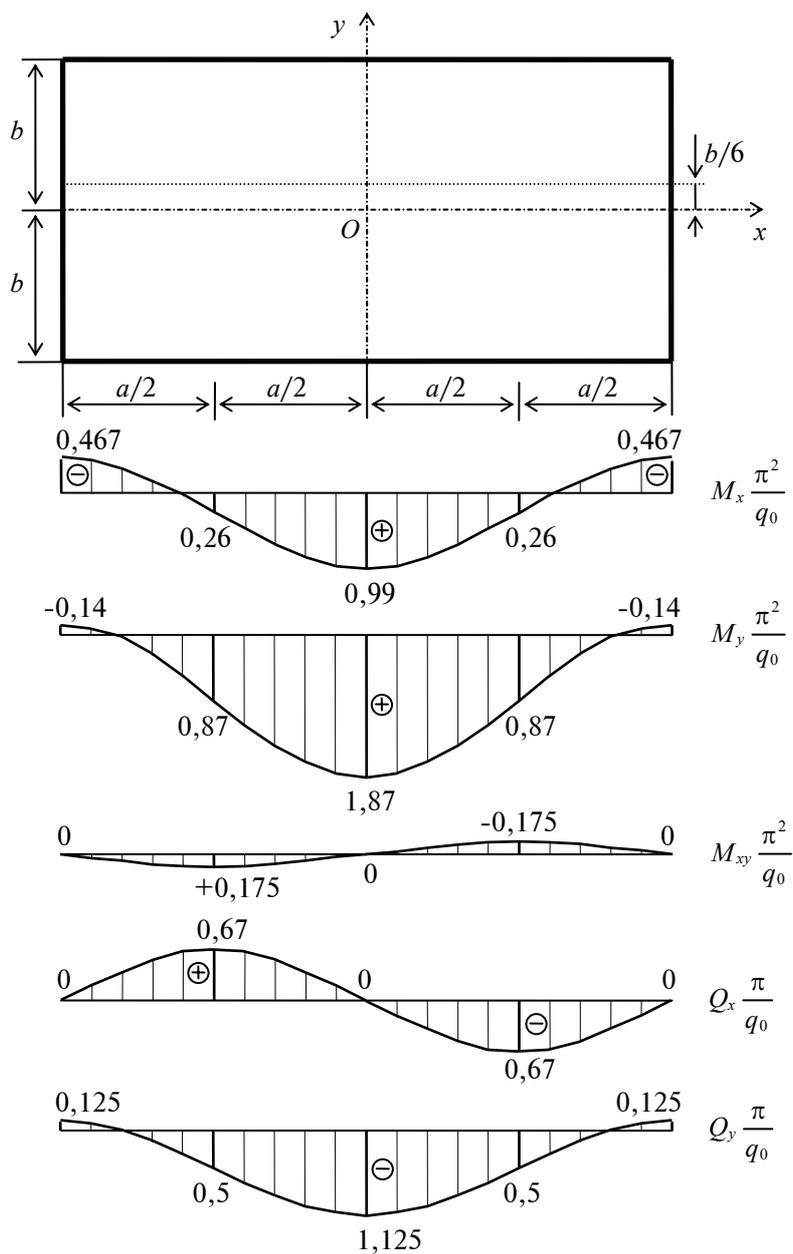


Рис. 4.2

$$Q_y = -\frac{q_0}{\pi} \left( 0,625 \cos \frac{\pi x}{a} + 0,5 \right).$$

По последним уравнениям строим эпюры усилий для сечения  $y = b/6$ , изменяя  $x$  от  $-a$  до  $+a$  (табл. 4.2 и рис. 4.2).

Таблица 4.2

$x$	$M_x$	$M_y$	$M_{xy}$	$Q_x$	$Q_y$
	Множитель $q_0/\square$			Множитель $q_0/\square$	

$-a$	$-0,467$	$-0,14$	$0$	$0$	$0,125$
$-0,5a$	$0,26$	$0,87$	$0,175$	$0,666$	$-0,5$
$0$	$0,99$	$1,87$	$0$	$0$	$-1,125$
$0,5a$	$0,26$	$0,87$	$-0,175$	$-0,666$	$-0,5$
$a$	$-0,467$	$-0,14$	$0$	$0$	$0,125$

### Задача 5 ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК

Задание. Круглая пластинка, опертая по контуру, находится под действием внешней нагрузки (рис. 5.1). Требуется: 1) найти уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки  $w(r)$ , воспользовавшись общим решением основного дифференциального уравнения изгиба пластинки; 2) составить выражения для изгибающих моментов  $M_r$  и  $M_\theta$  и для поперечной силы  $Q_r$ ; 3) построить эпюры  $M_r, M_\theta, Q_r$  для диаметрального сечения пластинки. Числовые данные взять из табл. 5.1.

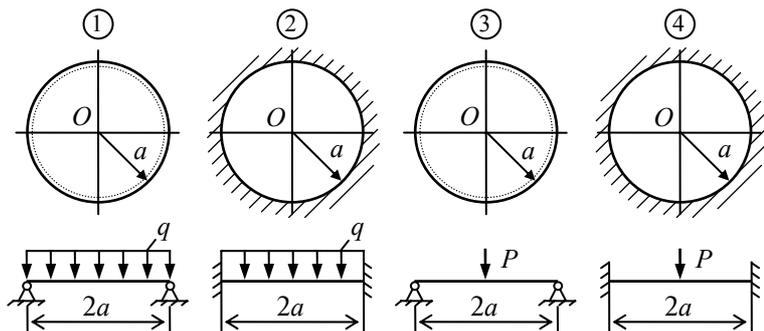


Рис. 5.1

Таблица 5.1

№ строки	№ схемы	$a$ , м	$h$ , м	$\nu$	№ строки	№ схемы	$a$ , м	$h$ , м	$\nu$
1	1	3	0,1	0,25	6	2	4	0,2	0,35
2	2	4	0,2	0,30	7	3	5	0,1	0,25
3	3	5	0,1	0,35	8	4	6	0,2	0,30
4	4	6	0,2	0,25	9	1	3	0,1	0,35
5	1	3	0,1	0,30	0	2	4	0,2	0,25
	е	а	б	в		е	а	б	в

#### Методические указания

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности круглой пластинки (осесимметричная задача)

$$D \left( \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right) = q(r). \quad (5.1)$$

Изгибающие моменты:

$$M_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right); \quad (5.2)$$

$$M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right).$$

Поперечная сила

$$Q_r = -D \left( \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right). \quad (5.3)$$

Решение дифференциального уравнения (5.1) имеет вид

$$w(r) = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2 + w^*, \quad (5.4)$$

Здесь  $w^*$  – частное решение, зависящее от функции нагрузки  $q(r)$ . При равномерно распределенной нагрузке  $q(r) = q$  из (5.1) получаем

$$w^* = \frac{qr^4}{64D}.$$

**Пример 5.** Круглая пластинка радиусом  $a$ , жестко защемленная по контуру, находится под действием внешней нагрузки  $q(r) = qr/a$ . Жесткость пластинки  $D = \text{const}$ . Найти уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки, составить выражения и построить эпюры для  $M_r, M_\theta, Q_r$ .

**Решение.**

1 Находим уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки.

Для этого интегрируем последовательно четыре раза уравнение (5.1). Таким образом,

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2 + \frac{1}{D} \int \left\{ \frac{1}{r} \int \left[ r \int \left( \frac{1}{r} \int q(r) r dr \right) dr \right] dr \right\} dr,$$

или

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2 + w^*.$$

Здесь  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – постоянные интегрирования, определяемые из условий нагрузки и закрепления пластинки;

$$w^* = \frac{1}{D} \int \left\{ \frac{1}{r} \int \left[ r \int \left( \frac{1}{r} \int q(r) r dr \right) dr \right] dr \right\} dr - \text{частное решение уравнения (5.1).}$$

При  $q(r) = qr/a$  получаем

$$w^* = \frac{qr^5}{225aD}.$$

Находим постоянные интегрирования  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . В заданной пластинке нет отверстия в середине, следовательно, прогиб в центре должен иметь определенное конечное значение. Это возможно при  $C_1 = 0$ , так как иначе в центре пластинки прогиб получится равным бесконечности.

Далее, в центре пластинки нет сосредоточенной силы, следовательно, не должны возникать бесконечно большие внутренние усилия. Для этого принимаем  $C_2 = 0$ .

Остальные постоянные интегрирования  $C_3$  и  $C_4$  находим из граничных условий на контуре пластинки.

В данном случае контур жестко зашпелен, т.е. при  $r = a$  прогиб и угол наклона срединной плоскости должны обращаться в ноль. Выражения для прогиба и угла поворота

$$w = C_3 + C_4 r^2 + \frac{qr^5}{225aD}, \quad \frac{dw}{dr} = 2C_4 r + \frac{qr^4}{45aD}.$$

При  $r = a$  имеем

$$\begin{cases} C_3 + C_4 a^2 + \frac{qa^4}{225D} = 0; \\ 2C_4 a + \frac{qa^3}{45D} = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Из (5.5) получаем:

$$C_3 = \frac{qa^4}{150D}; \quad C_4 = -\frac{qa^2}{90D}.$$

Уравнение изогнутой срединной поверхности в окончательном виде

$$w = \frac{qa^4}{450D} \left( 3 - \frac{5r^2}{a^2} + \frac{2r^5}{a^5} \right).$$

Составляем выражения для изгибающих моментов  $M_r, M_\theta$  и поперечной силы  $Q_r$ :

$$\frac{dw}{dr} = \frac{qa^4}{45D} \left( -\frac{r}{a^2} + \frac{r^4}{a^5} \right);$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{qa^4}{45D} \left( -\frac{1}{a^2} + \frac{4r^3}{a^5} \right);$$

$$\frac{d^3w}{dr^3} = \frac{4qr^2}{15Da};$$

$$M_r = -D \left( \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{qa^2}{45} \left[ 1 + \mu - (4 + \mu) \left( \frac{r}{a} \right)^3 \right];$$

$$M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2w}{dr^2} \right) = \frac{qa^2}{45} \left[ 1 + \mu - (1 + 4\mu) \left( \frac{r}{a} \right)^3 \right];$$

$$Q_r = -D \left( \frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{qa}{3} \left( \frac{r}{a} \right)^2.$$

По последним выражениям строим эпюры усилий для радиального сечения, изменяя  $r$  от 0 до  $+a$  (табл. 5.2 и рис. 5.2).

$r$	$M_r$	$M_\square$	$Q_r$
	Множитель $qa^3/45$		Множитель $qa/3$
0	1,3000	1,3000	0,0000
$a/2$	0,7625	1,0250	-0,2500
$a$	-3,0000	-0,9000	-1,0000

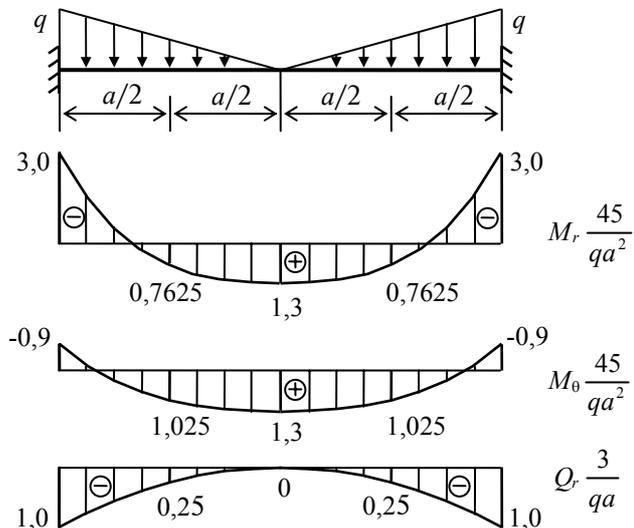


Рис. 5.2

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Безухов Н. И.** Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., 1968.
- 2 **Варданян Г. С., Андреев В. И., Атаров Н. М., Горшков А. А.** Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. М., 1995.
- 3 **Колкунов Н. В.** Основы расчета упругих оболочек. М., 1987.
- 4 **Малинин Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. М., 1975.
- 5 **Рекач В. Г.** Руководство к решению задач прикладной теории упругости. М., 1984.
- 6 **Самуль В. И.** Основы теории упругости и пластичности. М., 1982.
- 7 **Теребушко О. И.** Основы теории упругости и пластичности. М., 1984.
- 8 **Терегулов И. Г.** Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. М., 1984.
- 9 **Тимошенко С. П. и Гудьер Дж.** Теория упругости. М., 1979.