Министерство образования Российской Федерации

Тамбовский государственный технический университет

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебные задания
для студентов 1 курса заочного отделения
специальностей 651400, 653800, 655400, 655800, 654300,
657900, 653500, 656600

Тамбов
Издательство ТГТУ
2001

УДК 51(075)
ББК В11я73-5
В 93

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Рецензент
Доктор физико-математических наук, профессор
Г. М. Куликов

В 93 Высшая математика: Учебные задания / Сост.: В. П. Попов, А. В. Мед-ведев. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. 16 с.

Даны варианты шести контрольных работ по темам "Аналитическая геометрия" и "Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных".

Предназначены для студентов 1 курса заочного отделения специальностей 651400, 653800, 655400, 655800, 654300, 657900, 653500, 656600.

УДК 51(075)
ББК В11я73-5

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с учебным планом в 1-ом и 2-ом семестрах каждый студент должен выполнить по три контрольные работы по темам: "Аналитическая геометрия" и "Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных".

Задачи контрольной работы выбираются согласно тому варианту, номер которого совпадает с последней цифрой учебного шифра студента, т.е. если шифр 5214, то выполняются задачи 1.4, 2.4, 3.4, 4.4 и т.д. каждой контрольной работы.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Замечание: Если в задачах содержатся параметры a и b, то они равны последним цифрам номера зачетной книжки студента, выполняющего контрольную работу. Например: номер зачетной книжки 4051. Тогда $a = 5,\ b = 1$.

1 Проверьте, верны ли равенства:

1.1 $(A+E)^2 = A^2 + 2AE + E^2$;

1.2 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,

где $A = \begin{pmatrix} a+b+1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & a \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Вычислите миноры и алгебраические дополнения всех элементов матрицы B, где $B = \begin{pmatrix} a+b & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ a & b & -1 \end{pmatrix}$. Составить присоединенную матрицу $\widetilde{B}$.

Указание: присоединенная матрица состоит из алгебраических дополнений элементов данной матрицы, т.е. $\widetilde{B} = \|Aij\|,\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3.$

3 Вычислить определитель матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} a+b+1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ a & -4 & b \end{pmatrix}$$

- с помощью правила приписывания первых двух столбцов;
- разложением по любой строке;
- разложением по любому столбцу;
- получением двух нулей в какой-либо строке и разложением по элементам этой строки.

4 Проверить равенство $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$,

где $A = \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & b \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

5 Вычислить $\det A$ и $\det \widetilde{A}$,

где $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\widetilde{A}$ - присоединенная матрица.

6 Для матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и проверить равенство

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -a \\ b & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7 Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 5x - 4y - 1z = a\ ; \\ 2x + 3y + 4z = 0\ ; \\ 3x - y + z = b\ , \end{cases}$$

- решить систему по формулам Крамера;
- решить систему методом Гаусса;
- записать систему в матричном виде и решить ее матричным способом.

8 Решить систему $\begin{cases} x + y - z = a\ ; \\ 2x + 6y - 2z = -1\ ; \\ 3x + 7y - 3z = a - 1. \end{cases}$

9 Решить систему $\begin{cases} (a+1)x + y + 2z = 3\ ; \\ 2x + 3y - z = 4\ ; \\ (a+3)x + 4y + z = 0. \end{cases}$

10 Найти множество решений системы трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = a; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = -1; \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = b. \end{cases}$$

Выписать три конкретных решения и проверить одно из них.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Номер варианта контрольной работы совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки студента. Цифра 0 соответствует варианту № 10.

1 Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.

1.1 $\vec{a}(1;\,3;\,4);\ \vec{b}(-1;\,0;\,2);\ \vec{c}(3;\,4;\,1);\ \vec{d}(3;\,7;\,7).$

1.2 $\vec{a}(1;\,2;\,3);\ \vec{b}(-1;\,3;\,2);\ \vec{c}(2;\,-3;\,5);\ \vec{d}(6;\,-7;\,11).$

1.3 $\vec{a}(4;\,7;\,8);\ \vec{b}(-1;\,1;\,3);\ \vec{c}(2;\,-4;\,1);\ \vec{d}(-1;\,16;\,9).$

1.4 $\vec{a}(8;\,2;\,3);\ \vec{b}(1;\,2;\,-5);\ \vec{c}(3;\,-2;\,1);\ \vec{d}(-9;\,4;\,-14).$

1.5 $\vec{a}(10;\,3;\,1);\ \vec{b}(1;\,4;\,2);\ \vec{c}(3;\,1;\,9);\ \vec{d}(1;\,8;\,30).$

1.6 $\vec{a}(2;\,4;\,1);\ \vec{b}(1;\,-4;\,2);\ \vec{c}(1;\,-1;\,3);\ \vec{d}(3;\,-15;\,11).$

1.7 $\vec{a}(0;\,2;\,4);\ \vec{b}(1;\,5;\,-3);\ \vec{c}(4;\,-1;\,2);\ \vec{d}(-15;\,13;\,-3).$

1.8 $\vec{a}(1;\,4;\,3);\ \vec{b}(2;\,-1;\,5);\ \vec{c}(3;\,1;\,4);\ \vec{d}(12;\,13;\,17).$

1.9 $\vec{a}(1;\,1;\,1);\ \vec{b}(4;\,1;\,-3);\ \vec{c}(0;\,5;\,-2);\ \vec{d}(8;\,-13;\,0).$

1.10 $\vec{a}(2;\,7;\,3);\ \vec{b}(3;\,1;\,8);\ \vec{c}(2;\,-1;\,1);\ \vec{d}(9;\,25;\,6).$

1) Найти разложение вектора $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2) При каком значении λ вектор $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$?

3) Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b} - \vec{c}$.

4) Найти $[\vec{a} + 2\vec{b},\ \vec{c} - 4\vec{b}]$.

5) При каком значении α вектор $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{c}$?

6) Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} + \vec{c}$.

7) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с общим началом (сделать чертеж).

8) Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},$ как на ребрах (сделать чертеж).

9) При каком значении α векторы $\vec{a},\ \vec{b} + \alpha\vec{c},\ \vec{a} + \alpha\vec{b}$ компланарны?

10) Изобразить вектор $\vec{a}$ в координатном пространстве. Отметить углы α, β, γ.

Указание: решение задач № 2, 3 сопровождать соответствующими чертежами, выполненными в координатной плоскости.

2 Даны три точки $M_1(-1;\ 2+b),\ M_2(2;\ 4-b),\ M_3(4;\ 5+2b)$.

2.1 Составить уравнение прямой:

а) перпендикулярной; б) параллельной прямой M_1M_2 и проходящей через точку M_3, используя:

1) уравнение прямой, проходящей через точку с заданным нормальным вектором;

2) уравнение прямой, проходящей через точку с заданным направляющим вектором;

3) уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом;

2.2 На отрезке M_1M_2 найти координаты точки M_4, находящейся к точке M_1 в два раза ближе, чем к точке M_2 (b - последняя цифра номера зачетной книжки).

3.1 Даны стороны треугольника: $x-y=0\,(AB)$, $x+y-2=0\,(BC)$, $y=0$ (AC). Составить уравнения медианы, проходящей через вершину B, и высоты, проходящей через вершину A.

3.2 Даны две смежные стороны параллелограмма $2x-y+2=0$ и $x-2y-2=0$ и точка $M(1;\ 1)$ пересечения диагоналей. Найти уравнения двух других сторон и диагоналей параллелограмма.

3.3 Даны две вершины $A(-3;3),\ B(5;-1)$ и точка $D(4;3)$ пересечения высот треугольника. Составить уравнения его сторон.

3.4 Две стороны треугольника заданы уравнениями $5x-2y-8=0$ и $3x-2y-8=0$, а середина третьей стороны совпадает с началом координат. Составить уравнение этой стороны.

3.5 Даны вершины $A(-3;-2),\ B(4;-1),\ C(1;3)$ трапеции $ABCD$ $(AD\parallel BC)$. Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины D.

3.6 Даны уравнения двух высот треугольника $x+y=4$ и $y-2x=0$ и одна из его вершин $A(0;2)$. Составить уравнения сторон треугольника.

3.7 Уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-5=0$. Составить уравнения трех остальных сторон квадрата, если $O(-1;0)$ есть точка пересечения его диагоналей.

3.8 Даны уравнения одной из сторон ромба $x-3y+10=0$ и одной из его диагоналей $x+4y-4=0$; диагонали ромба пересекаются в точке (0; 1). Найти уравнения остальных сторон ромба.

3.9 Уравнения двух сторон параллелограмма $x+2y-2=0$ и $x+y-4=0$, а уравнение одной из его диагоналей $x-2=0$. Найти координаты вершин параллелограмма.

3.10 Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $C(4;\ -1)$, а также уравнения высоты $2x-3y+12=0$ и медианы $2x+3y=0$, проведенных из одной вершины.

4 Даны координаты вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4:

4.1 $A_1(7;\ 7;\ 3)$; $A_2(6;\ 5;\ 8)$; $A_3(3;\ 5;\ 8)$; $A_4(8;\ 2;\ 1)$.

4.2 $A_1(8;\ 6;\ 4)$; $A_2(10;\ 5;\ 5)$; $A_3(5;\ 6;\ 8)$; $A_4(8;\ 10;\ 7)$.

4.3 $A_1(7;\ 2;\ 2)$; $A_2(5;\ 7;\ 7)$; $A_3(5;\ 3;\ 1)$; $A_4(2;\ 3;\ 7)$.

4.4 $A_1(6;\ 6;\ 5)$; $A_2(4;\ 9;\ 5)$; $A_3(4;\ 6;\ 11)$; $A_4(6;\ 9;\ 3)$.

4.5 $A_1(4;\ 8;\ 2)$; $A_2(5;\ 2;\ 6)$; $A_3(5;\ 7;\ 4)$; $A_4(4;\ 10;\ 9)$.

4.6 $A_1(10;\ 6;\ 6)$; $A_2(-2;\ 8;\ 2)$; $A_3(6;\ 8;\ -1)$; $A_4(7;\ 10;\ 3)$.

4.7 $A_1(3;\ 5;\ 4)$; $A_2(8;\ 7;\ 4)$; $A_3(5;\ 10;\ 4)$; $A_4(4;\ 7;\ 8)$.

4.8 $A_1(4;\ 6;\ 5)$; $A_2(6;\ 9;\ 4)$; $A_3(2;\ -1;\ 10)$; $A_4(7;\ 5;\ 9)$.

4.9 $A_1(4;\ 4;\ 2)$; $A_2(4;\ 10;\ 2)$; $A_3(2;\ 8;\ 4)$; $A_4(9;\ 6;\ 9)$.

4.10 $A_1(4;\ 2;\ 5)$; $A_2(0;\ 7;\ 2)$; $A_3(1;\ 5;\ 0)$; $A_4(0;\ 2;\ 7)$.

1) составить уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

2) составить уравнение прямой A_1A_4;

3) найти угол между гранью $A_1A_2A_3$ и ребром A_1A_4;

4) составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

5) найти проекцию вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

6) найти точку A_4^*, симметричную A_4 относительно грани $A_1A_2A_3$;

7) найти площадь грани $A_1A_2A_4$, объем пирамиды и ее высоту, опущенную из вершины A_4;

8) составить уравнение плоскости, проходящей через A_4 перпендикулярно A_2A_3.

Контрольная работа № 3

1 Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $M_0(x_0, y_0)$ и прямой $Ax + By + C = 0$.

1.1 $M_0(0; 2)$; $y - 4 = 0$. 1.2 $M_0(2; -6)$; $x + 2 = 0$.
1.3 $M_0(-2; 5)$; $y + 1 = 0$. 1.4 $M_0(3; -4)$; $y + 3 = 0$.
1.5 $M_0(-3; 3)$; $3x - 2 = 0$. 1.6 $M_0(-2; -3)$; $x - 6 = 0$.
1.7 $M_0(4; -1)$; $4y + 1 = 0$. 1.8 $M_0(3; -5)$; $2x - 5 = 0$.
1.9 $M_0(1; -1)$; $x + 4 = 0$. 1.10 $M_0(-1; 7)$; $y = 4$.

Привести полученное уравнение к каноническому виду. Сделать чертеж.

2 Привести уравнение линии к каноническому виду и построить ее.

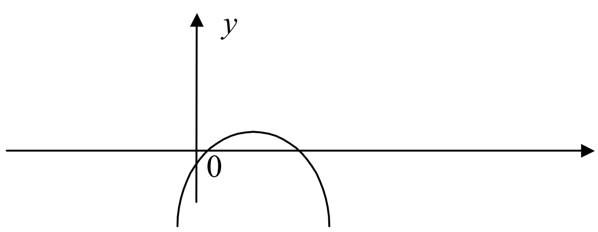
2.1 $9x^2 - 36x + 4y^2 + 8y + 4 = 0$. 2.2 $4x^2 + 24x - 9y^2 - 18y - 9 = 0$.
2.3 $4x^2 - 8x + 25y^2 - 100y + 4 = 0$. 2.4 $5x^2 - 16y^2 - 32y = 0$.
2.5 $x^2 - 8x + 4y^2 - 16y = 0$. 2.6 $x^2 + 4x - 9y^2 + 10 = 0$.
2.7 $4x^2 - 32x + y^2 - 10y + 25 = 0$. 2.8 $x^2 + 6x - 3y^2 - 12y = 0$.
2.9 $5x^2 - 10x + y^2 - 4y = 0$. 2.10 $x^2 + 6y^2 + 12y - 6 = 0$.

3 Построить линии, заданные уравнениями:

3.1 $x = -1 + \sqrt{y^2 - 2y}$; $y = 2 - \sqrt{1 - 2x}$. 3.6 $x = -5 + \sqrt{2y - y^2}$; $y = 4 - \sqrt{1 - 2x}$.
3.2 $y = 2 - \sqrt{4x - 2x^2}$; $x = -3 + \sqrt{4y + 1}$. 3.7 $x = 5 + \sqrt{2y^2 - 6y}$; $y = -4 - \sqrt{1 - 3x}$.
3.3 $x = -5 - \sqrt{2y^2 - 4y}$; $y = 1 - \sqrt{1 - 4x}$. 3.8 $y = 2 + \sqrt{4 - 2x - x^2}$; $x = -6 + \sqrt{4y - 1}$.
3.4 $y = 4 + \sqrt{2x - x^2}$; $x = -2 - \sqrt{4y + 3}$. 3.9 $x = -6 + \sqrt{4y^2 - 8y}$; $y = -2 - \sqrt{5x - 10}$.
3.5 $y = -3 - \sqrt{2x^2 - 8x + 1}$; $x = 4 + \sqrt{3 - 4y}$ 3.10 $y = -1 - \sqrt{x^2 - 10x}$; $y = 5 + \sqrt{3 - 6x}$.

Указание: линии, заданные указанными уравнениями, являются частью соответствующих кривых второго порядка.

Пример: $y = -2 + \sqrt{1 + 4x - x^2} \Rightarrow y + 2 = \sqrt{1 + 4x - x^2}$. Отсюда следует, что $y + 2 \ge 0$ (правая часть равенства положительна). Освобождаемся от радикала $(y+2)^2 = 1 + 4x - x^2$. Выделяем полный квадрат, содержащий координату x. $(y+2)^2 = 5 - (x-2)^2$ или $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 5$ - окружность с центром $C(2; -2)$ и радиусом $R = \sqrt{5}$.



x

• (2; -2)

Но данная линия является частью окружности, т.к. $y+2\geq 0$ или $y\geq -2$ (верхняя часть окружности).

4 Зная линию $y=\frac{1}{x}$, построить линию, заданную уравнением:

4.1 $y=\frac{4x-1}{2x+1}$. 4.2 $y=\frac{x-1}{3x+1}$. 4.3 $y=\frac{2x+1}{1-x}$.

4.4 $y=\frac{4x-1}{1-2x}$. 4.5 $y=\frac{6x+3}{3x-1}$. 4.6 $y=\frac{4-x}{2x+1}$.

4.7 $y=\frac{5x+3}{2x-1}$. 4.8 $y=\frac{1-2x}{3x+1}$. 4.9 $y=\frac{x-4}{2x+1}$.

4.10 $y=\frac{5x+6}{1-2x}$.

Найти точки пересечения линии с осями координат.

5 Построить по точкам кривую, заданную уравнением в полярной системе координат $\rho=\rho(\varphi)$. Найти уравнение кривой в прямоугольной системе координат, начало которой совмещено с полюсом, а положительная полуось OX с полярной осью.

5.1 $\rho^2=2\cos 2\varphi$. 5.2 $\rho=3(1-\sin\varphi)$. 5.3 $\rho^2=2\sin 2\varphi$.

5.4 $\rho=4(1+\sin\varphi)$. 5.5 $\rho^2=-4\cos 2\varphi$. 5.6 $\rho=2(1-\cos\varphi)$.

5.7 $\rho^2=-4\sin 2\varphi$. 5.8 $\rho=3(1+\cos 2\varphi)$. 5.9 $\rho^2=4\cos\varphi$.

5.10
$\rho^2=9(\sin\varphi+1)$.

Указание: для построения кривой выбрать не менее 10 точек.

6 Вычислить $z_1^3+\frac{z_1}{z_2}-4z_1z_2$, где z_1, z_2 - заданные комплексные числа.

6.1 $z_1=1-i$; $z_2=2+3i$. 6.2 $z_1=2+3i$; $z_2=1+i$.

6.3 $z_1=1+i$; $z_2=1-2i$. 6.4 $z_1=-1+i$; $z_2=1-2i$.

6.5 $z_1=2+3i$; $z_2=1-i$. 6.6 $z_1=4-i$; $z_2=1-i$.

6.7 $z_1=5+2i$; $z_2=2+i$. 6.8 $z_1=3-i$; $z_2=2-i$.

6.9 $z_1=9-i$; $z_2=3-i$. 6.10 $z_1=6+2i$; $z_2=1-2i$.

7 Дано комплексное число *a*. Требуется: а) записать число a в алгебраической и тригонометрической формах; б) найти все корни уравнения $z^3=-a$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7.1 $a=\frac{2}{\sqrt{3}-i}$. 7.2 $a=\frac{-3}{\sqrt{3}+i}$. 7.3 $a=\frac{2\sqrt{2}}{i+1}$.

7.4 $a=\frac{4}{1-i\sqrt{3}}$. 7.5 $a=\frac{3}{1+i\sqrt{3}}$. 7.6 $a=\frac{-\sqrt{8}}{1-i}$.

7.7 $a=\frac{-1}{1-i\sqrt{3}}$. 7.8 $a=\frac{2}{\sqrt{3}+i}$. 7.9 $a=\frac{-1}{1+i}$.

7.10 $a=\frac{-1}{\sqrt{3}-i}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

1 Найти предел последовательности $\{x_n\}$.

1.1 а) $x_n = \dfrac{3n^2+n+1}{6n^2+2n+9}$;

б) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+4}+3n}{4n+1}$;

в) $x_n = \sqrt{4n+1}-\sqrt{n+3}$.

1.2 а) $x_n = \dfrac{5n+1}{7n^2+2n+3}$;

б) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+1}+6n+1}{8n+3}$;

в) $x_n = \sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}$.

1.3 а) $x_n = \dfrac{3n^3+n+2}{5n^3+n^2+1}$;

б) $x_n = \dfrac{\sqrt{9n^2+1}+\sqrt{n^2+4}}{8n+1}$;

в) $x_n = \sqrt{n^2+9}-n$.

1.4 а) $x_n = \dfrac{5n+1}{7n^2+2n+3}$;

б) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^4+1}+3n^2+1}{2n^2+3}$;

в) $x_n = \sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1}$.

1.5 а) $x_n = \dfrac{6n^2+n+1}{3n^2+2}$;

б)

$x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n+1}+3n+1}{2n+5}$;

в) $x_n = \sqrt{n^2+n}-n.$

1.6 а) $x_n = \dfrac{5n^2+2n+3}{2n^2+n+1}$;

б) $x_n = \dfrac{\sqrt[4]{16n^4+n+2}+3n+2}{5n+7}$;

в) $x_n = 2n-\sqrt{4n^2-3n}.$

1.7 а) $x_n = \dfrac{5n^4+n^3+2}{10n^4+n+1}$;

б)

$x_n = \dfrac{\sqrt{16n^2+n+7}+n+2}{5n+3}$;

в) $x_n = \sqrt{4n^2+7n}-2n$.

1.8 а) $x_n = \dfrac{5+n+3n^3}{1+n^2+6n^3}$;

б) $x_n = \dfrac{\sqrt[4]{n^4+n+6}+7n+1}{4n+3}$;

в) $x_n = \sqrt{n^2+n+2}-n$.

1.9 а) $x_n = \dfrac{5+3n+2n^4}{7+n^3+8n^4}$;

б) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{2n+1}$;

в) $x_n = 3n-\sqrt{9n^2-n}$.

1.10 а) $x_n = \dfrac{5n^3+2n+4}{2n^3+n+4}$;

б) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{27n^3+n+2}+2n}{5n+1}$;

в) $x_n = \sqrt{16n^2+3n}-4n$.

2 Вычислить пределы функций, не пользуясь средствами дифференциального исчисления.

2.1 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{7+2x}-3}{x^2+x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+7}\right)^{2x+1}$.

2.2 а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+3x}-1}{2x^2+x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x\operatorname{tg}6x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+7}{4x+1}\right)^{3x-1}$.

2.3 а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x+2}-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{x\sin 6x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2+6}\right)^{x^2}$.

2.4 а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+x-21}{\sqrt{x+1}-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}4x}{1-\cos 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+5x}{2+3x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2.5 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2+x-6}{3x^2+2x-5}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{x}{2}}{1-\cos 8x}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{1}{x^2-4}}$.

2.6 а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{2x^2-3x-5}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\operatorname{ctg}6x$; в) $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{1}{3-x}}$.

2.7 а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-3x-10}{\sqrt{2x+5}-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}2x\mathrm{ctg}10x$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}(3+2x)^{\frac{1}{x^2+3x+2}}$.

2.8 а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+4x-4}{2x+4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 10x-\cos 4x}{x\sin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{1}{x^2-1}}$.

2.9 а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-x-6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin 4x\mathrm{ctg}2x$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{1}{4-x^2}}$.

2.10 а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+3x-1}{x^2+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin\frac{x}{4}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+1}{4x^2+7}\right)^{2x^2+1}$.

3 Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

3.1 а) $y=2\sqrt{4x+3}-\dfrac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$;

б) $y=\left(e^{\cos x}+3\right)^2$;

в) $y=\ln\sin(2x+5)$;

г) $y=x^{\sin x}$;

д) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)=5x$;

е) $x=\cos\left(\dfrac{t}{2}\right),\quad y=t-\sin t$.

3.2 а) $y=x^2\sqrt{1-x^2}$;

б) $y=\dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$;

в) $y=\mathrm{arctg}e^{2x}$;

г) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

д) $x-y+\mathrm{arctg}y=0$;

е) $x=t^3+8t,\qquad y=t^5+2t$.

3.3 а) $y=\left(x^2-x+\dfrac{1}{2}\right)e^{2x+3}$;

б) $y=\sqrt[3]{x^2+3\ln x}$;

в) $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$;

г) $y=(\sin x)^{\cos x}$;

д) $2y\ln y=x$;

е) $x=\dfrac{1+t}{t},\quad y=\dfrac{t-1}{t}$.

3.4 а) $y=x\sqrt{(1+x^2)(1-x)}$;

б) $y=\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 2x}$;

в) $y=\arcsin\sqrt{1-3x}$;

г) $y=x^{\ln x}$;

д) $y\sin x=\cos(x-y)$;

е) $x=t-\sin t,\quad y=1-\cos t$.

3.5 а) $y=\dfrac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4}$;

б) $y=\sqrt{(a-x)(x-b)}-\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{a-x}{x-b}}$;

в) $y=e^{-x^2}\ln\sqrt[3]{1-3x}$;

г) $y=2x^{\sqrt{x}}$;

д) $2^x+2^y=2^{x+y}$.

е) $x=t^3+1,\ y=t^2+t+1$.

3.6 а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

б) $y=\dfrac{\sin^2 x}{2+3\cos^2 x}$;

в) $y=\dfrac{x\ln x}{x-1}$;

г) $y=(\mathrm{arctg}x)^{\ln x}$;

д) $(e^x-1)(e^y-1)-1=0$;

е) $x=2\mathrm{tg}t,\quad y=2\sin^2 t+\sin 2t$.

3.7 а) $y=x\mathrm{arctg}\sqrt{x}$;

б) $y=\sqrt{x^2+a^2}-a\arcsin\dfrac{a}{x}$;

в) $y=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$;

г) $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$;

д) $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$;

е) $x=2t+3t^2,\ y=t^2+2t^3$.

3.8 а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+5\sqrt[5]{x^3+1}}$

б) $y=2\mathrm{tg}^3(x^2+1)$;

в) $y=3^{\mathrm{arctg}x}$;

г) $y=(\mathrm{arctg}x)^x$;

д) $y^2 x = e^{\frac{y}{x}}$; е) $x = 3\cos^2 t,\ \ y = 2\sin^3 t.$

3.9 а) $y = \sqrt[3]{\dfrac{(1+x^2)}{(1-x^2)}}$; б) $y = \dfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + \ln\cos x$;

в) $y = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$; г) $y = (x + x^2)^x$;

д) $x^2 + y^2 + 3axy = 0$; е) $x = \dfrac{1+t}{t^3},\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{2}{t}.$

3.10 а) $y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$; б) $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$;

в) $y = x^3 \mathrm{arctg}\sqrt{x+2}$; г) $y = (x^2+1)^{\sin x}$:

д) $y\sin x - \cos(x - y) = 0$; е) $x = 3\cos t,\ \ y = 4\sin^2 t.$

4 Найти приближенное значение указанных величин с помощью дифференциалов соответствующих функций:

4.1 tg 48°; 4.2 cos 63°; 4.3 $\sqrt[3]{67}$; 4.4 sin 34°;

4.5 ctg 49°; 4.6 ln 1,3; 4.7 $\sqrt{27}$; 4.8 tg 44°;

4.9 cos 58°; 4.10 $\sqrt[4]{18}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

1 Найти указанные пределы функции в точке или на бесконечности, пользуясь правилом Лопиталя:

1.1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-4x}}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}(2\sin x)^{\mathrm{tg}3x}$.

1.2 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mathrm{tg}x}-1}{\mathrm{tg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-1)^{\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}x}$.

1.3 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\arcsin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

1.4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-1}{\mathrm{arctg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{(x^2-1)}$;

1.5 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{e^x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\mathrm{tg}x}$.

1.6 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{3^x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{x^2-1}}$.

1.7 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{e^{\sin x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}(4+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

1.8 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)^{\sin x}$.

1.9 а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{8}}\dfrac{\ln\mathrm{tg}2x}{x-\frac{\pi}{8}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x)^{\mathrm{tg}x}$.

1.10 а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

2 Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

2.1 $y = \dfrac{2x+1}{x^2+2},\ \ x \in [0;\ 3].$ 2.2 $y = xe^{-2x},\ \ x \in [-1;\ 2].$

2.3 $y = x^2 - 2\ln x,\ x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

2.4 $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x},\ x \in [-5; -1]$.

2.5 $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2,\ x \in [-2; 2]$.

2.6 $y = y = 3x^4 + 4x^3 + 1,\ x \in [-2; 1]$.

2.7 $y = x^5 - x^3 + x + 2,\ \ x \in [-1; 1]$.

2.8 $y = x + \cos^2 x,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2.9 $y = 2x^2 - \ln x,\ \ x \in [1;\ e]$.

2.10 $y = x + \frac{8}{x^4},\ \ x \in [1; 3]$.

3 Исследовать методами дифференциального исчисления функцию и, используя результаты исследования, построить ее график:

3.1 а) $y = 2x^3 - 6x + 5$; б) $y = \frac{4x}{4 + x^2}$.

3.2 а) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$; б) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. 3.3 а) $y = \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x$; б) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

3.4 а) $y = 4x^4 - 8x^2 + 5$; б) $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$.

3.5 а) $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 10$; б) $y = \frac{4x^3}{x^3 - 1}$. 3.6 а) $y = \frac{1}{63}x^3 - \frac{2}{21}x^2 - x$; б) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 3.7 а) $y = \frac{1}{120}x^4 - \frac{2}{45}x^3 - \frac{7}{20}x^2$; б) $y = e^{2x - x^2}$.

3.8 а) $y = \frac{1}{45}x^3 - \frac{1}{15}x^2 - x$; б) $y = \ln(x^2 - 4)$. 3.9 а) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2$; б) $y = \ln(x^2 + 1)$. 3.10 а) $y = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2$; б) $y = \ln(9 - x^2)$.

4 Решить задачи на отыскание наибольших и наименьших значений функции.

4.1 Требуется изготовить из жести ведро без крышки данного объема V цилиндрической формы. Каковы должны быть высота цилиндра и радиус основания, чтобы на изготовление ведра ушло наименьшее количество материала?

4.2 Равнобедренный треугольник, вписанный в окружность радиуса R, вращается вокруг прямой, которая проходит через его вершину параллельно основанию. Какова должна быть высота этого треугольника, чтобы тело, полученное в результате его вращения, имело наибольший объем?

4.3 Прямоугольник вписан в эллипс с осями $2a$ и $2b$. Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

4.4 Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

4.5 Найти радиус основания и высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

4.6 Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен a. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света, если количество света пропорционально площади окна?

4.7 В точках A и B находятся источники, сила света которых соответственно равна F_1 и F_2 Расстояние между точками a. На отрезке AB найти наименее освещенную точку M.

Замечание: Освещенность точки источником света силой F обратно пропорциональна квадрату расстояния r ее от источника света: $E = \frac{kF}{r^2},\ k - \text{const}$.

4.8 Из круглого бревна, диаметр которого d, требуется вырезать балку прямоугольного поперечного сечения. Каковы должны быть ширина и высота этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление на изгиб?

Замечание: Сопротивление балки на изгиб пропорционально произведению ширины x ее поперечного сечения на квадрат его высоты y: $Q = kxy^2, \quad k - \text{const}$.

4.9 Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема V. Стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление дна бака, равна p_1 рублей, а стенок p_2 рублей. Каковы должны быть радиус дна и высота бака, чтобы затраты на материал для его изготовления были наименьшими?

Указание: Рекомендуется принять за аргумент отношение λ радиуса r дна бака к его высоте h: $\frac{r}{h} = \lambda$.

4.10 Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

1 Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = z(x, y)$, не упрощая полученные выражения:

1.1 $z = x^2 \sin 4y + \frac{x^3}{y+1}$; 1.2 $z = \frac{\cos 2y}{x^2+1} - \frac{y-1}{e^x}$; 1.3 $z = \ln(x^2 + 2y) - \frac{y}{\sqrt{x}}$;

1.4 $z = e^{\frac{x}{y^2}} - (x+2y)^2$; 1.5 $z = \ln\left(y^3 - 2x^2\right) + y^2x^4$ 1.6 $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^3}{x^4}$;

1.7 $z = \cos(2x^2 + 4y) - \sqrt{x^2 + y^3}$; 1.8 $z = \arccos(xy^2) - \sqrt{xy}$; 1.9 $z = \operatorname{arcctg}\left(\frac{y^2}{x}\right) - x\sin^2 y$;

1.10 $z = x^2 e^{\cos y} - \frac{\sqrt[4]{x}}{y+2}$.

2 Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $A(x_0, y_0, z_0)$.

2.1 $z = x^3 - 3xy^2 + y^2, \ A(-1;\, 2)$. 2.2 $z = 2xy^2 - y^3 + 4x, \ A(2;\, -1)$.

2.3 $z = \frac{y}{x} + 4x^2y, \ A(1; -1)$. 2.4 $z = \ln(3x + 2y) + 2x^2y, \ A(1;\, -1)$.

2.5 $z = 3xy - 2y^2 + 4x, \ A(1;\, 1)$. 2.6 $z = \sqrt{x+y} + \frac{x}{y}, \ A(1;\, 3)$.

2.7 $z = 3x^2 - 4y^2 + 2x + y, \ A(1;\, -1)$. 2.8 $z = 2y^3 - 3x^2y + x, \ A(1;\, 2)$.

2.9 $z = 4x^2 - 2xy + 3y^2 - y, \ A(0;\, 1)$. 2.10 $z = x\sqrt{y} + e^{xy}, \ A(0;\, 4)$.

3 Дана функция $z = z(x, y)$: а) Исследовать на экстремум функцию z. б) Найти производную z в точке A по направлению $\overline{AB}$.

3.1 $z = 2x^2 - xy + 4y^2 - x, \quad A(1;\, 1);\ B(4; 5)$.

3.2 $z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2y, \ A(1;\, 1); \ B(4;\, 5)$.

3.3 $z = 4x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x, \quad A(-1;\, 2);\ B(3;\, 5)$.

3.4 $z = \frac{x^3}{3} + y^2 - 2y - x, \ A(2;\, 1); \ B(5;\, 5)$.

3.5 $z = \frac{y^3}{3} - y + 4x^2 - 8x, \ A(1; -2);\ B(4;\, 2)$.

3.6 $z = 7xy - x^2 - 6y^2 - x, \quad A(2;\, -1);\ B(5;\, 3)$.

3.7 $z = 3x^2 - xy + y^2 - 2x, \quad A(1;\, -1);\ B(4;\, 3)$.

3.8 $z = x^2 + 2xy + 3y^2 - x, \quad A(1;\, 0);\ B(4;\, 4)$.

3.9 $z=\frac{x^4}{4}-x+2y^2-4y,\ A(2;\ -2);\quad B(5;\ 2).$

3.10 $z=5xy+x^2+2y^2-x,\quad A(1;\ 3);\ B(4;\ 7).$

4 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=z(x,\ y)$ в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной заданными линиями:

4.1 $z=2xy-x-2y;\quad \overline{D}:\ y=2x,\ x+y=3,\ y=0.$

4.2 $z=\frac{1}{2}x^2+xy-y^2;\quad \overline{D}:\ y=x,\ y=2,\ x=-1.$

4.3 $z=2x^2-xy+y^2;\quad \overline{D}:\ x+y=1,\ x=0,\ y=-1.$

4.4 $z=x^2-3xy+2y;\quad \overline{D}:\ y=x^2,\ y=4.$

4.5 $z=xy+2y^2-x^2-y;\quad \overline{D}:\ x=0,\ x+y=2,\ y=0.$

4.6 $z=x^2+2y^2-4x-2y;\quad \overline{D}:\ y=x,\ x+y=2,\ x=0.$

4.7 $z=2x^2+xy-3y^2-2y;\quad \overline{D}:\ y=3x,\ y=3,\ x=0.$

4.8 $z=3xy-x^2-4y^2+2x;\quad \overline{D}:\ y=2x,\ y=x,\ x=1.$

4.9 $z=xy-3x^2+2y-x;\quad \overline{D}:\ y=4x,\ y=4,\ x=0.$

4.10 $z=3x^2-2xy+2y-6x;\quad \overline{D}:\ y=x,\ x+y=2,\ y=0.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Привалов И. И. Аналитическая геометрия. М.: Физмат, 1966.

2 Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Физмат, 1962 - 1972.

3 Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука, 1970 - 1978. Т. 1.

4 Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа. М.: Физмат, 1971.

5 Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высш. шк., 1966.

6 Никольский С. М. Курс математического анализа. М.: Наука, 1965.

7 Никольский С. М. Курс математического анализа. М.: Наука, 1975. Т. 1.

8 Выгодский М. Я. Дифференциальное исчисление. М.: Наука, 1965.

9 Берман А. Ф., Араманович Н. Г. Краткий курс математического анализа (для втузов). М.: Наука, 1971.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебные задания

Составители: **ПОПОВ** Владимир Павлович,
МЕДВЕДЕВ Александр Васильевич

Редактор Т. М. Глинкина
Инженер по компьютерному макетированию
Г. Ю. Корабельникова