Министерство образования Российской Федерации

Тамбовский государственный технический университет

А. В. СОЛОПАХО

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

Часть I

Учебно-практическое пособие

Тамбов
Издательство ТГТУ
2001

УДК 330.105(075)
ББК В1я73-5
М34

Рецензенты:
Кандидат экономических наук,
заведующий кафедрой "Бухучет и аудит" ТГТУ
Л. В. Пархоменко
Доктор физико-математических наук,
профессор ТГУ им. Г. Р. Державина
С. М. Дзюба

М34 Математика в экономике. Учебно-практическое пособие / Авт.-сост. А. В. Солопахо. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. Ч. 1. 71 с.
ISBN 5-8265-0136-7

Изложены основные теоретические сведения и разобраны типовые задачи по первой части курса "Экономико-математические методы". Рассматриваются вопросы и задачи теории систем массового обслуживания, линейного программирования, моделей оптимизации производственных планов, теории графов и теории игр. Приводятся варианты контрольных заданий для студентов второго курса заочного отделения (специальностей 0604, 0605, 0608).

УДК 330.105(075)
ББК В1я73-5

ISBN 5-8265-0136-7

ВВЕДЕНИЕ

Методические разработки по курсу "Экономико-математические методы" содержат материал соответствующий программе третьего семестра для студентов заочного отделения. Кратко излагаются сведения по следующим разделам: "Теория систем массового обслуживания", "Линейное программирование", "Модели оптимизации производственных планов", "Теория графов" и "Теория игр". А также приводятся примеры типовых задач и подробно рассматриваются их решения, что поможет студентам самостоятельно справиться с выполнением контрольных заданий.

Контрольное задание состоит из пяти задач. Вариант задания определяется двумя последними цифрами зачетной книжки. Порядок определения варианта приводится в задании.

Тема 1 СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Теория систем массового обслуживания (СМО) [1, 2] является одним из направлений прикладной математики. В ней изучаются возможности использования математических моделей для расчета разнообразных систем, в которых происходит поступление и обслуживание некоторого потока заявок (требований). При этом обычно предполагается, что заявки поступают в случайные моменты времени и время необходимое для обслуживания каждой заявки также случайно. Примеров подобных ситуаций весьма много. Это и обслуживание кассиром случайного потока покупателей, и поступление на телефонную станцию заявок на соединения с абонентом, и очередь в поликлинике на прием к врачу (теорию СМО часто также называют теорией очередей), и т.д. Во многих таких ситуациях имеются общие свойства процессов поступления и обслуживания заявок, что позволяет использовать соответствующую теорию.

1.1   Основные понятия теории марковских случайных процессов

При моделировании многих процессов происходящих в природе (науке, технике, коммерческой деятельности) их можно рассматривать как цепи событий, в которых на каждом шаге случайным образом осуществляется переход из одного состояния в другое, причем известна вероятность того или иного перехода. Создана и широко используется математическая теория изучающая такие случайные процессы. В частности эта теория используется при изучении СМО, поэтому введем несколько соответствующих определений и фактов.

Случайный процесс по сути можно рассматривать как некоторую *случайную функцию* $\xi(t)$ (т.е. функцию, значениями которой являются случайные величины), при этом аргумент t обычно рассматривают как время (иногда как пространственную переменную). Аргумент t может являться непрерывным или дискретным, во втором случае имеется последовательность моментов $\{t_i\}$ и говорят о процессе с дискретным временем или случайной последовательности $\xi(t_i)$.

Пространством состояний называется множество всех возможных состояний, которые может принимать процесс. Это множество может быть конечным или счетным (тогда говорят о *дискретном случайном процессе*) или непрерывным (тогда случайный процесс называется *непрерывным*).

Далее будем рассматривать только случайные процессы с конечным пространством состояний. Обзначим $s_1, \ldots, s_N$ - состояния в заданном пространстве N состояний. Запись $s_i \to s_j$, будет означать, что процесс переходит из i-го состояния в j-е.

Случайный процесс называется *марковским* или *цепью Маркова*, если выполнено важное условие

$$P\{\xi(t_{n+1}) = s_{i_{n+1}} / \xi(t_n) = s_{i_n}, ..., \xi(t_0) = s_{i_0}\} = P\{\xi(t_{n+1}) = \\ = s_{i_{n+1}} / \xi(t_n) = s_{i_n}\},$$

т.е. вероятность попадания процесса в какое либо состояние на следующем шаге зависит только от текущего состояния процесса и не зависит ни от одного из состояний, достигнутых ранее.

Если эти вероятности не изменяются с течением времени, т.е. не зависят от n, то такой процесс называется *стационарным*. Для стационарных марковских процессов можно определить вероятность перехода из состояния s_i в s_j, за один шаг, не зависящую от номера шага

$$p_{ij} = P\{s_i \to s_j\}.$$

При этом очевидно выполняются условия:

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1,\ i = 1, ..., N; \quad p_{ij} \ge 0,\ i = 1,...,N.$$

Эти соотношения выражают то, что если процесс на некотором шаге находится в состоянии s_i, то на следующем шаге он с вероятностью 1 переходит в некоторое другое возможное состояние из пространства состояний (в частности процесс может не изменить своего состояния, если $p_{ii} \neq 0$).

Назовем матрицу $P = \{p_{ij}\}$ размера $N \times N$ матрицей переходных вероятностей.

Первое состояние, из которого процесс начинается, очевидно должно быть так или иначе задано. Это делается с помощью некоторого вектора $a^{(0)} = (a_1^{(0)}, ..., a_N^{(0)})$, где $a_j^{(0)}$ есть вероятность того, что в начальный момент, процесс находился в состоянии s_j: $a_j^{(0)} = P\{\xi(t_0) = s_j\}$. Например, если достоверно (то есть с вероятностью 1) известно, что перед первым шагом процесс находился в состоянии s_m, где $1 \le m \le n$, то $a_m^{(0)} = 1$, а другие компоненты этого вектора равны нулю. Задание начального состояния процесса с помощью вектора вероятностей позволяет изучать и рассчитывать случаи, когда перед началом последовательности моментов, для которой мы рассматриваем процесс, известно, что процесс с известными вероятностями может находиться в одном из нескольких состояний. Такая ситуация имеет место часто.

Далее ясно, что поскольку сами переходы случайны, то состояние процесса после k шагов может описываться только вектором вероятностей подобным вектору $a^{(0)}$. Обозначим через $a^{(k)}$ - n-мерный вектор, координаты которого выражают вероятности, что процесс находится в состоянии s_i после k шагов. Оказывается вектор $a^{(k)}$ может быть найден по формуле

$$a^{(k)} = a^{(0)} P^k. \tag{1.1}$$

Итак, стационарная конечная марковская цепь полностью определена, если заданы:

- конечное пространство состояний;
- начальный вектор вероятностей $a^{(0)}$;
- матрица переходных вероятностей P.

Пример 1.1 В качестве примера опишем как марковскую цепь следующий случайный процесс. Два корабля стреляют друг в друга одновременно и через равные промежутки времени. При каждом обмене выстрелами корабль A поражает корабль B с вероятностью 1/2, а корабль B поражает корабль A с вероятностью 3/8. Предполагается, что при любом попадании корабль выходит из строя. Рассматриваются результаты серии выстрелов. Составьте пространство состояний и матрицу перехода, если состояниями цепи будут комбинации кораблей, оставшихся в строю.

Пространство состояний будет включать следующие 4 состояния:

- s_i = {целы оба корабля},
- s_2 = {A цел, B поражен},
- s_3 = {A поражен, B цел},
- s_4 = {оба корабля поражены}.

Поскольку в состояниях s_1, s_2, s_3 выстрелы не производятся, то, попав в одно иэ этих состояний, с вероятностью 1 цель останется в том же состоянии. Следовательно, $p_{22} = p_{33} = p_{44} = 1$, а $p_{ij} = 0$, $i = 2, 3, 4$, $j \neq i$. Определим вероятность перехода из s_1 в s_1, s_2, s_4. Вероятность того, что при выстрелах оба корабля уцелеют p_{11} = (1 - 1/2)(1 - 3/8) = 5/16. Вероятность того, что при выстрелах будет поражен корабль B, а корабль A останется цел p_{12} = 1/2(1 - 3/8) = 5/16; вероятность того, что A будет поражен, а B цел p_{13} = (11/2)3/8 = 3/16; вероятность того, что будут поражены оба корабля p_{14} = 1/2·3/8 = 3/16. Тогда матрица перехода P запишется в виде

$$P = \begin{pmatrix} 5/16 & 5/16 & 3/16 & 3/16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем, например, состояние рассматриваемого процесса после одного обмена выстрелами

$$a^{(1)} = a^{(0)}P = (1, 0, 0, 0)P = (5/16, 5/16, 3/16, 3/16),$$

здесь принято $a^{(0)}P$ = (1, 0, 0, 0) поскольку до обмена выстрелами оба корабля были целы. Далее после двух обменов выстрелами

$$a^{(1)} = a^{(0)}P^2 = a^{(1)}P = (5/16, 5/16, 3/16, 3/16)P =$$
$$= (25/256, 105/256, 63/256, 63/256),$$

это означает, что после двух выстрелов оба корабля останутся целы с вероятностью 25/256, только первый - 105/256, только второй - 63/256, оба будут поражены с вероятностью 63/256. Аналогично можно рассчитать вероятности состояний после любого конечного количества выстрелов.

1.2 Стационарное распределение регулярной марковской цепи

Во многих случаях, в частности в целях исследования СМО, особый интерес представляет состояние случайного процесса после бесконечно большого количества шагов. Поскольку в действительности бесконечного количества шагов не может быть прослежено никогда, здесь идет речь о некотором векторе, который является пределом последовательности векторов $a^{(i)}$, при $i \to \propto$. Если такой предел существует, то этот вектор называется *стационарным распределением* случайного процесса. Обозначим его через b, тогда можно записать

$$\lim_{i \to \infty} aP^i = b.$$

Стационарное распределение существует не всегда, характеристики процесса необходимые и достаточные для его существования описаны ниже.

Марковская цепь называется *эргодической*, если каждое состояние из пространства состояний S может быть достигнуто из любого другого состояния из S. Эргодические цепи бывают двух видов:

• *циклической* называется цепь, в которой каждое состояние может приниматься через определенные периодические интервалы;

• *регулярной* называется эргодическая цепь, не являющаяся циклической.

Регулярная цепь (или регулярный марковский процесс) движется между всех состояний в пространстве состояний, попадая в любое данное состояние через неопределенное число непериодических интервалов времени. Матрица переходов регулярного марковского процесса называется регулярной матрицей переходов.

Например, процесс описанный в предыдущем примере не является регулярным. Убедиться в этом не сложно схематически изобразив множество его возможных состояний и переходные вероятности в виде рис. 1.1. На этом рисунке не показаны стрелками переходы с нулевыми вероятностями. Таким образом, как можно было понять и без рисунка, из состояний s_1, s_2, s_3 в другие состояния уже попасть невозможно, а значит данный процесс не является эргодическим и, следовательно, - регулярным.

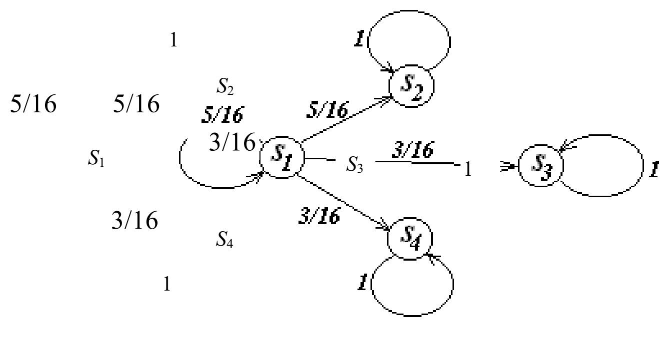


Рис. 1.1

Фундаментальная теорема для регулярных марковских цепей утверждает, что если P является регулярной матрицей переходов, то:

1) существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} P^k = B$;

2) каждая строка матрицы B при этом есть один и тот же вектор $b = (b_1, ..., b_2)$, компоненты которого удовлетворяют условиям

$$b_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} b_i = 1.$$

Приведенная теорема, в частности, означает, что в случае регулярной цепи полные вероятности попадания в различные состояния при достаточно большом числе шагов *не зависят от начального состояния*.

Для нахождения стационарного распределения b регулярной цепи удобно пользоваться очевидным свойством, что b - единственный вероятностный вектор такой, что выполняется векторное равенство

$$bP = b. \tag{1.2}$$

В координатной форме равенство (1.2) примет вид:

$$
\begin{cases}
b_1 p_{11} + b_2 p_{21} + \dots + b_N p_{N1} = b_1, \\
b_1 p_{12} + b_2 p_{22} + \dots + b_N p_{N2} = b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_1 p_{1N} + b_2 p_{2N} + \dots + b_N p_{NN} = b_N.
\end{cases}
$$

Пример 1.2 Найдем, например стационарное распределение для регулярной цепи, имеющей матрицу перехода

$$
P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.
$$

Пусть $b = (b_1, b_2, b_3)$ искомое стационарное распределение. Выпишем уравнение (1.2) в виде системы линейных уравнений:

$$1/3\ b_2 + 1/4\ b_3 = b_1,$$

$$1/2\ b_1 + 1/4\ b_3 = b_2\ ,$$

$$1/2 b_1 + 2/3 b_2 + 1/2 b_3 = b_3.$$

Добавим условие того, что вектор b является вероятностным:

$$\boldsymbol{b_1 + b_2 + b_3 = 1.}$$

Решая первое, второе и четвертое уравнения (так как третье уравнение является линейной комбинацией первого и второго), получаем $b_1 = = (b_1, b_2, b_3) = (8/37, 9/37, 20/37)$.

Рассмотрим стационарное распределение для случайного процесса схематически изображенного на рис. 1.2. Видим, что при всех ненулевых вероятностях перехода он является регулярным.

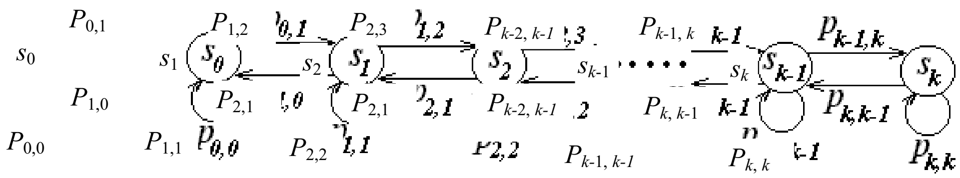


Рис. 1.2

Обозначим через $b = (b_0, \dots, b_k)$ вектор его стационарного распределения, тогда система уравнений (1.2) запишется в виде

$$\boldsymbol{b_0 p_{0,0} + b_1 p_{1,0} = b_0,}$$

$$\boldsymbol{b_{i-1} p_{i-1,i} + b_i p_{i,i} + b_{i+1} p_{i+1,\,i} = b_i\,, \quad i = 1\ ,\dots, k - 1,}$$

$$b_{k-1} p_{k-1,k} + b_k p_{k,k} = b_k,$$

$$\sum_{i=1}^{k} b_i = 1.$$

Не сложно проверить, что решением этой системы являются величины

$$b_0 = \left(1 + \frac{p_{0,1}}{p_{1,0}} + \frac{p_{0,1}p_{1,2}}{p_{1,0}p_{2,1}} + \ldots + \frac{p_{k-1,k} \cdot \ldots \cdot p_{1,2}p_{0,1}}{p_{k,k-1} \cdot \ldots \cdot p_{2,1}p_{1,0}}\right)^{-1},$$

$$b_1 = \frac{p_{0,1}}{p_{1,0}} b_0,\ b_2 = \frac{p_{1,2}p_{0,1}}{p_{2,1}p_{1,0}} b_0, \ldots,\ b_k = \frac{p_{k-1,k} \cdots p_{1,2}p_{0,1}}{p_{k,k-1} \cdots p_{2,1}p_{1,0}} b_0. \qquad (1.3)$$

1.3 Основные понятия теории массового обслуживания

Перейдем теперь непосредственно к СМО. К определяющим характеристикам СМО относятся:

- количество обслуживающих приборов. Различают одноканальные и многоканальные СМО;
- организация очереди. Если вновь поступающее требование не найдя свободного обслуживающего прибора покидает СМО, то такая СМО называется СМО с отказами, если становится в очередь, то - СМО с ожиданием. Может иметь место ограничение на длину очереди. Тогда если вновь поступающее требование приходит в систему в момент, когда длина очереди заявок ожидающих обслуживания достигла максимально допустимой величины, то заявка уходит не обслуженной;
- дисциплина обслуживания. То есть порядок выбора из очереди заявки для обслуживания. Могут использоваться принципы: "первый пришел - первый обслужился", или "первый пришел - последний обслужился", или другие.

Центральным понятием изучаемой теории является понятие *потока событий*, под которым понимается последовательность однородных событий происходящих в случайные или не случайные моменты времени [1]. Поток называется *стационарным*, если его характеристики не меняются со временем. Важнейшей характеристикой потока является его *интенсивность*, под которой понимается среднее количество заявок поступающих в единицу времени. Говорят, что имеется *поток без последействия*, если являются независимыми случайные величины количества событий произошедших на любых двух непересекающихся промежутках времени. Поток называется *ординарным*, если отношение вероятности, что за время Δt произошло два или более событий, и вероятности, что произошло одно событие стремится к нулю при $\Delta t \to 0$. Иначе говоря требования в систему приходят по одиночке, а не группами. Поток называется *простейшим*, если он стационарен ординарен и не имеет последействия.

Можно доказать, что для простейшего потока интенсивности λ вероятность появления m событий (или что тоже самое - появления требований) за промежуток времени длиной τ выражается формулой

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}, \qquad (1.4)$$

которая называется формулой Пуассоновского распределения. В соответствии с (1.4) математическое ожидание случайной величины m равно $\lambda\tau$. То есть интенсивность является единственным параметром потока. Также важно, что

теперь может быть записана вероятность появления хотя бы одного требования за промежуток времени Δt:

$$P(\Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t}, \qquad \textbf{(1.5)}$$

чем меньше величина Δt, тем точнее следующее приближение

$$P(\Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t. \qquad \textbf{(1.6)}$$

Если считать, что поток обслуженных заявок так же является простейшим с интенсивностью μ, то аналогично формуле (1.5) можно записать вероятность, что за время t будет обслужена хотя бы одна заявка (или что тоже самое: вероятность, что время обслуживания одной заявки T окажется меньше t)

$$P(T < t) = 1 - e^{-\mu t}. \qquad \textbf{(1.7)}$$

То есть формула (1.7) дает функцию распределения времени обслуживания заявки. Распределение случайной величины вида (1.7) называется *экспоненциальным*.

В научной литературе часто используются особые условные обозначения типа СМО. Например, М/М/1 означает СМО с пуассоновским потоком требований, экспоненциальным временем обслуживания и одним обслуживающим прибором. Если при этом поток требований является не случайным с постоянной интенсивностью (регулярным), то тогда система обозначается Д/М/1.

1.4 Использование марковских цепей для моделирования СМО

Чаще всего встречаются и исследуются СМО, в которых либо входной, либо выходной поток является пуассановским. Однако иногда можно предположить, что имеется некоторый (достаточно малый) промежуток времени Δt, для которого вероятности, как прихода, так и обслуживания двух и более требований можно считать равными нулю. Тогда, если заданы эти вероятности поступления одной заявки p_1 и обслуживания p_2 за промежуток времени Δt, то для моделирования возникающего процесса массового обслуживания можно использовать марковскую цепь.

Пусть в очереди не может быть более k требований. Тогда получаем цепь графически представленную на рисунке 1.2 (как уже говорилось она является регулярной). Пространство состояний включает $k + 1$ элементов $\{s_i,\ i = \overline{0,k}\}$. Элементы матрицы переходных вероятностей имеют вид:

$$p_{i,j} = 0,\ |i - j| > 1,$$
$$p_{i,i+1} = p_1(1 - p_2),\ i \neq 0, k,$$
$$p_{i,i-1} = (1 - p_1)\, p_2,\ i \neq 0,$$
$$p_{i,i} = p_1 p_2 + (1 - p_1)(1 - p_2),\ i \neq 0, k,$$
$$p_{0,0} = (1 - p_1),$$
$$p_{0,1} = p_1,$$
$$p_{k,k} = p_1 + (1 - p_1)(1 - p_2).$$

А элементы вектора стационарного распределения задаются формулами (1.3).

Пример 1.3 В качестве примера такого подхода к расчету СМО рассмотрим следующую ситуацию. Пусть в гараже мастерской по ремонту автомобилей может разместиться не более двух машин. В среднем на ремонт автомобиля затрачивается 5 часов; каждый час с вероятностью 1/4 может поступить новая заявка на ремонт автомобиля. При открытии мастерской очередь была пуста. Определить вероятность того, что:

а) через два часа после начала работы в мастерской не будет автомобилей;

б) в очереди через 12 часов после открытия мастерской будет 2 требования.

Из условий задачи можно определить величины $p_1 = 1/4$ и $p_2 = 1/5$. Используя формулы, получим матрицу переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 \\ 0,15 & 0,65 & 0,2 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

а) Вероятности того, что через два шага в очереди стоят 0, 1 или 2 требования задаются компонентами вектора $a^{(2)}$. В соответствии с условием задачи вектор начального состояния $a^{(0)} = (1, 0, 0)$. Согласно (1) $a^{(2)} = a^{(0)}P^2$, тогда

$$a^{(2)} = (1, 0, 0)\begin{pmatrix} 0,6 & 0,35 & 0,05 \\ 0,21 & 0,49 & 0,3 \\ 0,0225 & 0,225 & 0,7525 \end{pmatrix} = (0,6,\ 0,35,\ 0,05),$$

т.е. через 2 часа после открытия в очереди не будет требований с вероятностью 0.6.

б) После двенадцати шагов можно приближенно считать, что СМО войдет в стационарный режим и вероятности того, что в очереди будут 0, 1 или 2 требования равны соответствующим компонентам вероятностного вектора b. Подставляя в (1.3) элементы матрицы $P = (p_{ij})$ находим

$$b_0 = 9/44,\ b_1 = 15/44,\ b_2 = 5/11.$$

Следовательно, приближенно можно считать, что через 12 часов после начала работы мастерской 2 требования в очереди будут стоять с вероятностью 5/11.

1.5 СМО типа M/M/1 с ожиданием

СМО типа M/M/1, то есть с одним обслуживающим прибором, наиболее часто используют как модель реальных систем обслуживания потока заявок. Рассмотрим в начале случай очереди ограниченной длины (не более k заявок).

Пусть известно, что интенсивности соответственно потока заявок и процесса обслуживания задаются величинами λ и μ. Если соответствующее этой модели непрерывное время разбить на последовательность временных интервалов достаточно малой величины Δt, то вероятность поступления одной заявки за время Δt приближенно определяется формулой аналогичной (1.6):

$$P_1(\Delta t) \approx \lambda\Delta t, \tag{1.8}$$

а вероятность обслуживания за это время одной заявки

$$P_2(\Delta t) \approx \mu\Delta t. \tag{1.9}$$

При этом чем меньше величина Δt, тем точнее данные приближения.

Вспомнив теперь смысл условия ординарности потока, можно приближенно записать для переходных вероятностей процесса

$$p_{i,j} = 0,\ \ |i - j| > 1,$$

$$p_{i,i+1} = \lambda\Delta t(1 - \mu\Delta \mathrm{t}),\ \ i \neq 0, k,$$

$$p_{i,i-1} = (1 - \lambda\Delta t)\mu\,\Delta t,\ i \neq 0,$$

$$p_{i,i} = \lambda\Delta t\ \mu\Delta t + (1 - \lambda\Delta t)(1 - \mu\Delta t),\ i \neq 0,\ k,$$

$$p_{0,0} = (1 - \lambda\Delta t)\ ,$$

$$p_{0,1} = \lambda\Delta t,$$

$$p_{k,k} = \lambda\Delta t + (1 - \lambda\Delta t)(1 - \mu\Delta t)\ .$$

В этих формулах мы пренебрегли слагаемыми переходных вероятностей соответствующими появлению за время Δt двух и более требований, что, вообще говоря возможно. Однако, в соответствии с условием ординарности процесса при $\Delta t \to 0$ указанное допущение обоснованно.

В цепи каждое состояние может быть достигнуто из любого другого состояния. Следовательно, при анализе данной системы можно пользоваться результатами, изложенными для регулярных марковских цепей. Важнейшим из которых для целей изучения СМО является теорема о стационарном распределении.

Если проследить функционирование СМО с момента поступления первой заявки, то очевидно можно наблюдать её состояние как изменяющееся во времени, либо растет очередь, либо при нескольких обслуживающих приборах увеличивается доля занятых приборов. Соответственно изменяются все параметры, которые так или иначе характеризуют состояние СМО. Например, важнейшей информацией являются вероятности того, что в системе ровно i требований, или занято i приборов, то есть вероятности различных возможных состояний СМО $p(s_i)$. В теории СМО рассматриваются уравнения описывающие в динамике величины $p(s_i)$, эти уравнения являются дифференциальными. Однако при изучении СМО нас прежде всего интересуют характеристики процесса, когда он уже достиг своей установившейся фазы. Говоря языком случайных процессов нас интересует его стационарное распределение. Ибо обычно лишь зная характеристики процесса в стационарном состоянии можно судить о качестве обслуживания заявок и в целом о СМО.

Обозначим вероятности $p(s_i)$ в установившемся состоянии процесса через b_i, они являются важнейшими параметрами, так как зная эти величины легко можно рассчитать все другие параметры. Рассчитаем их для описанной модели СМО. Элементы матрицы переходных вероятностей уже были выписаны выше. Используя формулы (1.3) получаем:

$$b_0 = \left(1 + \frac{\dfrac{\lambda}{\mu(1-\lambda\Delta t)}}{1 - \dfrac{\lambda(1-\mu\Delta t)}{\mu(1-\lambda\Delta t)}} - \frac{\dfrac{\lambda^{k+2}(1-\mu\Delta t)^{k+1}}{\mu^{k+2}(1-\lambda\Delta t)^{k+2}}}{1 - \dfrac{\lambda(1-\mu\Delta t)}{\mu(1-\lambda\Delta t)}} \right)^{-1},$$

$$b_i = \frac{1}{1-\lambda\Delta t}\left(\frac{1-\mu\Delta t}{1-\lambda\Delta t}\right)^{i-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i} b_0, \qquad i = \overline{1,k} \tag{1.10}$$

Данные выражения приближенно определяют вероятности состояний непрерывного процесса. Точность определяется близостью величин (1.8) - (1.9) к истинным вероятностям. Переходя в (1.10) к пределу при $\Delta t \to 0$ получаем точные выражения для вероятностей состояний системы в стационарном режиме

$$\boldsymbol{b_0} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+2}}, \qquad \boldsymbol{b_i} = (\rho)^i\, \boldsymbol{b_0}, \qquad \boldsymbol{i} = \overline{1,k}$$

Здесь использовано обозначение $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, эту величину называют нагрузкой системы. Теперь пользуясь полученными вероятностями несложно получить выражения для различных важных параметров СМО в стационарном режиме.

Вероятность отказа, т.е. вероятность, что заявка поступит в момент, когда уже имеется очередь из k заявок

$$P_{\text{ОТК}} = \rho^{k+1}\, b_0.$$

Относительная пропускная способность, т.е. доля обслуженных заявок из поступивших в систему

$$Q = 1 - P_{\text{ОТК}}.$$

Абсолютная пропускная способность СМО, т.е. среднее количество заявок обслуживаемых в единицу времени:

$$\text{A} = \lambda(1 - P_{\text{ОТК}}).$$

Среднее число заявки в очереди (без учета обслуживаемой заявки), т.е. математическое ожидание этой случайной величины:

$$L_{\text{ОЧ}} = \rho^2 \frac{\left[1 - \rho^k (k + 1 - k\rho)\right]}{(1 - \rho^{k+2})(1 - \rho)}.$$

Среднее время ожидания обслуживания заявкой (не включая времени самого обслуживания):

$$M(n) = L_{\text{ОЧ}}/\mu. \tag{1.11}$$

Доля простоев обслуживающего прибора выражается величиной b_0, то есть вероятностью того, что прибор свободен.

Рассмотрим теперь случай, когда нет ограничения на длину очереди. Он легко получается из предыдущих формул, как предельный переход при $k \to \infty$. Аналогичные характеристики такой СМО имеют нижеследующий вид.

Вероятности состояний:

$$\boldsymbol{b_0 = 1 - \rho, \qquad b_i = \rho^i\, b_0, \qquad i = \overline{1,\infty}}.$$

Средняя длина очереди, включая требование, находящееся на обслуживании

$$M(n) = \frac{\rho}{1 - \rho}. \tag{1.12}$$

Среднее время ожидания обслуживания для требования (ω - время ожидания для требования)

$$M(\omega) = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}. \tag{1.13}$$

Средняя длина очереди, ожидающей обслуживания

$$\frac{\rho^2}{1 - \rho}. \tag{1.14}$$

Среднее время, проведенное требованием в системе

$$\frac{1}{\mu(1-\rho)}. \qquad (1.15)$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.4 Пусть требования поступают на обслуживающее устройство супермаркета случайно, причем средний промежуток времени между поступлениями требований равен 0,5 мин. Время обслуживания распределено экспоненциально со средним значением, равным 0,25 мин. Определите: а) среднее число требований в системе; б) среднее время ожидания обслуживания для требования; в) среднее время, проведенное требованием в системе; г) долю времени, в течение которого обслуживающий прибор простаивает.

Средняя скорость входного потока λ представляет собой величину, обратную к средней длине промежутка между поступлениями требований $\lambda = 1:0{,}5 = 2$ (требований в минуту). Средняя скорость обслуживания требований равна $\mu = 1:0{,}25 = 4$ (требований в минуту). Тогда

$$\rho = \lambda/\mu = 1/2.$$

Так как $\rho < 1$, то за достаточно большое время система обслуживания войдет в стационарный режим.

а) Согласно (1.12), среднее число требований в системе

$$\frac{\rho}{1-\rho} = 1 \quad \text{(требование).}$$

б) Согласно (1.13), среднее время ожидания обслуживания

$$\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = 1/4 \text{ (мин).}$$

в) Согласно (1.15), среднее время, проведенное требованием в системе

$$\frac{1}{\mu(1-\rho)} = \mathbf{1/2.}$$

г) Доля простоев обслуживающего прибора $P_0 = 1 - \rho = 1/2$.

Тема 2 ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Во многих ситуациях, встречающихся в промышленности, сельском хозяйстве, экономической деятельности и т.д., задача оптимизации плана некоторых экономико-производственных действий может быть записана в виде линейных уравнений и неравенств с линейным же, относительно искомых, определяющих этот план переменных целевым функционалом. К задачам этого же вида сводятся очень многие задачи оптимизации и принятия решений из некоторых других самостоятельных направлений прикладной математики.

Соответственно возникает потребность в математической теории позволяющей решать такие задачи. Такая теория существует и называется *линейным программированием* [3, 4]. Как отмечается многими, данное название не является удачным. Оно возникло в 30-е годы, когда представления о программировании на компьютере ещё не существовало. В данном случае под программированием, фактически подразумевается планирование. Однако, этот термин уже укоренился, и не только в линейном случае. Имеются так же и такие названия математических теорий решения задач оптимизации, как *нелинейное программирование* или *динамическое программирование*.

2.1 Общая постановка задачи линейного программирования

В общем виде задача линейного программирования (ЛП) заключается в отыскании таких неотрицательных чисел x_1, x_2, ..., x_n, которые максимизируют данную линейную функцию

$$C = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{2.1}$$

при условии выполнения системы неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{(k+1)1}x_1 + a_{(k+1)2}x_2 + \ldots + a_{(k+1)n}x_n \ge b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots \qquad (2.2) \qquad ,{}_p \\ a_{(p+1)1}x_1 + a_{(p+1)2}x_2 + \ldots + a_{(p+1)n}x_n = b_{p+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad b_i \ge 0,\ (i=\overline{1,m})$$

$$x_i \ge 0, \qquad (i=\overline{1,n}) \tag{2.3}$$

Используют следующие основные понятия и термины:

- функция (2.1) называется целевой функцией (или целевым функционалом, или функционалом качества) задачи,
- неравенства и равенства (2.2) - (2.3) называются ограничениями задачи,
- любой набор чисел $\{x_i\}$, удовлетворяющий (2.2) - (2.3), называется допустимым решением или допустимым планом;
- допустимое решение, которое максимизирует целевую функцию, называется оптимальным решением;
- максимальное значения целевой функции C_{max} называют значением оптимального решения задачи.

Ограничение-неравенство исходной задачи ЛП, имеющее вид "≤", можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части некоторой новой неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство вида "≥" - в ограничение-равенство вычитанием из его левой части неотрицательной переменной. Таким образом, ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots. + a_{in}x_n \le b_i$$

можно преобразовать в ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots. + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i, \quad (x_{n+1} \ge 0),$$

а ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \ge b_i$$

в ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i, \quad (x_{n+1} \ge 0).$$

Переменные вводимые для преобразования ограничений-неравенств в ограничения-равенства называют *дополнительными*. Ясно, что их число равно числу преобразуемых неравенств.

Вводимые дополнительные переменные имеют вполне определенный экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи линейного программирования отражаются расход и наличие производственных ресурсов, то численное значение некоторой дополнительной переменной равно объему неиспользуемого соответствующего ресурса.

Если переменная x_k не подчинена условию неотрицательности, то ее следует заменить двумя вспомогательными неотрицательными переменными u_k и v_k, приняв $x_k = u_k - v_k$.

2.2 Стандартная и основная задачи линейного программирования

Если все ограничения (2.2) имеют вид неравенств "≤", то такая задача ЛП называется *стандартной* (или *симметричной*). Ее удобнее записать в, гораздо более компактной, матричной форме

$$C = \langle c, x \rangle \to \max, \tag{2.4}$$

$$Ax \le b, \tag{2.5}$$

$$x_i \ge 0, (i=\overline{1,n}), \tag{2.6}$$

здесь $\langle c, x \rangle$ - скалярное произведение векторов $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; A - матрица размерности $(m \times n)$ составленная из коэффициентов системы ограничений (2.2) (в которой однако же, как мы считаем, только неравенства вида "≤"); b - вектор-столбец $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, составленный из правых частей системы ограничений (2.2).

Если все ограничения (2.2) имеют вид равенств "=", то такая задача ЛП называется *основной* (или *канонической*). Ее также удобнее записать в матричной форме

$$C = \langle c, x \rangle \to max, \tag{2.7}$$

$$Ax = b, \tag{2.8}$$

$$x_i \ge 0, (i = \overline{1,n}). \tag{2.9}$$

2.3 Графический метод решения задачи линейного программирования

ЕСЛИ В НЕКОТОРОЙ ЗАДАЧЕ ЛП ТОЛЬКО ДВЕ ПЕРЕМЕННЫЕ X_1 И X_2, ТО ЕЕ МОЖНО ЛЕГКО РЕШИТЬ, ТАК НАЗЫВАЕМЫМ ГРАФИЧЕСКИМ СПОСОБОМ. ЭТОТ СПОСОБ ОСНОВАН НА ТОМ ФАКТЕ, ЧТО В ЭТОМ СЛУЧАЕ МНОЖЕСТВО ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ МОЖНО ПОСТРОИТЬ НА ДВУХМЕРНОЙ ПЛОСКОСТИ. РАССМОТРИМ СЛЕДУЮЩИЙ ПРИМЕР.

Пример 2.1 Пусть требуется максимизировать функционал

$$C = 11x_1 + 7x_2 \to \max,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2{,}4x_2 \le 12, \\ 5x_1 + 2{,}5x_2 \le 15, \\ x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение Построим в плоскости $x_0 0 x_2$ соответствующие ограничениям задачи прямые

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2{,}4x_2 &= 12, \\ 5x_1 + 2{,}5x_2 &= 15, \\ x_2 &= 3, \\ x_1 &= 0, \\ x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Каждая из них определяет полуплоскость, в которой выполняется соответствующее условие. Эти прямые представлены на рис. 2.1.

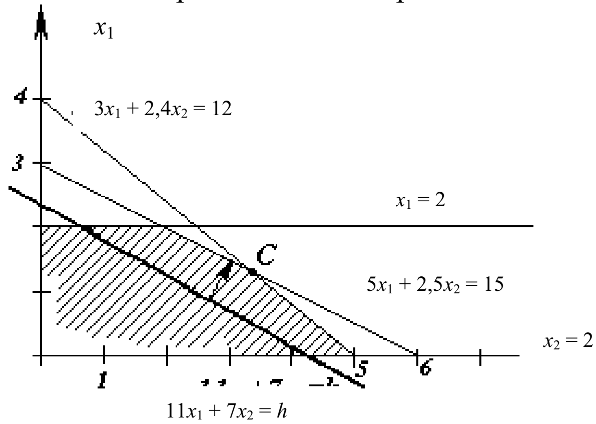


Рис. 2.1

НА ЭТОМ ЖЕ РИСУНКЕ ЗАШТРИХОВАНА ОБЛАСТЬ ЯВЛЯЮЩАЯСЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ ЭТИХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ, ТО ЕСТЬ ТОЧКИ ЗАШТРИХОВАННОЙ ОБЛАСТИ ИМЕЮТ КООРДИНАТЫ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ ВСЕМ ОГРАНИЧЕНИЯМ ЗАДАЧИ. ЕСЛИ ТЕПЕРЬ ИЗОБРАЗИТЬ СООТВЕТСТВУЮЩУЮ ФУНКЦИОНАЛУ ПРЯМУЮ $11X_1 + 7X_2 = H$, ГДЕ H - НЕКОТОРАЯ ВЕЛИЧИНА, И УВЕЛИЧИВАЯ H ПЕРЕМЕЩАТЬ ЭТУ ПРЯМУЮ ВВЕРХ, МЫСЛЕННО ИЛИ ПЕРЕСТРАИВАЯ ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ, ТО МОЖНО ОПРЕДЕЛИТЬ КРАЙНЮЮ ПОСЛЕДНЮЮ ТОЧКУ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЭТОЙ ПРЯМОЙ С ЗАШТРИХОВАННОЙ ОБЛАСТЬЮ. ЭТА ТОЧКА И БУДЕТ СООТВЕТСТВОВАТЬ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ.

В НАШЕМ СЛУЧАЕ ИСКОМАЯ ТОЧКА ПОМЕЧЕНА НА РИСУНКЕ, КАК C. ТЕПЕРЬ ДЛЯ ОКОНЧАТЕЛЬНОГО ПОЛУЧЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДОСТАТОЧНО ТОЧНЕЕ РАССЧИТАТЬ КООРДИНАТЫ C, РЕШИВ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} 3x_1 + 2{,}4x_2 = 12, \\ 5x_1 + 2{,}5x_2 = 15, \end{cases}$$

получаем значения $x_1 = 4/3$, $x_2 = 10/3$. Тогда максимальное значение функционала $C_{\max} = 11 \cdot 4/3 + 7 \cdot 10/3 = 114/3 = 38$.

Описанный метод иногда удается применить и в случае, если в исходной задаче более двух переменных. Уже говорилось выше о переходе от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам, при этом возрастает количество переменных. Аналогично в некоторых случаях его можно уменьшить (например, до двух) путем перехода от ограничений-равенств к неравенствам. Однако, так бывает возможно поступить лишь в редких случаях.

2.4 Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Разработан и широко применяется универсальный метод решения любой задачи ЛП, называемый симплекс-методом. Рассмотрим его использование на примере решения конкретной задачи.

Пример 2.2 Для изготовления различных изделий *A*, *B* и *C* предприятие использует три вида оборудования. Нормы затрат станко-часов каждого вида на обработку одного изделия *A*, *B* и *C*, цена одного изделия, а также общее имеющееся количество станко-часов приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Вид оборудования	Нормы затрат станко-часов на одно изделие			Общее количество станко-часов
	A	*B*	*C*	
Фрезерное	18	15	12	360
Токарное	6	4	8	192
Шлифовальное	5	3	3	180
Цена одного изделия	9	10	16	

Считается, что сбыт обеспечен. Составить план производства изделий , при котором стоимость продукции будет максимальной.

Решение Составим математическую модель задачи. Искомый выпуск изделий *A* обозначим через x_1, изделий *B* - через x_2, изделий *C* - через x_3. Переменные должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360,$$

$$6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192,$$

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180.$$

Общая стоимость произведенной продукции составит

$$C = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3.$$

Ясно, что должно выполняться:

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0.$$

Мы получили стандартную задачу линейного программирования, приведем ее к основной форме. Для этого введем три дополнительные переменные, в результате чего ограничения запишутся в виде системы равенств:

$$18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360,$$

$$6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192,$$

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180.$$

Экономический смысл введенных дополнительных переменных состоит в том, что они выражают собой количество неиспользуемых станко-часов того или иного вида при текущем плане производства.

Симплекс-метод является итерационным процессом, т.е. шаговым, на каждом шаге происходит улучшение текущего плана или делается вывод о том, что это невозможно, т.е. текущий план уже является оптимальным. Что бы начать этот процесс, в начале необходимо принять некоторый план для первого шага. Причем этот план должен удовлетворять некоторым условиям.

В частности, он должен являться невырожденным, то есть в нем должно быть ровно столько ненулевых компонент, сколько ограничений в задаче (не считая ограничения $x_i \geq 0$, $i=\overline{1,n}$), т.е. m. Такой план легко построить, если в матрице A ограничений задачи имеется m линейнонезависимых единичных столбцов. Так и бывает, если исходная задача имеет форму стандартной. Тогда после приведения её к основной посредством введения m дополнительных переменных всегда появляются такие столбцы. Например, в нашем случае три столбца матрицы ограничений, соответствующие дополнительным переменным x_4, x_5, x_6 и являются такими столбцами.

Когда имеются такие столбцы, в качестве первоначального плана можно принять план, при котором не равны нулю только дополнительные переменные, причем каждая из них принимает значение равное величине стоящей в правой части ограничения. Ненулевые переменные плана называют базисными, а их совокупность базисом.

Итак принимаем в качестве первоначального (опорного) базиса x_4, x_5, x_6 и записываем данные задачи в таблицу, называемую симплекс-таблицей.

Таблица 2.1

Шаг 1 Симплекс-таблица первого шага

АЗИС	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P	C
x_4	18	15	12	1	0	0	360	0
x_5	6	4	8	0	1	0	192	0
x_6	5	3	3	0	0	1	180	0
Δ	-9	-10	-16	0	0	0		

В столбце "C" записываются коэффициенты, с которыми базисные переменные входят в целевой функционал (поскольку дополнительные переменные в него не входят, то в текущем столбце "C" имеем нули). В столбце "P" записан текущий план задачи. В настоящий момент неиспользованными остаются все ресурсы, что соответствует "нулевому" плану, то есть ничего не производится. Естественно такой план не может являться оптимальным.

Величины Δ_i из последней строки рассчитываются по формуле

$$\Delta_i = < c, a_i > - c_i ,$$

где $< c, a_i >$ - скалярное произведение столбца "C" и столбца симплекс таблицы a_i соответствующего переменной x_i, c_i – коэффициент из целевого функционала при переменной x_i. Если среди величин Δ_i есть отрицательные, следовательно текущий план можно улучшить. Улучшить путем введения в базис переменной для которой Δ_i

отрицательна. Причем в базис вводят ту переменную, у которой Δ_i наибольшая по модулю. Например, в нашем случае это x_3.

Далее необходимо определить переменную, которая будет исключена из базиса. Для этого находим строку, в которой достигается минимум отношения соответствующего элемента столбца "*P*" плана к элементу из вводимого в базис столбца, при этом рассматриваются только положительные элементы этого столбца. То есть находим $\min(p_i/a_{i3})$, для всех $a_{i3} > 0$. В нашем случае этот минимум

$$\min(360/12;\ 192/8;180/3) = 192/8 = 24,$$

достигается во второй строке, т.е. исключаем из базиса x_5. Элемент стоящий на пересечении вновь вводимого в базис элемента и строки исключаемого элемента называется *разрешающим*, у нас это 8.

Следующим этапом является пересчет симплекс-таблицы, который проводится таким образом. В столбце базисных переменных вместо x_5 записываем x_3, новая строка x_3 получается делением строки старой симплекс-таблицы на разрешающий элемент. Таким образом одна строка новой таблицы уже получена. Остальные строки новой симплекс-таблицы получаются посредством использования преобразований аналогичных элементарным преобразованиям строк матриц. При этом уже рассчитанная новая строка умноженная на нужную величину вычитается из строк старой таблицы так, чтобы столбец вновь введенной в базис переменной стал единичным, причем единица стояла бы в уже подсчитанной новой строке введенной переменной.

Заметим, что в старой таблице все базисные переменные имеют единичные столбцы. Именно этого мы и добиваемся в новой таблице для вновь введенной переменной. При этом столбцы оставшихся в базисе переменных можно не пересчитывать. Проверьте, что если это попытаться сделать используя указанные преобразования, то они все равно не изменяться.

Столбец "*C*" во всех этих преобразованиях не участвует, в нем лишь записываются соответствующие коэффициенты. В нашем случае во второй строке записывается коэффициент c_5 вместо c_3.

Последнюю строку Δ новой симплекс-таблицы можно рассчитывать двумя способами, либо так же как и остальные, применяя элементарные преобразования так, чтобы добиться нуля в столбце новой базисной переменной, либо используя рассмотренную ранее формулу.

Таблица 2.2

Шаг 2 Симплекс-таблица второй итерации

АЗИС	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	*P*	*C*
x_4	9	9	0	1	-3/2	0	72	0
x_3	3/4	1/2	1	0	1/8	0	24	0
x_6	11/4	3/2	0	0	-3/8	1	108	0
Δ	3	-2	0	0	2	0		

Еще раз поясним, как она была получена из старой. Строка x_3 была получена делением старой строки x_5 на разрешающий элемент 8. Новая первая строка получена из старой первой вычитанием из нее строки x_3 умноженной на 12. Таким образом получен ноль в столбце x_3. Третья вычитанием из старой строки новой строки x_3 умноженной на 3. Четвертая вычитанием из старой строки строки x_3 умноженной на -16. Таким образом будут обнулены все элементы столбца x_3, кроме единицы находящейся в строке x_3.

Далее мы снова видим, что в последней строке есть отрицательные элементы (на этот раз такой элемент единственный). Значит план можно улучшить введя в базис x_2. Находим min{72/9,24/0,5,108/1,5}=72/9=8, значит исключаем из базиса x_4. Разрешающий элемент 9.

Таблица 2.3

Шаг 3 Симплекс-таблица третьего шага

АЗИС	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P	c
x_2	1	1	0	1/9	-1/6	0	8	0
x_3	1/4	0	1	-1/18	5/24	0	20	0
x_6	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1	96	0
Δ	5	0	0	2/9	5/3	0		

ВИДИМ, В ПОСЛЕДНЕЙ СТРОКЕ НЕТ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, ЗНАЧИТ ТЕКУЩИЙ ПЛАН

$$X_1 = 0,\ X_2 = 8,\ X_3 = 20,\ X_4 = 0,\ X_5 = 0, X_6 = 96$$

ЯВЛЯЕТСЯ ОПТИМАЛЬНЫМ. В СООТВЕТСВИИ С НИМ НУЖНО ПРОИЗВЕСТИ 8 ИЗДЕЛИЙ ВИДА *B*, И 20 - ВИДА *C*, ПРИ ЭТОМ ОСТАНУТСЯ НЕВОСТРЕБОВАННЫМИ 96 СТАНКО-ЧАСОВ ШЛИФОВАЛЬНОГО ОБОРУДОВАНИЯ. ИЗДЕЛИЙ ВИДА *A* ПРОИЗВОДИТЬ НЕ НУЖНО, ЛИМИТ ВРЕМЕНИ ФРЕЗЕРНОГО И ТОКАРНОГО ОБОРУДОВАНИЯ БУДЕТ ПОЛНОСТЬЮ ИСЧЕРПАН. ПРИБЫЛЬ ПРИ ЭТОМ СОСТАВИТ $C_{MAX} = 8\cdot 10 + 20\cdot 16=400$.

2.6 Симплекс метод с введением искусственного базиса

Рассмотренным способом можно решить задачи, в которых первоначально все исходные ограничения имеют вид неравенств "≤". Однако, если некоторые исходные ограничения имеют форму равенств или неравенств вида "≥", то и после приведения задачи к каноническому виду, мы не будем иметь m единичных столбцов в матрице системы, как в предыдущем случае.

Для пояснения сказанного детализируем ситуацию. В ограничение-равенство дополнительную переменную ввести невозможно, в то время как в нем могут отсутствовать переменные входящие в него с коэффициентом 1 и с коэффициентом 0 в другие ограничения. А в неравенствах вида "≥" дополнительные переменные войдут со знаком минус. И тогда мы не сможем выбрать описанным выше образом исходный базис для решения задачи симплекс методом.

Поясним сказанное на примере.

Пример 2.3 Пусть в предыдущей задаче вместо ограничения по шлифовальному оборудованию (мы выбросим его для уменьшения размерности задачи настоящего примера) требуется, чтобы суммарный объем выпуска изделий видов *A* и *B* был не менее 100. Такое или подобное ограничение может иметь место, например, в силу уже заключенных предприятием договоров. Это ограничение запишется следующим образом

$$15x_1 + 10x_2 \geq 100,$$

где 15, 10 - например, сопоставимые цены продукции.

ДЛЯ ПРИВЕДЕНИЯ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ВВОДИМ ДОПОЛНИТЕЛЬНУЮ ПЕРЕМЕННУЮ X_7, ПОЛУЧАЕМ ОГРАНИЧЕНИЕ

$$15x_1 + 10x_2 - x_6 \ = \ 100.$$

ЗНАЧИТ МАТРИЦА СИСТЕМЫ ОГРАНИЧЕНИЙ ТЕПЕРЬ ИМЕЕТ ВИД:

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 15 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 15 & 10 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и в ней нет трех (по количеству ограничений) единичных столбцов.

В этом и аналогичных случаях используют так называемый метод искусственного базиса. В ограничение в котором нет переменной, входящей в него с коэффициентом 1 и с коэффициентом 0 в другие ограничения, вводят так называемую искусственную переменную. Например $x_8 \geq 0$,

$$15x_1 + 10x_2 - x_6 + x_7 = \ 100.$$

После этого среди восьми столбцов матрицы A уже окажется четыре линейно независимых единичных.

Искусственные переменные вводят в функционал с достаточно большим по модулю отрицательным коэффициентом. Тогда после решения задачи симплекс-методом в оптимальном плане значения всех искусственных переменных обязательно окажутся равными нулю. И тогда получится, что фактически их введение никак не изменило исходную задачу. Иногда даже не задаются конкретным значением упомянутых коэффициентов, а записывают их в виде символа, под которым подразумевают отрицательное число, превосходящее по модулю любое наперед заданное. В этом случае несколько изменяется способ записи симплекс-таблиц, и поэтому удобнее все же пользоваться конкретным значением. Однако при этом может оказаться, что в конце решения задачи не все из искусственных переменных равны нулю. В таком случае следует увеличить коэффициент и перерешать задачу заново.

Пример 2.3 (*продолжение*)   Итак имеем задачу

$$C = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 - 200x_7 \rightarrow \max,$$

при ограничениях:

$$18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 \ = 360,$$

$$6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 \ = \ 192,$$

$$15x_1 + 10x_2 - x_6 + x_7 = \ 100,$$

$$x_i \geq 0, \ (i = \overline{1,7}).$$

Ниже приводится последовательность симплекс-таблиц полученных при решении задачи.

Шаг 1

Таблица 2.4

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P

x_4	18	15	12	1	0	0	0	360
x_5	6	4	8	0	1	0	0	192
x_8	15	10	0	0	0	-1	1	100
Δ	–3009	–2010	-16	0	0	200	0	-20

Вводим в базис x_1. Исключаем x_8. Разрешающий элемент 15.

Отличие искусственных переменных состоит в том, после того как некоторая искусственная переменная исключена из базиса в следующих симплекс-таблицах ее столбец можно больше уже не писать, так как она в базис не возвратиться. Ясно, что это снижает количество необходимых вычислений. Однако для иллюстрации оставим все же и будем и далее пересчитывать столбец x_7.

Шаг 2

Таблица 2.5

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P
x_4	0	3	12	1	0	1,2	-1,2	240
x_5	0	0	8	0	1	0,4	-0,4	152
x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$-\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$6\frac{2}{3}$
Δ	0	-4	-16	0	0	-0,6	200,6	

Вводим в базис x_3. Исключаем x_5. Разрешающий элемент 8.

Шаг 3

Таблица 2.6

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P
x_4	0	3	0	1	-1,5	0,6	-0,6	12
x_3	0	0	1	0	1/8	0,05	-0,05	19
x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$-\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$6\frac{2}{3}$
Δ	0	-4	0	0	2	0,2	199,8	

Вводим в базис x_2. Исключаем x_4. Разрешающий элемент 3.

Шаг 4.

Таблица 2.7

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P
x_2	0	1	0	1/3	-1/2	1/5	-1/5	4
x_3	0	0	1	0	1/8	1/20	-1/20	19
x_1	1	0	0	-2/9	1/3	-1/5	1/5	4
Δ	0	0	0	4/3	0	1	199	

Полученный план является оптимальным. В соответствии с ним нужно выпустить 4 единицы изделия вида A, 4 - вида B, 19 - вида C. Прибыль при этом составит 380 единиц.

2.5 Двойственная задача линейного программирования

Большое значение в теории задач линейного программирования играет понятие двойственности. Оказывается любой задаче ЛП можно сопоставить, так называемую двойственную задачу, с которой они образуют взаимодвойственную пару. При этом справедлива следующая теорема, которая называется основной теоремой двойственности: *если одна из задач двойственной пары имеет оптимальное решение, то другая также имеет оптимальмое решение, причем максимум целевой функции исходной задачи и минимум двойственной численно равны.*

Решения прямой и двойственной задач связывают и другие важные соотношения. Если одна из задач состоит в максимизации своего функционала, то двойственная ей состоит в минимизации ее функционала. Если в оптимальном плане исходной задачи какое-либо j-е ограничение выполняется как строгое неравенство, то соответствующая j-я переменная в оптимальном плане двойственной задачи должна быть равна нулю. Если же i-я переменная исходной задачи не входит в оптимальный, план, то в оптимальном плане двойственной задачи соответствующее i-е ограничение будет выполняться как строгое неравенство (за исключением вырожденного случая).

В общем случае правила, по которым строится двойственная задача довольно сложны и мы не будем их рассматривать. Однако рассмотрим два весьма важных и гораздо более простых случая пары взаимодвойственных задач.

Во-первых, рассмотрим случай когда исходная задача записана в стандартной форме (2.4) - (2.5). Мы приводим ее ниже в качестве исходной задачи.

Исходная задача	*Двойственная задача*
$C = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to max,$	$C^* = b_1y_1 + b_1y_1 + \ldots + b_my_m \to \min,$
$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \le b_j,\ j = 1,...,m.$	$\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}y_j \ge c_i,\ i = 1,...,n.$
$x_i \ge 0,\ (i = 1, ..., n).$	$y_j \ge 0,\ (j = 1, ..., m).$

Двойственной для второй задачи является исходная, т.е. как уже говорилось, указанные задачи образуют взаимодвойственную пару задач. На этом примере видим важные связующие моменты между задачами взаимодвойственной пары. В частности:

- количество переменных в одной равно количеству ограничений в другой;
- в одной из задач функционал подлежит максимизации, в другой - минимизации;
- вектор коэффициентов функционала одной задачи определяет ограничения второй и наоборот.

Указанные задачи образуют так называемую симметричную пару вхаимодвойственных задач.

В качестве второго примера рассмотрим следующую (называемую несимметричной) пару задач являющихся так же взаимодвойственными.

Исходная задача	*Двойственная задача*
$C = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$	$C^* = b_1y_1 + b_1y_1 + \ldots + b_my_m \to \min,$
$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = b_j,\ j = 1,...,m.$	$\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}y_j \ge c_i,\ i = 1,...,n.$
$x_i \ge 0,\ (i = 1, ..., n).$	

Как видим здесь "исходная" записана в форме основной задачи ЛП. Важно так же отметить, что в двойственной задаче нет ограничений на неотрицательность переменных.

Оказывается, если прямая задача решалась симплекс-методом, то решение двойственной задачи находится в симплекс-таблице, соответствующей оптимальному решению. А именно в последней строке (строке Δ) в m столбцах, соответствующих переменным, которые составляли первоначальный базис (если только они при этом были единичными, что обычно и бывает). При этом к данному элементу последней строки следует прибавить коэффициент, с которым переменная соответствующего столбца входит в функционал. Например, для дополнительных переменных мы прибавляем просто ноль.

Важнейшее значение решения двойственной задачи, которое называется двойственной оценкой значимости ресурсов, выражается следующими формулами

$$y_j^* = \frac{\partial C_{\max}}{\partial b_j}, (j = \overline{1,m}); \qquad x_i^* = \frac{\partial C_{\min}^*}{\partial c_i}, (i = \overline{1,n}).$$

То есть зная величины двойственных оценок мы можем сказать, *на сколько приблизительно измениться оптимальное значение функционала, если измененить величину соответствующего ограничения на единицу.* Эта информация имеет практическую значимость. Зная значение решения двойственной задачи мы можем сделать вывод о том какие ресурсы необходимо прежде всего наращивать, или какие ограничения пытаться каким либо образом снизить.

Пример 2.4 **Для задачи из примера 2.2**

$$\begin{gathered} C = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \rightarrow \max, \\ 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180. \end{gathered}$$

ДВОЙСТВЕННОЙ ЯВЛЯЕТСЯ СЛЕДУЮЩАЯ

$$\begin{gathered} \tilde{C} = 360y_1 + 192y_2 + 180y_3 \rightarrow \min, \\ 18y_1 + 6y_2 + 5y_3 \ge 9, \\ 15y_1 + 4y_2 + 3y_3 \ge 10, \\ 12y_1 + 8y_2 + 3y_3 \ge 16. \end{gathered}$$

Ее решение мы находим в таблице 2.3: $y_1^* = 2/9$, $y_2^* = 5/3$, $y_3^* = 0$. Подставив в ограничения видим, что как и должно быть два из трех ограничений выполняются с точностью до равенства, и значения функционалов совпадают. Что же касается величин двойственных оценок, то можно сказать, что максимальное значение $C_{\max}$ может быть увеличено на 2/9, если первое ограничение увеличить с 360 до 361. И - на 5/3, если второе - с 192 до 193. Это может быть использовано при принятии решения о том какой из ресурсов прежде всего следует увеличивать.

Пример 2.5 Для задачи из примера 2.4

$$C = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 - 200x_8 \rightarrow \max,$$

при ограничениях:

$$\begin{gathered} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 15*x_1 + 10*x_2 - x_6 + x_7 = 100, \end{gathered}$$

$$x_i \ge 0, (i=\overline{1,7}).$$

Двойственной ей является следующая задача

$$C = 360y_1+192y_2 + 100y_3 \to \min,$$

при ограничениях:

$$18y_1 + 6y_2 + 15y_3 \geq 360,$$
$$15y_1 + 4y_2 + 10y_3 \geq 192,$$
$$12y_1 + 8y_2 \geq 100,$$
$$y_1 \geq 0,$$
$$y_2 \geq 0,$$
$$-y_3 \geq 0,$$
$$y_3 \geq -200.$$

ИЗ ТАБЛИЦЫ 2.7 НАХОДИМ ЕЕ РЕШЕНИЕ $y_1^* = 4/3$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = -1$. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА КАК ДВОЙСТВЕННЫХ ОЦЕНОК ВАЖНОСТИ ОГРАНИЧЕНИЙ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ АНАЛОГИЧНА ПРЕДЫДУЩЕМУ ПРИМЕРУ.

2.6 Решение задачи о диете. Использование двойственных оценок

В ряде случаев практически возникающие задачи оптимизации ЛП оказываются такими что, ограничения имеют вид неравенств со знаком "≥", а целевую функцию требуется не максимизировать, как в рассмотренных задачах, а минимизировать. Рассмотрим пример.

Пример 2.6 При откорме некоторых животных каждое животное должно получить не менее 20 ед. питательного вещества *A*, не менее 30 ед. вещества *B* и не менее 6 ед. вещества *C*. Указанные питательные вещества содержат два вида корма. Содержание единиц питательных веществ в 1 кг каждого из видов корма приведено в следующей таблице.

Таблица 2.8

Продукт	Содержание питательных веществ, ед.		
	A	*B*	*C*
I	10	25	2
II	15	30	10

Составить дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ при минимальных денежных затратах, если цена 1 кг корма I вида составляет - 100 р. II вида - 300 р.

Решение Обозначим через x_1 содержание корма вида I в дневном рационе животного в (кг), через x_2 содержание корма вида II. Тогда в дневном рационе животного будет содержаться $10x_1 + 15x_2$ ед. вещества *A*, $25x_1 + 30x_2$ ед. вещества *B* и $2x_1 + 10x_2$ ед. вещества *C*. Задача будет иметь следующую математическую формулировку:

$$C = 100x_1 + 300x_2 \to \min,$$

при условиях

$$10x_1+15x_2 \geq 20,$$
$$25x_1+30x_2 \geq 30,$$
$$2x_1+10x_2 \geq 6,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Мы видим специфические черты полученной задачи. Такого типа задачи и называют "задача о диете". Задачи такого вида встречаются также при составлении самых различных смесей, которые должны удовлетворять определенным требованиям, например, смеси углей различных марок, бензина и т.д. К этому же виду сводятся практически важные задачи о раскрое материала, при этом обычно минимизируются отходы или стоимость необходимого материала.

В принципе указанную задачу можно решить симплекс-методом с введением искусственного базиса. Рассмотрим подробнее этот вариант.

Пример 2.6 (*продолжение*) Сначала вводим три дополнительные переменные для преобразования к каноническому виду и умножаем функционал на –1, чтобы перейти к задаче максимизации. Получаем задачу.

$$C = -100x_1 - 300x_2 \to \max,$$

при условиях

$$\begin{gathered} 10x_1 + 15x_2 - x_3 = 20, \\ 25x_1 + 30x_2 - x_4 = 30, \\ 2x_1 + 10x_2 - x_5 = 6, \\ x_i \geq 0,\ (i = \overline{1,5}). \end{gathered}$$

Далее мы видим, что для построения первоначального базиса необходимо ввести еще искусственные переменные x_6, x_7, x_8. Получаем задачу.

$$C = -100x_1 - 300x_2 - 1000x_6 - 1000x_7 - 1000x_8 \to \max,$$

при условиях

$$\begin{gathered} 10x_1 + 15x_2 - x_3 + x_6 = 20, \\ 25x_1 + 30x_2 - x_4 + x_7 = 30, \\ 2x_1 + 10x_2 - x_5 + x_8 = 6, \\ x_i \geq 0,\ (i = \overline{1,8}). \end{gathered}$$

Теперь можно составить первую симплекс-таблицу и получить решение.

Заметим, что в полученной задаче 3 ограничения и 8 переменных. В действительности гораздо более экономично, с точки зрения количества необходимых вычислений, перейти к рассмотрению двойственной задачи. И именно ее решить симплекс-методом, а затем найти решение исходной задачи в последней симплекс-таблице решения двойственной задачи.

Пример 2.6 (*продолжение*) Двойственная задача будет выглядеть следующим образом:

$$C = 20y_1 + 30y_2 + 6y_3 \to \max,$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} 10y_1 + 25y_2 + 2y_3 \leq 100, \\ 15y_1 + 30y_2 + 10y_3 \leq 300, \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{gathered}$$

Вводим как раньше, две дополнительные переменные y_4, $y_5 \geq 0$, и принимая их за базис решаем задачу симплекс-методом. Заметим, что полученная задача имеет только 2 ограничения и 5 переменных.

Примеры нахождения решения из последней симплекс-таблицы двойственной задачи были рассмотрены ранее.

Тема 3 ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ПРОИЗВОДСТВА

При изучении линейного программирования мы уже говорили и видели на примерах, что линейные задачи оптимизации имеют большое экономическое значение. В частности к ним сводятся задачи, в которых требуется найти какие изделия и в каком количестве нужно выпускать, чтобы максимизировать прибыль или объем выпуска продукции и т.д. При этом ресурсы предполагались строго ограниченными.

Рассмотрев постановки этих задач под более практическим углом зрения, в них можно увидеть целый ряд идеализаций и упрощений отдаляющих изученные методы и подходы от возможности непосредственного практического применения. Сразу следует назвать два типа таких идеализаций и упрощений. Это невозможность ограничиться при оценке качества плана производства только одним показателем (в действительности следует использовать целый их набор), а также - это в действительности случайный характер многих параметров определяющих постановки задач, например, таких как норморасходы станко-часов на изготовление единицы изделия или расход материала и т.д. Фактическая на практике случайность (стохастичность) этих параметров очевидно влечет неоптимальность или даже невыполнимость тех планов, которые были получены в результате решения задачи ЛП.

Однако при определенном развитии рассматриваемых идей и подходов можно устранить многие недостатки соответствующих моделей [5, 9].

3.1 Модель без учета и с учетом реализуемости плана

Во первых ещё раз отметим, что не смотря на недостатки, идея использования для оптимизации планов некоторых матмоделей состоящих из линейных соотношений в целом кажется весьма содержательной и перспективной. Поэтому естественно, что для приближения ее к практике соотвествующие схемы прежде всего следует детализировать и более четко определить, что мы сейчас и сделаем.

На практике планирования производств обычно говорят о следующей более конкретной оптимизационной модели из системы линейных соотношений.

$$\Pi = \Pi_1 X_1 + \Pi_2 X_2 + \ldots \Pi_n X_n \to \max, \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{C} X_j \le \Phi_i, i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n; \tag{3.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{H} X_j \le T_\lambda, \lambda = 1,2,\ldots,\lambda_0; \tag{3.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{M} X_j \le R_\gamma, \gamma = 1,2,\ldots,\gamma_0; \tag{3.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} Ц_j^{ПЛ} X_j \ge Ц^{ПЛ}; \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} Ц_j^{C} X_j \ge Ц^{C}; \tag{3.6}$$

$$d_j \le X_j \le D_j, j = 1,2,\ldots,n. \tag{3.7}$$

Здесь и далее используются следующие обозначения:

X_j - объем производства товарной продукции j-го вида в планируемом году в натуральном измерении; Π_j - ожидаемая величина прибыли от реализации единицы изделия j-го вида, M - число групп взаимозаменяемого технологического оборудования в цехах предприятия (которое целесообразно учитывать в качестве ограничений); t_{ij}^{C} - затраты труда в станко-часах, на единицу продукции j-го вида при изготовлении ее на всех операциях, выполняемых на оборудовании i-й группы; Φ_i - годовой расчетный фонд рабочего времени оборудования i-й группы; λ_0 - число всех профессионально-квалифицированных групп рабочих-сдельщиков в основном производстве, непосредственно не связанных с обслуживанием технологического оборудования в основных цехах; $t_{\lambda j}^{H}$ - затраты в нормо-часах рабочего времени λ-й группы рабочих-сдельщиков на единицу продукции j-го вида; T_λ - годовой расчетный фонд рабочего времени в нормо-часах рабочего времени λ-й группы рабочих-сдельщиков; γ_0 -число всех ограниченных видов производственных ресурсов, учитываемых в данной задаче планирования; $t_{\gamma j}^{M}$ - затраты производственных ресурсов γ-го вида на единицу продукции *j*-го вида; R_γ - верхняя граница расходов γ-го вида ресурсов; $Ц_j^{ПЛ}, Ц_j^{C}$ - соответственно сопоставимая и принятая в плане оптовая цена изделия *j*-го вида; $Ц^{ПЛ}$, $Ц^{С}$ - заданная нижняя граница выпуска товарной продукции на предприятии в планируемом году в сопоставимых и в принятых в плане оптовых ценах; d_j, D_j - соответственно нижняя и верхняя границы объема производства продукции *j*-го вида (верхняя граница, как правило, может быть обусловлена условиями сбыта продукции и возможностями вспомогательного производства; нижняя же граница - хозяйственными связями предприятия с другими предприятиями и организациями).

Экономический смысл критериальной функции (3.1) и условий (3.2) - (3.7) приведенной математической модели очевиден. Отметим лишь, что для получения более качественного годового плана производства целесообразнее было бы использование многокритериальной математической модели. Дополнительно к критерию (3.1) полезным было бы рассмотреть оптимизацию таких критериев, как объем производства в сопоставимых ценах, себестоимость продукции и т.д. Все эти критерии достаточно легко выразить в виде формул используя введенные коэффициенты. Следует сказать, что практически многокритериальную задачку решают сведением её, тем или иным способом, к однокритериальной, поэтому для упрощения не будем останавливаться на этом аспекте.

Приведенная модель (3.1) - (3.7) является линейной и может быть решена симплекс-методом. Однако она содержит в себе ряд идеализаций, которые для приближения ее практическому использованию следует попытаться устранить.

Во-первых важным является то, что в модели объем ресурсов считается неизменяемым. Это не всегда соответствует реальности, например, в случае очень высокой рентабельности некоторого продукта, очевидно, иногда бывает возможным отыскать за счет дополнительных затрат резервы к их увеличению. Кроме того следствием этого свойства рассматриваемой модели является то, что теоретически может вообще не найтись ни одного плана удовлетворяющего всем условиям и ограничениям.

В качестве выхода из указанных трудностей можно предложить использование следующей модели.

$$\overline{П} = \sum_{j=1}^{n} П_j X_j - W\left(\sum_{i=1}^{m} C_i^{(1)} Y_i^{(1)} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} C_\lambda^{(2)} Y_\lambda^{(2)} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma_0} C_\gamma^{(3)} Y_\gamma^{(3)}\right) \to \max, \quad (3.8)$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{C} X_j \le Ф_i + Y_i^{(1)}, i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n; \quad (3.9)$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{H} X_j \le T_\lambda + Y_\lambda^{(2)}, \lambda = 1, 2, ..., \lambda_0; \quad (3.10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{M} X_j \le R_\gamma + Y_\gamma^{(3)}, \gamma = 1, 2, ..., \gamma_0; \quad (3.11)$$

$$\sum_{j=1}^{n} Ц_j^{ПЛ} X_j \ge Ц^{ПЛ}; \quad (3.12)$$

$$\sum_{j=1}^{n} Ц_j^{C} X_j \ge Ц^{C}; \quad (3.13)$$

$$d_j \le X_j \le D_j, j = 1, 2, ..., n, \quad (3.14)$$

$$Y_i^{(1)} \geq 0, Y_\lambda^{(2)} \geq 0, Y_\gamma^{(3)} \geq 0, \text{ для всех } i, \lambda, \gamma. \qquad (3.15)$$

Здесь используются следующие дополнительные переменные.

$Y_i^{(1)}$ - недостающий фонд рабочего времени в станко-часах на оборудовании *i*-й группы; $Y_\lambda^{(2)}$ - недостающий фонд рабочего времени в нормо-часах λ-й группы рабочих-сдельщиков; $Y_\gamma^{(3)}$ - недостающий объем γ-го вида ресурсов.

А так же следующие дополнительные коэффициенты.

$C_i^{(1)}$ - оценка важности единицы недостающего фонда рабочего времени в станко-часах на оборудовании *i*-й группы; $C_\lambda^{(2)}$ - оценка важности единицы недостающего фонда рабочего времени в нормо-часах λ-й группы рабочих-сдельщиков; $C_\gamma^{(3)}$ - оценка значимости единицы недостающего объема *γ*-го вида ресурсов.

Указанные оценки можно получить либо с помощью привлечения экспертов, т.е. с использованием методов экспертных оценок либо каким-нибудь другим способом, например, по формулам следующего типа.

$$C_i^{(1)} = \frac{1}{\Phi_i}, (i = \overline{1,m}), \quad C_\lambda^{(2)} = \frac{1}{T_\lambda}, (\lambda = \overline{1,\lambda_0}), \quad C_\gamma^{(3)} = \frac{1}{R_\gamma}, (\gamma = \overline{1,\gamma_0}).$$

Важно понять смысл и значение коэффициента *W*. Этот коэффициент является достаточно большим положительным числом и выражает, как бы, "штраф", который накладывается на величину дохода в случае превышения при планировании имеющихся объемов ресурсов. Ис-пользования этой величины основывается на предположении, что при увеличении некоторого ресурса предприятию приходится идти на некоторые "сверхзатраты" связанные, например, со строительством новых производственных мощностей или приемом на работу новых кадров и т.д.

Наиболее ценным качеством модели (3.8) - (3.15) является то, что ее решение существует всегда, т.е. найдется хоть один план производства удовлетворяющий всей системе условий.

3.1 Модель с учетом случайности параметров

Другим важнейшим недостатком модели (3.1) - (3.7) является то, что все ее параметры предполагаются детерминированными (т.е. не случайными, строго заданными). Это очевидно плохо согласуется с положением вещей имеющим место на практике. В действительности мы всегда можем лишь предполагать некоторый средний уровень того или иного параметра. Это относится и к уровню цен, который сложится в будущем на рынке, и к фонду оборудования, которое случайным образом выходит из строя или из ремонта и т.д. Таким образом ясно, что, во-первых, план построенный по вышеприведенным детерминированным моделям в точности не будет выполнен никогда, а во-вторых, что параметры рассматриваемых нами моделей следует считать случайными величинами.

При этом возникает вопрос: как именно мы можем теперь охарактеризовать эти коэффициенты и параметры? Во-первых, основываясь на центральной предельной теореме из теории вероятности, по видимому, допустимо считать эти параметры нормально распределенными. А нормальное распределение, как известно, полностью характеризуется своим математическим ожиданием и дисперсией. Во-вторых, представляется возможным считать известным среднее значение (т.е. математическое ожидание) этих параметров, например, приняв за эту величину соответствующие значения из детерминированных моделей. Оценка же дисперсий может быть принята исходя из предыдущего опыта планирования и производства на основе отчетных данных за ряд прошлых лет на данном предприятии.

Ясно, что при стохастичности (случайности) коэффициентов модели, соответствующие ограничения, а так же значение критериальной функции можно понимать только в вероятностном смысле. Не обязательно все параметры считать случайными. Далее мы будем считать случайными величинами с известными плотностями для простоты только следующие параметры Π_j, t_{ij}^{C}, Φ_i. Тогда может быть использована, например, следующая стохастическая модель.

$$\overline{\overline{\Pi}} = M\left(\sum_{j=1}^{n}\Pi_j X_j - W\sum_{i=1}^{m}C_i^{(1)}Y_i^{(1)}\right) - W\left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda_0}C_\lambda^{(2)}Y_\lambda^{(2)} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma_0}C_\gamma^{(3)}Y_\gamma^{(3)}\right) \to \max, \quad (3.16)$$

$$P\left(\sum_{j=1}^{n}t_{ij}^{C}X_j \le \Phi_i + Y_i^{(1)}\right) \ge p_i^1, i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n; \quad (3.17)$$

$$\sum_{j=1}^{n}t_{ij}^{H}X_j \le T_\lambda + Y_\lambda^{(2)}, \lambda = 1,2,...,\lambda_0; \quad (3.18)$$

$$\sum_{j=1}^{n}t_{ij}^{M}X_j \le R_\gamma + Y_\gamma^{(3)}, \gamma = 1, 2, ..., \gamma_0; \quad (3.19)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\text{Ц}_j^{\text{ПЛ}}X_j \ge \text{Ц}^{\text{ПЛ}}; \quad (3.20)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\text{Ц}_j^{C}X_j \ge \text{Ц}^{C}; \quad (3.21)$$

$$d_j \le X_j \le D_j, \ j = 1, 2, ..., n, \quad (3.22)$$

$$Y_i^{(1)} \ge 0, \ Y_\lambda^{(2)} \ge 0, \ Y_\gamma^{(3)} \ge 0, \ \text{для всех } i, \lambda, \gamma. \quad (3.23)$$

Здесь M, P - соответственно операторы математического ожидания и вероятности, p_i^1 -задаваемый нами желаемый уровень вероятности выполнения соответствующего условия.

Таким образом, мы видим, что во-первых здесь от непосредственного значения функционала при некоторых уровнях прибыльности продуктов сделан переход к его среднему значению при случайности этого уровня. Отметим, что для критериальной функции могут использоваться и другие стохастические аналоги. Например, максимизация вероятности того, что действительное значение прибыли превзойдет некоторую заданную величину. Однако переход к среднему ожидаемому значению является вполне естественным, к тому же он имеет еще одно достоинство, о котором будет сказано ниже. Во-вторых, мы видим вероятностную форму записи ограничения по ресурсам оборудования. Теперь мы будем говорить лишь о той или иной вероятности выполнения этого ограничения.

Далее мы видим, что из под знака матожидания в функционале вынесены величины недостающих ресурсов для тех ограничений, параметры которых приняты неслучайными. Это сделано, поскольку в таком случае эти величины не являются случайными, и из свойств математического ожидания следует такая возможнось.

Условия (3.18) - (3.23) полность сохранили свою форму. В случае если бы было принято решение о необходимости считать входящие в них параметры случайными их форма преобразовалось бы совершенно аналогичным образом.

Говоря о решении модели (3.16) - (3.23) следует сказать, что не существует методов позволяющих найти ее (или аналогичных нелинейных моделей) точное решение, при той форме в которой она записана. Это связано именно со стохастичностью этой модели. К счастью в нашем линейном случае является возможным заменить рассматриваемую модель ее детерминированным эквивалентом.

3.2 Детерминированный эквивалент стохастической модели

Обозначим через $\overline{t}_{ij}^{C}$, $\overline{\Phi}_i$, $\overline{Y}_i^{(1)}$ - математические ожидания соответствующих случайных величин, δ_{ij}^2, $\delta_{i(\Phi)}^2$, $\delta_{i(Y^{(1)})}^2$ - дисперсии соответственно случайных величин t_{ij}^C, Φ_i, $Y_i^{(1)}$.

Обозначим через $\overline{\Pi}_j$ (j = 1, .., n) - математическое ожидание случайной величины Π_j. Тогда пользуясь свойством линейности оператора математического ожидания и тем, что все случайные величины мы считаем независимыми получаем, что функционалу (3.16) эквивалентен следующий

$$\overline{\overline{\overline{\Pi}}} = \sum_{j=1}^{n} \overline{\Pi}_j X_j - W \sum_{i=1}^{m} \overline{C}_i^{(1)} \overline{Y}_i^{(1)} - W\left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} C_\lambda^{(2)} Y_\lambda^{(2)} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma_0} C_\gamma^{(3)} Y_\gamma^{(3)} \right) \to \max, \quad (3.24)$$

где $\overline{C}_i^{(1)} = \dfrac{1}{\overline{\overline{\Phi}}_i}$. Именно возможность избавиться от оператора мате-матического ожидания и является важным достоинством рассма-триваемого критерия качества.

Относительно случайной величины $Y_i^{(1)}$ можно сказать, что она принимает следующие значения: $\overline{Y}_i^{(1)} = \begin{cases} 0, \text{при} \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij}^C X_j < \Phi_i \\ \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij}^C X_j - \Phi_i, \text{при} \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij}^C X_j \ge \Phi_i \end{cases}$.

Можно указать вероятности этих значений при известных параметрах t_{ij}^C и Φ_i и заданных X_j. Значение $Y_i^{(1)} = 0$ будет приниматься с вероятностью

$$P_1 = P\left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^C X_j - \Phi_i \right) < 0 \right\} = F(z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{где } z_0 = \frac{0 - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \overline{t}_{ij}^{C} X_j - \Phi_i \right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \delta_{ij}^2 X_j + \delta_{i(\Phi)}^2}, \text{здесь} \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ -

интегральная функция Лапласа, некоторые значения которой приведены в приложении. Более полные таблицы её значений можно найти например в [6, 7, 8] и других изданиях. Тогда дисперсию величины $Y_i^{(1)}$ можно приближенно считать равной

$$\delta_{i(Y^{(1)})}^2 = P_1 \times 0 + (1 - P_1) \times \left(\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}^2 X_j^2 + \delta_{i(\Phi)}^2 \right).$$

Далее из свойств нормального распределения известно, что условие

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^C X_j \le \Phi_i + Y_i^{(1)} \right) \ge p_i^1, \quad i = 1, 2, ..., m, \ \ j = 1, 2, ..., n;$$

эквивалентно условию

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{t}_{ij}^{C} X_j \le \overline{\Phi}_i + \overline{Y}_i^{(1)} - F^{-1}(p_i^1) \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}^2 X_j^2 + \delta_{i(\Phi)}^2 + \delta_{i(Y)}^2}, \ i = 1, 2, ..., m, \quad (3.25)$$

где $F^{-1}(p_i^1), i = 1, 2, ..., m$ - значения функции обратной интегральной функции Лапласа, которые можно находить по тем же таблицам.

Теперь вместо модели (3.16) - (3.23) мы получаем эквивалентную детерминированную модель (3.24), (3.25), (3.18) - (3.23). При этом важно, что полученная модель не является линейной и тем самым не может быть решена симплекс-методом. Однако с помощью итерационного (шагового) процесса подбора плана можно найти ее приближенное решение. Фактически - план для которого гарантированна та или иная желаемая вероятность его выполнения, однако быть может не оптимальный. При использовании ЭВМ задачу можно решить со сколь угодно большой точностью. При ручном счете практически представляется возможным лишь предложить допустимый план более или менее качественный с точки зрения значения критериальной функции.

3.3 Пример использования модели с учетом надежности для составления плана производства

На предприятии выпускается три вида продукции. Предполагаемая величина прибыли от реализации тысячи единиц изделий j-го вида, $j=\overline{1,3}$:

$$П_1 = 15,\ П_2 = 25,\ П_3 = 20.$$

Затраты труда в станко-часах, на изготовление тысячи единиц продукции j-го вида на оборудовании i-ой группы, $i=\overline{1,2}$, считаются нормально распределенными случайными величинами. Их средние значения и дисперсии характреризуются матрицами:

$$\bar{t}^{C}_{ij}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 3\\ 3 & 7 & 4\end{pmatrix},\ \delta^2_{ij}=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}16\\ 0{,}15 & 0{,}3 & 0{,}2\end{pmatrix}.$$

Годовой расчетный фонд рабочего времени оборудования i-ой группы, считается случайной величиной с характеристиками:

$$\overline{\Phi}_i=\begin{pmatrix}32\\ 40\end{pmatrix},\delta^2_{i(\Phi)}=\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}.$$

Затраты в нормо-часах рабочего времени λ-й группы рабочих-сдельщиков, $\lambda=\overline{1,2}$, на тысячу единиц продукции j-го вида и общий его фонд:

$$t^{H}_{\lambda j}=\begin{pmatrix}10 & 35 & 20\\ 14 & 65 & 25\end{pmatrix},\ T_\lambda=\begin{pmatrix}230\\ 340\end{pmatrix}.$$

Считается целесообразным ограничить расход только одного ресурса, затраты которого на тысячу изделий j-го вида и верхняя граница расхода задаются величинами

$$t^{M}_{j}=\begin{pmatrix}8 & 11 & 7\end{pmatrix},\ R_\gamma = 260.$$

Сопоставимая и принятая в плане оптовая цена тысячи изделий j-го вида характеризуется соответственно векторами,

$$Ц^{ПЛ}_j=\begin{pmatrix}24 & 34 & 30\end{pmatrix}, Ц^{С}_j=\begin{pmatrix}22 & 32 & 28\end{pmatrix}.$$

$Ц^{ПЛ}$ = 200, $Ц^{С}$ = 180 - заданная нижняя граница выпуска товарной продукции на предприятии в планируемом году соответственно в принятых в плане и в сопоставимых оптовых ценах.

$d_1=5, D_1=10$ - соответственно нижняя и верхняя границы объема производства продукции 1-го вида (в тыс. шт.), для другой продукции таких ограничений нет.

Составить детерминированный эквивалент математической стохастической модели формирования оптимального производственного плана с учетом надежности. Принять вероятность выполнения плана по использованию оборудования p^1_i = 0,95, $i=\overline{1,2}$. Предложить допустимый план по возможности доставляющий максимум прибыли.

Решение Примем величину штрафного коэффициента W = 1000. По таблицам находим $F^{-1}(0{,}95)=1{,}645$. Тогда соотношения детерми-нированного эквивалента стохастической модели с учетом реализуемости имеют вид.

Найти максимум критериальной функции:

$$\overline{\overline{П}}=15X_1+25X_2+20X_3-$$
$$-1000\left(\frac{1}{32}Y_1^{(1)}+\frac{1}{40}Y_2^{(1)}+\frac{1}{230}Y_1^{(2)}+\frac{1}{340}Y_2^{(2)}+\frac{1}{260}Y^{(3)}\right)\to\max,$$

при ограничениях по:

- оборудованию

$$2X_1+6X_2+3X_3 \le 32+\overline{Y}_1^{(1)}-1{,}645\sqrt{0{,}1X_1^2+0{,}25X_2^2+0{,}16X_2^2+3+\delta_{1(Y)}^2},$$
$$3X_1+7X_2+4X_3 \le 40+\overline{Y}_2^{(1)}-1{,}645\sqrt{0{,}15X_1^2+0{,}3X_2^2+0{,}2X_2^2+4+\delta_{2(Y)}^2};$$

- рабочему времени

$$10X_1+35X_2+20X_3 \le 230+Y_1^{(2)},$$
$$14X_1+65X_2+35X_3 \le 340+Y_2^{(2)};$$

- материальным ресурсам

$$8X_1+11X_2+7X_3 \le 260+Y_1^{(3)},$$

- объему соответственно в плановых и сопоставимых ценам

$$24X_1+34X_2+30X_3 \ge 200,$$
$$22X_1+32X_2+28X_3 \ge 180;$$

- по объему в натуральном выражении

$$5 \le X_1 \le 10.$$

Приступим к подбору допустимого плана.

Шаг 1 Пусть например

$$X_1=5, X_2=5, X_3=5.$$

По объему в плановых и сопоставимых ценам, а так же по объему в натуральном выражении план является допустимым

$$24\times5+34\times5+30\times5=440\ge200,$$

$$22\times5+32\times5+28\times5=410\ge180,$$
$$5 \le X_1 \le 10.$$

Подсчитаем теперь для $Y_1^{(1)}$

$$P_1=F(z_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \text{где } z_0=\frac{0-\left(\sum_{j=1}^{n}\overset{-}{t}{}_{ij}^{C}X_j-\overline{\Phi}_i\right)}{\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}^2X_j+\delta_{i(\Phi)}^2}=$$
$$=\frac{32-2\times5-6\times5-3\times5}{0{,}1\times5^2+0{,}25\times5^2+0{,}16\times5^2+3}=-\frac{23}{15{,}75}=-1{,}46.$$

По таблицам находим

$$P_1=F(-1{,}46)=0{,}072.$$

Теперь находим, что

$$\delta_{1(Y)}^2=(1-0{,}072)\left(0{,}1\times5^2+0{,}25\times5^2+0{,}16\times5^2+3\right)=14{,}6.$$

Для $Y_1^{(1)}$

$$P_1=F(z_0), \text{где } z_0=\frac{40-3\times5-7\times5-4\times5}{0{,}15\times5^2+0{,}3\times5^2+0{,}2\times5^2+4}=-\frac{30}{20{,}25}=-1{,}48.$$

По таблицам находим

$$P_1=F(-1{,}48)=0{,}069.$$

Тогда

$$\delta_{2(Y)}^2=(1-0{,}069)\left(0{,}15\times5^2+0{,}3\times5^2+0{,}2\times5^2+4\right)=18{,}85.$$

Тогда

$$\overline{Y}_1^{(1)}=-32+2\times5+6\times5+3\times5+1{,}645\sqrt{0{,}1\times5^2+0{,}25\times5^2+0{,}16\times5^2+3+14{,}6}=$$
$$=-32+45+9{,}06=22{,}06,$$
$$\overline{Y}_2^{(1)}=-40+3\times5+7\times5+4\times5+1{,}645\sqrt{0{,}15\times5^2+0{,}3\times5^2+0{,}2\times5^2+4+18{,}85}==-40+70+10{,}3=40{,}3,$$
$$10\times5+35\times5+20\times5\le230+Y_1^{(2)},\Rightarrow Y_1^{(2)}=95,$$
$$14\times5+65\times5+35\times5\le340+Y_2^{(2)},\Rightarrow Y_2^{(2)}=230,$$
$$8\times5+11\times5+7\times5\le260+Y_1^{(3)},\Rightarrow Y_1^{(3)}=0\,.$$

Находим теперь значение функционала

$$\overline{\overline{\Pi}}=15\times5+25\times5+20\times5-$$
$$-1000\left(\frac{1}{32}22{,}06+\frac{1}{40}40{,}3+\frac{1}{230}95+\frac{1}{340}230+\frac{1}{260}0\right)=350-2761=-2419.$$

Видим, что полученный результат не может считаться удов-летворительным. Очевидно, следует уменьшить выпуск 2-го и 3-го продуктов.

Шаг 2 Рассмотрим план

$$X_1=5, X_2=2, X_3=2.$$

По объему в плановых и сопоставимых ценам, а так же по объему в натуральном выражении план является допустимым

$$24\times5+34\times2+30\times2=248\ge200,$$

$$22\times5+32\times2+28\times2=230\ge180,$$

$$5\le X_1\le10\,.$$

Подсчитаем для $Y_1^{(1)}$

$$P_1=F(z_0),\text{где } z_0=\frac{32-2\times5-6\times2-3\times2}{0{,}1\times5^2+0{,}25\times2^2+0{,}16\times2^2+3}=\frac{10}{7{,}14}=1{,}4.$$
$$P_1=F(1{,}4)=0{,}92.$$

Теперь находим, что

$$\delta_{1(Y)}^2=(1-0{,}92)\left(0{,}1\times5^2+0{,}25\times2^2+0{,}16\times2^2+3\right)=0{,}5712.$$

Для $Y_2^{(1)}$

$$P_1=F(z_0),\text{где } z_0=\frac{40-3\times5-7\times2-4\times2}{0{,}15\times5^2+0{,}3\times2^2+0{,}2\times2^2+4}=\frac{3}{9{,}75}=0{,}31,$$
$$P_1=F(0{,}31)=0{,}62,\ \delta_{2(Y)}^2=(1-0{,}62)\left(0{,}15\times5^2+0{,}3\times2^2+0{,}2\times2^2+4\right)=3{,}7.$$

Тогда

$$\overline{Y}_1^{(1)}=-32+2\times5+6\times2+3\times2+1{,}645\sqrt{0{,}1\times5^2+0{,}25\times5^2+0{,}16\times5^2+3+0{,}57}=$$
$$=-32+28+4{,}6=0{,}6,$$
$$\overline{Y}_2^{(1)}=-40+3\times5+7\times2+4\times2+1{,}645\sqrt{0{,}15\times5^2+0{,}3\times2^2+0{,}2\times2^2+4+3{,}7}==-40+37+6{,}03=3,$$
$$10\times5+35\times2+20\times2=160\le230+Y_1^{(2)},\Rightarrow Y_1^{(2)}=0,$$
$$14\times5+65\times2+35\times2=270\le340+Y_2^{(2)},\Rightarrow Y_2^{(2)}=0,$$
$$8\times5+11\times2+7\times2=76\le260+Y_1^{(3)},\Rightarrow Y_1^{(3)}=0\,.$$

Находим теперь значение функционала

$$\overline{\overline{\Pi}} = 15\times 5 + 25\times 2 + 20\times 2 -$$
$$-1000\left(\frac{1}{32}0{,}6 + \frac{1}{40}3 + \frac{1}{230}0 + \frac{1}{340}0 + \frac{1}{260}0\right) = 165 - 18{,}75 - 75 = 72{,}5.$$

Возможно полученное значение можно считать допустимым. Однако мы видим, что уменьшив выпуск второго продукта и увеличив выпуск третьего результат вероятно улучшится.

Шаг 3 Рассмотрим план

$$X_1 = 5, X_2 = 1, X_3 = 3.$$

По объему в плановых и сопоставимых ценам, а так же по объему в натуральном выражении план является допустимым

$$24\times 5 + 34\times 1 + 30\times 3 = 244 \geq 200,$$

$$22\times 5 + 32\times 1 + 28\times 3 = 226 \geq 180,$$

$$5 \leq X_1 \leq 10\,.$$

Подсчитаем для $Y_1^{(1)}$

$$P_1 = F(z_0),\text{где } z_0 = \frac{32 - 2\times 5 - 6\times 1 - 3\times 3}{0{,}1\times 5^2 + 0{,}25\times 1^2 + 0{,}16\times 3^2 + 3} = \frac{7}{7{,}19} = 0{,}97.$$
$$P_1 = F(0{,}97) = 0{,}834.$$

Теперь находим, что

$$\delta^2_{1(Y)} = (1 - 0{,}834)\left(0{,}1\times 5^2 + 0{,}25\times 1^2 + 0{,}16\times 1^2 + 3\right) = 1{,}85.$$

Для $Y_2^{(1)}$

$$P_1 = F(z_0),\text{где } z_0 = \frac{40 - 3\times 5 - 7\times 1 - 4\times 3}{0{,}15\times 5^2 + 0{,}3\times 1^2 + 0{,}2\times 3^2 + 4} = \frac{6}{9{,}85} = 0{,}61,$$
$$P_1 = F(0{,}61) = 0{,}73,\ \delta^2_{2(Y)} = (1 - 0{,}73)\left(0{,}15\times 5^2 + 0{,}3\times 1^2 + 0{,}2\times 3^2 + 4\right) = 2{,}66.$$

Тогда

$$\overline{Y}_1^{(1)} = -32 + 2\times 5 + 6\times 1 + 3\times 3 + 1{,}645\sqrt{0{,}1\times 5^2 + 0{,}25\times 1^2 + 0{,}16\times 3^2 + 3 + 1{,}85} =$$
$$= -32 + 25 + 4{,}95 = -2{,}05, \Rightarrow \overline{Y}_1^{(1)} = 0,$$
$$\overline{Y}_2^{(1)} = -40 + 3\times 5 + 7\times 1 + 4\times 3 + 1{,}645\sqrt{0{,}15\times 5^2 + 0{,}3\times 1^2 + 0{,}2\times 3^2 + 4 + 2{,}66} =$$
$$= -40 + 34 + 5{,}8 = -0{,}2, \Rightarrow \overline{Y}_2^{(1)} = 0,$$
$$10\times 5 + 35\times 1 + 20\times 3 = 145 \leq 230 + Y_1^{(2)}, \Rightarrow Y_1^{(2)} = 0,$$
$$14\times 5 + 65\times 1 + 35\times 3 = 240 \leq 340 + Y_2^{(2)}, \Rightarrow Y_2^{(2)} = 0,$$
$$8\times 5 + 11\times 1 + 7\times 3 = 72 \leq 260 + Y_1^{(3)}, \Rightarrow Y_1^{(3)} = 0\,.$$

Находим теперь значение функционала

$$\overline{\overline{\Pi}} = 15\times 5 + 25\times 1 + 20\times 3 -$$

$$-1000\left(\frac{1}{32}0+\frac{1}{40}0+\frac{1}{230}0+\frac{1}{340}0+\frac{1}{260}0\right)=160.$$

Полученное значение значительно превышает предыдущие. Направления изменения плана ведущие к дальнейшему его улучшению уже не столь очевидны, как на предыдущих шагах. Поэтому остановимся на достигнутом результате.

Необходимо еще раз сказать, что решение рассматриваемых моделей, особенно в случае реальных задач с большим количеством переменных и ограничений, представляется возможным лишь с использованием ЭВМ. В этом случае мы легко с помощью известных численных методов могли бы найти практически точное решение задачи оптимизации плана.

Тема 4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

Одна из характерных черт всякого общественного или социально-экономического явления состоит в множественности, в многосторонности исходов этого явления, в наличии сторон, наделенных различными интересами, или хотя бы в наличии нескольких различных активных точек зрения на явление и его исход.

Так, например, приходится считаться с различием личных, коллективных и общественных интересов. В условиях плановой системы хозяйства необходимо сочетать отраслевые и региональные интересы, а также подчас противоречащие друг другу интересы отдельных ведомств. Основные трудности внедрения и распространения нововведений предопределяются противоречием между сегодняшней выгодой и будущим эффектом. В этом смысле можно сказать, что любое социально-экономическое явление наделено чертами конфликта. Ситуация называется *конфликтной,* если в ней участвуют стороны, интересы которых полностью или частично противоположны.

Теория игр относится к математическому обеспечению моделирования явлений в основном социально-экономической характера.

4.1 Основные понятия и общая классификация игр

Всякая математическая модель социально-экономического явления или конфликта должна выражать присущие ему черты, т.е. по крайней мере отражать следующие его компоненты:

а) заинтересованные стороны;

б) возможные действия каждой из сторон;

в) интересы сторон.

Дадим формальное описание указанных компонент конфликта, вводя при этом принятую терминологию и обозначения.

Заинтересованные стороны будут далее называться игроками или лицами, а множество всех игроков будет обозначаться через I. Далее мы ограничимся рассмотрением случая, когда множество I конечно. Не нарушая общности можно принимать, что $I = \{1, 2, ..., n\}$.

Любое возможное для игрока $i \in I$ действие называется его *стратегией*.

Множество всех стратегий игрока i обозначим через X_i. В условиях конфликта каждый игрок $i \in I$ выбирает некоторую свою стратегию $x_i \in X_i$ в результате чего складывается набор стратегий $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, называемый *ситуацией*. Множество всех ситуаций обозначим Z.

Заинтересованность игроков выражается в том, что каждому игроку $i \in I$ в той или иной ситуации $x \in Z$ приписывается число, выражающее степень удовлетворения его интересов в этой ситуации. Это число называется *выигрышем* игрока i в ситуации x и обозначается через $H_i(x)$. Величина $H_i(x)$ называется *функцией выигрыша* игрока i и обычно является действительным числом.

В этих условиях протекание конфликта состоит в выборе каждым игроком $i \in I$ его стратегии $x_i \in X_i$ и в получении им в сложившейся ситуации $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ из некоторого источника выигрыша $H_i(x)$. Таким образом множество игроков, их стратегий и их функций выигрыша полностью описывают некоторую игру Г, что формально записывают так

$$\Gamma = < I, \{x_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} >. \qquad (4.1)$$

Определение *Игра* - это действительный или формальный конфликт, в котором имеется по крайней мере два игрока каждый из которых стремится к достижению собственных целей. Игра как процесс представляет собой многократно повторяющийся выбор игроками своих стратегий.

Последняя фраза приведенного определения означает, что игру следует считать не как однократный обмен ударами, а как постоянно или, по крайней мере, многократно, осуществляемый процесс.

Определение Игра называется игрой с *нулевой суммой*, если сумма всех платежей равна нулю, т.е. если сумма проигрышей проигравших игроков равна сумме выигрышей остальных игроков из множества I.

Вообще говоря, оценка игроком i ситуации x путем указания выигрыша $H(x)$ не всегда возможна практически и даже не всегда имеет смысл. На этом пути создается *теория игр с предпочтениями*, более широкая, чем *теория игр с выигрышами*. Однако далее излагается и рассматривается только последняя, так как теория игр с предпочтениями более сложна и пока еще недостаточно разработана.

Все игры можно разделить на два типа: *коалиционные* и *бескоалиционные*. *Коалицией* называют любое подмножество множества I. Игра в которой действия игроков некоторой коалиции направлены на максимизацию выигрыша всей коалиции без последующего его разделения между игроками коалиции и называются коалиционными. В бескоалиционной игре целью каждого участника является получение по возможности большего индивидуального выигрыша. Существует специальная теория коалиционных игр называемая *кооперативной теорией*, некоторые основные идеи которой будут рассмотрены в п. 4.6.

Среди всех бескоалиционных игр с нулевой суммой естественным образом выделяется класс *антагонистических игр*, в которых число игроков равно двум, а значения их функций выигрыша в каждой ситуации равны по величине и противоположны по знаку:

$$H_1(X_1, X_2) = - H_1(X_1, X_2).$$

Чтобы сократить употребление индексов, множества стратегий игроков 1 и 2 антагонистической игре будут обычно обозначаться через X и Y, а функция выигрыша H_i - через H. Для антогонистических игр с двумя игроками вводится следующее определение.

Определение Пусть каждой стратегии 1-го игрока взаимооднозначно поставлена в соответствие строка некоторой матрицы A, а каждой стратегии 2-го игрока взаимооднозначно поставлен в соответствие столбец этой матрицы. Матрицу A называют *платежной* (или *матрицей игры)*, если её элемент a_{ij} равен выигрышу 1-го игрока (т.е. проигрышу 2-го) при выборе 1-м игроком i-й стратегии, а 2-м - j-й.

Поэтому антагонистическая игра полностью описывается единственной матрицей и в соответствии с этим называется *матричной*.

Пример 4.1 Швейное предприятие планирует к массовому выпуску новую модель одежды. Спрос на эту модель не может быть точно определен Однако можно предположить, что его величина характеризуется тремя возможными состояниями (I, II, III). С учетом этих состояний анализируются три возможных варианта выпуска данной модели (*А*, *Б*, *В*). Каждый из этих вариантов требует своих затрат и обеспечивает в конечном счете различный эффект. Прибыль (тыс. р.), которую получает предприятие при данном объеме выпуска модели и соответствующем состоянии спроса, определяется матрицей

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \end{array} \\ \begin{array}{c} А \\ Б \\ В \end{array} & \begin{pmatrix} 22 & 23 & 22 \\ 21 & 25 & 23 \\ 20 & 21 & 24 \end{pmatrix} \end{array}$$

Выбор в том или ином смысле наилучшего варианта выпуска моделей можно понимать как матричную игру.

4.2 Понятие оптимальности стратегии

Теория игр как математическая дисциплина в ее современном состоянии занимается нормативным изучением игр, т.е. считает своей задачей установить какое поведение игроков следует считать оптимальным (разумным, целесообразным).

Оптимальность стратегии очевидно можно понимать по-разному. То есть понятия оптимальности в теории игр и оптимального решения игры не являются однозначными, априорными, абсолютными. Вместе с тем эти понятия являются объективными, т.е. каждый вариант оптимальности поддается точному описанию при помощи недвусмысленных математических формулировок. Тем самым различные содержательные представления об оптимальности могут приводить к отличающимся математическим моделям.

Основными содержательными чертами оптимальности в применении к исходу или к множеству исходов конфликта можно считать интуитивные представления о *выгодности* и *справедливости*.

Можно, например, оптимальной ситуацией считать такую, в которой одновременно достигают своих максимумов функции выигрыша каждого из игроков. Условие оптимальности в этом смысле для ситуации x^* для игры (4.1) формально можно записать как

$$H_i(x) < H_i(x^*) \text{ для любых } i \in I, x \in Z. \quad (4.2)$$

Выгодность такой ситуации ясна.

Нетрудно видеть, однако, что существование в бескоалиционной игре ситуаций, оптимальных в только что описанном смысле, является сравнительно редким исключением (как и любое совпадение максимумов нескольких функций). В сущности, реализуемость этого принципа оптимальности соответствует слабости конфликтных черт моделируемого явления, близости целей его участников.

Естественно поэтому искать другие представления об оптимальности, быть может, не столь бесспорные, но зато более часто реализуемые.

Одной из наиболее плодотворных форм реализации представлений об оптимальности можно считать понятие равновесия, состоящее в следующем.

Определение Ситуация называется *равновесной*, если ни один из игроков не заинтересован в том, чтобы ее нарушить, т.е. отклониться от нее.

Если игра Г является антагонистической, то равновесная ситуация x^* имеет вид (x^*, y^*) и формально для равновесной ситуации можно записать

$$H(x, y^*) \le H(x^*, y^*) \le H(x^*, y), \quad (4.3)$$

при любых $x \in X$, $y \in Y$. Уже из того, что в (4.3) используется не строгое неравенство "меньше или равно - ≤" следует, что равновесных ситуаций может быть несколько.

Определение В случае антагонистической игры ситуация равновесия называется *седловой точкой*. Оказывается, что функция выигрыша игры во всех ее седловых точках принимает одно и то же значение, которое называется *ценой игры* (или *значением игры*).

Именно ситуации равновесия могут быть предметом устойчивых договоров между игроками. Всякая попытка зафиксировать в договоре неравновесную ситуацию будет означать, что хотя бы у одной из договаривающихся сторон найдется такая стратегия, что выбор ее вместо предусмотренной договором увеличит выигрыш этого игрока. Тем самым возникают мотивы к нарушению договора.

Обычно именно равновесные стратегии считают *оптимальными* и называют их *решением игры*.

Принцип оптимальности в бескоалиционной игре, состоящий в осуществлении игроками ее ситуаций равновесия, является более слабым и чаще реализуемым, чем принцип выражаемый соотношением (4.2). Однако равновесные ситуации определяемые соотношением (4.2) так же существуют не для всякой игры.

Оказывается из этой ситуации также можно попытаться найти выход. При отсутствии в игре ситуаций равновесия, при использовании игроками единственной стратегии (из имеющихся у каждого из них множества), естественно поставить вопрос о расширении понятия стратегии. Таком чтобы среди ситуаций, составленных из новых, *обобщенных* стратегий все же могли бы найтись равновесные.

Определение Элементы множества X и Y называют *чистыми* стратегиями игроков.

Определение Вектор, каждая из компонент которого показывает относительную частоту использования игроком соответствующей чистой стратегии, называется *смешанной стратегией* данного игрока.

Из данного определения непосредственно следует, что сумма компонент указанного вектора равна единице, а сами компоненты не отрицательны. Ясно так же, что чистую стратегию можно рассматривать как частный случай смешанной.

Удобной интерпретацией смешанной стратегии является ее представление как случайного выбора игроком своих чистых стратегий в соответствии с вероятностями задаваемыми относительными частотами (вспомним "классическое определение вероятности события"). Причем выборы игроков независимы, а выигрыш в ситуации в смешанных стратегиях определяется как математическое ожидание случайного выигрыша.

4.3 Решение матричной игры в чистых стратегиях

Известный математик А. Вальд сформулировал принцип состоящий в том, что при принятии решения в условиях неопределенности разумно исходить из того, что сложится наименее благоприятная для нас ситуация. Исходя из этого принципа игрок 1 может рассуждать следующим образом:

"Предположим, что я выберу i-ю стратегию, тогда в худшем для меня случае я получу выигрыш величиной

$$\min_j(a_{ij}),\ j = \overline{1,m},$$

где m-количество строк в матрице игры, т.е. количество чистых стратегий 2-го игрока. Тогда я должен выбрать такую строку, т.е. I-ю стратегию ($i = \overline{1,n}$, n - количество столбцов в матрице игры), при которой этот минимум максимальный".

Определение Число $\alpha = \max_i(\min_j a_{ij})$ называется *нижней ценой игры* или *максимином*, а соответствующая ему стратегия (строка) **-** *максиминной*.

Аналогично, второй игрок также исходя из наихудшего исхода должен рассуждать следующим образом:

"Предположим, что я выберу i-ю стратегию, тогда в худшем для меня случае я потеряю величину

$$\min_i (a_{ij}), i = \overline{1,n} .$$

Тогда я должен выбрать такой столбец, т.е. j-ю стратегию, при которой этот максимум минимальный."

Определение Число $\beta = \min_j(\max_i a_{ij})$ называется *верхней ценой игры* или *минимаксом,* а соответствующая ему стратегия игрока (столбец) - *минимаксной.*

Теорема *Нижняя цена игры всегда не превосходит верхней цены игры.*

Если для некоторой игры верхняя и нижняя цены равны, т.е. выполняется $\alpha = \beta$, или что то же самое

$$\max_i(\min_j \ a_{ij}) = \min_j(\max_i \ a_{ij}) = a_{i^* j^*} ,$$

где $a_{i^* j^*}$ - соответствующий элемент матрицы игры, то очевидно для этого элемента выполняется неравенство

$$a_{i\, j^*} \le a_{i^* j^*} \le a_{i^* j} \ .$$

Сравнивая его с (4.3) видим, что оказывается ситуация (i^*, j^*) является равновесной, т.е. оптимальной, т.е. решением игры. Величина $V = \alpha = \beta$ при этом очевидно является ценой игры.

То есть рассматриваемые принципы максимина и минимакса привели нас к оптимальному и равновесному состоянию. Это еще раз свидетельствует об обоснованности их использования при принятии решений.

Определение Игра, для которой $\alpha = \beta$, называется *игрой с седловой точкой.*

Пример 4.2 Для игровой матрицы из примера 4.1 найти седловые точки, если они есть. Нахождение нижней и верхней цен игры, равно как и проверка существования седловых точек и их нахождение, для матричных игр удобно проводить по следующей схеме:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} & \min\limits_j a_{ij} \\
\begin{pmatrix} 22 & 23 & 22 \\ 21 & 25 & 23 \\ 20 & 21 & 24 \end{pmatrix} & \left.\begin{array}{c} \to 22 \\ \to 21 \\ \to 20 \end{array}\right\} \quad \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 22. \\
\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \end{array} \\
\max\limits_i a_{ij} & \underbrace{\begin{array}{ccc} 22 & 25 & 24 \end{array}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 22}
\end{array}$$

Видим, что максимин имеет место в 1-й строке, т.е. при первой стратегии 1-го игрока. Минимакс - в первом столбце, т.е. при 1-й стратегии 2-го игрока. При этом они совпадают, то есть имеется седловая точка, и это ситуация $x^* = (1,1)$.

4.4 Решение матричной игры в смешанных стратегиях

Игра, заданная некоторой матрицей, может не иметь седловой точки.

Пример 4.3 Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 5 \\ -1 & 8 & 7 & 0 \\ 9 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Для первого игрока находим максимин

$$\max_i(\min_j \ a_{ij}) = \max_i\{3,-1,2\} = 3 .$$

Для второго - минимакс

$$\min_j(\max_i \ a_{ij}) = \min_j\{9,8,5\} = 5 .$$

Видим - минимакс и максимин не совпадают, т.е. положения равновесия в чистых стратегиях не существует.

Если среди чистых стратегий решения игры нет, то для его нахождения используются смешанные стратегии. Оказывается справедлива теорема.

Теорема Всякая матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях. При этом если A - платежная матрица, $U^* = (u_1^*, u_2^*, ..., u_n^*)$ - оптимальная смешанная стратегия первого игрока, а $Z^* = (z_1^*, z_2^*, ..., z_m^*)$ - второго, то число $v = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}u_i^* z_j^* = U^* A Z^*$ является ценой игры.

Нахождение такого решения сводится к решению задачи линейного программирования, точнее говоря к решению пары взаимосопряженных задач. Рассмотрим, что это за задачи.

Итак, пусть A - платежная матрица игры размерности $n \times m$, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что коль скоро в смешанных стратегиях всегда существует оптимальная стратегия первого игрока и цена игры, то для нее должно выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i' \ \geq v, j = \overline{1, ..., m} \tag{4.4}$$

это означает, что при любой чистой стратегии 2-го игрока (т.е. любого столбца матрицы A) его проигрыш будет не меньше цены игры (т.е. максимина). Предположим для определенности, что $v > 0$. Введем обозначение

$$u_i^* / v = y_i^* ,$$

тогда условие $\sum_{i=1}^{n} u_i' \ = 1$ (как уже говорилось, очевидно справедливое для вектора вероятностного распределения) можно переписать в виде $\sum_{i=1}^{n} y_i^* = 1/v$.

Разделив обе части неравенства (4.4) на v, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}y_i^* \geq 1, j = \overline{1, ..., m} .$$

Поскольку целью 1-го игрока является максимизация величины v, т.е. минимизация величины $1/v$, то нахождение его оптимальной смешанной стратегии $U^* = (u_1^*, u_2^*, ..., u_n^*)$ сводится к решению следующей задачи линейного программирования:

$$F = y_1 + y_2 + ... + y_n \to \min ,$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \ \geq 1, \ j = \overline{1, ..., m},$$
$$y_i \ \geq 0, i = \overline{1, ..., n}.$$

Найдя решение y^* этой задачи легко переходим к U^* по формулам

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^{n} y_i^*} = v y_i^*, i = \overline{1, ..., n}, \qquad v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} y_i^*}.$$

Рассуждая совершенно аналогично получим, что задача нахождения оптимальной смешанной стратегии 2-го игрока $Z^* = (z_1^*, z_2^*, ..., z_m^*)$ сводится к нахождению вектора $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$, являющегося решением следующей задачи линейного программирования:

$$F = x_1 + x_2 + ... + x_m \to \max,$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \leq 1, i = \overline{1, ..., n},$$
$$x_j \geq 0, j = \overline{1, ..., m}.$$

Найдя решение x^* этой задачи легко переходим к Z^* по формулам

$$z_j^* = \frac{x_j^*}{\sum_{j=1}^{m} x_j^*} = v x_j^*, j = \overline{1, .., m}, \qquad v = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} x_j^*}.$$

Пример 4.4 Для матрицы из предыдущего примера имеем следующие задачи. Для 1-го игрока

$$F = -y_1 - y_2 - y_3 \to \max, \quad F = y_1 + y_2 + y_3 \to \min,$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3y_1 - y_2 + 9y_3 \geq 1, \\ 6y_1 + 8y_2 + 7y_3 \geq 1, \\ 4y_1 + 7y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 5y_1 + + 3y_3 \geq 1, \end{cases}$$
$$y_i \ \geq 0, i = \overline{1, ..., 3}.$$

Для 2-го игрока

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 1, \\ -x_1 + 8x_2 + 7x_3 \qquad \leq 1, \\ 9x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 1, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = \overline{1, ..., 4}.$$

Как следует из симплекс-метода, легче решить задачу для 2-го игрока. Для этого даже не потребуется введения искусственных переменных. За исходный базис можно принять дополнительные переменные, необ-ходимые для перехода к канонической форме задачи. Опуская расчеты, приведем последнюю симплекс-таблицу, которая получена на четвертом шаге.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P
x_4	0	-1/10	0	1	13/50	-3/25	-1/10	0,04
x_3	0	61/50	1	0	-3/250	18/125	1/50	0,152
x_1	1	27/50	0	0	-21/250	1/125	7/50	0,064
Δ	0	33/50	0	0	41/250	4/125	3/50	0,256

Таким образом $x^* = (0{,}064,\ 0,\ 0{,}152,\ 0{,}04)$, при том, что F^*=0,256. Отсюда

$\sum_{j=1}^{4} x_j^* = 0.256 = \frac{125}{32}$, $v = \frac{1}{\sum_{j=1}^{4} x_j^*} = 3.90625$, $Z^* = (0{,}25,\ 0,\ 0{,}59375,\ 0{,}15625)$ Проверив, что $\sum_{i=1}^{4} z_i^* = 1$

убеждаемся в правильности полученного ответа.

Из этой же таблицы находим решение двойственной задачи. Получаем, что $y^* = (41/250,\ 4/125,\ 3/50)$, при том же F^* = 0,256. Отсюда получаем

$$U^* = vy^* = (41/64, 4/32, 15/64), \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{3} u_i^* = 1 .$$

Таким образом, смешанные оптимальные стратегии 1-го игрока U^* и 2-го игрока Z^* найдены, также как и цена игры v.

4.5 Игра с природой

Кроме антогонистических рассматривают так называемые *неантогонистические* игры. В этом случае предполагают, что действия противника не носят характер строгого противостояния. Его интересы могут быть разными и в общем случае не совпадающими с нашими, однако они не являются "злонамеренно" направленными против нас. Простейшим примером такой ситуации является следующая.

Предположим, что известна (в общем случае смешанная) стратегия применяемая одним из игроков. Например, из опыта предыдущих наблюдений. Этот игрок использует свою стратегию вне зависимости от нашей стратегии. Такую игру принято называть *игрой с природой*. Природа как бы не имея в общем желания нам навредить действует по своим законам.

Будем для определенности считать, что известна смешанная стратегия $Z = (z_1, z_2, ..., z_m)$ постоянно применяемая 2-м игроком. Причем она совершенно не обязательно является оптимальной для него. В этих условиях возникает вопрос, как 1-му игроку построить стратегию U^* максимизирующую его ожидаемый выигрыш. Ответ на этот вопрос даётся просто. А именно оптимальной будет та чистая стратегия, для номера *i** которой достигается максимум

$$v_{\max} = \max_i \sum_{j=1}^{m} z_j a_{ij} .$$

4.6 Кооперативная теория

Другим классом неантогонистических игр являются *кооперативные игры*.

Каждая бескоалиционная игра описывает некоторый, вообще говоря, достаточно сложный конфликт, не всегда поддающийся не только детальному изучению, но и даже точному описанию. Поэтому иногда представляется естественным выбирать в этом конфликте отдельные его аспекты и подвергать их специальному анализу.

Быть может, самым простым будет при этом выделение некоторого множества игроков $K \subset I$, называемого *коалицией* (бескоалиционность рассматриваемых игр в том и состоит, что никакие коалиции первоначально в правилах игры не предусмотрены), и рассмотрение антагонистической игры $\Gamma(K)$ коалиции K как единого игрока против ее "окружения" $I \backslash K$ в целом. При этом комбинации стратегий игроков из K (и из $I \backslash K$) составляют стратегии K (соответственно стратегии $I \backslash K$), а сумма выигрышей игроков из K - выигрыш коалиции K. Значение $v(K)$ этой игры естественно понимать как силу коалиции K в общей игре Г.

Соответствие $K \to v(K)$ для каждой коалиции $K \subset I$ в условиях бескоалиционной игры Г называется ее *характеристической функцией* и обозначается через v_Γ.

Характеристическая функция v_Γ дает представление о возможностях коалиций и отдельных игроков в условиях игры Г даже без указания множества стратегий и функций выигрыша в ней. Поэтому говорят даже о задании игр "в форме характеристической функции", противопоставляя его заданию игр "в нормальной форме", и в других формах, которые существуют, но нами не затрагиваются. Изучение характеристических функций игр и составляет содержание кооперативной теории игр.

В рамках такой кооперативной теории исходами игры будут некоторые распределения суммарного выигрыша, называемые *дележами.* Характеристическую функцию, рассматриваемую совместно с некоторым множеством дележей, принято называть *кооперативной игрой.* Для кооперативных игр конструируются соответствующие принципы оптимальности и рассматривается связанная с ними проблематика.

В некоторых из этих принципов оптимальности воплощаются представления об устойчивости, которые получаются перенесением на соотношения между дележами различных вариантов описания максимума функции. Однако применительно к дележам эти варианты определения перестают быть эквивалентными и порождают различные принципы оптимальности.

Вводимые принципы оптимальности имеют некоторые недостатки (если вообще можно говорить о недостатках достаточно естественно возникающих объектов): они не всегда реализуемы, а в тех случаях, когда реализуемы, могут допускать целые множества реализации, причем каждая реализация может состоять из .многих дележей. К тому же реализации этих принципов могут не удовлетворять условиям справедливости в том смысле, как она определялась выше.

Все сказанное заставляет искать новые принципы оптимальности. При этом плодотворным оказывается следующий путь: не переносить на случай дележей те или иные формулировки для максимумов на числовых множествах, выясняя, какими свойствами полученные принципы оптимальности будут обладать, а наоборот, фиксировать те свойства (в том числе - некоторые черты справедливости), которые желательно видеть у интересующих нас принципов оптимальности, и конструировать принцип, который этими свойствами заведомо будет обладать.

Тема 5 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ

В некоторых случаях ситуация, при которой должно быть принято то или иное решение, может быть промоделирована некоторой графической структурой, для которой в математической теории используется название *граф*. Точное определение этого понятия будет дано ниже. К таким ситуациям относятся планирование маршрутов транспортных перевозок или иных перемещений объектов, расчет наилучших схем расположения товаров по площади склада или пунктов хранения некоторых запасов. Обычно имеется возможность осуществить необходимые действия многими различными способами, и возникает задача выбора наилучшего из них. То есть возникает задача особого типа оптимизации принимаемого решения, оптимизационная задача на графе [10, 12, 13].

5.1 Основные понятия теории графов

Пусть имеется некоторое множество точек X в пространстве. Имеется также множество U, состоящее из некоторых пар элементов X. То есть, если a_1 и a_2 принадлежат X, то пары (a_1, a_1), (a_1, a_2) могут (хотя и не обязательно) принадлежать U. Говорят, что множества X и U задают граф $G = (X, U)$.

При этом элементы множества X называют вершинами графа G. Элементы множества U называют ребрами графа G.

Граф может быть для наглядности изображен в виде некоторой геометрической структуры. На изображениях графа обычно обозначаются вершины, строчными латинскими буквами, с индексами или без. Например на рисунке 5.1 изображен граф $G_1 = (\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},\{(x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_4, x_3), (x_4, x_5), (x_5, x_6), (x_3, x_6)\})$, т.е. его множество вершин $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, а множество ребер $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_4, x_3), (x_4, x_5), (x_5, x_6), (x_3, x_6)\}$.

Пары (a_i, a_j) могут быть упорядоченными или нет, т.е. элементы (a_i, a_j) и (a_j, a_i) считаться разными элементами или одним и тем же. Если пары упорядочены, говорят, что граф ориентированный (орграф). Ребра орграфа называют дугами. При этом обычно порядок чередования вершин указывают стрелкой. На рисунке 5.2 приведен пример орграфа $G_2 = (\{a, b, c, d, e, f\},\{(b, a), (b, d), (d, b), (d, c), (c, e), (e, c), (e, d), (f, e), (e, f)\})$.

Степенью $d(a_i)$ вершины a_i называется число непосредственно связанных с ней ребер. Например, для графа с рис. 5.1 степень вершины x_4 равна 3, $d(a_4) = 3$. Если граф ориентированный, то степенью называется сумма числа входящих и выходящих дуг. Степень вершины e графа с рисунка 5.2 равна 5, $d(e) = 5$.

Маршрутом в графе называется последовательность вершин и ребер, в которой для всех ребер, кроме первого и последнего, конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего. Если в маршруте все ребра различны, то он называется цепью. Граф называется связным, если для любых двух его вершин существует соединяющая их цепь.

Циклом называется цепь начало и конец которой совпадают. Если цикл включает в себя все ребра графа, то он называется эйлеровым циклом (или эйлеровой цепью). Если в графе имеется хотя бы один эйлеров цикл, то он называется эйлеровым графом. Справедливая следующая теорема.

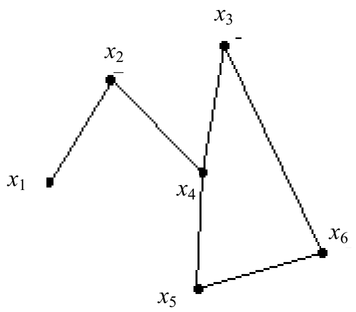


Рис. 5.1

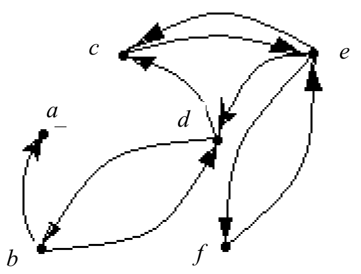


Рис 5.2

Теорема 5.1 Эйлеров цикл в связанном графе существует тогда и только тогда, когда степени всех его вершин - четные числа.

Существует алгоритм, по которому можно построить эйлерову цепь, если она имеется.

В орграфе маршрут обычно называют контуром, а цепь - путем.

5.2 Нахождение кратчайшего пути в графе

Каждому ребру z можно сопоставить некоторое число $l(z)$ - длину этой дуги. Тогда можно говорить и о длине пути μ, ясно что эта величина должна быть определена так

$$l(\mu) = \sum_{z \in \mu} l(z),$$

т.е. как сумма длин всех ребер входящих в путь.

Возникает следующая задача. Найти в графе G путь μ кратчайшей длины, соединяющей вершину a с вершиной b.

Если, например, в виде графа представлена сеть транспортных путей в городе, или их часть, вершинами которого являются в частности некоторые пункты, которые необходимо время от времени посещать, то задача поиска кратчайшего пути между ними имеет практическое значение. При этом, в качестве длины ребер может быть принята не физическое расстояние между пунктами, а реально необходимое для перемещения между ними время. Это может быть сделано для учета разницы в качестве транспортных путей и т.п.

Имеется следующий алгоритм нахождения кратчайшего пути между заданными вершинами:

1 Перенумеровать вершины графа G так, чтобы вершина a получила номер 0. Обозначим вершину a через x_0. А вершину b через x_N.

2 Присвоить каждой вершине x_i метку λ_i так, чтобы $\lambda_0 = 0$, $\lambda_i = +\infty$ при $i > 0$.

3 ДЛЯ ВЕРШИНЫ X_J НАЙТИ ВСЕ ВЕРШИНЫ X_I, ($I = \overline{1,k}$), ДЛЯ КОТОРЫХ

$$\lambda_J - \lambda_I > L(X_I, X_J). \qquad (5.1)$$

(ПОЛАГАЕМ, ЧТО $\infty - \infty = 0$.) У ВЕРШИНЫ X_J ЗАМЕНИТЬ МЕТКУ λ_J НА МЕНЬШУЮ ВЕЛИЧИНУ $\lambda_J = \lambda_I + \mathrm{MIN}\{L(X_I, X_J)\}$, ЗДЕСЬ МИНИМУМ БЕРЕТСЯ ПО ВСЕМ ДУГАМ (X_I, X_J), ДЛЯ КОТОРЫХ ВЫПОЛНЯЕТСЯ УСЛОВИЕ (5.1).

1 Применять правило 3 до тех пор, пока для каждой дуги (x_i, x_j) не станет справедливым неравенство $\lambda_j - \lambda_i \le l(x_i, x_j)$.

2 Из всех дуг входящих в вершину $b = x_N$, найти такую дугу (x_{p1}, x_N), чтобы было справедливо равенство

$$\lambda_N = \lambda_{p1} + l(x_{p1}, x_N).$$

3 *Аналогично, из всех дуг входящих в вершину* x_{p1}*, выбрать такую дугу* (x_{p2}, x_{p1})*, чтобы*

$$\lambda_{p1} = \lambda_{p2} + l(x_{p2}, x_{p1}),$$

и так далее.

1 После некоторого числа шагов, вершина x_{pk} совпадет с $a = x_0$.

2 Путь $\mu = \{a = x_{pk}, x_{p(k-1)}, \ldots, x_{p1}, b\}$ - является кратчайшим.

Рассмотрим использование этого алгоритма на примере.

Пример 5.1 Найдем для графа, представленного на рис. 5.3, крат-чайший путь от вершины x_0 до вершины вершины x_6. Длины дуг на рисунке указаны цифрами. Решение будем записывать в виде последовательности шагов.

Шаг 1 В соответствии с алгоритмом, сначала приписываем метки всем вершинам графа следующим образом:

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_i = +\infty \text{ при } i > 0.$$

Шаг 2 Для x_1 находим единственную вершину x_0, для которой

$$\lambda_1 - \lambda_0 > l(x_0, x_1),$$

т.к. $\lambda_1 - \lambda_0 = \infty - 0 = \infty > l(x_0, x_1) = 2$. Принимаем $\lambda_1 = 2$.

Шаг 3 Для x_3 находим соответствующие вершины, это: x_0, x_1. Приписываем x_3 метку λ_3:

$$\lambda_3 = \min\{\lambda_0 + l(x_0, x_3), \lambda_1 + l(x_1, x_3)\} = \min\{0 + 4, 2 + 7\} = 4.$$

Замечание В процессе решения часто бывает целесообразно осуществлять перебор вершин таким образом, чтобы возвращаться к уже помеченным конечным числом вершинам, перед тем как двигаться дальше по графу увеличивая номер рассматриваемой вершины. Это часто позволяет уменьшить число необходимых шагов, хотя в целом алгоритм даёт результат независимо от методики перебора вершин.

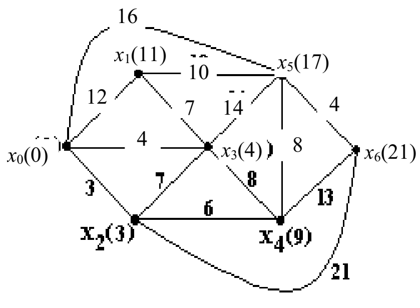


Рис. 5.3

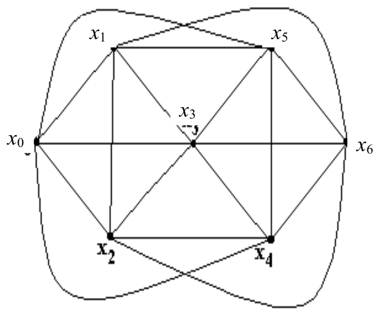


Рис. 5.4

Шаг 4 Для x_1 приписываем метку λ_1:

$$\lambda_1 = \min\{\lambda_0 + l(x_0, x_1), \lambda_3 + l(x_3, x_1)\} = \min\{0 + 12, 4 + 7\} = 11.$$

Шаг 5 Для x_2 находим вершины, это: x_0, x_3. Приписываем x_2 метку λ_2:

$$\lambda_2 = \min\{\lambda_0 + l(x_0, x_2), \lambda_3 + l(x_3, x_2)\} = \min\{0 + 3, 4 + 7\} = 3.$$

Шаг 6 Для x_4 находим вершины, это: x_2, x_3. Приписываем x_4 метку λ_4:

$$\lambda_4 = \min\{\lambda_2 + l(x_2, x_4), \lambda_3 + l(x_3, x_4)\} = \min\{3 + 6, 4 + 8\} = 9.$$

Шаг 7 Для x_5 находим вершины: x_1, x_3, x_4. Приписываем x_5 метку λ_5:

$$\lambda_5 = \min\{\lambda_1 + l(x_1, x_5), \lambda_3 + l(x_3, x_5), \lambda_4 + l(x_4, x_5)\} =$$
$$= \min\{11 + 10, 4 + 14, 9 + 8\} = 17.$$

Шаг 8 Для x_6 находим вершины: x_4, x_5. Приписываем x_6 метку:

$$\lambda_6 = \min\{\lambda_3 + l(x_3, x_6), \lambda_4 + l(x_4, x_6), \lambda_5 + l(x_5, x_6)\} =$$

$$= \min\{3 + 21{,}9 + 13{,}17 + 4\} = 21.$$

Указываем на графе рассчитанные метки, в скобках у названий вершин. Еще раз убеждаемся в том, что для каждой дуги (x_i, x_j) справедливом неравенство $\lambda_j - \lambda_i \leq l(x_i, x_j)$.

Шаг 9 Теперь, в соответствии с алгоритмом, для вершины x_6 находим такую дугу (x_{p1}, x_6), что справедливо равенство

$$\lambda_6 = \lambda_{p1} + l(x_{p1}, x_6),$$

такой дугой является (x_5, x_6). Призводя аналогичные действия для вершины x_5 и последующих, получаем искомый путь наименьшей длины:

$$\mu = \{(x_0, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6)\}.$$

5.3 Гамильтоновы графы. Задача о коммивояжере

Пусть $G = (X, U)$ - полностью неориентированный граф. Цепь проходящая через каждую вершину этого графа, и притом только по одному разу, называется гамильтоновой. Цикл $\mu = \{(x_0, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n)\}$, проходящий через все вершины графа G и притом только по одному разу через каждую (за исключением $x_0 = x_n$), называется гамильтоновым циклом.

Например, для графа изображенного на рис. 5.2 гамильтоновым является цикл $\mu = \{(x_0, x_3), (x_3, x_5), (x_5, x_6), (x_6, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_4, x_0)\}$. Видим также, что у этого графа имеется несколько различных гамиль-тоновых циклов.

В графе может не найтись ни одной гамильтоновой цепи. Могут иметься гамильтоновы цепи, но отсутствовать гамильтоновы циклы. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2 Пусть в графе n вершин, тогда если для любой пары вершин x_i и x_j выполняется соотношение

$$d(x_i) + d(x_j) \geq n - 1,$$

то граф имеет гамильтонову цепь. Если же для любой вершины x_i

$$d(x_i) \geq \frac{n}{2},$$

то граф имеет гамильтонов цикл.

Задача нахождения гамильтоновых цепей или контуров связана со следующей практически важной задачей, которую называют *задачей о бродячем торговце* или чаще *задачей коммивояжера*. Район, который должен посетить бродячий торговец содержит некоторое количество городов, расстояния между которыми известны. Требуется найти маршрут проходящий через все пункты только по одному разу и возвращающийся в исходный. Если таких маршрутов несколько, требуется найти кратчайший из них.

Задача о коммивояжере возникает не только в описанной ситуации. К ней сводится и оптимизация маршрута развозки продуктов по торговым точкам города так, чтобы суммарная длина пробега машин была бы минимальной. Или, например, задача определения оптимального порядка обработки деталей в количестве n штук, если известно время t_{ij} переналадки станка для обработки i-й детали после обработки j-й детали, когда требуется установить такой порядок работы, при котором суммарное время на переналадку было бы минимальным.

Ясно, что для решения задачи о коммивояжере требуется найти из имеющихся в графе гамильтонов цикл минимальной длины. Данная задача является весьма сложной.

До сих пор нет достаточно эффективных алгоритмов, которые бы по объему вычислений существенно отличались бы от прямого перебора громадного число вариантов. Число этих вариантов приближается к величине $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ (говорят: n - факториал). Оно в точности равно $n!$ для графа, любая пара вершин которого связана ребром (такой граф называется полным).

Наиболее эффективным алгоритмом решения задачи коммивояжера считается так называемый *метод ветвей и границ*, который однако тоже не гарантирует от полного перебора вариантов, и являясь достаточно сложным здесь не рассматривается. Практическую важность имеют алгоритмы дающие приближенное решение задачи.

Следует отметить, что при использовании современной компьютерной техники, практически возможно решить указанную задачу прямым перебором вариантов для числа пунктов до 25 - 30 и более. Данная величина n вполне достаточна для большинства возникающих на практике ситуаций.

Имеются и другие типы оптимизационных задач на графах. Например, так называемая задача о максимальном потоке [10].

5.4 Использование линейного программирования для решения оптимизационных задач на графах

Как уже говорилось линейные задачи оптимизации встречаются в самых разных областях математической теории принятия решений (ее обычно называют теорией исследования операций) и оптимизации. Рассмотрим возможность использования линейного программирования для некоторых задач теории графов.

Для задачи о кратчайшем пути. Обозначим через x_{ij} переменную, которая принимает значение 1, если дуга (i, j) входит в искомый маршрут, и - 0, если не входит. Обозначим через c_{ij} длину дуги (i, j), K_i - количество всех входящих в i-ую вершину дуг, M_i - количество всех выходящих из неё дуг, n - количество вершин. Тогда математическая формулировка указанной задачи имеет вид (суммирование производится по всем дугам)

$$F = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \to \min\ , \tag{5.2}$$

при ограничениях вида (для каждой вершины графа):

$$\sum_{k=1}^{K_i} x_{ki} - \sum_{m=1}^{M_i} x_{im} = \begin{matrix} -1 - \text{для начального пункта,} \\ 0 - \text{для промежуточных пунктов,} \\ 1 \text{ - для конечного пункта.} \end{matrix} \tag{5.3}$$

Эти ограничения выражают то, что из начального пункта выходит на одну дугу больше, чем входит. В конечный - на одну больше входит. А для промежуточных вершин количество входящих и выходящих дуг должно быть равно.

Очевидно, что то, что переменные x_{ij} могут принимать только значения 0 и 1 (такие переменные называются булевыми) является дополнительным ограничением особого вида. Решать задачи с такими ограничениями в общем случае следует посредством имеющихся специальных модификаций симплекс-метода. Однако в рассматриваемом случае, в силу формы ограничений (5.3) можно ограничиться лишь обычным требованием неотрицательности:

$$x_{ij} \geq 0, (i, j = \overline{1, n})\ . \tag{5.4}$$

Для задачи о коммивояжере. При тех же обозначениях ее можно записать в виде:

$$F = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \to \min\ , \tag{5.5}$$

при ограничениях:

$$\sum_{k=1}^{K_i} x_{ki} = 1, \qquad \sum_{m=1}^{M_i} x_{im} = 1, \tag{5.6}$$

которые выражают, что в каждую вершину входит только одна дуга, и только одна дуга выходит из нее. Эти ограничения необходимо дополнить условием булевости переменных, а так же дополнительными условиями непрерывности маршрута, для исключения возможности создания подциклов.

Таким образом линейное программирование является одним из эффективных способов решения задач на графах.

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ.

Варианты заданий определяются двумя последними цифрами номера зачетной книжки студента. Далее везде $N1$ - последняя цифра этого номера, $N2$ - предпоследняя.

Задача 1 *Проанализировать приводящуюся ниже ситуацию с использованием теории СМО. Ответить на соответствующие вопросы и рассчитать параметры СМО.*

На торговой точке предполагается единовременно использование только одного продавца. Известно, что в дневное время интенсивность прихода покупателей составляет $4 + 0{,}2N1 - 0{,}1N2$ человек в час. Продавец может обслужить в час в среднем $5 - 0{,}5N1 + 0{,}2N2$ покупателей.

Использую марковскую модель данной СМО ответить на вопросы:

- Какова вероятность, что через 20-N1-N2 минут после открытия точки в очереди будет 2 покупателя?
- Какова вероятность, что пришедший через 2 часа покупатель не сделает покупок (т.е. решит не становиться в очередь)?

При этом считать, что следующий покупатель не становится в очередь, если в ней уже имеется 3 человека и что, перед открытием точки в очереди был один покупатель с вероятностью $1/(2 + N1 + N2)$.

Используя модель M/M/1 рассчитать среднее число покупателей в очереди, среднее время ожидания им обслуживания, среднее время, проведенное покупателем в магазине, долю времени простоя продавца без работы. Сделать это двумя способами соответсвующими следующим предположениям:

- в очереди не может быть более 3+N2 покупателей;
- на длину очереди ограничений нет.

Задача 2 *Привести математическую формулировку задачи. Решить ее симплекс-методом. Составить двойственную задачу. Найти её решение. Проинтерпретировать полученное решение двойственной задачи.*

Для изготовления различных изделий *A*, *B* и *C* предприятие использует два вида ресурсов: станочное оборудование и рабочую силу. Нормы затрат станко-часов и нормо-часов необходимые для изготовления одной тысячи изделий каждого вида, цена одной тысячи изделий каждого вида, а также общее имеющееся количество ресурсов приведены в таблице.

Таблица

Вид оборудования	Нормы затрат ресурсов на одно изделие			Общее количество ресурсов
	A	*B*	*C*	

Станочное оборудование	50+$N$1 25+2$N$2 30+1,5$N$1	260+5$N$1+4$N$2
Рабочая сила	20+3$N$2 30+2$N$1 65-4$N$2	240+3$N$1+6$N$2
Цена одной тысячи изделий, тыс.р.	9+$N$1 10+$N$2 16+$N$1	

Известно также, что по ранее заключенным договорам суммарный объем выпуска в денежном выражении изделий видов *A* и *C* не может быть менее 70-5$N$1+5$N$2 тыс.р.

Считается, что сбыт обеспечен. Составить план производства изделий, при котором стоимость продукции будет максимальной.

Задача 3 *Составить детерминированный эквивалент математической стохастической модели формирования оптимального производственного плана с учетом надежности. Приняв вероятность выполнения ограничений модели 0,95, а коэффициент штрафа W =* 1000*, предложить допустимый план, который по возможности доставлял бы максимум прибыли.*

На предприятии выпускается три вида продукции. Предполагаемая величина прибыли от реализации тысячи единиц изделий j-го вида, $j=\overline{1,3}$:

$$П_1 = 16 + N1,\ П_2 = 25 + \frac{1}{2}N1,\ П_3 = 22 + \frac{1}{3}N2.$$

Затраты труда в станко-часах, на изготовление тысячи единиц продукции j-го вида на оборудовании i-й группы, $i=\overline{1,2}$, считаются нормально распределенными случайными величинами. Их средние значения и дисперсии характреризуются матрицами:

$$\bar{t}_{ij}^{C} = \begin{pmatrix} 2+\frac{N2}{10} & 5+\frac{N1}{5} & 3+\frac{N1+N2}{20} \\ 3 & 7+\frac{N1}{10} & 4 \end{pmatrix},$$

$$\delta_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0,1+\frac{N1+N2}{80} & 0,25 & 0,16+\frac{N1}{60} \\ 0,15+\frac{N2}{50} & 0,3+\frac{N1}{40} & 0,2+\frac{N1+N2}{100} \end{pmatrix}.$$

Годовой расчетный фонд рабочего времени оборудования i-й группы, считается случайной величиной с характеристиками

$$\overline{Ф}_i = \begin{pmatrix} 32+2N1 \\ 40+N2 \end{pmatrix}, \delta_{i(Ф)}^2 = \begin{pmatrix} 3+\frac{N1}{10} \\ 4-\frac{N2}{5} \end{pmatrix}.$$

Затраты в нормо-часах рабочего времени λ-й группы рабочих-сдельщиков, $\lambda=\overline{1,2}$, на тысячу единиц продукции j-го вида и общий его фонд:

$$t_{\lambda j}^H = \begin{pmatrix} 10+N1 & 35+N2 & 20 \\ 14 & 65-3N2 & 25-N1 \end{pmatrix},\ T_\lambda = \begin{pmatrix} 230+10N2 \\ 340+15N1 \end{pmatrix}.$$

Считается целесообразным ограничить расход только одного ресурса, затраты которого на тысячу изделий j-го вида и верхняя граница расхода задаются величинами

$$t_j^M = \begin{pmatrix} 8+N1 & 11+N2 & 7+N1 \end{pmatrix},\ R_\gamma = 260 - 5(N1 + N2).$$

Сопоставимая и принятая в плане оптовая цена тысячи изделий j-го вида характеризуется соответственно векторами :

$$Ц_j^{\text{ПЛ}} = (24+N1 \quad 34+N1 \quad 30+N2),\, Ц_j^{\text{С}} = (22+N2 \quad 32+N1 \quad 28+N1).$$

$Ц^{\text{ПЛ}} = 200 + 12N1, Ц^{\text{С}} = 180 + 15N1$ - заданная нижняя граница выпуска товарной продукции на предприятии в планируемом году соответственно в принятых в плане и в сопоставимых оптовых ценах.

$d_1 = 5 - N2, D_1 = 10$ - соответственно нижняя и верхняя границы объема производства продукции 1-го вида (в тыс. шт.), для другой продукции таких ограничений нет.

Задача 4 *Используя теорию игр проанализировать ситуацию и принять решение. Рассмотреть ситуацию, как антогонистическую игру и игру с природой.*

Обувная фабрика планирует выпуск трех моделей обуви *А*, *В*, *С*. Общий объем производства обуви ограничен имеющимися мощностями. Спрос на эти модели зависит от ситуации на рынке, которую можно приближенно характеризовать так же тремя состояниями I, II, III. Известны оценки величины спроса на указанные модели обуви в зависимости от состояния рынка. Они задаются матрицей

$$\begin{array}{c} \\ A \\ Б \\ В \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 32-0{,}5N1 & 23+0{,}5N2 & 22+0{,}6N2 \\ 21-0{,}8N1+0{,}5N2 & 31-1{,}2N1 & 23+1{,}5N2 \\ 20+0{,}7N2 & 21+N1-1{,}4N2 & 24+1{,}5N2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Состояние рынка случайным образом меняется в зависимости от неуправляемых факторов.

Найти оптимальные пропорции выпуска различных моделей (какую часть от общего объема следует отдать на выпуск той или иной модели) в ситуациях:

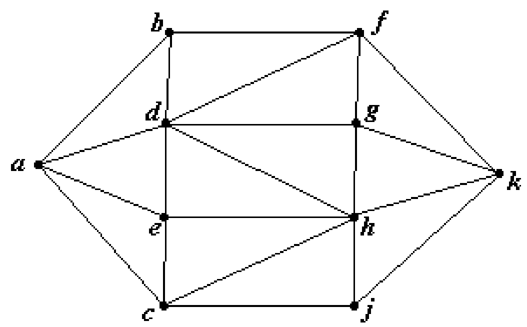
1 Поведение рынка неизвестно.

2 Известно, что вектор описывающий частоту пребывания рынка в том или ином состоянии имеет вид

$$\left(\frac{20-N1+0{,}5N2}{40-2N1+3N2}, \frac{10-N1+1{,}5N2}{40-2N1+3N2}, \frac{10+N2}{40-2N1+3N2}\right).$$

Задача 5 *Решить задачу используя теорию графов.*

Найти, используя алгоритм (разд. 5.2), кратчайший маршрут между вершинами *x* и *y* графа изображенного на нижеследующем рисунке. Варианты пар вершин *x* и *y* и длины ребер графа, в зависимости от *N*1 и *N*2, указаны в таблицах.



Длина ребра						
(*a*, *b*)	(*a*, *d*)	(*a*, *e*)	(*a*, *c*)	(*b*, *f*)	(*d*, *f*)	(*d*, *g*)
3 + *N*1	8 + ½*N*1	6 + ½*N*1	4	9 - ½*N*1	2 + ½*N*1	5 + ¼*N*1

Длина ребра.							
(d, h)	(e, h)	(c, h)	(c, j)	(f, k)	(g, k)	(h, k)	(j, k)
9 - ½$N$1	6	4	7 + ¼$N$1	7 + ½$N$1	3 + ½$N$1	8 - ½$N$1	5

$N2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Найти кратчайший маршрут между вершинами	a, k	b, j	f, c	b, c	f, g	k, a	j, b	c, f	c, b	g, f

ПРИЛОЖЕНИЕ

Значения интегральной функции Лапласса $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	-2	-1,9	-1,8	-1,7	-1,6	-1,5	-1,4	-1,3	-1,2	-1,1
$F(x)$	0,023	0,028	0,036	0,045	0,055	0,067	0,081	0,097	0,115	0,136

x	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
$F(x)$	0,159	0,184	0,212	0,242	0,274	0,309	0,345	0,382	0,421	0,46

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$F(x)$	0,5	0,54	0,58	0,618	0,655	0,692	0726	0,758	0,788	0,816

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$F(x)$	0,841	0,864	0,885	0,903	0,919	0,933	0,945	0,955	0,964	0,971

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Тернер Д. Вероятность, статистика и исследование операций. М.: Статистика, 1976.

2 Экономико-математические методы и прикладные модели/ Под ред. В. В. Федосеева. -М.: ЮНИТИ, 1999.

3 Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа,1993.

4 Расс С. Линейное программирование (методы и приложения). М.: Физматгиз, 1961.

5 Архипенков С. М. Экономико-математические модели формирования оптимальных (напряженных) и надежных планов производства на предприятиях обрабатывающей промышленности. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. тех. ун-т. 1999.

6 Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 1998.

7 Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: ЮНИТИ, 1998.

8 Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1965.

9 Коссов В. В. Межотраслевые модели. М.: Экономика, 1973.

10 Белов В. В., Воробьев Е. М., Шаталов В. Е. Теория графов. М.: Высшая школа, 1976.

11 Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985.

12 Кремер Н. Ш., Тришин И. М., Фридман М. Н. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов / Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 1997.

13 Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах и бизнесе: Учебник для вузов. М.: ЮНИТИ, 2000.

14 Солопахо А. В. Математика в экономике: Учеб.-метод. пособие: Тамбов: В 2 ч. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. тех. ун-та, 2000. [4.] 2.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

Часть 1

Учебно-практическое пособие

Автор-составитель **СОЛОПАХО Александр Владимирович**

Редактор Т. М. Федченко
Инженер по компьютерному макетированию
Г. Ю. Корабельникова