А. Д. Нахман

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

(Издательство ТГТУ)

УДК В161 68я 73-1
ББК 517 518 45 (75)
Н34

Рецензент
Доктор физико-математических наук, профессор
А. И. Булгаков

Введение

Изучение элементов теории функций комплексного переменного и операционного исчисления в курсе математики технических университетов предусмотрено действующим образовательным стандартом. В рамках относительно небольшого количества часов,

отводимых на этот материал, бывает сложно организовать достаточно полное его изложение. Предлагаемое учебное пособие - это попытка несколько сжатого изложения данной тематики, но с привлечением всех тех идей и методов теории, которые необходимы будущему специалисту.
Перечислим ряд имеющихся особенностей. Например, введение понятия комплексного числа приходит без явного привлечения такой алгебраической структуры, как числовое поле - оно основано лишь на аналогии с векторами. Без ущерба для понимания сути дела опущены геометрические свойства конформных отображений, заданных основными элементарными функциями, понятия римановой поверхности, вычета относительно бесконечно удаленной особой точки и др. Обращается особое внимание на те свойства функций, производных, интегралов, которые не присущи соответствующим объектам в случае действительного переменного. Имеются и другие отличия от существующих учебных пособий.
Автор стремился к тому, чтобы изложение согласовывалось с другими разделами курса математики, носило в достаточной степени прикладной характер и соответствовало требованиям, предъявляемым к математической подготовке современных специалистов.

Глава 1 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1 Задача о расширении множества действительных чисел

1^0 В процессе освоения понятия числа мы проходим следующие стадии.
а) Рассмотрение натуральных чисел, т.е. чисел, употребляемых при счете. Их множество обозначается буквой *N*: $N = \{1, 2, \ldots\}$.
б) *Расширение* *N* до множества *Z* всех целых чисел; необходимость такого расширения возникает, т.к. во множестве *N* не всегда выполнима операция вычитания; например, $(2-5) \notin N$. Итак, вводится множество $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, при этом $N \subset Z$.
в) *Расширение* *Z* до множества *Q* всех рациональных чисел, т.е. множества всех дробей вида $\frac{m}{n}$, где $m, n \in Z$, $n \neq 0$. В классе чисел *Q* (в отличие от *Z*) всегда выполнимо деление на любое целое *n*, $n \neq 0$. Поскольку каждое целое число *m* есть дробь со знаменателем, равным единице, то $Z \subset Q$. Заметим, что всякое рациональное число есть либо конечная, либо бесконечная периодическая десятичная дробь.
г) Извлечение корня *n*-ой степени (действие, обратное возведению в натуральную степень) не всегда выполнимо в *Q*.
Дополним множество *Q* всевозможными десятичными непериодическими дробями (иррациональными числами). В полученном множестве *R* всех действительных чисел уже всегда возможно извлечение корня нечетной степени; корень четной степени может быть извлечен из любого *неотрицательного* действительного числа. Ясно, что $Q \subset R$. Остается невыполнимым извлечение корня четной степени из отрицательного числа; например $\sqrt{-1}$ не существует в *R*. Следовательно, требуется дальнейшее *расширение* *R* до такого множества *K*, в котором оказалось бы выполнимым и указанное действие (например, были бы разрешимы квадратные уравнения с отрицательными дискриминантами).
Построением *K* (так чтобы $R \subset K$) мы и будем заниматься в главе I.

1.2 Мнимая единица. Комплексные числа

1^0 Рассмотрим уравнение
$$x^2 = -1,$$
неразрешимое, очевидно, во множестве действительных чисел. Формально, его корни должны бы иметь вид
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}.$$

Назовем "число" вида

$i = \sqrt{-1}$

"мнимой единицей"; другими словами, *i* есть число, обладающее свойством $i^2 = -1.$ Ясно, что $i \notin R.$

2^0 "Обычная" единица есть точка оси *OX*, расположенная на расстоянии одной единицы масштаба от начала координат в направлении оси *OX*. Естественно теперь мнимую единицу *i* расположить на оси *OY* на расстоянии одной единицы масштаба в направлении оси *OY* (рис. 1.2.1). Таким образом, число *i* "отождествляется" с точкой (0,1) в прямоугольной системе координат. Любая другая точка оси *OY*, т.е. точка $(0, y)$ или $(0, y \cdot 1)$ должна теперь отождествляться с числом $yi,\ \ y \in R.$ Числа такого вида называются *чисто мнимыми.*

3^0 Произвольная точка (x, y), расположенная в прямоугольной системе координат *XOY*, есть конец радиус вектора

$$\vec{z} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_{2,} \qquad (1.2.1)$$

где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ - единичные направляющие вектора координатных осей *OX* (конец вектора расположен в точке 1 этой оси) и *OY* (конец вектора $\bar{e}_2$ расположен в точке *i*).
Соответственно, по аналогии с векторной записью (1.2.1), для *точки z* с координатами (x, y) будем употреблять запись

$$z = x + y \cdot i \qquad (1.2.2)$$

и говорить теперь, что *z* - это *комплексное число вида* (1.2.2). Название оправдано тем, что в записи (1.2.2) содержится как бы комплекс "чисто действительного" числа *x* и чисто мнимого числа $yi.$

Итак, между точками (x, y) и комплексными числами вида (1.2.2) установлено взаимно однозначное соответствие. Сама же плоскость (со введенной в ней прямоугольной системой координат) называется *комплексной* плоскостью. В частности, для действительного числа *x* естественна запись $x = x + 0i,$ что соответствует точке $(x, 0);$ и теперь мы не делаем различия между действительными числами *x* и комплексными числами вида $x + 0i.$ Для чисто мнимого yi, соответствующего точке $(0, y)$, употребима запись $yi = 0 + yi,$ т.е. любое $y\,i \in K.$
Итак, множество *R* всех комплексных чисел содержит своим подмножеством *R* (что и предусматривалось в п. 1^0): $R \subset K.$

4^0 Числа вида $z = x + y\,i$ и $\bar{z} = x - y\,i$ называется *комплексно-сопряженными.* Они изображаются точками, симметричными относительно оси *OX*.
Модулем комплексного числа называется длина (модуль) радиус - вектора точки (x, y), т.е.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (1.2.3)$$

В частности, модуль действительного числа $x = x + 0\,i$ есть $\sqrt{x^2}$, т.е. он равен абсолютной величине числа *x*; аналогично

$|y\,i| = \sqrt{y^2} = |y|.$

y

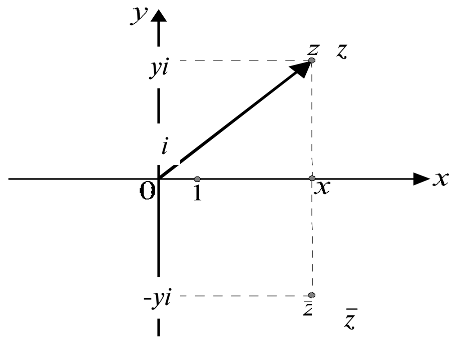

Рис.1.2.1

5^0 *Действительной частью* числа $x + y\,i$ называется *x*, а *мнимой частью* - число *y*; обозначения: $x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$

Комплексные числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называются *равными*, если совпадают их действительные и мнимые части. Другими словами

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}. \qquad (1.2.4)$$

Геометрически, соотношение $z_1 = z_2$ означает совпадение соответствующих точек комплексной плоскости.

Комплексные числа не сравниваются, т.е. во множестве *K* не вводятся отношения "больше" и "меньше".

1.3 Алгебраические операции над комплексными числами

1^0 В параграфе 1.2 мы отождествили любое комплексное число $z = x + y\,i$ с радиус - вектором точки (x, y). В связи с этим операция *сложения* комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ вводится по аналогии с такой же операцией над векторами, которая, в свою очередь, выполняется *покоординатно*. Итак, полагаем по определению

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i,$$

Другими словами, сложение комплексных чисел выполняется по такому же правилу, как над многочленами.

Алгебраическая сумма большего количества комплексных чисел определяется аналогичным образом: если $z_k = x_k + y_k i \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$, то $z = \sum_{k=1}^{n} z_k$ определяется в виде $z = \sum_{k=1}^{n} x_k + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k \right) i.$

Поскольку привычные свойства переместительности и сочетательности сложения справедливы для действительных чисел, они (эти свойства) на основании введенных определений будут сохраняться и для комплексных чисел:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

2^0 *Вычитание* комплексных чисел определяется как действие, обратное сложению, а именно,

$$z = z_2 - z_1, \quad \text{если} \quad z_2 = z + z_1.$$

Установим существование, единственность разности и способ ее нахождения. Пусть $z = x + yi,$ тогда по определению равенства комплексных чисел соотношение

$$x_2 + y_2 i = (x + yi) + (x_1 + y_1 i)$$

будет означать, что

$$\begin{cases} x_2 = x + x_1 \\ y_2 = y + y_1 \end{cases}, \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = x_2 - x_1 \\ y = y_2 - y_1 \end{cases}.$$

Итак, действительная и мнимая части разности $z = z_2 - z_1$ определены однозначным образом, при этом получена формула

$z_2 - x_1 = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)\,i.$

Имеем аналогию с разностью векторов, вычитание которых выполнялось покоординатно. Можно также сказать, что вычитание производится по такому же правилу, как для многочленов.

Сложение или вычитание n комплексных чисел $(n > 2)$ принято выполнять в том порядке, в каком они записаны. Например,

$z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = ((z_1 - z_2) - z_3) + z_4.$

Однако, и в этом случае действует сочетательный закон (возможность группировки), т.к. этот закон справедлив для действительных и для мнимых частей соответствующих комплексных чисел. Так, в приведенном примере возможен и такой порядок действий:

$z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = (z_1 - z_2) + (z_4 - z_3).$

Рассмотрим еще один пример: вычислить $|z_1 + z_2 - z_3|,$ если

$z_1 = -2i, \quad z_2 = 7 + 5i, \quad z_3 = 1 - 5i.$

Р е ш е н и е. Имеем

$$z_1 + z_2 - z_3 = (z_1 + z_2) - z_3 = (0 + 7) + (-2 + 5)\,i - (1 - 5\,i) =$$
$$= (7 + 3\,i) - (1 - 5\,i) = (7 - 1) + (3 + 5)\,i = 6 + 8\,i;$$

$|z_1 + z_2 - z_3| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$

3^0 Теперь и *умножение* комплексных чисел, по определению, выполняется согласно правилу умножения многочленов:

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1\,i)(x_2 + y_2 i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\,i\,. \qquad (1.3.1)$$

Здесь при умножении чисто мнимых частей $y_1 i$ и $y_2 i$ мы воспользовались свойством $i^2 = -1.$

Легко проверить справедливость переместительного и сочетательного законов

$z_1 z_2 = z_2 z_1,$

$(z_1 z_2)\,z_3 = z_1(z_2 z_3),$

а также распределительного закона умножения относительно сложения

$(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$

Полезен следующий факт:

$$z\bar{z} = (x + y\,i)(x - y\,i) = x^2 + y^2 + (xy - yx)\,i = x^2 + y^2 = |z|^2. \quad (1.3.2)$$

4^0 *Деление* комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению. Именно,

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \text{ если } z_1 = z z_2, \text{ где } z_2 \neq 0. \qquad (1.3.3)$$

Получим формулу, по которой можно найти частное двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$.

Если $z = x + y\,i$, то на основании определения (1.3.3) мы должны получить

$x_1 + y_1 i = (x + y\,i)(x_2 + y_2 i),$

т.е.

$x_1 + y_1 i = (x\,x_2 - y\,y_2) + i\,(x_2 y + x y_2)$

и, по определению равенства комплексных чисел, имеем

$$\begin{cases} x_2 x - y_2 y = x_1 \\ y_2 x + x_2 y = y_1. \end{cases}$$

Осталось найти решение (x, y) этой системы уравнений, умножив первое уравнение на y_2, второе на $(-x_2)$ и сложив их, получим:

$$-\left(y_2^2 + x_2^2\right)y = x_1y_2 - x_2y_1, \quad \text{или} \quad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Аналогично находим:

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

т.е.

$$z = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i. \qquad (1.3.4)$$

Формулой (1.3.4) устанавливается не только существование и единственность частного, но также указывается и способ его нахождения. Решая конкретные примеры, можно пользоваться способом одновременного умножения числителя и знаменателя дроби на число, сопряженное знаменателю. Согласно (1.3.2), имеем

$$z = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} = \frac{(x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i)}{(x_2 + y_2i)(x_2 - y_2i)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)i}{x_2^2 + y_2^2},$$

и мы снова получили формулу (1.3.4).

5^0 Выполняя сложение (вычитание), умножение и деление комплексных чисел, придерживаемся привычных свойств и порядка действий. Например:

$$(i-5)\left(2i + \frac{3}{2+i}\right) = (i-5)\frac{2i(2+i)+3}{2+i} = (i-5)\frac{4i + 2i^2 + 3}{2+i} =$$

$$= \frac{(i-5)(4i+1)}{2+i} = \frac{-9-19i}{2+i} = \frac{-(9+19i)(2-i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-(37+29i)}{4+1} = -\frac{37}{5} - \frac{29}{5}i.$$

З а м е ч а н и е. Введенные в параграфе 1.2. понятие числа i и свойство $i^2 = -1$ не являлись на тот момент математически корректными, т.к. умножение новых (комплексных) чисел и, в частности, возведение в квадрат еще не были определены. Избранный путь изложения, однако, делал понятным тот факт, что во множестве K разрешимы любые квадратные уравнения и объяснял, почему произведение комплексных чисел имеет вид именно (1.3.1). Строгое изложение, принятое в математической литературе, может быть выполнено по следующей схеме:

1) вводится символ $z = x + yi$ (поначалу речь не идет о каком-либо сложении, это - именно символ);
2) вводится понятие равенства комплексных чисел (см. 1.2.4));
3) вводятся сложение комплексных чисел и их вычитание так, как это делалось в п.п. 1^0, 2^0 параграфа 1.3;
4) определяется умножение в виде (1.3.1); в частности

$$i^2 = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1;$$

5) наконец, вводится деление как действие, обратное умножению.

1.4 Комплексные числа в тригонометрической форме

1^0 Совместим стандартным образом прямоугольную и полярную системы координат: полярную ось направим по оси OX, полюс системы совмещаем с точкой $O(0,0)$; выбираем в обеих системах одинаковые единицы масштаба; ось OY направляем по лучу $\varphi = \frac{\pi}{2}$. В этом случае прямоугольные координаты (x, y) и полярные координаты (ρ, φ) одной и той же точки z связаны соотношениями

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Теперь комплексное число $z = \rho\cos\varphi + (\rho\sin\varphi)i$ или, с учетом распределительного закона умножения

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,. \qquad (1.4.1)$$

Форма записи (1.4.1) комплексного числа называется *тригонометрической.*

2^0 Связь полярных и прямоугольных координат точки *M* может быть также представлена в виде

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Следовательно, . Угол φ поворота оси *OX* до совмещения с вектором *OZ* называется *аргументом* комплексного числа *z* и обозначается

.

Заметим, что $\mathrm{Arg}\,z$ определяется неоднозначно, с точностью до $2\pi k,\ k \in z.$ В связи с этим вводится так называемое главное значение аргумента

$\varphi = \arg z$, где $-\pi < \arg z \le \pi;$

иногда главное значение рассматривают в интервале $[0,\ 2\pi).$

Очевидно, что $\arg(\pm iy) = \pm\frac{\pi}{2}$ (случай $x = 0,\ \ y \ne 0$),

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}, \text{ если } \ x > 0; \\ \pi + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}, \text{ при } x < 0,\ y \ge 0, \\ -\pi + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}, \text{ при } x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Для точки $z = 0$ значение аргумента неопределенно; очевидно, что $|0| = 0.$

3^0 Умножение, возведение в натуральную степень (т.е. умножение числа *z* на себя *n* раз) и деление комплексных чисел удобно выполнять, записав эти числа в тригонометрической форме.

Пусть $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \ z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ \ \ z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$ *Установим формулы:*

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right); \qquad (1.4.2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right),\ \ \rho_2 \ne 0; \qquad (1.4.3)$$

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ \ n = 1, 2, \ldots. \qquad (1.4.4)$$

Иначе говоря: при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются; при делении - модули делятся, а аргументы вычитаются; при возведении в степень $n \in N$ - модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на *n*.

Д о к а з а т е л ь с т в о (1.4.2). По правилу умножения комплексных чисел имеем

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right].$$

В круглых скобках записаны соответственно формулы для косинуса суммы и синуса суммы. Следовательно,

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right],$$

что и требовалось.

Д о к а з а т е л ь с т в о (1.4.3). Пусть $z = \frac{z_1}{z_2}$. По определению деления тогда $z_1 = z \cdot z_2$, а по формуле (1.4.2)

$$\rho_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) = \rho \cdot \rho_2 \left(\cos(\varphi + \varphi_2) + i \sin(\varphi + \varphi_2)\right),$$

отсюда

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho\rho_2 \\ \varphi = \varphi + \varphi_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \rho = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \\ \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \end{cases}.$$

Итак, частное z имеет модулем число $\frac{\rho_1}{\rho_2}$, а аргументом разность $\varphi_1 - \varphi_2$. Это и есть утверждение (1.4.3).

Наконец, последовательно выполняя умножение z (на себя) n раз, получаем по формуле (1.4.2):

$$z^n = z \cdot \ldots \cdot z = \rho \cdot \rho \cdot \ldots \cdot \left(\cos(\varphi + \varphi + \ldots) + i \sin(\varphi + \varphi + \ldots)\right) = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

и формула (1.4.4) доказана.

П р и м е р ы 1. Выполнить в тригонометрической форме следующие действия:
а) $\frac{z_1}{z_2}$; б) z_1^4, где $z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = -6\sqrt{2}\, i$.

Р е ш е н и е. а) Найдем модуль и аргумент каждого из чисел z_1 и z_2. Имеем $|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{3}{-3} = -1$. Поскольку точка z_1 расположена во 2-ой четверти, то $\varphi_1 = \arg z_1 = \pi + \operatorname{arc\,tg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Аналогично, $|z_2| = \sqrt{0 + \left(-6\sqrt{2}\right)^2} = 6\sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi_2$ не существует, но по расположению точки z_2 на оси OY (в нижней полуплоскости) видим, что $\varphi_2 = \arg z_2 = -\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, в тригонометрической форме

$$z_2 = 6\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$ Теперь согласно формуле (1.4.3)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Исключая период 2π под знаком косинуса и синуса, имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = 0{,}5\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

б) По формуле (1.4.4) получаем:

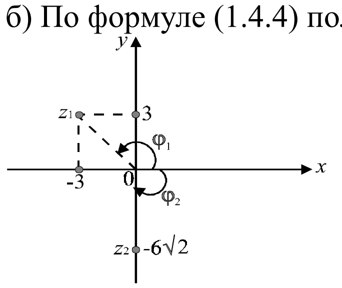

Рис. 1.4.1

$$z_1^4 = \left(3\sqrt{2}\right)^4\left(\cos 4\frac{3\pi}{4} + \sin 4\frac{3\pi}{4}\right); \quad z_1^4 = 324\left(\cos\pi + i\sin\pi\right).$$

В алгебраической форме $z_1^4 = -324.$

2 Выяснить геометрический смысл соотношений: а) $|z - z_0| = R$, б) $|z - z_0| < R$, в) $|z - z_0| > R$, где z_0 - фиксированное комплексное число; г) $\arg z = \frac{\pi}{3}$.

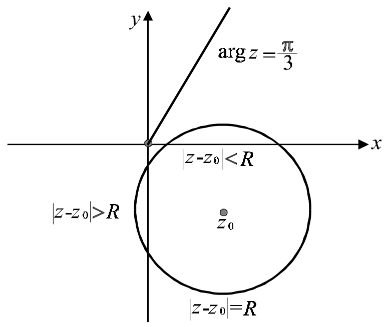

Рис. 1.4.2

Р е ш е н и е. а) Записав $z = x + y\,i$, $z_0 = x_0 + y_0\,i$ и выполняя вычитание, имеем $|z - z_0| = \left|(x - x_0) + (y - y_0)\,i\right| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Следовательно, равенство $|z - z_0| = R$ означает, что $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Получили уравнение окружности радиуса *R* с центром в точке (x_0, y_0). Итак, *геометрический образ уравнения* $|z - z_0| = R$ - это *все точки окружности с центром* z_0 *радиуса R.*

Аналогично $|z - z_0| < R$ означает, что $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$, т.е. геометрическим образом этого неравенства служит *множество всех внутренних точек круга* ; $|z - z_0| > R$ - *множество всех точек,* расположенных *вне круга*; центр круга и радиус - те же: z_0 и *R* соответственно (рис. 1.4.2).

б) Так как $\varphi = \arg z$ есть угол поворота оси *OX* до совмещения с точкой *z* $(-\pi < \varphi \le \pi)$, то все точки *z*, обладающие свойством $\arg z = \frac{\pi}{3}$, лежат на луче $\varphi = \frac{\pi}{3}$ в полярных координатах (на этом луче исключена точка $z = 0$, аргумент которой не определен), см. рис. 1.4.2.

1.5 Извлечение корня из комплексного числа. Алгебраические уравнения

1^0 Пусть $n \in \{2,3,\ldots\}$. *Корнем n-ой степени* из числа *z* назовем число $w = \sqrt[n]{z}$, обладающее свойством $w^n = z$. Установим, что при всяком $z \ne 0$ существует ровно *n* различных значений корня, которые имеют вид

$$w_n = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,1,\ldots,n-1; \qquad (1.5.1)$$

здесь ρ и φ - соответственно, модуль и аргумент числа z, т.е. $z = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$; значение $\sqrt[n]{\rho}$ понимается как *арифметический* корень из положительного числа ρ, так что $\sqrt[n]{\rho} > 0$.

2^0 Итак, мы доказываем формулу (1.5.1). Если

$$w = |w|\left(\cos\Phi + i\sin\Phi\right) \qquad (1.5.2)$$

- тригонометрическая форма числа *w*, то, по определению, $w^n = z$, т.е. в силу (1.4.4),

$$|w|^n\left(\cos n\Phi + i\sin\Phi\right) = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Значит, $|w|^n = \rho$, откуда $|w| = \sqrt[n]{\rho}$ (имеется в виду принятое во множестве действительных чисел извлечение арифметического корня). Аргументы $n\Phi$ и φ равных комплексных чисел могут (находясь под знаком косинуса и синуса) отличаться лишь на величину периода $T = 2\pi k,\ k \in Z,$ так что

$n\Phi = \varphi + 2\pi k$, откуда $\Phi = \Phi_k = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n};\ \ k \in Z.$

Покажем, что достаточно рассмотреть $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Для этого, прежде всего, выясним, как расположены точки (1.5.1) на комплексной плоскости. Во-первых, все они имеют один и тот же модуль, равный $\sqrt[n]{\rho}$, а значит находятся на окружности с центром в начале координат радиуса $\sqrt[n]{\rho}$. Во-вторых, при $k = 0$ точка w_0 имеет полярный угол $\Phi_0 = \dfrac{\varphi}{n}$, а полярный угол следующей точки w_1 отличается на величину $\dfrac{2\pi}{n}1$, т.е. $\Phi_1 = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n}$.

Далее, $\Phi_2 = \dfrac{\varphi + 2\pi \cdot 2}{n} = \left(\dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n}\right) + \dfrac{2\pi}{n} = \Phi_1 + \dfrac{2\pi}{n}, \dots, \Phi_{n-1} = \Phi_{n-2} + \dfrac{2\pi}{n}$,

$\Phi_n = \dfrac{\varphi}{n} + 2\pi, \dots$.

Таким образом, каждая следующая точка w_k получается из предыдущей w_{k-1} поворотом против часовой стрелки на величину $\dfrac{2\pi}{n}$, а точка w_n совпала с w_0 (совершен поворот на 2π). С дальнейшим ростом *k* опять получаем точки $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$. При отрицательных *k*, т.е. $k = -1, -2, \dots$ имеем обход тех же точек по часовой стрелке, т.е. в обратном порядке: $w_{n-1}, w_{n-2}, \dots, w_0$. Итак, только *n* различных точек получаемых, например, при $k = 0, 1, \dots, n-1$, соответствуют операции извлечения корня *n*-ой степени; см. рис. 1.5.1. Формула (1.5.1) установлена. Заметим, что $\sqrt[n]{0} = 0$ можно понимать как *n* совпадающих значений, равных нулю.

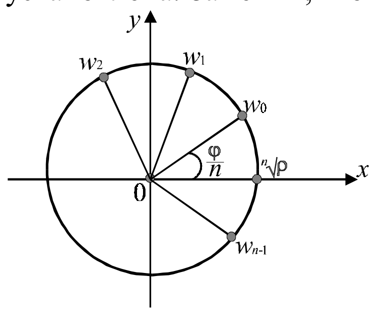

Рис. 1.5.1

3^0 Непосредственно из определения корня *n*-ой степени вытекают привычные свойства соответствующей операции, например,

$\sqrt[n]{z\eta} = \sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{\eta};\quad \sqrt[n]{\dfrac{z}{\iota}} = \dfrac{\sqrt[n]{z}}{\sqrt[n]{\iota}},\ \ \iota \neq 0.$

Эти равенства следует понимать как *совпадение множеств* значений выражений в левых и правых частях.

П р и м е р 1. Вычислить $\sqrt{a^2}$, где $a > 0$ - действительное число.

Р е ш е н и е. Запишем число a^2 в тригонометрической форме:

$a^2 = a^2(\cos 0 + i \sin 0)$.

По формуле (1.5.1)

$\sqrt{a^2} = a\left(\cos\dfrac{0 + 2\pi k}{2} + i \sin\dfrac{0 + 2\pi k}{2}\right), \quad k = 0;\ 1.$

Получаем при $k = 0$ $\sqrt{a^2} = a;$ при $k = 1$ $\sqrt{a^2} = a(\cos\pi + i\sin\pi) = -a$. Заметим, что во множестве действительных чисел рассматривалось лишь одно, положительное значение (арифметическое значение) корня, а именно, $\sqrt{a^2} = a$.

П р и м е р 2. $\sqrt{-a^2} = \pm ai,\ a > 0.$ Действительно, $(a\,i)^2 = a^2 i^2 = -a$ и $(-a\,i)^2 = a^2 i^2 = -a$. Значит (по определению квадратного корня) оба значения $\pm a\,i$ служат результатом извлечения корня. В силу п. 1^0 мы должны получить ровно два различных результата. Следовательно, других значений $\sqrt{-a^2}$ нет.

П р и м е р 3. Вычислить и изобразить на комплексной плоскости значения $w = \sqrt[3]{8 - 8\sqrt{3}\ i}$.

Р е ш е н и е. Для $z = 8 - 8\sqrt{3}\,i$ имеем $|z| = \sqrt{8^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2} = 16;$ $tg\,\varphi = -\dfrac{8\sqrt{3}}{8} = -\sqrt{3},$ поэтому $\varphi = \arg z = -\dfrac{\pi}{3}$.

По формуле (1.5.1) имеем

$$w_k = \sqrt[3]{16}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3}\right),\quad k = 0,1,2.$$

Следовательно,

$$w_0 = 2\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right),\quad w_1 = 2\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right),\quad w_2 = 2\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right).$$

Поскольку мы условились считать (для любого w) $-\pi < \arg w \le \pi$, то в случае w_2 исключим под знаком тригонометрических функций период 2π. Тогда

$$w_2 = 2\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{9}\right)\right).$$

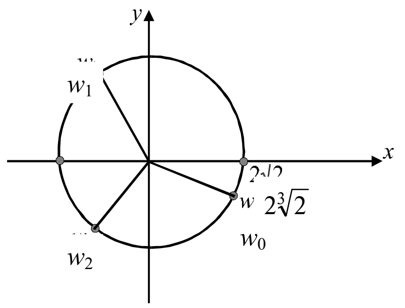

Рис. 1.5.2

4^0 Рассмотрим алгебраическое уравнение

$w^2 + d^2 = 0$, где $d \in R,\quad d > 0.$

Оно равносильно равенству $w = \sqrt{-d^2}$ или, в свою очередь $w_{1,2} = \pm d\,i,$ если воспользоваться результатом решения примера 2 в п. 3^0.

5^0 Теперь мы можем получить формулу для решений квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1.5.2)$$

с произвольными коэффициентами $(a \ne 0)$. Выделяя полный квадрат, имеем

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4\,ac - b^2}{4\,a^2} = 0\,.$$

Рассмотрим только случай $4\,ac - b^2 > 0$, или, что то же самое, $D = \left(b^2 - 4\,ac\right) < 0$, т.к. при $D \ge 0$ формула корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \qquad (1.5.3)$$

нам известна. При $d^2 = \dfrac{-D}{4a^2}$ в силу результата п. 4^0 получаем

$$x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{-D}\,i}{2a},\ \text{ или }\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-D}\,i}{2a}. \qquad (1.5.4)$$

Теперь мы можем решать (по формуле (1.5.4)) квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом, или, что то же самое, пользоваться формулой (1.5.3) при любых значениях D.

Заметим, что запись $\sqrt{D}$ (или $\sqrt{-D}$ в (1.5.4)) понимаются как арифметическое значение корня, т.к. двузначность операции извлечения корня уже учтена знаком ±.

П р и м е р 1. Решить уравнение $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$.

Р е ш е н и е. Имеем квадратное уравнение относительно величины x^2.

$\left(x^2\right)^2 + 10x^2 + 9 = 0$.

Согласно (1.5.3)

$\left(x^2\right)_1 = -9, \qquad \left(x^2\right)_2 = -1$.

В свою очередь каждое из этих уравнений имеет по два корня:

$x_{1,2} = \pm 3i, \qquad x_{3,4} = \pm i$.

П р и м е р 2. Решить уравнение $x^3 + 64 = 0$.

Р е ш е н и е. Записав условие в виде $x^3 + 4^3 = 0$, имеем по формуле суммы кубов

$(x+4)\left(x^2 + 4x + 16\right) = 0$.

Имеем $x_1 = -4$, а два корня служат решениями квадратного уравнения $x^2 + 4x + 16 = 0$, для которого дискриминант $D = -48 < 0$. По формуле (1.5.4) получаем

$x_{3,4} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{48}\, i}{2}$ или $x_{3,4} = -2 \pm 4\sqrt{3}\, i$.

6^0 Итак, любое квадратное уравнение, в силу (1.5.3) имеет ровно два корня (при $D = 0$ корни совпадают; в этом случае говорят, что корень x_1 имеет *кратность, равную двум*). В силу примеров п. 5^0 можно предложить, что каждое кубическое уравнение имеет ровно три корня, уравнение четвертой степени - ровно четыре корня и т.д. Кроме того, среди *корней уравнения с действительными коэффициентами комплексные числа присутствуют сопряженными парами*: вместе с числом вида $z_1 = a + bi$ корнем служит и $z_2 = a - bi$.

Такая гипотеза оказывается верной. А именно, в курсе алгебры доказывается что

а) каждое алгебраическое уравнение

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0$

имеет ровно *n* корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность (т.е. сколько раз он совпал сам с собой);

б) если коэффициенты уравнения $a_k\ (k = 0,1,\ldots,n)$ - действительные числа, то комплексные числа присутствуют во множестве корней сопряженными парами.

Эти тезисы становятся более ясными после рассмотрения следующего примера. Решить уравнение: $x^6 + 4x^4 + 4x^2 = 0$.

Р е ш е н и е. Мы должны получить ровно шесть корней. Перепишем уравнение в виде

$x^2\left(x^4 + 4x^2 + 4\right) = 0$ или $x^2\left(x^2 + 2\right)^2 = 0$.

Уравнение $x^2 = 0$ имеет два корня: $x_1 = x_2 = 0$. Аналогично, уравнение $z^2 = 0$, где $z = x^2 + 2$ имеет корни $z_1 = z_2 = 0;$ в случае $z_1 = 0$ или $x^2 + 2 = 0$, имеет $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}\, i$; но точно такие же корни $x_{5,6} = \pm\sqrt{2}\, i$ получаем в случае $z_2 = 0$. Таким образом, каждое из чисел $0, \sqrt{2}\, i, \ -\sqrt{2}\, i$ оказалось корнем кратности два.

1.6 Упражнения к главе 1

1^0 Даны числа $z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3} - i}, \quad z_2 = -4i, \quad z_3 = 5i - 1.$

Выполнить действия: а) $2z_1 - 4z_3 + i^3$; б) $z_1 z_2$; в) $\dfrac{z_2}{z_3 - i}$; г) $2z_1 + \dfrac{2z_3}{z_2}$; д) $z_2^4 - z_2^2 - 4\bar{z}_1$; е) $\dfrac{\bar{z}_3}{|z_3 + 6|} + 2iz_2$.

Результаты изобразить на комплексной плоскости.

2^0 Изобразить множества точек *z*, для которых

а) $|z + 3i| \le 3$; б) $|z + i - 1| > 1$; в) $\operatorname{Re}\dfrac{2z}{i} < 0$; г) $\operatorname{Im} z^2 < 2$; д) $|z| \le \left|2\sqrt{3}\,i - 2\right|$.

3^0 Доказать равенства а) $\dfrac{2+i}{3-i} = \dfrac{13+4i}{17-9i}$; б) $|\bar{z} + z|^2 + |\bar{z} - z|^2 = 4|z|^2$.

4^0 Найти действительные числа *x* и *y* из уравнений

а) $(5x + 2y)i - x + y = 1$; б) $2x + 7y - (5 - 2x)i + 12 = 3yi$.

5^0 Записать в тригонометрической форме числа

$z_1 = -9i, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = -(1 + i), \quad z_4 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

и выполнить затем указанные действия: а) z_2^4; б) $z_1 z_2$; в) $\dfrac{z_2 z_3}{z_1}$; г) $\dfrac{z_4^2}{z_3}$.

6^0 Найти все значения а) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3} - i}{25}}$; б) $\sqrt[4]{-8}$; в) $\sqrt[4]{1}$; г) $\sqrt[4]{i^3}$.

7^0 Решить уравнения и изобразить на комплексной плоскости множества решений:

а) $z^2 + 4z + 53 = 0$; б) $2z^2 - z - 1 = 0$; в) $z^4 + i = 0$; г) $z^4 + z^2 = 2$;

д) $z^4 + 26z^2 + 25 = 0$; е) $z^3 + 8i = 0$; ж) $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$;

з) $iz^4 + 1 = 0$.

Глава 2 РЯДЫ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

2.1 Понятие функции комплексного переменного

1^0 *Окрестностью* U_0 точки $z_0 = x_0 + y_0 i$ называется множество всех точек некоторого круга с центром z_0. Если $\varepsilon > 0$ - радиус этого круга, то употребляем также термин "ε - окрестность" и обозначение $U(z_0; \varepsilon)$. Иными словами,

$U_0 = U(z_0; \varepsilon) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$.

Множество *G* точек комплексной плоскости называется *открытым*, если каждая его точка является *внутренней,* т.е. содержится в *G* вместе с некоторой окрестностью.

Например, кольцо, т.е. множество вида

$$U(a; \iota, R) = \{z : \iota < |z - a| < R\}, \qquad (2.1.1)$$

где *a* - фиксировано, $\iota,\ R > 0$, является, очевидно открытым множеством.

Для сравнения, заметим, что если в (2.1.1) неравенство записать в виде $\iota \le |z - a| < R$, то свойство "открытости" нарушается, т.к. точки окружности $|z - a| = \iota$ содержатся во множестве лишь с "частью" окрестности, см. рис. 2.1.1.

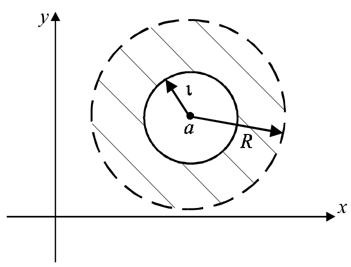

Рис. 2.1.1

Точки, обладающие подобными свойствами, называются граничными. Более точно, любая точка z_0 называется граничной для множества *G*, если $z_0 \notin G$, но любая "ее окрестность" содержит точки из *G*. Совокупность всех граничных для *G* точек называется границей *G*.
2^0 Множество *G* называется связным, если две его любые точки можно соединить некоторой ломаной, целиком лежащей в *G*. Открытое связное множество *G* называется *областью*. Множество, состоящее из области *G* и ее границы называется замкнутой областью.
Как правило, мы будем рассматривать *ограниченные области* (замкнутые или нет), т.е. области, содержащиеся в некотором круге $U(a, R)$. Область называется *односвязной*, если ее граница состоит из одной гладкой или кусочно-гладкой кривой и *n* - *связной*, если она ограничена *n* такими кривыми $(n = 2, 3, \dots)$.
Так, круг - односвязная область, а кольцо - двухсвязно. Напомним, что кривая называется гладкой, если она имеет параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

и при этом $x'(t)$ и $y'(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ и одновременно не обращаются в ноль ни при одном $t \in [\alpha, \beta]$. Кривая называется кусочно-гладкой, если она непрерывна (т.е. непрерывны функции в ее параметрическом задании на некотором $[\alpha, \beta]$) и состоит из конечного числа гладких дуг.
3^0 О п р е д е л е н и е. Пусть *G* - некоторое множество комплексных чисел. Говорят, что на множестве *G* (области определения *G*) задана *функция* вида $w = f(z)$, если каждому $z \in G$ поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел *w*.
В последнем случае мы говорим, что функция *f многозначна.*
Если, в частности, все значения *w* - действительные числа, то говорим о *действительнозначной функции комплексного переменного.* Если *G* - множество на "действительной оси" (оси абсцисс), т.е. , то - *комплекснозначная* функция действительного переменного.
Так, функция вида $\operatorname{Arg} z,\ z \ne 0$ (т.е. $z \in K \setminus \{0\}$) является многознач-ной (действительнозначной) функцией, т.к. $w = w_n = \arg z + 2\pi n,\ n \in Z,$ и при каждом *n* мы получаем новое значение w_n, отличное от любого $w_m,\ m \ne n$.
Другая знакомая нам функция - это $w = z^n,\ z \in K\ (n = 1, 2, \dots)$. Так как результат умножения определяется однозначным образом (в данном случае - умножения *z* на себя *n* раз), то указанная функция однозначна.
Многозначной (именно, *n* - значной) является и функция вида

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ \varphi = \arg z,$$
$$k = 0, 1, \dots, n-1;\ z \in K \setminus \{0\}.$$

В дальнейшем будем рассматривать в основном, функции однозначные, если не оговорено противное.
4^0 Поскольку $w = f(z) = f(x + yi)$ определяется парами значений (x, y), то можно говорить об *f* как функции двух действительных переменных, заданной на некотором множестве *G*. В то же время $w = u + vi$, тогда $u = \operatorname{Re} f(x + yi) = u(x, y)$, $v = \operatorname{Im} f(x + yi) = v(x, y)$ - две действительнозначные функции действительных переменных *x* и *y*.
Таким образом,

$$w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y), \qquad (2.1.2)$$

т.е. задание $f(z)$ есть задание пары функций $u = u(x,y),\quad v = v(x,y)$, и этим облегчаются многие формулировки и доказательства в теории функций комплексного переменного.
Например, $w = z^2$ может быть представлено в виде (2.1.2) следующим образом7
$z^2 = (x + y\,i)^2 = x^2 - y^2 + 2x\,y\,i$.
5^0 Комплекснозначная функция вида $w = f(n),\ n \in N$ называется *последовательностью* комплексных чисел. Множество ее значений имеет вид $\{w_1, w_2, \dots, w_n, \dots\}$. Согласно (2.1.2)
$w = f(n) = w_n = x_n + i\,y_n,\ n = 1,2,\dots,$
т.е. одновременно с $f(n)$ задаются две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

2.2 Предел функции. Непрерывность

1^0 Определение предела функции $f(z)$ в точке z_0 (внутренней во множестве *G*, где определена $w = f(z)$) вводится совершенно аналогично соответствующему понятию для функции действительного переменного. Именно, *число* $w_0 = u_0 + i\,v_0$ *есть предел* $w = f(z)$ в точке z_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что
$|w - w_0| < \varepsilon$ как только $0 < |z - z_0| < \delta$.
Иными словами, для любой окрестности $U(w_0;\varepsilon)$ найдется некоторая окрестность $U(z_0;\delta)$, такая что
$w \in U(w_0,\varepsilon)$ как только $z \in U(z_0,\delta),\ z \neq z_0$.
Употребляется привычное обозначение
$w_0 = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$. (2.2.1)
2^0 Соотношение (2.2.1), эквивалентно, очевидно, следующему:
$\lim\limits_{|z - z_0| \to 0} |f(z) - w_0| = 0$. (2.2.2)
Поскольку для любых действительных переменных *u*, *v* значения $\sqrt{u^2 + v^2}$ стремятся к нулю тогда и только тогда, когда одновременно $u \to 0,\ v \to 0$, то согласно определению модуля и соотношению (2.1.2) предельный переход вида (2.2.2) равносилен тому, что одновременно
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0, \qquad \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0.$
Другими словами, предельный переход совершается по отдельности в действительной и мнимой части функции $w = f(z)$. Отсюда вытекает, что простейшие свойства пределов (вынесение постоянного множителя за знак предела, предельный переход в сумме, произведении и т.п.) переносятся и на случай функций комплексного переменного.

3^0 По аналогии с (2.2.2) говорят, что

$w_0 = \lim\limits_{z \to \infty} f(z)$,
(понятие "*предела на бесконечности*"), если
$\lim\limits_{|z| \to \infty} |f(z) - w_0| = 0$.
В частности, для *последовательности* комплексных чисел $\{w_n\}$ *число* w_0 *называется ее пределом*, если
$\lim\limits_{n \to \infty} |w_n - w_0| = 0$ (2.2.3)
или, что то же самое, одновременно
$u_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n, \qquad v_0 = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$.
4^0 Говорят, что последовательность w_n имеет *бесконечный предел*, и записывают

$\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} |w_n| = +\infty$.

Изобразить соответствующее "значение" бесконечного предела невозможно, однако условно говоря, дополняют комплексную плоскость "бесконечно удаленной точкой", а ее "окрестностью" называют внешность круга $|w| > R$ достаточно большого радиуса $R > 0$.

Комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется расширенной.

Аналогично, говорят, что

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, если $\lim\limits_{|z-z_0|\to 0} |f(z)| = +\infty$.

Запись

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$

(бесконечный предел на бесконечности) означает, что

$\lim\limits_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$.

5^0 Функция $f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0, внутренней к области определения *G*, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0). \qquad (2.2.4)$$

Другими словами, *непрерывность в точке* z_0 есть *возможность предельного перехода под знаком функции* при $z \to z_0$.

Согласно п. 2^0 для $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ непрерывность в точке $z_0 = x_0 + i\,y_0$ означает, что

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u(x_0,y_0), \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v(x_0,y_0),$$

т.е. имеем непрерывность действительной части *u* и мнимой части *v* как функций от *x* и *y*.

6^0 Как в случае функций действительного переменного, определению (2.2.4) можно придать иную форму. Если обозначить $\Delta z = z - z_0$, $\Delta w = f(z) - f(z_0)$, то непрерывность функции *f* в точке z_0 означает, что

$\lim\limits_{\Delta z\to 0} \Delta w = 0,$

т.е. бесконечно малому приращению аргумента (в точке z_0) соответ-ствует бесконечно малое приращение функции *f*.

7^0 Функция $f(z)$ называется *непрерывной в области G*, если она *непрерывна в каждой точке z этой области*.

Поскольку непрерывность *f* равносильна непрерывности ее действительной части *u* и мнимой *v*, то многие свойства непрерывных функций действительного переменного переносятся и на изучаемый случай. Так, вместе с $f(z)$ и $g(z)$ непрерывными будут (в их общей области непрерывности *G*) $f(z)+g(z)$, $f(z)g(z)$ и $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ (за исключением точек, в которых $g(z)=0$). Справедливо утверждение о непрерывности сложной функции и др.

8^0 Понятия предела и непрерывности функции в точке z_0 вводились в предложении, что z_0 - внутренняя точка рассматриваемого множества *G*. Если же z_0 - граничная точка, то в определении (2.2.2) потребуем: $|z - z_0| \to 0$ (т.е. точка *z* приближается к z_0) так, что при этом сохраняется условие $z \in G$.

В случае, когда кривая Г - граница области *G* и $z_0 \in \Gamma$, функция *f* называется непрерывной в точке z_0, если соотношение (2.2.4) выполнено для всех $z \to z_0$ так, что $z \in G$.

Для $f(z)$, непрерывной как в области *G*, так и на ее границе Г, говорим, что она *непрерывна в замкнутой области.*

2.3 Ряды комплексных чисел

1^0 Определение предела последовательности комплексных чисел, данное в п. 3^0 параграфа 2.2, позволяет построить теорию числовых рядов с комплексными членами
$w_n = u_n + i\,v_n, \quad n = 1, 2, \ldots$.

Выражение вида

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n + \ldots \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} w_n \qquad (2.3.1)$$

называется *числовым рядом*. Естественно его отождествить с пределом вида

$$S = \lim_{n \to \infty} \left(w_1 + w_2 + \ldots + w_n \right), \qquad (2.3.2)$$

если последний существует. Более точно, если существует *число* S, определяемое как предел (2.3.2), то ряд (2.3.1) называется *сходящимся*, а S - его сумма. В противном случае ряд (2.3.1) называется расходящимся.

2^0 Частичная сумма (сумма первых n членов) представима в виде

, (2.3.3)

и теперь вопросы сходимости ряда (2.3.1) сводятся к соответствующим исследованиям рядов с действительными членами

(2.3.4)

Так, а) одновременная сходимость (2.3.4) эквивалентна сходимости (2.3.1); при этом $S = \tilde{S} + i\,\tilde{\tilde{S}}$, где $\tilde{S}$ и $\tilde{\tilde{S}}$ - соответствующие суммы рядов (2.3.4);

б) ряд (2.3.1) сходится (расходится) одновременно с любым своим остатком

$\sum\limits_{n=\nu}^{\infty} w_n, \quad \nu \in N$ - фиксировано;

в) если ряды с комплексными членами

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n'$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n''$

одновременно сходятся и обладают, соответственно, суммами S' и S'', то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(w_n' + w_n'' \right)$, а его сумма есть $S' + S''$.

Кроме того, для любого постоянного $\lambda \in K$ остается сходящимся и ряд
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda\, w_n'$; его сумма есть $\lambda\, S'$.

Перечисленные простейшие свойства рядов хорошо известны читателю в случае рядов с действительными членами, а поэтому доказательства утверждений вытекает из представления (2.3.3) и результатов п. 3^0 параграфа 2.2

3^0 Т е о р е м а (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд (2.3.1) сходится, то

$$\lim_{n \to \infty} w_n = 0. \qquad (2.3.5)$$

Обратное утверждение неверно.

Доказательство этого утверждения проведем непосредственно (не переходя к действительным и мнимым частям). Так как, очевидно, соотношение $S = \lim\limits_{n \leftarrow \infty} S_n$ может быть записано и в виде $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_{n-1}$, то, вычисляя для $w_n = S_n - S_{n-1}$ предел разности, имеем

$\lim\limits_{n\leftarrow\infty} w_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$,
что и требовалось.

Ряд с общим членом $w_n = \dfrac{1}{n} + i\cdot 0$ является известным нам расходящимся гармоническим рядом, и для таких w_n выполнено соотношение (2.3.5). Значит, утверждение, обратное сформулированному в теореме, неверно.

С л е д с т в и е (достаточный признак расходимости). Если

$$\lim_{n\to\infty}|w_n| \neq 0 \qquad (2.3.6)$$

(или если предел не существует), то ряд (2.3.1) расходится.

Действительно, в противном случае мы имели бы существование и равенство нулю предела вида (2.3.5), но тогда бы, согласно (2.2.3) последовательность $|w_n| \to 0$, что противоречит условию (2.3.6).

4^0 Т е о р е м а. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|, \qquad (2.3.7)$$

то сходится и ряд (2.3.1). Обратное утверждение неверно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку

$$|u_n| \le \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = |w_n|,$$

то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ (по теореме сравнения рядов с положительными членами).

Аналогично, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|v_n|$. Следовательно, оба ряда (2.3.4) сходятся абсолютно.

Отсюда и вытекает сходимость ряда (2.3.1); см. п. 2^0 настоящего параграфа.

То, что обратное утверждение неверно, демонстрируется на известном читателю примере ряда с общим членом

$$w_n = \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n} + i\cdot 0,$$

который сходится, но ряд из модулей (гармонический) расходится.

Как и ранее, *сходимость* ряда, *вытекающую из сходимости ряда модулей,* называется *абсолютной.* Если же сходится (2.3.1), но (2.3.7) расходится, то сходимость (2.3.1) называется *условной*.

5^0 Достаточными признаками сходимости ряда из модулей (знакоположительного ряда) могут служить, например признаки:

а) Даламбера: пусть существует предел вида

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{|w_{n+1}|}{|w_n|}.$$

Тогда при $D<1$ ряд (2.3.7) сходится, а при $D>1$ - расходится;

б) Коши: пусть существует предел вида

$$K = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|w_n|}.$$

Тогда при $K<1$ ряд (2.3.7) сходится, а при $K>1$ - расходится

Напомним читателю, что в доказательстве утверждений а) и б) при $D>1$ или $K>1$ расходимость (2.3.7) вытекает из соотношения (2.3.6).

2.4 Степенные ряды

1^0 Пусть в области *G* задана бесконечная последовательность однозначных функций $\{u_n(z)\}$, $n = 1,2,\ldots$. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \qquad (2.4.1)$$

называется функциональным рядом. При каждом $z = z_0 \in G$ имеем *числовой* ряд из комплексных чисел $u_n(z_0)$. Если получаемый числовой ряд сходится, то z_0 называется его *точкой сходимости*, а если расходится - то *точкой расходимости*. На множества $G_0 \subset G$ всех точек сходимости ряда (2.4.1) задана тогда функция $S = S(z)$, называемая *суммой ряда* (2.4.1), где $S(z_0)$ есть обозначение суммы ряда (2.4.1) в точке z_0.

2^0 Уже из теории функциональных рядов действительного переменного нам известно, что привычные свойства конечных сумм функций могут не сохраняться при переходе к рядам. Как и в упомянутой теории, положение "спасается" требованием равномерной сходимости ряда.

Пусть $S(z)$ есть сумма ряда (2.4.1) на замкнутой ограниченной области *G* и при каждом n существует наибольшее значение модуля уклонения $S_n(z)$ от $S(z)$

$$\rho_n = \max_{z \in G} |S_n(z) - S(z)|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$, то ряд (2.4.1) называется *равномерно сходящимся* на *G* к сумме $S(x)$.

Сохраняется *достаточный признак* Вейерштрасса равномерной сходимости: если существует числовая последовательность $\{\alpha_n\}$, такая что для всех $z \in G, \quad n = 1, 2, \ldots$ имеют место оценки

$$|u_n(z)| \le \alpha_n$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ - сходящийся, то ряд (2.4.1) равномерно сходится на *G*.

Из свойств равномерно сходящихся на *G* рядов отметим, что сумма $S(z)$ непрерывна, если непрерывны все $u_n(z), \quad n = 1, 2, \ldots$

3^0 Пусть $\{z^n\}, n = 1, 2, \ldots,$ - последовательность степенных функций, $\{\alpha_n\}, \ n = 0, 1, \ldots$ - последовательность комплексных чисел.

Ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \qquad (2.4.2)$$

называется *степенным*; для (2.4.2) употребляем также обозначение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Очевидно, что любой степенной ряд сходится в точке $z_0 = 0$, т.к. все его частичные суммы $S_n(z_0) = a_0$, и, следовательно, предел последовательности $\{S_n(z_0)\}$ существует и равен a_0.

Нахождение других точек сходимости будет опираться на следующую теорему.

Т е о р е м а А б е л я. Если степенной ряд (2.4.2) сходится в некоторой точке $z_0 \ne 0$, то он абсолютно сходится в круге $U(0; |z_0|) = \{z : |z| < |z_0|\}$. Если же z_0' - точка расходимости, то ряд (2.4.2) расходится при всех *z* таких, что $|z| > |z_0'|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Ряд из модулей для (2.4.2) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n . \qquad (2.4.3)$$

Общий член ряда (2.4.3) можно представить следующим образом:

$$u_n(z) = |a_n| |z|^n = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n, \qquad (2.4.4)$$

где $z_0 \ne 0$ - точка сходимости ряда (2.4.2). Поскольку в этой точке выполнен необходимый признак сходимости, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} |a_n z_0^n| = 0 ,$$

то для всех n существует постоянная $M > 0$ такая, что
$\left| a_n z_0^n \right| \le M$.

При условии $|z| < |z_0|$ имеем для $q = \left| \dfrac{z}{z_0} \right|$, что $0 \le q < 1.$ Следовательно, в силу (2.4.4),

$0 \le u_n(z) \le M\, q^n, \quad 0 \le q < 1$, и ряд

$M + Mq + Mq^2 + \ldots + Mq^n + \ldots$

является сходящимся (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии). По теореме сравнения знакоположительных рядов тогда сходится и ряд с меньшими членами (2.4.3). Значит, в круге $U\left(0;|z_0|\right)$ ряд (2.4.2) сходится абсолютно, что и утверждалось.

2 В случае $|z| > |z_0'|$ ряд (2.4.2) не может сходится в точке z. Действительно, имеем $z_0' \in U\left(0;|z|\right)$, и, если (2.4.2) сходится в точке z, то по первой части теоремы Абеля, ряд сходится и в точке z_0'. Но это противоречит условию. Итак, во всех точках z, таких, что $|z| > |z_0'|$, ряд (2.4.2) расходится. Теорема полностью доказана.

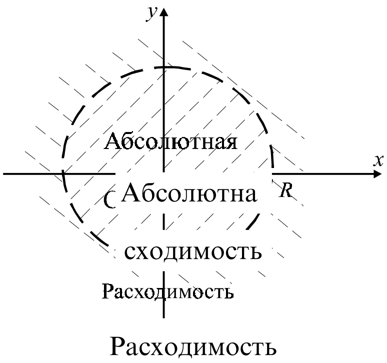

Рис. 2.4.1

4^0 Из теоремы Абеля вытекает, что всякая точка сходимости z_0 степенного ряда ближе к началу координат, чем любая точка расходимости. Следовательно, должно существовать некоторое "пограничное" расстояние R, такое что при $|z| < R$ (т.е. в каждом таком круге) имеет место абсолютная сходимость, а при $|z| > R$ (вне круга) - расходимость ряда (2.4.2). Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда, область $U(0, R)$ - его кругом сходимости, см. рис. 2.4.1.

При всяком $0 < \rho < R$ ряд (2.4.2) будет сходится и равномерно в круге $|z| \le \rho$. Действительно, взяв точку $\tilde{z}$, такую, что $|\tilde{z}| = \rho$, имеем абсолютную сходимость в точке $\tilde{z}$, т.е. сходится ряд

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n.$

В то же время, для членов (2.4.2) имеем оценку

$\left|a_n z^n\right| \le |a_n| |z|^n < |a_n| \rho^n.$

Согласно признаку Вейерштрасса, получаем равномерную сходимость при $|z| \le \rho$. В частности (т.к. непрерывны все степенные функции $u_n(z) = z^n$), непрерывной в круге сходимости будут сумма ряда (2.4.2).

5^0 Радиус сходимости R можно найти по одной из формул

$R = \dfrac{1}{D}$ или $R = \dfrac{1}{K}$, (2.4.5)

если существует соответствующее "число Даламбера"

$D = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

или "число Коши"

$K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Формулы (2.4.5) остаются справедливыми, если $D = 0$ или $(K = 0)$ - тогда $R = \infty$, т.е. областью сходимости ряда является вся комплексная плоскость. Если же $D = +\infty$ $(K = +\infty)$, то $R = 0$, т.е. "областью" сходимости является единственная точка $z_0 = 0$. Примеры такого рода см. ниже.
Докажем, например, вторую из формул (2.4.5). Согласно признаку Коши, ряд (2.4.3) сходится если

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||z|^n} < 1, \quad \text{т.е.} \quad |z|K < 1, \qquad (2.4.6)$$

откуда получаем при $|z| < \frac{1}{K}$ сходимость ряда (2.4.3), а значит и абсолютную сходимость ряда (2.4.2). В то же время при $|z| > \frac{1}{K}$ согласно признаку Коши расходится не только ряд из модулей (2.4.3), но и сам ряд (2.4.2); об этом упоминалось в п. 5^0 параграфа 2.3. Итак, именно число $R = \frac{1}{K}$ оказалось радиусом сходимости согласно определению *R* в п. 4^0. Отметим также, что при $K = 0$ условие (2.4.6) выполнено при всех *z* (т.е. $R = \infty$), а при $K = \infty$ условие (2.4.6) не выполнено при любом $z \neq 0$; точка же $z_0 = 0$, как упоминалось, служит точкой сходимости любого степенного ряда ($R = 0$). Утверждение п. 5^0 полностью доказано.

6^0 Рассмотрим (для любого фиксированного $\Im_0$) ряд по степеням $z - \Im_0$:

$$a_0 + a_1(z - \Im_0) + a_2(z - \Im_0)^2 + \ldots + a_n(z - \Im_0)^n + \ldots, \qquad (2.4.7)$$

или, коротко

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \Im_0)^n .$$

Очевидно, что в точке $\Im_0$ ряд (2.4.7) сходится и его сумма $S = a_0$. Заменой переменных $\Im = z - \Im_0$ получаем ряд вида (2.4.2) и, следовательно, теорема Абеля и все ее указанные выше следствия переносятся на случай (2.4.7) с соответствующим изменением в формулировках: речь теперь следует вести о круге сходимости с центром $\Im_0$. Так, например, круг сходимости $|\Im| < \frac{1}{K}$ есть $U\left(\Im_0; \frac{1}{K}\right) = \left\{z : |z - \Im_0| < \frac{1}{K}\right\}$ и т.д.

7^0 П р и м е р 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (z + i)^n}{n^2 + 1} . \qquad (2.4.8)$$

Р е ш е н и е. Имеем ряд по степеням $z - (-i)$; тогда его круг сходимости $U(-i, R)$ будет найден, если найдем радиус сходимости *R*. Воспользуемся формулой $R = \frac{1}{D}$, где для

$$a_n = \frac{i^n}{n^2 + 1}$$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|i^{n+1}|}{(n+1)^2 + 1} \frac{|i^n|}{n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{i^{n+1}}{i^n}\right| \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} |i| \frac{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}\right)} = 1.$$

Итак, $R = 1$, т.е. при $|z + i| < 1$ ряд абсолютно сходится, а при $|z + i| > 1$ расходится. На окружности $|z + i| = 1$ исследование следует проделать особо. Для этого рассмотрим ряд из модулей для (2.4.8). Так как $|i| = 1$, то при $|z + i| = 1$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1},$$

который оказывается сходящимся. Действительно, например по интегральному признаку Коши для $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ непрерывной и убывающей на $[1,+\infty)$ имеем

$$\tau=\int_1^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arc\ tg}\Big|_1^{\infty}=\operatorname{arc\,tg}(\infty)-\operatorname{arc\ tg}1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},$$

т.е. получили сходящимся несобственный интеграл τ, а значит и числовой ряд. Таким образом, и на окружности $|z+i|=1$ ряд (2.4.8) сходится абсолютно. Окончательно, получаем областью абсолютной сходимости ряда замкнутый круг вида $\{z:|z+i|\le 1\}$.

Пример 2 Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

абсолютно сходится во всей комплексной плоскости. Действительно,

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

и, следовательно, $R=\dfrac{1}{D}=\infty$.

Пример 3 Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^n z^n$$

обладает единственной точкой сходимости $z=0$. Действительно, $K=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$, и, следовательно, $R=0$.

8^0 Более глубокие свойства степенных рядов и их обобщения будут рассмотрены ниже, но для этого нам потребуются основы дифференциально-интегрального исчисления функций комплексного переменного. Однако уже сейчас мы готовы ввести в рассмотрение некоторые из основных (еще не рассмотренных) элементарных функций.

2.5 Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$

1^0 За основу определений возьмем известные разложения функций действительного переменного e^x, $\sin x$, $\cos x$. в степенные ряды. Формально заменив в них x на z, получим так называемые "аналитические продолжения" указанных функций в комплексную плоскость. А именно, положим *по определению*:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{z!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots;\qquad(2.5.1)$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots;\qquad(2.5.2)$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots.\qquad(2.5.3)$$

Каждый из указанных рядов абсолютно сходится во всей комплексной плоскости, т.к. "число Даламбера" всякий раз равно нулю, и, следовательно, радиус сходимости $R=\infty$. Убедимся в этом, например, в случае (2.5.3): здесь $a_n=\dfrac{1}{(2n)!}$, а поэтому

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2(n+1))!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}=0,$$

что и утверждалось.

Итак, при всех z определены суммы рядов (2.5.1) - (2.5.3). В частности, для $z = x + i \cdot 0$ (на действительной оси) имеем знакомые нам трансцендентные функции действительного переменного.

2^0 Имеет место следующая *формула Эйлера*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \qquad (2.5.4)$$

устанавливающая неожиданную связь между показательной и тригонометрическими функциями. Для доказательства (2.5.4) достаточно установить, что совпадают члены соответствующих рядов. Подставим iz вместо z в общий член (2.5.1); имеем

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \ldots + \frac{i^n z^n}{n!} + \ldots \qquad (2.5.5)$$

Если теперь все члены ряда (2.5.2) умножить на i и сложить затем соответствующие члены рядов полученного и (2.5.1), то (см. п. 2^0 параграфа (2.3)) будем иметь ряд, сходящийся во всей комплексной плоскости:

$$\cos z + i \sin z = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \ldots + \left((-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} + (-1)^m i \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) + \ldots,$$

(2.5.6)

В силу очевидного равенства $i^{2m} = \left(i^2\right)^m = (-1)^m$ имеем общий член ряда (2.5.6) в виде

$$\frac{i^{2m} z^{2m}}{(2m)!} + \frac{i^{2m+1} z^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

что и представляет собою $\frac{i^n z^n}{n!}$, когда n пробегает последовательно четные $(n = 2m)$ и нечетные $(n = 2m+1)$ значения. Формула Эйлера доказана, т.к. члены, а значит и суммы рядов (2.5.5) и (2.5.6) совпали.

3^0 Поскольку формула (2.5.4) справедлива при всех z, то подставив в нее $(-z)$ вместо z, получим

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \qquad (2.5.7)$$

при этом четность косинуса $(\cos(-z) = \cos z)$ и нечетность синуса $(\sin(-z) = -\sin z)$ вытекают из определений (2.5.2) и (2.5.3).

Складывая и вычитая равенства (2.5.4) и (2.5.7), мы получаем:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \qquad (2.5.8)$$

5^0 Свойство

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \qquad (2.5.9)$$

справедливое в случае действительных чисел z_1 и z_2, сохраняется и в общем случае. Доказательство (2.5.9) основано на перемножении степенных рядов для e^{z_1} и e^{z_2} по некоторому естественному правилу, которое мы здесь не рассматриваем.

Сохраняются также *привычные формулы* для тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2; \end{aligned} \qquad (2.5.10)$$

их доказательство основано на соотношениях (2.5.8) и (2.5.9) и может быть предоставлено читателю.

Справедливы формулы приведения:

$$\cos(z + \pi) = -\cos z; \qquad \sin(z + \pi) = -\sin z,$$

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z; \qquad \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z.$$

и т.п. Например, в силу (2.5.10), где $z_2 = \frac{\pi}{2}$, и известных значений $\cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1$, имеем

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \cos\frac{\pi}{2} - \sin z \sin\frac{\pi}{2} = -\sin z.$$

Обе функции $\sin z$ и $\cos z$ имеют период 2π; в силу (2.5.4) этим же периодом обладает и e^{iz}. Сохраняется основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

(для доказательства достаточно взять $z_1 = z,\quad z_2 = -z$ в (2.5.10)) и все другие известные из тригонометрии формулы для синуса и косинуса. Однако, при переходе к комплексному аргументу может нарушаться привычная ограниченность единицей модулей значений $\sin z$ и $\cos z$. Например, согласно (2.5.8)

$$\cos i = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$$

- действительное число, большее единицы.

6^0 По определению полагаем

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

во всех точках *z*, где знаменатель соответствующей дроби не обращается в ноль.

Гиперболические синус и косинус определяется в виде

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Нетрудно проверить соотношения:

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{sh} z = -i\sin(iz), \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

2.6. Логарифмическая и показательная функция. Обратные тригонометрические функции.

1^0 *Логарифмом* (натуральным логарифмом) числа *z* называется чис-ло *w*, обладающее свойством $e^w = z$, где $z \neq 0$. Установим существо-вание и найдем формулу для вычисления логарифма.

Положим $w = u + iv$, тогда согласно (2.5.9) и (2.5.4)

$$e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u(\cos v + i\sin v).$$

Если $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то равенство $e^w = z$ означает, что

$$e^u(\cos v + i\sin v) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Модули равных комплексных чисел тоже равны:

$e^u = |z|$, откуда $u = \ln|z|$

(имеется в виду "обычный" логарифм действительного числа); что же касается аргументов, то они могут отличаться на $2\pi k$:

$$v = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \ldots .$$

Следовательно,

$w = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi k)$, или, коротко, $w = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$,

где $\varphi = \arg z$. Обозначая логарифм символом $\operatorname{Ln} z$ (употребление заглавной буквы означает многозначность результата), мы получили, что

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in Z .$$

Функция вида $w = \operatorname{Ln} z$ называется логарифмической; она определена при всех $z \neq 0$ и многозначна. При $k = 0$ получаем так называемое главное значение логарифма

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z .$$

2^0 Имеют место следующие обобщения известных нам свойств логарифмов на случай комплексной переменной:

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2; \qquad \mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2;$$

$$\mathrm{Ln}\, z^m = m\mathrm{Ln}\, z;$$

$$\mathrm{Ln}\sqrt[m]{z} = \frac{1}{m}\mathrm{Ln}\, z.$$

Доказательства вытекают из уже установленных выше свойств модуля и аргумента произведения и частного. Например

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\Big(|z_1||z_2|\big(\cos(\Phi_1+\Phi_2) + i\sin(\Phi_1+\Phi_2)\big)\Big) =$$

$$= \ln|z_1||z_2| + i(\Phi_1+\Phi_2) = \big(\ln|z_1| + i\,\Phi_1\big) + \big(\ln|z_2| + i\,\Phi_2\big) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln} z_2;$$

здесь обозначены $\Phi_1 = \mathrm{Arg}\, z_1$, $\Phi_2 = \mathrm{Arg}\, z_2$.

3^0 В основу определения показательной функции положим известное (для действительного переменного) свойство

$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x\ln a}, \quad a > 0$.

Положим по определению для *любых комплексных* $a \neq 0$ и z

$a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\, a}$.

Эта функция также оказывается многозначной в силу многозначности логарифма.

4^0 П р и м е р ы. Вычислить

1) $\mathrm{Ln}(-1)$; 2) $\mathrm{Ln}\left(2\sqrt{3}\,i - 2\right)$; 3) i^{-i}.

Р е ш е н и е. Так как $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, то

$\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = i\,\pi(1 + 2k), \quad k = 0, \pm 1, \ldots$

2) Запишем $z = 2\sqrt{3}\,i - 2$ в тригонометрической форме. Так как $|z| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 4$, $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то φ - угол второй четверти, именно $\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Следовательно,

$\mathrm{Ln}\left(2\sqrt{3}\,i - 2\right) = \ln 4 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) = 2\ln 2 + i\pi\left(\frac{2}{3} + 2k\right), \quad k = 0, \pm 1, \ldots$

3) $i^{-i} = e^{-i\,\mathrm{Ln}\, i}$ по определению показательной функции.

При этом $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, значит

$\mathrm{Ln}\, i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right)i.$

Теперь $-i\,\mathrm{Ln}\, i = -\pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right)$, а тогда

$i^{-i} = e^{-\pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right)}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$

5^0 Обратные тригонометрические функции определяются как функции, обратные по отношению к синусу, косинусу тангенсу, котангенсу. Именно, если $z = \sin w$, то число w называется арксинусом числа z; обозначение:

$w = \mathrm{Arc}\ \sin z.$

Если рассмотреть z как переменную величину, то речь уже идет о функции вида $w = \mathrm{Arc}\sin z.$

Аналогично, если $z = \cos w$, то получаем арккосинус

$w = \mathrm{Arc}\ \cos z;$

если $z = \mathrm{tg}\, w$, то

$w = \mathrm{Arc}\ \mathrm{tg}\, z;$

для $z = \mathrm{ctg}\, w$ имеем

$w = \mathrm{Arc}\ \mathrm{ctg}\, z.$

(арктангенс и арккотангенс соответственно).

6^0 Получим формулы для вычисления значений этих функций и убедимся в их многозначности.

Так, если $z = \sin w$, то (см. (2.5.8))

$z = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$, откуда $e^{iw} - e^{-iw} - 2iz = 0$.

Положим $e^{iw} = f$, тогда получено квадратное уравнение

$f^2 - 2izf - 1 = 0$

с корнями $\qquad f = iz + \sqrt{1 - z^2}$

(символом $\sqrt{1 - z^2}$ уже предусмотрены *два* отличающиеся знаком значения квадратного корня). Итак,

$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$, т.е. $iw = \mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$.

Выражая отсюда *w*, и принимая во внимание, что $\dfrac{1}{i} = -i$, получаем

$\mathrm{Arc}\sin z = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$.

В случае, если z - действительное число, $|z| \le 1$ то $\varsigma = \sqrt{1 - z^2} + iz$ имеет модуль $\sqrt{\left(1 - z^2\right) + z^2} = 1$ и тогда

$\mathrm{Arc}\sin z = -i\left(\ln 1 + i\,\mathrm{Arg}\,\varsigma\right) = \mathrm{Arg}\,\varsigma$,

т.е. значения $\mathrm{Arc}\sin z$ также - действительные числа.

Рассуждения, аналогичные вышеприведенным, позволяют утверждать, что

$\mathrm{Arc}\cos z = -i\,\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \qquad \mathrm{Arc\ tg}\, z = -\dfrac{i}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1 + iz}{1 - iz}$,

$\mathrm{Arc\ ctg}\, z = \dfrac{i}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{z - i}{z + i}$.

П р и м е р. Вычислить а) $\mathrm{Arc}\ \sin 2$, б) $\mathrm{Arc\,tg}\sqrt{3}$.

Имеем: а) $\mathrm{Arc}\sin 2 = -i\,\mathrm{Ln}\left(2i + \sqrt{-3}\right) = -i\,\mathrm{Ln}\left(2i \pm \sqrt{3}\,i\right) = -i\,\mathrm{Ln}\left(2 \pm \sqrt{3}\right)i$; здесь $\pm\sqrt{3}$ - значения уже арифметического корня из действительного числа. Поскольку $\left(2 \pm \sqrt{3}\right)i$ имеют аргументом $\Phi = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, то имеет две серии ответов:

$\ln\left(2 + \sqrt{3}\right) + i\pi\left(\dfrac{1}{2} + 2k\right)$ и $\ln\left(2 - \sqrt{3}\right) + i\pi\left(\dfrac{1}{2} + 2k\right), \quad k \in Z$.

б) $\mathrm{Arc\ tg}\sqrt{3} = \dfrac{-i}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = -\dfrac{i}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(1 + i\sqrt{3}\right)}{1^2 + \sqrt{3}^2} = -\dfrac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

Поскольку $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ имеет $|z| = 1$, $\mathrm{Arg}\, z = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, то

$\mathrm{Arc\ tg}\sqrt{3} = -\dfrac{i}{2}\left(\ln 1 + 2\pi\left(\dfrac{1}{3} + k\right)i\right) = \pi\left(\dfrac{1}{3} + k\right), \quad k \in Z.$

Однако из возможных значений арктангенса числа $\sqrt{3}$, именно, значение $\dfrac{\pi}{3}$, нам было известно ранее.

2.7 Элементарные функции. Геометрические образы

1^0 Выше было определено действие возведение комплексных чисел в натуральную степень. Следовательно, для всех $z \in K$ определена *степенная* функция $\boxed{\qquad\qquad}$.

Линейной функцией комплексного переменного *z* называется функция вида

$w = az + b,$

где $a, b \in K$ - фиксированы.

Обе эти функции являются частными случаями *многочлена n* - ой степени
$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$,
где $a_n \neq 0,\ n = 1,2,\ldots;$ коэффициенты $a_j\ (j = 0,1,\ldots,n)$ - фиксирован-ные комплексные числа.
2^0 При всех $z \neq 0$ определена функция вида $w = \dfrac{1}{z}$, которая является частным случаем *дробно-линейной* функции

$$w = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}, \quad z \neq -\frac{d}{c}, \quad c \neq 0.$$

Еще более общий случай - *рациональная функция*

$$R_{m,n}(z) = \frac{P_m(z)}{\widetilde{P}_n(z)},$$

определенная во всех тех точках, где $\widetilde{P}_n(z) \neq 0$.
3^0 При всех $z \in K$ определена *n*-значная функция вида
$w = \sqrt[n]{z}$,
а также (в параграфе 2.5) однозначные функции вида $w = e^z,\ \ w = \sin z,\ \ w = \operatorname{sh} z,\ \ w = \operatorname{ch} z.$
Рассматривались (на соответствующих областях оп-ределения) $w = \operatorname{tg} z,\ w = \operatorname{ctg} z.$
Многозначными (бесконечнозначными) являются $w = \operatorname{Ln} z,\ \ z \neq 0,\ \ w = \operatorname{Arc}\sin z,\ \ w = \operatorname{Arc}\ \cos z,$
$w = \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} z.\ \ \ w = \operatorname{Arc}\ \operatorname{ctg} z.$
4^0 Всякая функция, полученная из перечисленных *основных элементарных* путем выполнения над ними конечного количества арифметических действий, а также взятием конечного числа суперпозиций (функции от функции) называется *элементарной.*
Отметим без доказательства, что всякая элементарная функция непрерывна на своей области определения. В случае многозначных функций (многозначность обусловлена значениями целого параметра *k*) речь идет о непрерывности "каждой ветви", т.е. однозначной функции, получаемой при фиксированном значении параметра *k* (см. соответствующие определения $\sqrt[n]{z},\ \ \operatorname{Ln} z,\ \ \operatorname{Arc}\ \sin z,\ldots)$.
5^0 Особого разговора заслуживает описание тех геометрических образов, которые возникают при отображениях, осуществляемых основными элементарными функциями. Мы остановимся на кратком описании нескольких простейших случаев.

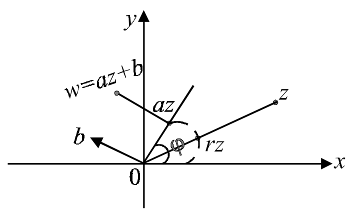

Рис. 2.7.1
а) *Линейная функция* $w = az + b$. В случае $b = 0$ и действительного значения $a = r > 0$ мы имеем в плоскости *XOY гомотетию* $w = r\,z$ *с центром в начале координат и коэффициентом r* (перемещение точки *z* вдоль луча *Oz* на расстояние $r = |\,z\,|$). В случае комплексного *a*, имеющего показательную форму $a = r\,e^{i\,\varphi}$, умножение $e^{i\,\varphi}z$ есть изменение аргумента каждого *z* на величину φ, т.е. *преобразование поворота* (вокруг начала координат) на угол φ каждого луча *Oz*. Дальнейшее умножение на $r > 0$ есть описанная выше гомотетия. Итак, действие отображения $w = r\,e^{i\,\varphi}z$ - это композиция преобразования поворота на угол φ комплексной плоскости и гомотетии с коэффициентом *r*.
Наконец, в общем случае $w = az + b$ вслед за описанной композицией гомотетии и поворота выполняется, очевидно, сдвиг (параллельный перенос) комплексной плоскости на радиус - вектор точки *b*, см. рис. 2.7.1, на котором точке *z* поставлена в соответствие точка $w = az + b$

путем выполнения, последовательно, преобразований: $z \mapsto r\,z \quad (0 < r < 1)$; $\quad r\,z \mapsto a\,z \quad \left(a = r\,e^{i\varphi}\right)$;
$a\,z \mapsto a\,z + b$.

б) *Степенная* функция $w = z^n, \quad n \in N$. Если $z = \rho e^{i\varphi}$, то $w = \rho^n e^{in\varphi}$. Для каждого фиксированного $z \neq 0$ имеем $n\varphi = \varphi + (n-1)\varphi$, т.е. имеем последовательное выполнение поворота луча *Oz* на угол $(n-1)\varphi$ относительно точки *O* и преобразование в ρ^n раз (растяжение при $\rho > 1$, сжатие при $0 < \rho < 1$) отрезка $O\,z'$, где $z' = e^{in\varphi}$.

Для $w = \sqrt[n]{z}$, где $z = \rho e^{in\varphi}$, $z \neq 0$, имеем

$w = w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\psi_k + i\sin\psi_k\right)$, т.е. $w_k = \sqrt[n]{\rho}\,e^{in\psi_k}$,

где $\psi_k = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$. Для всякого $z \neq 0$ и фиксированного *k* теперь отображение w_k есть последовательное выполнение поворота на угол $\varphi\dfrac{1-n}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}$ (так как $\psi_k = \varphi + \varphi\,\dfrac{1-n}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}$) луча *Oz* и преобразование отрезка Oz' (где $z' = e^{in\psi_k}$) в $\sqrt[n]{\rho}$ раз.

в) *Дробно-линейная функция.* Начнем с рассмотрения функции $w = \dfrac{1}{z}$. При каждом $z \neq 0$, $z = \rho e^{i\varphi}$, имеем $w = \dfrac{1}{\rho e^{i\varphi}}$, т.е. $w = \dfrac{1}{\rho}e^{i\psi}$, где $\psi = -\varphi$. Таким образом имеем последовательно преобразование луча *Oz* в симметричный относительно полярной оси луч Oz' $\left(|z'| = 1,\ \arg z' = -\varphi\right)$ и перемещение точки z' вдоль этого луча на расстояние $\dfrac{1}{\rho}$ от точки *O*.

Покажем, что каждая окружность $|z| = r, \quad r > 0,$ преобразуется функцией $w = \dfrac{1}{z}$ в окружность радиуса $\dfrac{1}{r}$ с тем же центром. Действительно, для каждой точки z на этой окружности имеем $z = r\,e^{i\varphi}$, где φ пробегает значения от $-\pi$ до π.

Теперь $w = \dfrac{1}{r}e^{i\psi}$, где $\psi = -\varphi$ принимает все значения в интервале $[-\pi, \pi)$. Итак, получена окружность с центром в начале координат радиуса $\dfrac{1}{r}$, что и утверждалось. Заметим, что в геометрии описанное преобразование называется инверсией.

Отметим (без доказательства) также, что любая другая окружность, не проходящая через начало координат, функцией $w = \dfrac{1}{z}$, преобразуется также в некоторую окружность, а проходящая через начало координат - в некоторую прямую.

Как оказывается, прямые, не проходящие через начало координат, также преобразуются в некоторые окружности, а проходящие через начало координат - в некоторые прямые.

Рассмотрим теперь общий случай

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad c \neq 0. \qquad (2.7.1)$$

Преобразуем дробь к виду

$$\frac{a(cz+d) + bc - ad}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}\frac{1}{cz+d}.$$

Следовательно, к отображению (2.7.1) можно прийти путем последовательного выполнения следующих изученных преобразований:

$t = cz + d$ (линейная функция), $T = \dfrac{1}{t}$ (инверсия),

$w = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc - ad}{c}T$ (линейная функция).

г) *Показательная функция* $w = e^z$. Если $z = x + y\,i$, то $w = e^x e^{iy}$ или $w = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Последнее представление можно понимать как тригонометрическую форму записи *w*. Таким

образом, каждая точка z преобразуется в точку (число) w с модулем $\rho = e^x$, и аргументом (одним из значений аргумента), равным y.
Геометрические образы стандартных линий (областей), получаемые посредством перечисленных и других отображений (функций) изучаются в более подробных курсах.

2.8 Упражнения к главе II

1^0 Найти область сходимости степенного ряда:
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}z^{2n}}{n!}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}n^2(z-i)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i+1)^{n-1}}{n\sqrt{n}+1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{2n}z^{2n-1}$;
д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+1)^n}{n\ln^4 n}$.

2^0 Вычислить значения: а) $e^{i\pi}$; б) e^{i-1}; в) $\sin\frac{\pi i}{2}$; г) $\cos^2\frac{2}{i}$; д) $\operatorname{ch}(-3i)$; е) $\operatorname{sh} i^3$; ж) $\operatorname{tg}\left(\sqrt{3}-i\right)$.

3^0 Найти а) $\operatorname{Ln}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$, б) $\operatorname{Ln}5(4i-3)$, в) $-i\operatorname{Ln}(-e)$; г) i^{1+i}; д) 3^{-i}; е) 2^{-1}.

Глава 3 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1 Понятие производной

1^0 Определение производной формально не отличается от случая функций действительного переменного. Однако, на самом деле, условие дифференцируемости функций комплексного переменного является более ограничительным в сравнении с упомянутым случаем, что будет ясно из дальнейшего.
Пусть $w = f(z)$ определена в точке $z = x + yi$ и некоторой ее окрестности. Пусть x получает некоторое приращение Δx, а y - приращение Δy. Тогда $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ - соответствующее приращение переменной z. При переходе от точки z к точке $z+\Delta z$ (значения Δx и Δy предполагаем столь малыми, что точка $z+\Delta z$ расположена в той же окрестности) значение $w = f(z)$ получает некоторое приращение $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z)$.
О п р е д е л е н и е. Пусть существует предел вида

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}. \qquad (3.1.1)$$

Он называется *производной* функции $f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z)$ либо w', $\frac{dw}{dz}$, $\frac{df}{dz}$.
Функция же $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z.
Заметим, что в случае функции действительного переменного $\varphi(x)$ существование производной есть существование предела $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$, когда $\Delta x\to 0$ по любому из двух направлений: $\Delta x\to -0$ (слева), $\Delta x\to +0$ (справа).
В случае же (3.1.1) Δz приближается к нулю в комплексной плоскости по *любому* пути, в частности, по любому из лучей (а их бесконечное множество), исходящих из начала координат. Это и является причиной появления некоторых новых дополнительных свойств дифференцируемых функций в сравнении со случаем функций действительного переменного.
2^0 Из свойств пределов и определения (3.1.1) вытекает, что дифференцируемость $f(z)$ в точке z эквивалентна равенству

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z) = \alpha(z,\ \Delta z),$$

где $\alpha(z, \Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Следовательно, существование производной равносильно соотношению

$\Delta w = f'(z)\Delta z + \alpha(z, \Delta z)\Delta z$. (3.1.2)

Выражение $d\,w = f'(z)\Delta z$ называется *дифференциалом* $f(z)$ в точке *z*.

Если $\Delta z \to 0$, то из (3.1.2) вытекает, что $\Delta w \to 0$, а это означает: дифференцируемость в точке *z* влечет за собою *непрерывность* $f(z)$ в той же точке.

3^0 Выясним геометрический смысл аргумента и модуля производной $f'(z_0) \neq 0,$ считая для определенности, что $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и некоторой ее окрестности U_0. Если W_0 - образ этой окружности (при отображении функцией *f*), то для любой кривой $\gamma \subset U_0$ ее образ $\Gamma \subset W_0$; обозначим $w_0 = f(z_0)$.

Пусть $z \to z_0$ вдоль кривой γ, тогда (в силу непрерывности $w = f(z),$ см. п. 2^0) $w \to w_0$ вдоль Г. Комплексные числа Δz и Δw изображаются векторами секущих к кривым γ и Г соответственно; следовательно $\arg\Delta z$ и $\arg\Delta w$ - углы наклона этих векторов к соответствующим осям абсцисс. Поскольку при делении аргументы комплексных чисел вычитаются, то согласно (3.1.1)

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \arg\left(\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z\to 0}(\arg\Delta w) - \lim_{\Delta z\to 0}(\arg\Delta w) = \Phi - \varphi\ ,$$

где Φ и φ - углы наклона (к осям абсцисс) уже соответствующих *касательных* (касательная - это предельное положение секущей). Итак, $\alpha = \arg f'(z_0)$ - угол, на которой относительно точки 0 повернулась касательная (к произвольной кривой γ в точке z_0) при отображении $w = f(z)$.

В определении (3.1.1) $|f'(z_0)| = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|},$ т.е. $|\Delta w| \sim \mathrm{const}\,|\Delta z|$,

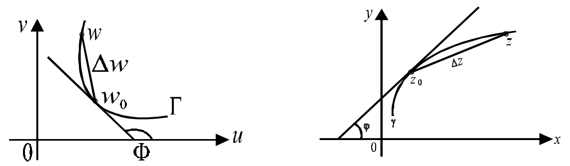

Рис. 3.1.1

где const и есть $|f'(z_0)|$. Следовательно, расстояния между точками z_0 и $z = z_0 + \Delta z$ преобразуются в расстояние между w_0 и $w = w_0 + \Delta w$, так что отношение этих расстояний остается постоянным.

Итак, в данной точке z_0 отражение *f* обладает постоянством угла поворота касательных и постоянством коэффициента растяжения (сжатия); см. рис. 3.1.1.

Отображение с такими свойствами называется *конформным.*

3.2 Правила дифференцирования

1^0 Поскольку производная (3.1.1) есть предел той же структуры, как в случае функций действительного переменного, и сохраняются привычные свойства пределов, то сохраняются и привычные правила дифференцирования:

а) если $f(z) = C,$ где $C = \mathrm{const}$ (постоянное комплексное число), то

$$f'(z) = 0\,;$$

б) $(Cf(z))' = C \cdot f'(z), \qquad C = \mathrm{const}$;

в) $(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$;

г) $(f(z)g(z))' = f'(z)\,g(z) + f(z)g'(z)$;

д) $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ в точках, где $g(z) \neq 0$.

2^0 Справедливо правило дифференцирования сложной функции

$\left(\varphi\left(f(z)\right)\right)' = \varphi'\left(f(z)\right) f'(z).$

Если $w = f(z)$ осуществляет взаимно-однозначное отображение области G (в комплексной плоскости точек z) на $\widetilde{G}$ (в комплексной плоскости точек w), то определено (однозначное) обратное соответствие $z = \varphi(w)$, называемое обратной функцией. Справедлива формула

$\varphi'(w) = \dfrac{1}{f'(z)}$.

3^0 Сохраняется и таблица производных:

1) $z' = 1$;

2) $\left(z^{\alpha}\right)' = \alpha z^{\alpha-1}$;

3) $(\sin z)' = \cos z$;

4) $(\cos z)' = -\sin z$;

5) $(\mathrm{tg}\, z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$;

6) $(\mathrm{ctg}\, z)' = -\dfrac{1}{\sin^2 z}$;

7) $\left(e^z\right)' = e^z$;

8) $\left(a^z\right)' = a^z \mathrm{Ln}\, a$;

9) $(\mathrm{Arc}\ \sin z)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$;

10) $(\mathrm{Arc}\ \cos z)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$;

11) $(\mathrm{Arc\,tg}\, z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$;

12) $(\mathrm{Arcctg}\, z)' = -\dfrac{1}{1+z^2}$.

Эти формулы могут быть выведены в точности также, как в случае функций действительного переменного. Однако, могут быть использованы и определения e^z, $\sin z$, $\cos z$ в виде степенных рядов, а также связи (между собою) функций комплексных переменных. Например, почленное дифференцирование степенного ряда для e^z приводит к результату

$$\left(e^z\right)' = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\right)' =$$

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + n\frac{z^{n-1}}{n!} + \ldots = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots = e^z.$$

Или $\left(a^z\right)' = \left(e^{z \,\mathrm{Ln}\, a}\right)' = e^z \left(z \,\mathrm{Ln}\, a\right)' = e^z \,\mathrm{Ln}\, a$, и т.д.

3.3 Условия дифференцируемости

1^0 Пусть $z = x + i\,y$, и $w = f(z)$ определена в точке z и в некоторой ее окрестности. Запишем $f(z)$ в виде

.

Необходимое условие дифференцируемости *f* в точке *z* содержится в следующем утверждении.

Т е о р е м а 1. Пусть дифференцируема в точке *z*. Тогда существуют частные производные функций *u* и *v* то обеим переменным в точке (x, y), причем в этой точке

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (3.3.1)$$

Соотношения (3.3.1) называется условиями Коши-Римана-Эйлера-Даламбера (чаще говорят: *условия Коши - Римана*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существует $f'(z)$, определяемая как предел вида (3.1.1). В параграфе 3.1. отмечалось (см. п. 1^0), что характер стремления к нулю величины $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ может быть произвольным. Выберем, в частности, случаи

1) $\Delta y = 0$, т.е. $\Delta z = \Delta x$, тогда $\Delta z \to 0$ означает, что $\Delta x \to 0$;

2) $\Delta x = 0$, т.е. $\Delta z = i\,\Delta y$, тогда $\Delta z \to 0$ одновременно с $\Delta y \to 0$.

В обоих случаях переход от точки z к точке Δz вызывает приращение $\Delta w = \Delta u(x, y) + i\,\Delta v(x, y)$.

В первом случае каждое из приращений Δu и Δv *есть приращение по переменной x*, следовательно

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u + i\,\Delta_x v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i\,\frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(3.3.2)

При этом само существование $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ вытекает из существования пределов действительной и мнимой части (при $\Delta z \to 0$) функции ("разностного отношения") $\frac{\Delta w}{\Delta z}$, тогда как сама эта функция имеет предел по условию теоремы.

Аналогично, во втором случае, $\Delta u = \Delta_y u, \quad \Delta v = \Delta_y v$, т.е.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u + i\,\Delta_y v}{i\,\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\Delta_y v}{\Delta y} + \frac{i}{i^2}\,\frac{\Delta_y u}{\Delta y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y},$$

(3.3.3)

Правые части соотношений (3.3.2) и (3.3.3) совпадают, т.к. выражают собою одну и ту же $f'(z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

По определению равенства комплексных чисел имеем отсюда соотношения (3.3.1), что и требовалось доказать.

2^0 З а м е ч а н и е 1. Как известно, дифференцируемость в точке (x, y) функций *u* и *v* (как функций от двух переменных), есть условие более жесткое, чем существование частных производных по обеим переменным. Она (дифференцируемость) означает, что полные приращения Δu и Δv могут быть представлены в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\Delta y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y, \qquad (3.3.4)$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y, \qquad (3.3.5)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - является бесконечно малыми (стремятся к нулю) при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

В результате более детального рассмотрения можно было бы доказать, что для дифференцируемой в точке *z* функции *f* не только существуют указанные в (3.3.1) частные производные, но функции *u* и *v* *дифференцируемы* в точке (x, y).

З а м е ч а н и е 2. Как установлено выше, $f'(z)$ можно вычислить по любой из указанных в (3.3.2), (3.3.3) формул, например,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Так, для

$$e^z = e^{x+i\,y} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

имеем $u(x,y) = e^x\cos y$, $v(x,y) = e^x\sin y$. Значит,

$$\left(e^z\right)' = \left(e^x\cos y\right)'_x + i\left(e^x\sin y\right)'_x = e^x\cos y + i\,e^x\sin y = e^z\,,$$

и мы получили еще одно доказательство формулы 7) таблицы производных.

3^0 Достаточное условие дифференцируемости $f(z)$ в точке z содержится в следующем утверждении.

Т е о р е м а 2. Если $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x,y) и выполнены условия Коши-Римана (3.3.1), то $f'(z)$ существует в точке $z = x + i\,y$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\,\Delta v}{\Delta x + i\,\Delta y}$$

Следует установить, что существует его предел при $\Delta z \to 0$. Согласно условию теоремы Δu и Δv можно представить в виде (3.3.4) и (3.3.5) соответственно. Поэтому

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + (\alpha_1 + i\,\beta_1)\,\Delta x + (\alpha_2 + i\,\beta_2)\,\Delta y}{\Delta x + i\,\Delta y}\,.$$

(3.3.6)

Заметим, что

$$\left|\frac{(\alpha_1 + i\,\beta_1)\,\Delta x + (\alpha_2 + \beta_2)\,\Delta y}{\Delta x + i\,\Delta y}\right| \le \left|\alpha_1 + i\,\beta_1\right|\frac{|\Delta x|}{|\Delta x + i\,\Delta y|} + \left|\alpha_2 + i\,\beta_2\right|\frac{|\Delta y|}{|\Delta x + i\,\Delta y|}\,.$$

(3.3.7)

В правой части (3.3.7)

$$|\Delta x| \le \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \qquad |\Delta y| \le \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

и $$|\Delta x + i\,\Delta y| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Значит правая часть не превосходит бесконечно малой величины

$$\left|\alpha_1 + i\,\beta_1\right| + \left|\alpha_2 + i\,\beta_2\right|,$$

а тогда выражение под знаком модуля в левой части (3.3.7) есть "комплексная" бесконечно малая, которую обозначим через γ: $\gamma \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Далее, заменим $\frac{\partial v}{\partial y}$ на $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ на $\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ в числителе дроби (3.3.6):

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right)}{\Delta x + i\,\Delta y} + \gamma =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\,\Delta y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\,\Delta y)}{\Delta x + i\,\Delta y} + \gamma = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\Delta x} + \gamma.$$

Значит при $\Delta z \to 0$ (а тогда $\Delta x \to 0$, , и, следовательно, $\gamma \to 0$)

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} \to \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\,,$$

т.е. существует предел вида (3.1.1); именно, он равен $\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$. Существование $f'(z)$ доказано.

4^0 Согласно теоремам 1 и 2 замечанию 1 п. 2^0, *дифференцируемость u и* v *в точке* (x,y) *и выполнимость условий Коши-Римана* (3.3.1) *необходимы и достаточны для существования производной* $f'(z)$.

5^0 О п р е д е л е н и е. Функция $w=f(z)$, дифференцируемая в точке z_0 и некоторой ее окрестности, называется *аналитической в точке* z_0.

Функция, аналитическая во всех точках некоторой области *G*, называется *аналитической в этой области.*

Точки *z* комплексной плоскости, в которых однозначная $f(z)$ является аналитической, называются *правильными* точками этой функции, а все остальные точки (в частности, те, где не определена) - *особыми* для $f(z)$.

Согласно п. 4^0 критерием аналитичности $f(z)$ в данной точке *z* (в данной области *G*) является выполнение условий Коши-Римана (3.3.1) в этой точке и некоторой ее окрестности (в области *G*).

П р и м е р 1 Докажем, что $w=z^2$ аналитична во всей комплексной плоскости.

Действительно,

$w=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi,$

т.е. $u(x,y)=x^2-y^2,\quad v(x,y)=2xy.$

Имеем $\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x.$

Условия (3.3.1) выполнены, очевидно, при всех *x* и *y*, т.е. во всей плоскости. Следовательно, $w=z^2$ аналитична во всей комплексной плоскости.

2 Рассмотрим $w=\bar{z}^2$. Имеем

$w=(x-yi)^2=x^2-y^2-2xyi,$ т.е. $u=(x,y)=x^2-y^2,\quad v=-2xy.$

Тогда $\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-2y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-2x.$

Проверяем условия Коши-Римана (3.3.1):

$\begin{cases}2x=-2x\\-2y=2y\end{cases}$; отсюда получаем $x=y=0$.

Итак, в единственной точке $z=0$ условия Коши-Римана выполнены, и, следовательно, в этой точке $w=\bar{z}^2$ имеет производную. Однако, функция ни в одной точке не аналитична (точка дифференцируемости - единственная, и не существует ее окрестности, где дифференцируемость сохраняется).

3.4 Гармонические функции. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части

1^0 В различных вопросах математики и ее приложениях рассматривается так называемое уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}=0.$$

Всякая функция $\sigma=\sigma(x,y)$, удовлетворяющая этому уравнению называется гармонической.

Пусть $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ - функция, аналитическая в некоторой области *G*. Докажем, что в этом случае $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ - гармонические функции. Следует отметить, что из дальнейшего рассмотрения будет следовать существование и непрерывность в *G* всех частных производных второго порядка функций *u* и *v* (будет доказано, что аналитическую функцию f в область G можно дифференцировать сколь угодно много раз). Поэтому тождества (условия Коши-Римана, выполненные в области G)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3.4.1)$$

можно продифференцировать - первое по x, а второе по y, при этом смешанные частные производные второго порядка оказываются равными. Имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \text{ а тогда } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Если теперь первое из тождеств (3.4.1) продифференцировать по y, а второе по x и сложить (почленно), то будем иметь

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

что и требовалось доказать.

2^0 Пусть теперь известна действительная часть $u=u(x,y)$ аналитической функции $w=f(z)$. Тогда, зная частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, мы из условий Коши-Римана (3.4.1) сможем найти и $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. Теперь функцию $v(x,y)$ по ее полному дифференциалу можно восстановить в виде криволинейного интеграла по произвольной траектории интегрирования, расположенной в области G (этот факт был доказан в интегральном исчислении)

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+C, \qquad (3.4.2)$$

где (x_0,y_0) - любая фиксированная точка в области G; C - произвольная постоянная. Аналогично, если известна мнимая часть $v=v(x,y)$ аналитической функции $f(z)$, то из условий Коши-Римана мы определяем $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$; следовательно,

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+C.$$

П р и м е р. Найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой имеет вид $u(x,y)=x^2-y^2+2(x-y)$.

Р е ш е н и е. Поскольку $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, то достаточно определить $v(x,y)$ по формуле (3.4.2). Согласно условиям Коши-Римана (3.4.1) найдем для этого частные производные

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x^2-y^2+2(x-y)\right)'_x=2x+2$$

и
$$\frac{\partial v}{dx}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\left(x^2-y^2+2(x-y)\right)'_y=2y+2\,.$$

Так как найденные выражения определены (непрерывны как функции от x и y) во всей комплексной плоскости, то в (3.4.2) можно выбрать, например, $x_0=0,\ \ y_0=0$. Значит

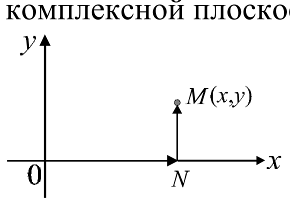

Рис. 3.4.1

$$v(x,y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} (2Y+2)\,dX + (2X+2)\,dY + C\,. \qquad (3.4.3)$$

Траекторию интегрирования $0NM$ выберем, как показано на рисунке (3.4.1); координаты точек: $0(0,0)$; $N(x,0)$; $M(x,y)$. Интеграл (3.4.3) запишем в виде суммы двух: по отрезку ON (на котором $y=0$, и, следовательно, $dy=0$) и NM (на котором $X=x$ постоянен , а значит $dx=0$):

$$v(x,y) = \int\limits_0^x (0+2)\,dX + \int\limits_0^y (2x+2)\,dy + C = 2x + (2x+2)Y\Big|_0^y + C =$$
$$= 2x + 2xy + 2y + C.$$

Следовательно,

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2(x-y) + (2x+2xy+2y)i + Ci =$$
$$= \left(x^2 - y^2 + 2i\,xy\right) + 2\left(x - y + i(x+y)\right) + Ci =$$
$$= (x+iy)^2 + 2\left(x + iy + i(x+iy)\right) + C_i = z^2 + 2(z+iz) + Ci.$$

3.5 Интеграл от функции комплексного переменного

1^0 Понятие интеграла функции $w=f(z)$ по линии L вводится аналогично понятию криволинейного интеграла функции действительного переменного.

Пусть дуга $\cup AB$ линии L задается параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta;$$

при этом точка $M(x,y)$ совершает движение из положения A в положение B при изменении t от α до β. Будем считать, что $x'(t)$ и $y'(t)$ существуют и непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$. Иными словами, дуга $\cup AB$ задается с помощью уравнения

где

при этом непрерывна на $[\alpha,\beta]$.

Пусть, далее, $f(z)$ непрерывна в открытой области G и $\cup AB \subset G$. Разобьем произвольным образом эту дугу на части точками $z_0, z_1, \ldots, z_n$ в направлении от A к B, при этом z_0 совпадает с точкой A, z_n с точ- кой B. На каждой из частичных дуг $\cup z_{k-1}z_k$ произвольным образом выберем по точке η_k $(k=1,2,\ldots,n)$ и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\,\Delta z_k, \qquad (3.5.1)$$

где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ - вектор, идущий из точки z_{k-1} в точку z_k (рис. 3.5.1). Обозначим через s наибольшую из длин этих векторов (хорд): $s = \max\limits_k |\Delta z_k|$.

Сумма (3.5.1) называется интегральной, а предел вида

$$\lim_{s\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\Delta z_k \qquad (3.5.2)$$

- интегралом от функции $f(z)$ по дуге $\cup AB$; он обозначается символом $\int\limits_{\cup AB} f(z)\,dz$.

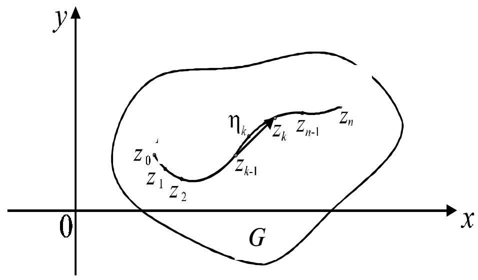

Рис. 3.5.1

Можно доказать, что при сформулированных выше условиях на функцию $f(z)$ и дугу линии L предел (3.5.2) существует и не зависит от способа разбиения $\cup AB$ на части точками z_k и от выбора "промежуточных" точек .

2^0 Из определения п. 1^0 вытекают привычные свойства интеграла:

$$\int\limits_{\cup AB} \left(f_1(z)+f_2(z)\right)dz = \int\limits_{\cup AB} f_1(z)\,dz + \int\limits_{\cup AB} f_2(z)\,dz;$$

$$\int\limits_{\cup AB} \lambda f(z)\,dz = \lambda \int\limits_{\cup AB} f(z)\,dz, \quad \text{где} \quad \lambda = \text{const};$$

3) $\int\limits_{\cup AB} f(z)\,dz = -\int\limits_{\cup BA} f(z)\,dz,$

где $\cup BA$ - та же самая дуга, но с противоположным направлением обхода (от точки B к точке A);

4) если C - произвольная точка на $\cup AB$, то

$$\int\limits_{\cup AB} f(z)\,dz = \int\limits_{\cup AC} f(z)\,dz + \int\limits_{\cup CB} f(z)\,dz,$$

5) $\int\limits_{\cup AB} dz = Z - z_0$,

где z_0 и Z - комплексные числа, изображаемые, соответственно, точками A и B;

6) $\left|\int\limits_{\cup AB} f(z)\,dz\right| \le M\,l,$

где M - любая постоянная, определяемая условием $|f(z)| \le M,\ z \in \cup AB$; l - длина L.

Докажем, например свойство 5). Имеем для $f(z)=1$ интегральную сумму (3.5.1) в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta z_k = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_{n-1} - z_{n-2} + z_n - z_{n-1} = z_n - z_0 = Z - z_0,$$

а тогда и предел (3.5.2) от постоянной $Z - z_0$ равен $Z - z_0$. Свойство 5) установлено.

3^0 Вычисление интеграла (3.5.2) сводится к вычислению *определенного интеграла* комплексной функции действительной переменной *t*:

$$\int\limits_{\cup AB} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(z(t)\right) z'(t)\,dt \qquad (3.5.3)$$

Действительно, произвольное слагаемое в интегральной сумме (3.5.1) имеет вид

$$f(\eta_k)\Delta z_k = f(\eta_k)\left(\Delta x_k + i\,\Delta y_k\right),$$

при этом приращения Δx_k и Δy_k функций $x(t)$ и $y(t)$ (при изменении z от z_{k-1} до z_k) могут быть приближенно представлены в виде дифференциалов:
$\Delta x_k \approx x'(t_k)\Delta t_k$; $\Delta y_k \approx y'(t_k)\Delta t_k$;
здесь t_k - аргумент функции $z(t)$ такой что $z_k = z(t_k)$ и $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Значение $f(\eta_k)$, ввиду непрерывности f, можно приближенно заменить на $f(z_k) = f(z(t_k))$, если $|\Delta z_k|$ достаточно мало; в свою очередь, это достигается (по причине непрерывности $z(t)$) выбором достаточно малых Δt_k. Итак,
$f(\eta_k)\Delta z_k \approx f(z(t_k))(x'(t_k)+y'(t_k))\Delta t_k = f(z(t_k))z'(t_к)\Delta t_k$.
Следовательно, при $\max|\Delta t_k| \to 0$, поведение интегральных сумм (3.5.1) и

$$\sum_{k=1}^{n} f(z(t_k))z'(t_k)\Delta t_k \qquad (3.5.4)$$

совпадает; сумма же (3.5.4) является интегральной для определенного интеграла в правой части (3.5.3). Формула (3.5.3) установлена.
4^0 Формальная подстановка
$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ и $dz = dx + i\,dy$
и вычисления произведения

$$f(z)\,dz = u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\left(v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy\right)$$

приводят нас также к формуле

$$\int_{\cup AB} f(z)\,dz = \int_{\cup AB} u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int_{\cup AB} v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy, \quad (3.5.5.)$$

доказательство которой (подобно п. 3^0) производится сравнением интегральных сумм для криволинейных интегралов в правой части (3.5.5) с суммой (3.5.1).
5^0 П р и м е р ы 1. Вычислить интегралы

а) $J_1 = \int_L z \operatorname{Im} z\,dz$

вдоль отрезка прямой от точки $z_1 = 1 + i$ до $z_2 = 2$ (рис. 3.5.2);

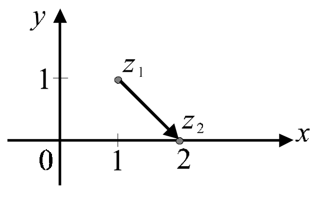

Рис. 3.5.2
б) $J_2 = \int_L |z|\,dz$

вдоль дуги окружности $|z| = 1$, обходимой против часовой стрелки от точки $z_1 = 1$ до $z_2 = i$ (рис. 3.5.3).

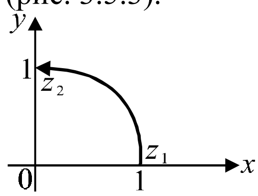

Рис. 3.5.3
Р е ш е н и е. а) Для точки z_1 имеем $x_1 = 1, y_1 = 1$; для z_2 имеем $x_2 = 2,\ y_2 = 0$. Запишем уравнение прямой, соединяющей эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \text{ т.е. } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1},$$

откуда $\qquad y = 2 - x$.

Следовательно, $z = x + iy$ можно записать в виде

$z = x + i(2 - x); \quad 1 \le x \le 2,$

тогда $\operatorname{Im} z = 2 - x; \quad dz = dx - i\,dx.$

Имеем

$$J_1 = {}_{1}^{2}\left(x + i(2-x)\right)(2-x)(1-i)\,dx = (1-i)\,{}_{1}^{2}\left(2x \quad x^2 \quad i(x \quad 2)^2\right)dx$$

$$(1 \quad i)\;\; x^2 \quad \frac{1}{3}x^3 \quad \frac{i}{3}(x \quad 2)^3 \Bigg| \quad (1 \quad i)\;\; 4 \quad \frac{8}{3} \quad 0 \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{i}{3}$$

$$= (1-i)\frac{2+i}{3} = \frac{3-i}{3}.$$

б) Окружность $|z| = 1$ имеет центр в начале координат и радиус $r = 1$, поэтому ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \text{ т.е. } z = \cos t + i \sin t.$$

При этом $dz = (-\sin t + i\cos t)\,dt$. Подставляя $|z| = 1$, и учитывая что $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ на дуге $\cup z_1 z_2$,

имеем $J_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1(-\sin t + i\cos t)\,dt = (\cos t + i\sin t)\Big|_0^{\pi/2} = (0 + i) - (1 + 0) = i - 1.$

2 Вычислить интеграл

$$J = \oint\limits_{|z - z_0| = R} (z - z_0)^n dz,$$

где n - любое целое число; вычисление ведется вдоль окружности $|z - z_0| = R$ (z_0 и $R > 0$ - данные числа) в направлении обхода против часовой стрелки.

Р е ш е н и е. Имеем окружность с центром в точке $z_0 = x_0 + i\,y_0$ радиуса R, следовательно,

$$\begin{cases} x - x_0 = R\cos t \\ y - y_0 = R\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Иначе говоря, $z - z_0 = R(\cos t + i\sin t)$ или $z = z_0 + R e^{it}$; тогда $dz = i\,R e^{it}dt$. При $n \ne -1$ имеем

$$J = \int\limits_0^{2\pi} \left(R e^{it}\right)^n i\,R e^{it} dt = i\,R^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = i\,R^{n+1}\,\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{R^{n+1}}{n+1}\left(e^{i(n+1)2\pi} - 1\right) = \frac{R^{n+1}}{n+1}\left(\cos 2(n+1)\pi + i\sin 2(n+1)\pi - 1\right) = 0.$$

Если $n = -1$, то

$$J = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\,R e^{it}dt}{R e^{it}} = i\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Итак,

$$\int\limits_{|z - z_0| = R} (z - z_0)^n dt = \begin{cases} 0, \;\; n \ne -1, \;\; n - \textit{целое} \\ 2\pi i, \;\; n = -1 \end{cases};$$

3.6 Интегральная теорема Коши

1^0 Пусть *L* - замкнутый контур, целиком расположенный в области *G*. Будем считать, что *L* задан уравнением $z = z(t)$ с непрерывной $z'(t)$, т.е. контур гладкий или хотя бы кусочно-гладкий.

Т е о р е м а К о ш и. Пусть *f* аналитична в *G*, и контур *L* ограничивает односвязную область $D \subset G$. Тогда

$$\oint_L f(z)\,dz = 0.$$

Эту теорему легко доказать при дополнительном предположении, что $f'(z)$ - непрерывна. В силу формул (3.3.2) и (3.3.3) тогда будут непрерывными в *G* все частные производные первого порядка функций $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$. При этих предположениях к каждому из криволинейных интегралов в представлении (см. (3.5.5))

$$\oint_L f(z)\,dz = \oint_L u(x,y)\,dx + \left(-v(x,y)\right)dy + i\oint_L v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy \quad (3.6.1)$$

можно применить формулу Грина:

$$\oint_L u\,dx + (-v)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial(-v)}{dx} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy \qquad (3.6.2)$$

и

$$\oint_L u\,dx + u\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy; \qquad (3.6.3)$$

обход контура *L* в криволинейных интегралах происходит против часовой стрелки.

Согласно условиям Коши-Римана (3.4.1) интеграл в правой части (3.6.3) равен нулю и это же верно для двойного интеграла в (3.6.2), т.к.

$$\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Следовательно, равны нулю и оба криволинейных интеграла; они остаются нулевыми, если изменить направление обхода *L* на противоположное.

Теперь, в силу равенства (3.6.1), получаем утверждение теоремы.

2^0 Заметим, что свойство непрерывности $f'(z)$ вытекает из аналитичности $f(z)$, что будет доказано в дальнейшем. Однако, доказательство будет опираться на теорему Коши, а тогда сама она должна быть установлена иными (гораздо более объемными) рассуждениями. Их суть состоит в следующем.

а) Если Δ - треугольник, лежащий в достаточно малой окрестности точки ι, то в силу аналитичности $f(z)$ для малого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\left|\frac{f(z) - f(\iota)}{z - \iota} - f'(\iota)\right| < \varepsilon, \quad z \in \Delta,$$

откуда $\quad f(z) = f(\iota) + f'(\iota)(z-\iota) + \alpha(z,\iota)(z-\iota),$

где $|\alpha(z,\iota)| < \varepsilon.$ При интегрировании по $z \in \Delta$ последнего равенства имеем

$$\left|\int_\Delta f(z)\,dz\right| = \left|\int_\Delta \alpha(z,\iota)(z-\iota)\,dz\right| \le \text{const}\,\varepsilon,$$

так как интегралы остальных слагаемых обратятся в ноль подобно утверждению, доказанному в п. 1^0. Ввиду произвольности ε интеграл по контуру Δ равен нулю;
б) далее, устанавливается, что интеграл уже по всякому треугольнику равен нулю (иное предположение приводит к противоречию с п. а));
в) результат для треугольного контура переносится на случай произвольной замкнутой ломанной, а затем и на случай произвольной гладкой (кусочно-гладкой) L.
7^0 Заметим также, что теорема Коши оказывается справедливой и в случае, когда $f(z)$ остается аналитической в области D, а на ее границе L является лишь непрерывной.

3.7 Теорема Коши для многосвязной области

1^0 Пусть контуры $L_1, L_2, \ldots, L_n$ и L задаются также, как и в параграфе 3.6, являются замкнутыми и расположены в области G. Предположим, далее, что все L_j находятся внутри L, ограничивают односвязные области и на каждом из L_j и L направление обхода выбрано против часовой стрелки.
Т е о р е м а. Если $f(z)$ аналитична в области G, то

$$\oint_L f(z)\,dz = \oint_{L_1} f(z)\,dz + \oint_{L_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{L_n} f(z)\,dz. \qquad (3.7.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждения проведем для случая $n = 2$, (см. рис. 3.7.1). Соединим контуры L, L_1, L_2 гладкими кривыми $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. При этом область D, ограниченная линией L, оказалась разбитой на две односвязные области D_1 и D_2 с границами Γ' и Γ'', обходимыми в положительном направлении (т.е. в том направлении, при котором области D_1 (при обходе Γ') и D_2 (обход Γ'') остаются слева). По теореме Коши для односвязной области

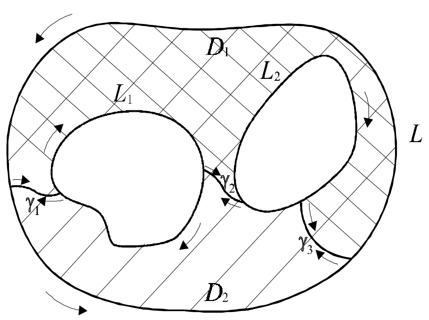

Рис. 3.7.1

$$\int_{\Gamma'} f(z)\,dz = 0, \quad \int_{\Gamma''} f(z)\,dz = 0;$$

следовательно

$$\int_{\Gamma'} f(z)\,dz + \int_{\Gamma''} f(z)\,dz = 0,$$

т.е. $\displaystyle\int_{\Gamma'\cup\Gamma''} f(z)\,dz = 0.$

Но объединение границ Γ' и Γ'' состоит из L (обходимой против часовой стрелки), L_1 и L_2 (обход - по часовой стрелке) и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, обходимых дважды в противоположных направлениях, что показано на рисунке. Следовательно (свойство 4 п. 2^0 параграфа 3.5).

$$\oint\limits_{-L_1} f(z)\,dz + \oint\limits_{-L_2} f(z)\,dz + \int\limits_{-\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{-\gamma_2} f(z)\,dz +$$

$$+ \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz + \oint\limits_{L} f(z)\,dz = 0, \qquad (3.7.2)$$

где знак "-" перед обозначением контура указывает на обход по часовой стрелке. Согласно свойству 3) п. 2^0 параграфа 3.5 интегралы по $-\gamma_1$ и γ_1 отличаются только знаком и поэтому взаимно уничтожаются; то же самое верно для интегралов и по $-\gamma_2$ и γ_2. Теперь, меняя направление обхода по $-L_1$ и $-L_2$ получаем (3.7.2) в виде

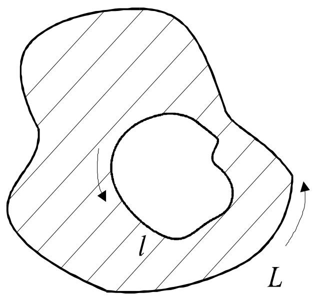

Рис. 3.7.2

$$-\oint\limits_{L_1} f(z)\,dz - \oint\limits_{L_2} f(z)\,dz + \oint\limits_{L} f(z)\,dz = 0,$$

а это и есть утверждение теоремы при $n = 2$. Общий случай $n \ge 2$ доказывается точно также: записываем равенство типа (3.7.1), содержащее интегралы по всем $-L_j$, $-\gamma_j$, γ_j и L $(J = 1, 2, \ldots, n)$, и откуда и вытекает (3.7.1).

2^0 Если сохраняются предположения п. 1^0 для границ двусвязной области L (внешней) и l (внутренней), то важным следствием теоремы является (см. рис. 3.7.2) равенство

$$\int\limits_{L} f(z)\,dz = \int\limits_{\ell} f(z)\,dz.$$

3.8 Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница

1^0 Докажем следующее утверждение. Пусть $f(z)$ непрерывна в области G. Интеграл по всякому замкнутому контуру L, расположенному в области G, равен нулю, тогда и только тогда, когда интеграл по любой дуге (расположенной в G) зависит только от положения начальной и конечной точек дуги.

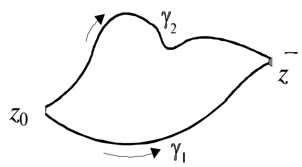

Рис. 3.8.1

Действительно, пусть

$\oint\limits_{L} f(z)\,dz = 0$ для любого $L \subset G$.

Выберем произвольную дугу γ_1, соединяющую точки z_0 и z. Всякая другая дуга γ_2, соединяющая эти же точки, образуют вместе с γ_1 замкнутый контур (см. рис. 3.8.1), поэтому

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz = 0,$$

где знак "-" перед γ_2 означает путь от z к z_0. Меняя направление на γ_2, имеем
$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$ или $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz,$
т.е. независимо от пути интегрирования $\int_{\cup z_0 z} f(z)dz$ - один и тот же.
В указанном случае этот интеграл удобнее обозначить в виде
$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz.$$
Обратно, если L - произвольный замкнутый контур в G, то в случае независимости интеграла от пути, соединяющего любые z_0 и z, имеем
$$\oint_L f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{-\gamma_2} f(z)dz = \int_{z_0}^{z} f(z)dz + \int_{z}^{z_0} f(z)dz\ .$$

Последние два интеграла можно вычислить (согласно предположению) вдоль отрезка прямой, соединяющего z_0 и z, а тогда они отличаются лишь знаком. Значит,

$$\oint_L f(z)\,dz = 0\ .$$

2^0 В частности, из теоремы Коши вытекает, что *интеграл* аналитической функции *вдоль любой дуги*, соединяющей z_0 и z, *зависит лишь от положения* z_0 и z; z_0 и z и упомянутые дуги предполагаются расположенными в области аналитичности функции f.
3^0 Т е о р е м а. В предположениях п. 2^0 функция

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$$

является аналитической в G и

$$\Phi'(z) = f(z)\ . \qquad (3.8.1)$$

Д о к а з а т е л ь т в о. Пусть z - произвольна, $z \in G$. В силу независимости интеграла от пути (см. п. 2^0) для любого приращения Δz имеем

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta z} = \frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left\{\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)\,ds - \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds\right\} = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(s)\,ds.$$
(3.8.2)

В последнем интеграле траекторией интегрирования можно выбрать отрезок прямой, соединяющей z и $z+\Delta z$. В этом случае (свойство 5 пункта 2^0 параграфа 3.5)
$$\int_{z}^{z+\Delta z} ds = \Delta z\ .$$

Оценим, используя (3.8.2) и свойство 6 п. 2^0 параграфа 3.5, следующее выражение

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z}f(s)\,ds-f(z)\Delta z\right|=$$

$$\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z}f(s)\,ds-f(z)\int_z^{z+\Delta z}ds\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z}\big(f(s)-f(z)\big)ds\right|\le$$

$$\le\frac{1}{|\Delta z|}\Big(\max\big|f(s)-f(z)\big|\Big)|\Delta z|\le\max|f(s)-f(z)|;$$

здесь наибольшее значение модуля разности значений функции берется по всем $s\in[z,\,z+\Delta z]$, а так как *f* аналитична (а значит и непрерывна), то указанное значение можно сделать меньшим любого $\varepsilon>0$ для достаточно малых $|\Delta z|$. По определению предела это означает, что

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}=f(z).$$

Последнее соотношение равносильно (3.8.1). Ввиду произвольности $z\in G$ имеем, в частности, аналитичность $\Phi(z)$ в *G*. Теорема доказана.

4^0 Утверждение п. 3^0 означает, что "интеграл с переменным верх-ним пределом"

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z}f(s)\,ds \qquad (3.8.3)$$

есть *первообразная* для $f(z)$. Для другой первообразной $F(z)$ имеем

$$\big(\Phi(z)-F(z)\big)'=f(z)-f(z)=0,$$

откуда действительная и мнимая части $U(x,y)$ и $V(x,y)$ разности $\Phi(z)-F(z)$ обладает свойством (см. (3.3.2)

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}=0,\ \text{ т.е. }\ \frac{\partial U}{\partial x}=0\ \ и\ \ \frac{\partial V}{\partial x}=0.$$

По условиям Коши-Римана имеем также

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial y}=0.$$

Следовательно полные дифференциалы $dU=0,\ \ dV=0$, откуда постоянными оказываются $U(x,y)$ и $V(x,y)$. Вместе с ними постоянна и разность $\Phi(z)-F(z)$. Таким образом,

$$\Phi(z)=F(z)+C, \qquad (3.8.4)$$

где *C* - некоторое постоянное комплексное число.

5^0 Имеет место *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int_{z_0}^{z}f(s)\,ds=F(z)-F(z_0) \qquad (3.8.5)$$

где $F(z)$ - любая первообразная аналитической функции *f*.

Действительно, при $z=z_0$ в (3.8.4) получаем

$$0=F(z_0)+C,\ \text{т.е. }\ C=-F(z_0).$$

Теперь, согласно (3.8.4), получаем

$$\Phi(z)=F(z)-F\big(z_0\big).$$

Вспоминая определение (3.8.3), приходит к формуле (3.8.5).

3.9 Формула Коши

1^0 Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитична в области G, L - контур, ограничивающий однообразную область D, целиком лежащий в G и обходимый против часовой стрелки; характер линии L описан в п. 1^0 параграфа 3.6. Тогда для любой точки z_0, лежащей в D (т.е. рас-положенной внутри L) имеет место следующая *интегральная формула*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}. \qquad (3.9.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем в D окружность $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ столь малого радиуса ρ, чтобы

$$\left| f(z) - f(z_0) \right| < \varepsilon; \qquad (3.9.2)$$

это возможно т.к. $f(z)$, будучи аналитической, является и непрерывной в D. Обозначим через γ указанную окружность, выберем на ней направление обхода против часовой стрелки и заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 1 \qquad (3.9.3)$$

согласно примеру 2 п. 5^0 параграфа 3.5. Теперь по теореме Коши для двухсвязной области (п. 2^0 параграфа 3.7) имеем

$$\oint_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \oint_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}. \qquad (3.9.4)$$

Указанная теорема применима, поскольку $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ аналитична вместе с $f(z)$ в области D, из которой исключена точка z_0, так что, в частности, $\varphi(z)$ аналитична в области между контурами γ и L и на самих этих контурах.

Оценим разность между интегралом (3.9.1) и $f(z_0)$, воспользовавшись (3.9.3) и (3.9.4):

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} - f(z_0) \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right|. \qquad (3.9.5)$$

Оценивая модуль интеграла (свойство 6 п. 2^0 параграфа 3.5), имеем правую часть (3.9.5) не превосходящей

$$\frac{1}{2\pi |i|} \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi p = \varepsilon,$$

поскольку имеет место неравенство (3.9.2) и соотношение $|z - z_0| = \rho$ на окружности γ. Теперь, в силу произвольности ε имеем левую часть полученного неравенства

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} - f(z_0) \right| < \varepsilon$$

равной нулю. Следовательно, формула (3.9.1) доказана.

2^0 В предположениях п. 1^0 в любой точке z_0 *производная* $f'(z)$ также *оказывается аналитической* функцией и имеет место формула

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^2}. \qquad (3.9.6)$$

Действительно, "разностное отношение" в силу (3.9.1) имеет вид

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{1}{2\pi ih}\left(\oint\limits_L \frac{f(z)\,dz}{\left(z-(z_0+h)\right)}-\oint\limits_L \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi ih}\oint\limits_L \left((z-z_0)-(z-z_0-h)\right)\frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)}dz, \qquad (3.9.7)$$

где через h обозначено произвольное приращение Δz с достаточно малым значением $|h|$. Переходя к пределу при $h\to 0$ (предельный переход под знаком интеграла может быть аккуратно обоснован), получаем формулу (3.9.6). Поскольку z_0 может быть замена на любую точку $\tilde{z}_0$ (из достаточно малой окрестности точки z_0), то $f(z)$ аналитична в точке z_0.

3^0 Рассуждения п. 2^0 можно повторить для $f''(z_0),\ f'''(z_0)$ и т.д. Следовательно, для любого n в каждой точке $z_0\in D$ существует производная $f^{(n)}(z_0)$ и для нее справедливо соотношение

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad (3.9.8)$$

Формула (3.9.8) можно получить формально дифференцированием по z_0 соотношения (3.9.1) n раз под знаком интеграла.

4^0 Т е о р е м а М о р е р а. Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области G и интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру равен нулю, то $f(z)$ аналитична в G.

Это утверждение является обратным по отношению к установленному ранее свойству, что интеграл по замкнутому контуру от аналитической функции - равен нулю. Выше мы установили, что функция

$$F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(s)\,ds$$

является аналитической (при условиях теоремы этот интеграл не зависит от пути, соединяющего точки z_0 и z), причем доказательство сохранилось бы, если $f(z)$ требовать лишь непрерывной в G; далее, было установлено, что $F'(z)=f(z)$. Согласно результату п. 3^0 аналитической будет и $F'(z)$, совпадающая с $f(z)$, а это и есть доказываемый результат.

5^0 Неожиданной, на первый взгляд, является следующая теорема.

Т е о р е м а Л и у в и л л я. Пусть функция $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости и существует постоянная M такая, что для всех z выполнено неравенство $|f(z)|\le M$. Тогда $f(z)$ тождественно равна постоянной.

Другими словами, аналитическая во всей плоскости функция, отличная от постоянной, обладает свойством, что ее модуль (хотя бы в одной точке) достигает сколь угодно большого значения так, например, можно указать точки, в которых $|\sin z|$ коль угодно велик.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу аналитичности $f'(z)$ (вместе с $f(z)$) во всей плоскости имеем

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_R}\frac{f(s)}{(s-z)^2}ds, \qquad (3.9.9)$$

где γ_R - окружность с центром в точке z, сколь угодно большого радиуса R, обходимая в направлении против часовой стрелки. На этой окружности $|s-z|=R$, следовательно,

$$\left|\frac{f(s)}{(s-z)^2}\right|\le\frac{M}{R^2};$$

тогда интеграл (3.9.9) имеет оценку

$$|f'(z)|\le\frac{1}{2\pi}\frac{M}{R^2}2\pi R=\frac{M}{R},$$

где $2\pi R$ - длина окружности γ_R. Но $M = \text{const}$, R - коль угодно велико, тогда $|f'(z)| = 0$ при всех z. Отсюда легко следует (см. рассуждения п. 4^0 параграфа 3.8), что $f(z)$ - постоянна, что и утверждалось.

6^0 Важным приложением теоремы Лиувилля является так называемая *основная теорема алгебры*: всякое *уравнение* вида

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

имеет хотя бы один корень.

Действительно, предположим противное. Тогда знаменатель дроби

$$f(z) = \frac{1}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} \qquad (3.9.10)$$

всегда отличен от нуля, а значит (вычислением производной) убеждаемся, что $f(z)$ аналитична во всей плоскости. Далее, очевидно, что (см. п. 3^0 параграфа 2.2)

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}} = 0,$$

т.е. $|f(z)| < 1$ для достаточно больших $|z|$, например, в области, где $|z| > R$ с достаточно большим R. В круге $|z| \le R$ модуль $f(z)$ также ограничен, т.к. $f(z)$ непрерывна в круге. Получается, что аналитическая $f(z)$ имеет ограниченный модуль, а тогда, по теореме Лиувилля, $f(z) = \text{const}.$ Но это противоречит ее определению (3.9.10). Следовательно, теорема доказана.

7^0 Примеры 1 Вычислить

$$J = \oint_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z^2 + iz} dz$$

вдоль окружности: а) $|z| = \frac{1}{2}$; б) $|z - 2| = 1$; в) $|z + i| = \frac{1}{2}$.

Направление обхода - против часовой стрелки.

Решение. а) Запишем интеграл в виде

$$J = \oint_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z(z+i)} dz = \oint_\gamma \frac{e^{\pi z}(z+i)^{-1}}{z - 0} dz .$$

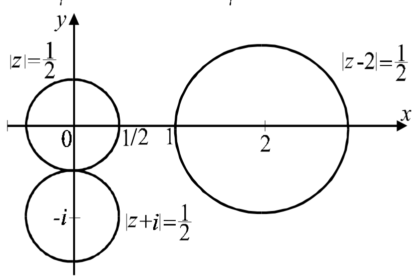

Рис. 3.9.1

Поскольку внутри окружности $|z| = 1/2$ содержится точка $z_0 = 0$ и не содержится $z = -i$ (см. рис. 3.9), то для функции $f(z) = e^{\pi z}(z+i)^{-1}$ применима интегральная формула Коши в виде

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) .$$

В нашем случае $J = 2\pi i\, e^{\pi \cdot 0}(0 + i)^{-1} = 2\pi$.

б) $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z(z+i)}$ является аналитической в круге $|z - 2| \le 1$, т.к. нули знаменателя $z_0 = 0$ и $z_1 = -i$ лежат вне этого круга (рис. 3.9.1). По теореме Коши (для односвязной области) имеем тогда $J = 0$.

в) $f(z)=e^{\pi z}z^{-1}$ является аналитической в круге $|z+i|=\frac{1}{2}$ с центром $(-i)$ радиуса $R=\frac{1}{2}$. Тогда по формуле Коши

$$J=\oint_{\gamma}\frac{e^{\pi z}z^{-1}}{z-(-i)}dz=2\pi i e^{\pi i}(-i)^{-1}=-2\pi(\cos\pi+i\sin\pi)=2\pi .$$

2 Вычислить $J=\oint_{\gamma}\left(\frac{z}{z-3i}\right)^3 dz$ вдоль окружности $|z-3i|=3$, обходимой в направлении против часовой стрелки.

Р е ш е н и е. Запишем интеграл в таком виде, чтобы была применима формула п. 3^0

$$\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0). \qquad (3.9.11)$$

В нашем случае $J=\oint_{\gamma}\frac{z^3}{(z-3i)^{2+1}}=\frac{2\pi i}{2!}\left(z^3\right)''\Big|_{z=3i}$, т.к. $f(z)=z^3,\quad n=2,\ z_0=3i.$ Вычисляя правую часть полученного равенства, будем иметь

$$J=\frac{2\pi i}{12}6z\Big|_{z=3i}=\pi i 18i=-18\pi .$$

3 Вычислить $J=\oint_{\gamma}\frac{\sin iz\, dz}{\left(z^2+4\right)^2}$,

где γ - окружность $|z-i|=2$, обходимая против часовой стрелки.

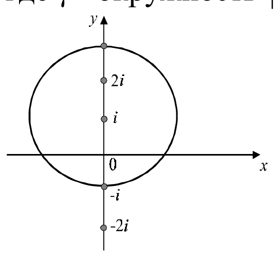

Рис. 3.9.2

Р е ш е н и е. Приведем интеграл J к виду (3.9.6). Для этого заметим, что $z^2+4=z^2-(2i)^2=(z-2i)(z+2i)$, и в круге $|z-i|\le 2$ содержится лишь одна из двух точек (именно $z=2i$), в которой знаменатель обращается в ноль (см. рис. 3.9.2). Теперь

$$J=\oint_{\gamma}\frac{\sin iz}{(z-2i)^2(z+2i)^2}dz=\oint_{\gamma}\frac{(z+2i)^{-2}\sin iz}{(z-2i)^2}dz .$$

Применим формулу (3.9.11) с $f(z)=(z+2i)^{-2}\sin iz,\quad z_0=2i,\quad n=1$.

Имеем

$$J=2\pi i\left((z+2i)^{-2}\sin iz\right)'\Big|_{z=2i}=$$

$$=2\pi i\left(-2(z+2i)^{-3}\sin iz+i(z+2i)^{-2}\cos iz\right)\Big|_{z=2i}=$$

$$=2\pi i\left(-2(4i)^{-3}\sin(-2)+i(4i)^{-2}\cos(-2)\right)=2\pi i\left(\frac{2\sin 2}{-64i}+\frac{i\cos 2}{-16}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\frac{i\sin 2}{32}-\frac{i\cos 2}{16}\right)=\frac{\pi}{16}(2\cos 2-\sin 2).$$

3.10 Упражнения к главе 3

1^0 Найти точки, в которых данная $w=f(z)$:

а) дифференцируема; б) аналитична.

1) $w = e^{1-2z}$; 2) $w = \dfrac{\cos z}{2}$ 3) $w = \bar{z}^2 - z + 1$; 4) $w = \dfrac{\bar{z}}{z}$;

5) $w = z\left(|z| - 1\right)$; 6) $w = \operatorname{Re} z^2$.

2^0 Найти аналитическую функцию $w = f(z)$, для которой:

а) действительная часть равна $u(x,y) = 4x^2 - 4y^2$; б) мнимая часть равна $v(x,y) = 3e^{2x}\sin 2y$.

3^0 Найти угол поворота α и коэффициент растяжения k при отображении $w = f(z)$ в точке z_0, если

1) $w = z^2 - 1 + i$, $z_0 = 1$; 2) $w = i - e^z$, $z_0 = -i\pi$.

4^0 Вычислить интеграл

1) $\int\limits_L z \operatorname{Im}(z - i)\,dz$ вдоль линии $z = x + ix^2$ от точки $z_1 = 1 + i$ до точки $z_2 = -1 + i$;

2) $\int\limits_L z|z|\,dz$ вдоль дуги окружности $z = 2e^{i\varphi}$ в направлении против часовой стрелки от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 2i$;

3) $\int\limits_L \left(1 - z^2\right)dz$ вдоль отрезка прямой, соединяющей точки

а) $z_1 = i - 1$ и $z_2 = 1 - i$; б) $z_1 = -2$ и $z_2 = 4i$;

4) $\int\limits_L (z - 2\operatorname{Re} z)\,dz$ вдоль ломанной, соединяющей точки $z_1 = 2$, $z_2 = 2 + 2i$, $z_3 = 2i$.

5^0 Вычислить интеграл по замкнутому контуру L в направлении против часовой стрелки:

1) $\oint\limits_L \dfrac{\sin iz}{z - \dfrac{\pi i}{2}}\,dz$; L - окружность $|z| = 2$;

2) $\oint\limits_L \dfrac{z e^{-z}}{z^2 + 1}\,dz$; L - окружность а) $|z - i| = 1$; б) $|z + 1| = 1$; в) $|z - 3i| = 1$;

3) $\oint\limits_L \dfrac{\cos(z - i)}{(z - i)^3}\,dz$; L - окружность $2|z| = 3$;

4) $\oint\limits_L \dfrac{z + i}{z(z - 2)^2}\,dz$; L - окружность $|z - 2| = 1{,}9$;

5) $\oint\limits_L \dfrac{e^{i\pi z}}{\left(z^2 - 1\right)^2}\,dz$; L - окружность $|z + 2| = 2$.

Глава 4 РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

4.1 Степенные ряды. Дальнейшие свойства

1^0 Рассмотрим ряд по степеням разности $(z - z_0)$, где z_0 - данное комплексное число:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = C_0 + C_1 (z - z_0) + \ldots + C_n (z - z_0)^n + \ldots \qquad (4.1.1)$$

Выше (в параграфе 2.4) установлено, что *областью сходимости* (4.1.1) *является некоторый круг* $|z - z_0| < R$; исключим из рассмотрения тривиальный случай $R = 0$ (случай единственной точки сходимости). Тогда при любом ρ, $0 < \rho < R$, степенной ряд (4.1.1) равномерно сходится (и даже мажорируем) в замкнутом круге $\overline{U}(z_0, \rho)$, состоящем из точек z, таких, что $|z - z_0| \le \rho$ (см. п.п. 4^0, 6^0 параграфа 2.4).

Если функция $\varphi(z)$ равномерно по модулю ограничена, т.е. если существует $M = \text{const}$, такая, что $|\varphi(z)| \le M$ при $z \in \overline{U}(z_0, \rho)$, то ряд

$$C_0\,\varphi(z) + C_1\,\varphi(z)(z - z_0) + \ldots + C_n\,\varphi(z)(z - z_0)^n + \ldots \qquad (4.1.2)$$

остается мажорируемым в том же круге. Действительно, пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

является мажорантным (т.е. сходящимся и таким, что $\left|C_n(z - z_0)\right|^n \le a_n$) для (4.1.1), тогда мажорантным для (4.1.2) оказывается, очевидно, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\, a_n\ .$$

2^0 Установим возможность *почленного интегрирования и дифференцирования степенных рядов* и (при дополнительных предположениях о рядов вида (4.1.2) в круге сходимости. Эта возможность будет вытекать, как частный случай, из следующих утверждений.

3^0 Т е о р е м а 1 Пусть члены равномерно сходящегося в круге $\overline{U}(z_0, \rho)$ ряда

$$f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots \qquad (4.1.3)$$

непрерывны и L - некоторая дуга, расположенная в этом круге. Тогда, если $f(z)$ - сумма ряда (4.1.3), то возможно почленное интегрирование по дуге L:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L f_0(z)\,dz + \int_L f_1(z)\,dz + \ldots + \int_L f_n(z)\,dz + \ldots \qquad (4.1.4)$$

Заметим, что утверждение теоремы уже включает в себя сходимость ряда (4.1.4); дуга L (по которой производится интегрирование), как и выше (в главе 3) предполагается параметрически заданной $(z = z(t))$ и гладкой (либо кусочно-гладкой).

Доказательство проводится также, как в случае соответствующего свойства для рядов из функций действительного переменного. Во-первых (как отмечалось в п. 2^0 параграфа 2.4), $f(z)$ - непрерывна в указанном выше круге, т.е. интеграл от нее (вдоль L) существует. Во-вторых, достаточно доказать (по определению сходимости ряда), что разность

$$\int_L f(z)\,dz - \left(\int_L f_0(z)\,dz + \int_L f_1(z)\,dz + \ldots + \int_L f_n(z)\,dz\right)$$

является при $n \to \infty$ бесконечно малой последовательностью. Действительно, модуль этой разности обладает оценкой

$$\left|\int_L f(z)\,dz - \int_L \left(f_0(z) + f_1(z)\,dz + \ldots + f_n(z)\,dz\right)\right| =$$

$$= \left|\int_L \left(f(z) - S_n(z)\,dz\right)\right| \le \left(\max_{z \in L}\left|f(z) - S_n(z)\right|\right) l, \qquad (4.1.5)$$

где $S_n(z)$ - частная сумма ряда (4.1.3), l - длина дуги L. Ввиду равномерной сходимости (см. п. 2^0 параграфа 2.4) ряда (4.1.3) правая часть (4.1.5) стремится к нулю (при $n \to \infty$), чем и доказано соотношение (4.1.4).

В частности, если $\varphi(z)$ непрерывна в круге $\overline{U}(z_0; \rho)$ (а значит, и ограничена по модулю), то мажорируемый (и, следовательно, равномерно сходящийся к своей сумме) ряд (4.1.2) допускает почленное интегрирование.

4^0 Т е о р е м а 2 Если члены ряда (4.1.3) аналитичны в круге $\bar{U}(z_0;\rho)$ и ряд равномерно сходится к сумме $f(z)$ в этом круге, то и $f(z)$ аналитична для всех $z \in \bar{U}(z_0;\rho)$.
Схема доказательства этой теоремы состоит в следующем:
а) если γ - некоторая окружность с центром в точке z_0, целиком лежащая внутри $\bar{U}(z_0;\rho)$, то для любого $z \in \bar{U}(z_0;\rho)$

$$\frac{f(s)}{s-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(s)}{s-z}, \quad s \in \gamma,$$

причем члены ряда аналитичны (как функции от s) вместе с $f_n(s)$;
б) согласно теореме 1 возможно почленное интегрирование ряда по окружности γ (обход - в направлении против часовой стрелки):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(s)\,ds}{s-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f_n(s)}{s-z}ds\right)$$

или, по интегральной формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(s)\,ds}{s-z} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z),$$

а тогда сумма ряда (4.1.3) $f(z)$ оказывается совпадающей с интегралом "типа Коши":

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(s)\,ds}{s-z};$$

в) этот интеграл представляет собой аналитическую в $\bar{U}(z_0,\rho)$ функцию (подобное утверждение обсуждалось выше), т.е. $f(z)$ - аналитична в указанном круге.
В частности, *сумма степенного ряда* (4.1.2) *аналитична* в круге сходимости.

4.2 Ряд Тейлора

1^0 Пусть $w = f(z)$ однозначна и аналитична в круге G с центром в некоторой точке z_0.
Поставим задачу: разложить $f(z)$ в ряд по степеням разности $(z - z_0)$.
Подобная задача для функций действительной переменной при некоторых условиях на функцию (помимо дифференцируемости сколь угодно много раз) решалась в виде *ряда Тейлора*. В случае аналитической $f(z)$ интегральная формула Коши позволяет "напрямую" получать аналог тейлоровского ряда.
2^0 При условиях п. 1^0 для любой $z \in G$ *имеет место разложение*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \ldots,$$

(4.2.1)
что будет доказано ниже, в п. 4^0.
3^0 Другая форма (4.2.1) оказывается следующей:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \qquad (4.2.2)$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^{n+1}}; \qquad (4.2.3)$$

γ - любая окружность с центром в точке z_0, обходимая против часовой стрелки и целиком лежащая в области G.
Разложения (4.2.1) и (4.2.2) эквивалентны, т.к. коэффициенты при $(z-z_0)^n$ записываемые в виде $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, совпадают с правой частью (4.2.3):

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(s)\,ds}{(s - z_0)^{n+1}}$$

ввиду формулы (3.9.8) для $f^{(n)}(z_0)$.

4^0 Итак, достаточно доказать (4.2.2). Так как $f(z)$ аналитична в *G*, то по формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{f(s)}{s - z_0}\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{s - z_0}}ds\,, \qquad (4.2.4)$$

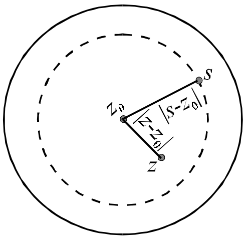

Рис. 4.2.1

где *z* - произвольная точка в области *G*, а окружность γ с центром в точке z_0 проведена так, что *z* расположена внутри ее. При таком выборе контура интегрирования (см. рис. 4.2.1)

$$|z - z_0| < |s - z_0|\,,$$

т.е. $$q = \frac{z - z_0}{s - s_0}$$

обладает свойством $|q| < 1$.

Теперь $$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots\,.$$

является сходящимся рядом как сумма геометрической прогрессии (сходимость при $|q| < 1$ доказывается в точности также, как для случая прогрессии с действительными членами). Под знаком интеграла (4.2.4) получается ряд (по степеням $\frac{z - z_0}{s - s_0}$), сходящийся при каждом *z*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{f(s)}{s - z_0}\left(1 + \frac{z - z_0}{s - z_0} + \frac{(z - z_0)^2}{(s - z_0)^2} + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{(s - z_0)^n} + \ldots\right)ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{f(s)}{s - z_0}ds + \frac{1}{2\pi i}(z - z_0)\oint\limits_{\gamma} \frac{f(s)}{(s - z_0)^2}ds + \frac{1}{2\pi i}(z - z_0)^2\oint\limits_{\gamma} \frac{f(s)}{(s - z_0)^3}ds + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}(z - z_0)^n\oint\limits_{\gamma} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}}ds + \ldots\,. \qquad (4.2.5)$$

Почленное интегрирование возможно в силу теоремы 1 парагра- фа 4.1, условия которой выполнены, т.к.:

а) $f(s)$ аналитична в *G*, следовательно, существует постоянная *M*, такая что $|f(s)| \le M$ на γ;

б) $|s - s_0| = r = \text{const}$, где *r* - радиус выбранной окружности γ;

в) ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(s)}{s - z_0}\left(\frac{z - z_0}{s - z_0}\right)^n$$

имеет тогда в качестве мажорантного сходящийся числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{r}|q|^n\,,$$

где $q = \dfrac{z - z_0}{s - z_0}$, так что $|q| < 1$.

Разложение (4.2.5) теперь совпадает с утверждением (4.2.2), если учесть определение (4.2.3) коэффициентов C_n.

Следовательно, соотношения (4.2.1) и (4.2.2) доказаны. Заметим, что контур интегрирования в доказательстве мы выбрали так, чтобы точка *z* была заключена внутри его, однако, по теореме Коши для многосвязного контура (см. параграф 3.7), в качестве γ можно выбрать *любую* окружность с центром в z_0, лежащую в *G*.

5^0 При $z_0 = 0$ (4.2.1) называется рядом Маклорена:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \ldots$$

В частности, равенства (2.5.1), (2.5.2), (2.5.3), выведенные ранее как *определения* соответствующих элементарных функций могут теперь быть истолкованы, как *разложения* в ряды Маклорена. Список подобных разложений можно дополнить.

Например,

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \ldots, \qquad |z| < 1.$$

6^0 Пусть теперь $f(z)$ аналитична в произвольной точке z_0. Ее можно выбрать в качестве центра круга (достаточно малого радиуса), в котором $f(z)$ остается аналитичной, а затем разложить $f(z)$ в ряд Тейлора (4.2.1). Говорят, что (4.2.1) *есть разложение* $f(z)$ *в окрестности* z_0.

Если $f(z_0) = 0$, то разложение в окрестности z_0, записанное в форме (4.2.2) имеет вид

$$f(z) = C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + \ldots + C_n(z - z_0)^n + \ldots, \qquad (4.2.6)$$

т.к. $C_0 = f(z_0) = 0$. Может случится так, что

$C_0 = C_1 = \ldots = C_{n-1} = 0$, но $C_n \neq 0$,

т.е.

$$f(z) = C_n(z - z_0)^n + C_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \ldots. \qquad (4.2.7)$$

В этом случае точку z_0 называют *нулем n-го порядка* функции $f(z)$, а при $n = 1$ (случай (4.2.6)) - *простым нулем*. Итак, (см. (4.2.1)), если

$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0,$ но $f^{(n)}(z_0) \neq 0$,

то $z = z_0$ является нулем *n*-го порядка для $f(z)$.

7^0 Т е о р е м а. Пусть $f(z)$ аналитична в точке z_0. Эта точка является нулем *n*-го порядка для $f(z)$ тогда и только тогда, когда существует аналитическая (в точке z_0) функция $\varphi(z)$, такая, что $\varphi(z_0) \neq 0$ и

$$f(z_0) = (z - z_0)n\varphi(z) = 0, \qquad (4.2.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если □- ноль *n*-го порядка, то согласно (4.2.7)

$$f(z) = (z - z_0)^n \left(C_n + C_{n+1}(z - z_0) + \ldots\right), \qquad (4.2.9)$$

причем степенной ряд

$C_n + C_{n+1}(z - z_0) + \ldots$

служит остатком для (4.2.2), а значит имеет тот же круг сходимости. Следовательно, его сумма $\varphi(z)$ аналитична в указанном круге, причем

$\varphi(z_0) = C_n + 0 + 0 + \ldots = C_n \neq 0$.

Тогда равенство (4.2.9) принимает вид (4.2.8), где $\varphi(z_0) \neq 0$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $f(z)$ представима в виде (4.2.8), где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$. Разложим $\varphi(z)$ в ряд (4.2.2) в окрестности точки z_0:

$\varphi(z) = \widetilde{C}_0 + \widetilde{C}_1(z - z_0) + \ldots$, где $\widetilde{C}_0 \neq 0$ (т.к. $\varphi(z_0) \neq 0$).

В силу (4.2.8) в указанной окрестности

$f(z) = \widetilde{C}_0(z - z_0)^n + \widetilde{C}_1(z - z_0)^{n+1} + \ldots;\qquad \widetilde{C}_0 \neq 0$.

Следовательно, $\phi(\zeta)$ имеет разложение вида (4.2.7). Переобозначив коэффициенты в виде , получаем (4.2.7), где $C_n \neq 0$, т.е. z_0 оказалась нулем n-го порядка для $f(z)$, что и есть обратное утверждение. Теорема полностью доказана.

П р и м е р. Найти нули функции

$f(z) = (z^2 + 1)^3 e^{-\pi z}$.

Р е ш е н и е. Так как

$z^2 + 1 = z^2 - (i)^2 = (z - i)(z + i)$,

то

и в то же время .

В первом случае $\boxed{}$ является нулем 3-го порядка для $\boxed{}$, поскольку при $\varphi(z) = (z + i)^3 e^{-\pi z}$ имеет

$\varphi(i) = (2i)^3 e^{-\pi i} = -8i(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = 8i \neq 0.$

Во втором случае имеем $z_0 = -i$ нулем 3-го порядка для $f(z)$. Здесь

$\varphi(z) = (z - i)^3 e^{-\pi i}$

и

.

Итак, $f(z)$ имеет нулями 3-го порядка точки i и .

4.3 Ряд Лорана

1^0 Рассмотрим ряд вида

(4.3.1)

содержащий как неотрицательные, так и отрицательные степени разности $z - z_0$. Если (4.3.1) записать в виде

(4.3.2)

то первый из рядов можно рассматривать как степенной:

$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}\omega^n$, где $\omega = \dfrac{1}{z - z_0}$.

В своем круге сходимости $|\omega| < R$ его сумма есть некоторая однозначная аналитическая функция ; тривиальный случай $R = 0$ исключим из рассмотрения. Будучи суперпозицией аналитических функций, как функция от z (где $z \neq z_0$) также аналитична при $|\ \ |$. Итак, для $|\ \ |$, имеем: φ аналитична во "внешности" круга где ; не исключен и случай (если). Точно также, второй ряд в (4.3.2) сходится при с некоторым ; пусть . Сумма этого ряда есть некоторая (аналитическая в этом круге) функция .

Рис. 4.3.1

Если , то существует общая область, в которой сходятся оба ряда в (4.3.2), т.е. оказывается, что (4.3.1) имеет областью сходимости некоторое кольцо с центром в точке :

(рис. 4.3.1); функция .

Теперь возникает обратная задача: пусть однозначна и аналитична в некотором кольце . Можно ли ее разложить в степенной ряд вида (4.3.1) и, если можно, то каковы коэффициенты этого ряда?

3^0 Рассуждения, приводящие к разложению в ряд (4.3.1), будут носить тот же характер, что в параграфе 4.2. Приведем внутри кольца окружности и с центром в точке так, чтобы *z* оказалась внутренней точкой в новом кольце (т.е. между и); пусть c - окружность (с центром в точке *z*) столь малого радиуса, что также расположена между и . Теперь по теореме Коши для многосвязной области (ограниченной c, и) имеем

если теорему применить к аналитической функции .

По интегральной формуле Коши

следовательно,

(4.3.3)

Представим дробь на окружности в виде

т.к. при имеем на , а значит

.

Подобным образом на

,

т.к. обладает свойством на .

Почленно интегрируя в (4.3.3) полученные ряды (обоснование почленного интегрирования было приведено в параграфе 4.2), получим

.

(4.3.4)

Если во второй сумме изменить нумерацию по формуле и обозначить

, ,

то приходим к доказываемому разложению вида (4.3.2). При вычислениях контуром интегрирования (согласно теореме Коши для двусвязной области) может быть выбрана любая окружность l (с центром в точке), расположенная целиком в данном кольце (вместо ранее рассмотренных контуров и).

Итак, согласно (4.3.4)

(4.3.5)

где

(4.3.6)

4^0 Поставленная задача решена: , аналитичная в указанном кольце, может быть представлена в виде суммы ряда (4.3.5), называемой *рядом Лорана*; коэффициенты ряда вычисляются по формулам (4.3.6).

Впрочем, иногда можно применить другие, более простые приемы. Продемонстрируем их на примерах.

Рис. 4.3.2

П р и м е р 1 Функцию разложить в ряд по степеням .

Р е ш е н и е. Центром кольца (или колец), в которых будет происходить разложение, должна быть, согласно условию, точка . Особой точкой является , лежащая на окружности с центром радиуса (см. рис. 4.3.2), т.е. на окружности . Следовательно, предстоит вести рассмотрение для и отдельно. В каждом случае воспользуемся суммой бесконечной геометрической прогрессии

.

В первом случае представим

Здесь для ; следовательно,

Во втором случае

для (а это верно при) имеем

Итак,

в круге

и

для .

П р и м е р 2 разложить по степеням z.

Р е ш е н и е. Функция аналитична при всех , т.е. для . В этой области воспользуемся разложением Маклорена функции (см.(2.5.3)) при :

.

Почленно умножая на , получаем разложение

4.4 Изолированные особые точки

1^0 Особая точка функции , т.е. точка, в которой не аналитична, называется *изолированной,* если в некоторой окрестности не существует других особых точек для . Другими словами, аналитична в некоторой окрестности точки , но не в самой этой точке.

Окрестностью точки служит "кольцо" вида , для которого .

Разложение Лорана в этом "кольце" называем *рядом Лорана в окрестности данной изолированной* особой точки.

Будем называть ряд

(4.4.1)

правильной частью, а ряд

(4.4.2)

- *главной* частью ряда Лорана

. (4.4.3)

Возможны такие случаи:
а) Ряд Лорана (4.4.3) состоит из своей правильной части, т.е.

Тогда точку называем *устранимой* особой точкой (из дальнейших рассуждений станет ясно, почему выбран такой термин);
б) главная часть ряда Лорана содержит только конечное количество членов; например, она имеет вид

т.е.

В этом случае точку *называем полюсом n-го порядка;* в частности, при . - *простым полюсом.*
в) если главная часть (4.4.2) имеет бесконечное количество ненулевых членов, то точка называется *существенно особой.*

2^0 Рассмотрим случай а). Имеет место

Т е о р е м а 1 Если в некоторой окрестности особой точки функция ограничена, т.е. существует постоянная *M*, такая, что во всех точках этой окрестности, то - устранимая особая точка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что для всех . Имеем согласно (4.3.6) для произвольной окружности *l* с центром в точке радиуса (столь малого, что окружность *l* целиком расположена в указанной окрестности), что

,

если повторить рассуждения п. 5^0 параграфа 3.9. В силу произвольной малости все , что и утверждалось.

Итак, в окрестности устранимой особой точки

(4.4.4)

Если в точке доопределить функцию суммой этого ряда при , т.е. положить , то (4.4.4) как сумма степенного ряда в круге будет аналитична (в том

числе, аналитична и в точке). Тем самым мы как бы устранили "особенность" в точке , сделав эту точку правильной.
Например, при из соотношения (2.5.2) получаем

т.е. точка является особой и устранимой. Достаточно положить при , чтобы эта точка стала правильной.

3^0 Рассмотрим случай б).
Т е о р е м а 2 Точка тогда и только тогда является полюсом *n*-го порядка, когда существует аналитическая в точке функция , такая что и

. (4.4.5)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть - полюс *n*-го порядка, тогда (по определению)

другими словами

. (4.4.6)

По условию (т.к. в окрестности точки - аналитична), правильная часть ряда Лорана - сходящийся (в окрестности точки) степенной ряд, сумму которого можно считать аналитичной и в точке , доопределив ее значением (см. п. 2^0). Следовательно, в фигурных скобках в (4.4.6) записана некоторая аналитическая функция , т.е. мы пришли к (4.4.5); при этом .
Обратно, пусть имеет вид (4.4.5) и . Разложив в ряд вида (4.2.2), имеем

(4.4.7)

где . Таким образом, мы имеем в разложении (4.4.7) Лорана коэффициент перед не равным нулю, т.е. оказывается полюсом *n*-го порядка. Теорема полностью доказана.
Согласно (4.4.5), - полюс *n*-го порядка для тогда и только тогда, когда эта точка является нулем *n*-го порядка для функ- ции .

Т е о р е м а 3. Точка является полюсом (*n*-го порядка) функции тогда и только тогда, когда

.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно формуле (4.4.5) в точке , являющейся полюсом *n*-го порядка

,

т.к. существует в силу аналитичности в точке и .

Обратно, если

, то ,

а тогда точка являются нулем (некоторого n-го порядка) для

, т.е. ,

где аналитична в точке и (см. (4.2.8)).

Теперь

где аналитична в точке т.к. .

Следовательно, имеем вид (4.4.5), а тогда, по теореме 2, - полюс n-го порядка.

Теорема 3 доказана.

4^0 Рассмотрим, наконец, случай в) существенно особой точки . Поведение в ее окрестности описывается следующей теоремой Сохоцкого-Вейерштрасса.

Т е о р е м а 4 Для любого и любого комплексного числа B в каждой окрестности точки найдется хотя бы одна точка , такая что

.

Смысл теоремы состоит в том, что в достаточно малых окрестностях существенно особой точки может принять значение, сколь угодно близкое к наперед заданному произвольному числу B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: для заданных B и найдется такая окрестность U точки , что

при всех .

Но тогда функция

, (4.4.7)

определена и ограничена в указанной окрестности точки , т.к.

.

Следовательно, согласно теореме 1, точка является устранимой особой точкой для .

Тогда при есть сумма степенного ряда (4.4.4), т.е. равна некоторой аналитической функции. При этом не исключено, что первые несколько коэффициентов в (4.4.4) равны нулю, т.е. при некотором .

Согласно (4.4.7)

. (4.4.8)

Функция является аналитичной в окрестности точки . Действительно, вместе с все значения из достаточно малой окрестности остаются ненулевыми, поскольку аналитична, а значит и непрерывна в этой окрестности. Согласно (4.4.8) для ограничена в окрестности точки , т.е. - устранимая особая точка; для (4.4.8) означает, что - полюс m-го порядка. В обоих случаях получаем противоречие с условием теоремы.

Значит, утверждение теоремы 4 установлено.

В иной форме теорема Сохоцкого-Вейерштрасса звучит так: если - существенно - особая точка функции , то для любого комплексного числа B найдется последовательность точек , такая, что и

;

Найдется также и последовательность , такая, что

.

5[0] П р и м е р. Определить характер каждой особой точки функции

а) ; б) ; в) ; г) .

Р е ш е н и е. а) Запишем в виде

.

Изолированными особыми точками являются и . Рассмотрим случай :

, где .

В точке функция аналитична, при этом . Теперь, согласно теореме 2 (см. (4.4.5)) видим, что - полюс третьего порядка.

Аналогично,

, где

- аналитична в точке и ; т.о. и точка - полюс третьего порядка.

б) достаточно рассмотреть при в силу периодичности тангенса. Поскольку , и при , то следует определить "кратность" указанных нулей. Так как , то согласно разложению (2.5.2) имеем

при этом аналитична для и .

Значит, ; где

для аналитической в точке функции , так что .

В силу (4.4.5) является простым полюсом для ; точно также, из представления получаем, что - простой полюс. С учетом периодичности (период) все точки вида - простые полюса для

в) , где согласно (2.5.1)

из этого представления вытекает, что

, где

- аналитична в точке и Следовательно, - простой полюс функции .

г) Запишем в виде . Воспользовавшись разложением Маклорена (п. 5^0 параграфа 4.2) логарифмической функции для аргумента (вместо z) имеем

Теперь мы видим, что - существенно особая точка для .

4.5 Упражнения к главе 4

1^0 Разложить данную функцию в ряд Тейлора в окрестности данной точки , пользуясь стандартными разложениями:

а) ;

б) ;

в) .

2^0 Найти нули функции и определить порядок каждого из них:

а) ; б) ; в) ;

г) .

3^0 Разложить в ряд Лорана данную функцию в окрестности данной точки :

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д)

4^0 Найти изолированные точки данных функций и указать их характер (для полюсов - указать их порядок):

а) ; б) ; в) ;

г) ; д) .

Глава 5 ВЫЧЕТЫ

5.1 Основная теорема о вычетах

1^0 Пусть - *правильная или изолированная особая точка* однозначной функции . Тогда аналитична в некоторой окрестности точки . Выберем произвольную окружность с центром в точке , целиком расположенную в указанной окрестности и направление обхода против часовой стрелки на .

Величину

(5.1.1)

назовем *вычетом* функции относительно точки и обозначим в виде Выч . При сформулированных условиях интеграл (5.1.1) существует и, в силу теоремы Коши для многосвязной (именно, двусвязной) области (см.(3.7.3)), не зависит от выбора контура интегрирования , расположенного в указанной окрестности точки .

2^0 В разложении в окрестности в ряд Лорана

интеграл (5.1.1) оказывается значением *именно коэффициента* (см. (4.3.6) при):

= Выч .

Тогда для правильной или устранимой особой точки имеем всегда Выч .

Обратное, вообще говоря, неверно, т.к. в случае полюса или существенно особой точки может оказаться .

П р и м е р 1 Найти Выч .

Р е ш е н и е. Используем разложение (2.5.3), взяв в качестве аргумента :

тогда в окрестности точки

Теперь мы видим, что - существенно особая точка данной функции, но член, содержащий (случай) в ее разложении отсутствует, т.е. . Значит, искомый вычет равен нулю.

П р и м е р 2 Найти Выч .

Р е ш е н и е. Так как в точке функция - аналитична и в круге не содержится особых точек для ; читателю рекомендуется сделать рисунок), то искомый вычет равен нулю.

3^0 Пусть - замкнутый контур, гладкий или кусочно-гладкий, обходимый против часовой стрелки и ограничивающий односвязную область , а функция однозначна и аналитична на , а также в области D за исключением n изолированных особых точек . Следующий результат называется основной теоремой о вычетах.

Т е о р е м а. Имеет место равенство

Выч .

Рис. 5.1.1

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим n окружностей с центрами в особых точках столь малых радиусов, что каждый из полученных кругов содержит ровно одну особую точку (свой центр). Обход на каждой из них выбирается против часовой стрелки (рис. 5.1.1). В силу теоремы Коши для составного контура имеем

или

Выч ,

что и утверждалось.

5.2 Вычет относительно полюса

1^0 Пусть - *простой полюс.* Докажем, что

Выч (5.2.1)

Так как в окрестности точки

,

где - сумма степенного ряда, являющегося правильной частью ряда Лорана, то

Выч . (5.2.2)

При этом предел при существует (именно, он равен , т.к. как сумма степенного ряда аналитична, а значит и непрерывна в точке . Но тогда

Согласно (5.2.2) теперь получаем формулу (5.2.1)

2^0 Если , где и аналитичны в точке , и является *нулем первого порядка* для , причем , то имеет место соотношение

Выч . (5.2.3)

Действительно, согласно формуле (5.2.1)

Выч , (5.2.4)

поскольку . Предел числителя дроби в (5.2.4) равен , предел знаменателя

по определению производной. Следовательно,

Выч ,

что и утверждалось.

П р и м е р 1. Найти Выч .

Р е ш е н и е. Так как и точка - простой полюс для , причем , то по формуле (5.2.3) имеем

Выч .

П р и м е р 2. Вычислить

,

где - окружность , обходимая против часовой стрелки.

Р е ш е н и е. Так как функция аналитична при всех z,

то

имеет два простых полюса в круге Мы намерены использовать основную теоремы о вычетах, поэтому определяем (на основании (5.2.3))

Выч Выч =

Выч Выч .

Теперь

(Выч +Выч .

3^0 Рассуждения, использовавшие в п. 1^0, можно и применить и для нахождения вычета функции , аналитичной в окрестности точки , относительно полюса n-го порядка . В окрестности этой точки

,

где сумма правильной части ряда Лорана является аналитической в точке . Умножив обе части последнего равенства на , имеем

(5.2.5)

При в указанной окрестности точки равны между собой и производные обеих частей равенства

Дифференцируя второй, третий, ..., и наконец, раз, получаем, что коэффициент перед становится равным , а остальные члены, содержавшие множители в равенстве (5.2.5), обратятся в ноль, т.к. . Следовательно,

. (5.2.6)

Последнее слагаемое содержит множитель , поэтому дифференцирование раз члена превратит его в сумму произведений, каждое из которых содержит множитель Если теперь перейти к пределу при в (5.2.6), то согласно последнему рассуждению имеем

а тогда из равенства (5.2.6) получаем

,

откуда

Выч . (5.2.7)

Формулу (5.2.7) можно рассматривать как обобщение (5.2.1) на случай полюса n-го порядка, .

П р и м е р. Найти Выч .

Р е ш е н и е. Имеем

,

поэтому точка является полюсом 3-го порядка. По формуле (5.2.7) получаем при

:

Выч

.

5.3 Вычисление несобственных интегралов

1^0 Рассмотрим функцию , которая *однозначна и аналитична* в *верхней полуплоскости* за *исключением конечного числа изолированных особых точек*. Пусть также существуют положительные числа *M* и , такие что вне круга радиуса с центром в начале координат, т.е. при , имеет место оценка

. (5.3.1)

Обозначим через полуокружность , в верхней полуплоскости (рис. 5.3.1).

Тогда при сформулированных условиях имеет место равенство

. (5.3.2)

Действительно, т.к. при в силу соотношения (5.3.1), то

, (5.3.3)

где - длина рассматриваемой полуокружности . При правая часть (5.3.3) стремится к нулю, а тогда стремится к нулю и модуль интеграла, содержащегося в (5.3.2). Соотношение (5.3.2) доказано.

2^0 Условию (5.3.1) удовлетворяет всякая функция , имеющая разложение в ряд Лорана вида

Действительно, в этом случае

, (5.3.4)

где - сумма ряда, записанного в скобках. Заметим (опуская аккуратное доказательство), что

поэтому остается ограниченной при . Следовательно, из соотношения (5.3.4) будет вытекать оценка (5.3.1), а тогда для рассматриваемых в п. 2^0 функций справедливо утверждение (5.3.2).

3^0 Утверждение (5.3.2) справедливо также для *рациональных функций* вида

,

где и -многочлены соответствующих степеней, и не имеет нулей на действительной оси. В самом деле, все полюсы функции - это нули многочлена , и, следовательно, в верхней полуплоскости их конечное число. Далее, многочлен имеет степень , т.е. степень *n* знаменателя дроби остается большей или равной степени .

Тогда вычисляя предел (при) дроби (путем деления на старшую степень каждого члена числителя и знаменателя), получаем некоторое число. Следовательно, эта дробь остается ограниченной при :

откуда .

Условие (5.3.1) выполнено, т.е. соотношение (5.3.2) оказывается справедливым также для рассматриваемых рациональных функций.

4^0 *Несобственный интеграл*

определим в виде . (5.3.5)

Т е о р е м а. Пусть - изолированные особые точки функции , расположенные в верхней полуплоскости, при этом удовлетворяет условиям п. 1^0 и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда несобственный интеграл (5.3.5) существует и

Выч .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим полуокружность столь большого радиуса *R*, что все особые точки расположены внутри ; пусть (см.рис.5.3.1). Пусть - контур, состоящий из отрезка оси абсцисс и полуокружности ; обход на выбираем в направлении против часовой стрелки. Тогда

Рис. 5.3.1

при этом на отрезке имеем и , т.е.

(5.3.6)

Согласно основной теореме о вычетах, применимой к интегралу по , имеем

Выч

а тогда (5.3.6) принимает вид

Выч .

Перейдем в этом равенстве к пределу при . В силу (5.3.2) имеем

Выч ,

что и есть утверждение теоремы.

5^0 Можно доказать также, что для четной , такой, что удовлетворяет условиям п. 1^0, имеют место равенство

Выч , (5.3.7)

а для нечетной

Выч , (5.3.8)

здесь - любое, а особые точки функции лежат в верхней полуплоскости.

5.4 Примеры вычисления интегралов функций действительного переменного с помощью вычетов

1^0 Докажем формулы

а) б)

В случае а) используем формулу (5.3.7); здесь - четна. Функция

имеет два простых полюса ; в верхней полуплоскости расположена точка .
Следовательно

Выч = Выч =

=

Мы воспользовавшись формулой (5.2.3) при вычислении вычета.

В случае б) применяем равенство (5.3.8) для нечетной .

Вычисляя, как и выше, вычет функции относительно , получаем результат б).
Читателю рекомендуется сделать подробнее выкладки.

З а м е ч а н и е. Мы не останавливаемся на обосновании применимости формул (5.3.7) и (5.3.8) для рассматриваемых здесь функций .

2^0 Вычислим интеграл

.

Имеем рациональную функцию

;

Степень числителя , знаменатель имеет степень , так что . При этом

;

ее полюсы второго порядка и лежат на оси *OY*. Значит, удовлетворяет условиям п. 3^0 параграфа 5.3, и можно применить теорему пункта 4^0 того же параграфа. В верхней полуплоскости расположен полюс (для определенности считаем); тогда

Выч .

Указанный вычет найдем по формуле (5.2.7); . Имеем

Выч

Теперь, в силу четности получаем

.

3^0 Получим формулу для вычисления интегралов вида

,

где - рациональная функция действительных переменных *u*, *v*, непрерывная как функция от *t* на .

Докажем, что

Выч , (5.4.1)

где - все полюсы функции

(5.4.2)

внутри окружности .

а) б) ,

где использована постановка (так что и) и хорошо известное значение интеграла Пуассона

.

4^0 Последовательно применяя формулу (6.4.3) при целом , получаем

,

поскольку (см. п. 3^0, а)). Итак,

(6.4.5)

в случае формула остается верной, т.к. .

Если (6.4.3) и свойство б) п. 3^0 применить в случае , то получаем

;

аналогично

и т.д.

5^0 Докажем, что

. (6.4.6)

Ограничимся рассмотрением частного случая: *p* - действительное положительное число; однако соотношение (6.4.5) остается справедливым и при комплексных *p*, для которых . Имеем

.

Положим , тогда , и . Следовательно,

,

что и утверждалось.

При имеем, согласно (6.4.5) и (6.4.6)

.

З а м е ч а н и е. Функция при перестает быть оригиналом, т.к. имеет бесконечный разрыв в точке . Однако рассуждения, использованные только что, показывают, что преобразование Лапласа выполнимо и в этом случае и приводит к результату (поскольку , то существует). Следовательно, соотношение (6.4.6) в только что указанном смысле, справедливо для всех . В частности (см. п. 3^0, б)),

т.е. .

6^0 Найдем, например, изображение функции . Применяя (6.4.6) и теорему смещения, имеем

,

причем, согласно замечанию в п. 5^0, результат справедлив при всех . В частности,

.

7^0 П р и м е р. Найти изображение оригинала

Р е ш е н и е. Запишем выражение для оригинала в виде (6.1.1):

используя теорему запаздывания и (6.4.6), (6.3.3), получим

.

6.5 Дифференцирование и интегрирование оригиналов

1^0 Пусть - оригинал и

Теорема дифференцирования оригинала. Имеет место соотношение

. (6.5.1)

В частности, если , то

,

т.е. дифференцирование оригинала приводит к умножению его изображения на параметр p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью интегрирования по частям получаем

(6.5.2)

Осталось доказать, что

. (6.5.3)

Если - показатель роста и, как обычно, , то (см. рассуждения в п. 2^0 параграфа 6.2)

при ,

чем установлено (6.5.3), а значит (в силу (6.5.2)) и утверждение (6.5.1).

2^0 Найдем изображение второй производной оригинала, используя уже найденное соотношение (6.5.1):

Итак, если является оригиналом (удовлетворяет условиям а)-в) п. 2^0 параграфа 6.1), то

(6.5.4)

Аналогичны рассуждения для получения изображений третьей и последующих производных; так, если , , - оригиналы, то

Для n-ой производной получаем соотношение:

.

В случае, если начальные значения и ее производных равны нулю, т.е.

, (6.5.5)

то

;

т.е. n - кратное дифференцирование оригинала при условии (6.5.5) приводит к умножению на его изображения.

3^0 Рассмотрим вопрос о преобразовании Лапласа первообразной

(6.5.6)

оригинала . Прежде всего отметим, что удовлетворяет всем условиям существования оригинала. Действительно, при (первообразная от нулевой функции равно нулю), - кусочно непрерывна вместе с и, наконец,

,

если считать (а это можно предполагать без ограничения общности, увеличив, если требуется, показатель роста).

Т е о р е м а. Если , то

. (6.5.7)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть - изображение оригинала . Тогда ,
при этом (см. (6.5.6))
,
т.е. . Но , т.е. , и, одновременно с этим, .
Следовательно, , т.е. или, что то же самое , что и утверждалось.

6.6 Дифференцирование и интегрирование изображений

1^0 Пусть . Выше уже отмечалась аналитичность в полуплоскости .
Т е о р е м а 1 Имеет место соотношение
.
Таким образом, дифференцирование изображения влечет за собой умножение оригинала на . Следует отметить, что - это оригинал.
Условия а), б) п. 2^0 параграфа 6.1, очевидно, выполнены. В силу того, что степенная функция растет медленнее показательной (именно, при любом), получаем
, где - сколь угодно близко к нулю; таким образом, и условие в) выполнено.
Доказательство теоремы содержится в соотношении (6.2.4).
С л е д с т в и е. Имеет место соотношение
.
Действительно, после второго дифференцирования оригинал умножится (согласно теореме 1) на , т.е.
.
Рассуждая подобным образом и далее, приходим к утверждению следствия.
2^0 Рассмотрим вопрос о том, что произойдет с оригиналом если изображение проинтегрировать. При этом будем предполагать, что удовлетворяет условием а)-в) п. 2^0 параграфа 6.1 и что интеграл - сходящийся.
Т е о р е м а 2 Имеет место соотношение
.
Приведем схему доказательства. Пусть - изображение для , т.е.
.
По теореме 1 имеем

.

Интегрируя по параметру *p* последнее равенство, получим

, т.е. .

Но (это вытекает из оценки для интеграла Лапласа, полученной в процессе доказательства теоремы параграфа 6.2), следовательно

что означает совпадение интеграла с изображением для .

П р и м е р. Найти изображение оригинала:

а) ; б) .

Р е ш е н и е. а) Поскольку , то деление оригинала на t приводит к интегрированию изображения (теорема 2):

, т.е.

но последнее выражение равно . Итак,

.

б) Имеем . На основании теоремы 2

Итак,

З а м е ч а н и е. В обоих случаях данные функции имеют разрыв при . Чтобы убедиться в их ограниченности в любой окрестности этой точки, достаточно найти соответствующий предел:

(в последнем случае использовано правило Лопиталя). В свою очередь, ограниченность данных функций в окрестности означает выполнимость для них требования в) п. 2^0 параграфа 6.1, которое использовалось в теореме 2.

6.7 Теоремы умножения изображений и оригиналов

1^0 Вопросы, обсуждаемые в этом параграфе, и многие другие вопросы опираются на понятие *свертки* двух функций. Ею называется следующий интеграл, зависящий от параметра:

. (6.7.1)

В левой части (6.7.1) указано обозначение свертки функций *f* и *g*; предполагается существование (при каждом *t*) интеграла (6.7.1); например, предполагается непрерывность (или кусочная непрерывность) на некотором отрезке функций *f* и *g*; .

2^0 *Свойства свертки*. а) , т.е. свертка коммутативна.

Для доказательства в интеграле (6.7.1) сделаем замену переменных , тогда *r* изменяется от *t* до . Имеем

,

что и утверждалось.

б) Свертка оригиналов также является оригиналом.

Для доказательства этого тезиса проверим условия а)-в) п. 2^0 параграфа 6.1. Во-первых, при имеем в (6.7.1) также и , т.е. . Следовательно, . Во-вторых, при условии непрерывности (или кусочной непрерывности) *f* и *g* интеграл с переменным верхним пределом (6.7.1) обладает этим же свойством непрерывности (кусочной непрерывности); аккуратную проверку этого факта опускаем. Наконец, т.к. где и - некоторые постоянные, мы имеем

. (6.7.2)

Можно считать (как и выше) положительными числами, тогда при имеем правую часть (6.7.2) не превосходящей . Теперь, в силу (6.7.1)

поскольку . Итак, условие в) п. 2^0 параграфа 6.1 также выполнено (с постоянными и вместо и соответственно).

3^0 В качестве примеров свертки отметим следующие формулы:

а) ; б) ; в) .

Докажем, например, формулу а) с помощью интегрирования по частям

что и утверждалось. Формулы б) и в) доказываются аналогично.

4^0 Найдем изображение свертки.

Т е о р е м а у м н о ж е н и я и з о б р а ж е н и й. Пусть

,

тогда

.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интеграл Лапласа для свертки имеет вид

. (6.7.3)

Рис. 6.7.1

Полученный двукратный интеграл можно рассматривать как двойной интеграл по бесконечной треугольной области D, изображенной на рис. 6.7.1. Переменим порядок интегрирования; с помощью определения несобственного интеграла (в виде предела при интеграла по) и сведения рассмотрения к ограниченной треугольной области, можно было бы обосновать возможность "перестановки" интегралов. Так как в области D будет также , , то интеграл (6.7.3) приобретает вид

во внутреннем интеграле (по t) была сделана замена ; при этом , и . Теперь мы получили:

(6.7.4)

причем в правой части имеем именно произведение интегралов, т.к. интеграл по s не зависит от переменной . Правая часть (6.7.4) и есть , так что теорема доказана.

5^0 В качестве примеров применения теоремы п. 4^0 установим формулы

а) ; б) ; в) .

В случае а) имеем ; ; следовательно , что и утверждалось. Формулы б) и в) доказываются аналогично.

6^0 Выше установлено, что *свертке оригиналов соответствует произведение их изображений*. Справедливо и *обратное утверждение: произведению оригиналов* *и* *соответствует свертка их изображений*

. (6.7.5)

Здесь интегрирование производится по прямой , где - действительное число (см. рис. 6.7.2), определяемое условием ;

Рис. 6.7.2

в свою очередь и - показатели роста оригиналов f и g.

Доказательство утверждения

и доказательство независимости (при сформулированных условиях) интеграла (6.7.5) от выбранного мы не приводим.

В частности, при имеем

.

6.8 Упражнения к главе 6

1^0 Найти изображения оригиналов:

а) ; б) ; в) ; г) .

2^0 Найти изображение оригиналов:

а) ; б) .

Указание: выразить (на основании определения) гиперболическое функции через показательные.

3^0 Найти изображение оригиналов:

а) ; б) ; в) .

Указание: понизить степени тригонометрических функций.

4^0 Найти изображение оригиналов:

а) ; б) ; в) .

Указание: преобразовать в сумму (разность) произведение тригонометрических функций.

5^0 Найти изображение оригиналов:

а) б)

6^0 Пользуясь теоремами дифференцирования и интегрирования изображения, найти изображения оригиналов:

а) ; б) ; в) .

7^0 Доказать формулы б), в) п.п. 3^0, 5^0 параграфа 6.7.

Глава 7 ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

7.1 Теорема обращения

1^0 Рассмотрим задачу, *обратную* нахождению интеграла Лапласа: по *заданному изображению* *восстановить оригинал* . Пусть - показатель роста оригинала (см. параграфа 6.1).

Т е о р е м а. Если в области функция является изображением оригинала , то

(7.1.1)

во всех точках t, где - непрерывна. При этом интегрирование в (7.1.1) производится по произвольной вертикальной прямой , где .

Один из возможных инструментов доказательства - использование интеграла Фурье для представления функции , где . Эта функция - кусочно непрерывна вместе с и т.е. интегрируема с модулем по всей действительной числовой оси. При этих условиях и, например, кусочной монотонности на каждом конечном интервале (что выполняется для практически всех встречающихся в практике оригиналов) имеем

. (7.1.2)

Интеграл Фурье, содержащийся в правой части равенства (7.1.2), сходится при всех *t* и совпадает с в каждой точке *t* непрерывности .

Если обозначить и вспомнить, что при , то получаем (7.1.2) в виде

,

поскольку внутренний интеграл является интегралом Лапласа для оригинала .

Умножая обе части полученного равенства на и внося этот множитель под знак интеграла, получим

,

поскольку - есть снова *p*, и , если учесть, что *x* - постоянная величина. При такой замена переменных интегрирование, производившееся по мнимой оси , преобразуется в интегрирование по вертикальной прямой . Итак, при каждом мы получили формулу (7.1.1), причем, в силу произвольности выбора *x*, результат (7.1.1) от *x* не зависит.

Представление (7.1.1) называют *формулой Меллина*.

2^0 В пункте 1^0 мы предполагали, что заданная - уже является изображением некоторого оригинала. Укажем (без доказательства) те достаточные условия, при которых заданная функция комплексного переменного действительно является изображением:

а) - аналитична в области при некотором ;

б) в указанной области (равномерно относительно), если .

в) для всех *p*, таких, что имеет место соотношение

(где).

При сформулированных условиях восстанавливается по формуле Меллина.

3^0 Рассмотрим вопрос *о вычислении интеграла* (7.1.1) если выполнено условие при (см. условие б) в п. 2^0). Пусть имеет лишь конечное число особых точек (скажем, n штук). Тогда вертикальную прямую можно выбрать так, что все особые точки расположены левее ее: следует выбрать *x* достаточно большим. Как оказывается, из основной теоремы о вычетах будет тогда следовать, что

Выч

где - произвольно. Поэтому, согласно формуле Меллина

Выч . (7.1.3)

4^0 П р и м е р. . Найти .

Р е ш е н и е. Очевидно, что выполнено условие , если . Функция при каждом t аналитична за исключением точек .

Случай 1. . Тогда , так что - устранимая особая точка (вычет относительно этой точки равен нулю). Следовательно, сократив дробь, приходим к рассмотрению функции , для которой - простой полюс

Выч

Следовательно, в силу (7.1.3), ; в частности, если a - действительное число, то . Если же , где , то

для исходного изображения

,

что согласуется с таблицей оригиналов и их изображений.

Случай 2. . Тогда достаточно рассмотреть . Рассуждения, аналогичные вышеприведенным, дают:

;

в частности, для получаем .

Случай 3. . Имеем , и точка является полюсом второго порядка для . Тогда, в силу (7.1.3),

Выч

Случай 4. . Имеем и

Выч .

Случай 5. . Имеем по формуле (7.1.3)

Выч Выч .

Поскольку каждая из точек служит простым полюсом, то

.

Например, при получим для

.

Каждая из формул, полученных в случаях 3 - 5 легко проверяется также обратным действием: нахождением изображения для полученного оригинала.

7.2 Нахождение оригиналов для дробно-рациональных функций

1^0 Как мы видели в примере п. 4^0 параграфа 7.1, применение формулы Меллина (ее следствия (7.1.3)) даже для табличных изображений приводит к довольно сложным выкладкам. Однако, для дробно-рациональных можно воспользоваться приемами достаточно элементарного характера.

2^0 *Простейшая дробь* .

В результате выделения полного квадрата приходим к представлению

где .

Имеем

и применим теперь формулы (6.3.4), (6.3.6) п. 2^0 параграфа 6.3. Согласно теореме смещения аргумент мог возникнуть за счет умножения соответствующего аргумента на , т.е.

или

соответственно знаку "+" или "-" перед .

3^0 *Простейшая дробь* может быть преобразована к виду

Обозначив , получим

.

В случае знака "+" перед согласно теореме смещения получим

.

В случае же знака "-" тригонометрические функции заменяются на соответствующие гиперболические.

П р и м е р. Найти оригинал .

Р е ш е н и е. Приведем дробь к виду, рассмотренному выше:

С учетом формул (6.3.7), (6.3.6), п. 3^0 параграфа 6.3. и теоремы смещения получаем

.

4^0 Если - *правильная рациональная дробь,* то путем ее разложения в сумму простейших дробей задачу о восстановлении оригинала можно свести к задачам типа рассмотренных в п.п. 2^0, 3^0.

П р и м е р 1. . Найти оригинал .

Р е ш е н и е. Так как , то достаточно найти коэффициенты A, B, C, D, E в разложении

и затем перейти к оригиналам для простейших дробей. Приведя дроби к общему знаменателю, воспользуемся методом неопределенных коэффициентов, получая систему уравнений для A, B, C, D, E при различных p. Имеем

;

;

.

Имеем

, откуда , .

Итак,

С учетом теоремы смещения и формул имеем

.

П р и м е р 2. . Найти оригинал.

Р е ш е н и е. Так как , то

или .

Присваивая p последовательно значения , , , , получаем систему уравнений

, откуда .

Следовательно,

Итак,

.

7.3 Решение линейных дифференциальных уравнений

1⁰ Операционный метод (преобразование Лапласа) может быть применен к нахождению частного решения *линейного* обыкновенного *дифференциального уравнения* с *постоянными коэффициентами* и начальными условиями в точке "*O*". Идея состоит в том, что считая искомое решение оригиналом , мы *применяем преобразование Лапласа к обеим частям уравнения.* В результате этого уравнения становится алгебраическим относительно изображения . Найдя *Y*, остается вернуться к соответствующему оригиналу .

2⁰ Начнем рассмотрение с уравнения *первого порядка*

, (7.3.1)

в случае , где - заданное число. Пусть - оригинал, имеющий изображение . Применяя к обеим частям уравнения (7.3.1) преобразование Лапласа и пользуясь формулой для изображения производной (см.(6.5.1)) , имеем

,

откуда , а значит

.

Остается восстановить по оригинал , который и будет решением указанной задачи Коши; приемы обращения рассмотрены выше (см. параграф 7.1, 7.2).

3⁰ Тот же способ применим для решения *задачи Коши* для *уравнения второго порядка*

и в более общем случае *произвольного (n-го) порядка*

В простейшей ситуации результат применения преобразования Лапласа к обеим частям (7.3.2) приводит к алгебраическому уравнению

,

откуда

,

где

- так называемый характеристический многочлен для уравнения (7.3.2). Задача свелась к обращению преобразования Лапласа.

4^0 Если числа считать *произвольными постоянными* (в этом случае их удобно переобозначить через соответственно), то применение к уравнению (7.3.2) с начальными условиями

операционного метода приводит к получению *общего решения.* Найденные оригиналы обращаются в ноль при . С точки зрения задач физики, мы получаем информацию о течении процесса с момента . Если же начальные условия задаются в точке , то выделение соответствующего частного решения из полученного общего происходит обычным способом (написание и решение системы алгебраических линейных уравнений относительно).

5^0. П р и м е р 1. Решить задачу Коши

Р е ш е н и е. Пусть . Тогда (см. п. 2^0)

и ,

откуда

или .

Следовательно, - искомое решение.

П р и м е р 2. Решить задачу Коши

.

Р е ш е н и е. Прежде всего, запишем (см. параграф 6.1) правую часть уравнения в виде

ее изображение имеет вид (см. теорему запаздывания)

.

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, получаем при нулевых начальных условиях

или

,

т.е.

.

Запишем

.

Следовательно,

,

если воспользоваться теоремой запаздывания применительно к последнему слагаемому.
Итак, решение задачи Коши имеет вид

.

7.4 Операционный метод решения уравнения колебаний

1^0 В этом параграфе мы изучаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение

(7.4.1)

и ищем его общее решение.
Согласно п. 4^0 параграфа 7.3. начальные условия в точке можно записать в виде

где - произвольные постоянные.
Положим , тогда , т.е. . Применяя к обеим частям (7.4.1) преобразование Лапласа и полагая пока , имеем

,

откуда

или

. (7.4.2)

Поскольку

при ,

то

Так как

мы получаем искомое общее решение (7.4.1) при в виде

(7.4.3)

С точки зрения механики уравнение (7.4.1) есть уравнение колебаний материальной точки под действием вынуждающей периодической силы величины ; здесь - величина отклонения точки от некоторого положения (например, отклонение груза на рессоре от положения равновесия), k - так называемая жесткость упругой системы (например, рессоры); силой сопротивления колебаниям пренебрегаем. Решение (7.4.3) удобно переписать в несколько иной форме. Положим

,

тогда

.

или

, (7.4.4)

где определяется из условий (так что).

Формула (7.4.4) описывает так называемые *вынужденные гармонические колебания* под действием периодической силы, обладающей частотой . Если в (7.4.4) изначально выбрать , то (в отсутствии внешней силы) получаем *свободные гармонические* колебания ,

обладающие *частотой k* и *начальной фазой* .

3^0 Рассмотрим теперь уравнение (7.4.1) в случае , т.е. когда *частота внешней силы совпадает с частотой собственных колебаний.* Ограничимся случаем нулевых начальных условий:

; .

Если значение приближается к частоте *k* собственных колебаний, но еще не достигает этого значения, то согласно (7.4.3) имеем наложение собственных и вынужденных колебаний

с амплитудами, растущими неограниченно. Однако, для точного описания характера колебаний при следует вернуться к формуле (7.4.2). При имеем тогда

.

Оригинал восстановим, повторив рассуждения, приведенные при решении примера 2 п. 4^0 параграфа 7.2:

.

Итак, , и, при неограниченном возрастании *t*, *амплитуда* колебаний (как и прогнозировалось выше) *неограниченно растет*. Это явление, возникающее при совпадении частоты внешней силы с частотой собственных колебаний, называется *явлением резонанса.*

7.5 Интеграл Дюамеля

1^0 Пусть и . Тогда имеют место следующие формулы, каждая из которых называется *интегралом Дюамеля*:

; (7.5.1)

; (7.5.2)

; (7.5.3)

. (7.5.4)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем тождество

. (7.5.5)

Первое слагаемое в его правой части есть произведение изображений для и , а значит, служит изображением свертки , а второе - изображением произведения . Записывая свертку в интегральном виде, получаем, что правая часть (7.5.5) есть изображение для

,

чем и доказано (7.5.1). Утверждение (7.5.2) вытекает из коммутативности свертки . Меняя ролями и получаем (7.5.3) и (7.5.4) из (7.5.1) и (7.5.2) соответственно. Формулы (7.5.1) - (7.5.4) доказаны.

2^0 Применим формулы (7.5.1) - (7.5.4) к нахождению решения задачи Коши для линейного неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями:

где - постоянные.

Пусть, наряду с (7.5.6) - (7.5.7) рассматривается задача Коши

Обозначим через решение задачи (7.5.8) - (7.5.9). Докажем следующее утверждение: решение задачи (7.5.6) - (7.5.7) может быть найдено по любой из следующих формул Дюамеля:

(7.5.10)

Смысл утверждения состоит в следующем: если возникает затруднение, например, с нахождением интеграла Лапласа для правой части уравнения (7.5.6), то *следует решить соответствующую задачу* (7.5.8) - (7.5.9) *с правой частью, равной единице, а затем по найденной перейти к искомому y, записав свертку* (7.5.10) или любую из трех указанных остальных.

3^0 Для доказательства, например, формулы (7.5.10) применим преобразование Лапласа к обеим частям каждого из уравнений (7.5.6), (7.5.8). С учетом соотношений

(вытекающих из (7.5.7) и (7.5.9)) имеем соответственно:

и

.

Обозначим через

характеристический многочлен для (7.5.6); тогда одновременно

 и .

Деля почленно друг на друга полученные равенства, приходим к соотношению

, т.е. .

С учетом соотношений (7.5.3) и получаем

0 ,

а значит

.

Следовательно, искомый оригинал находится по формуле (7.5.10), что и утверждалось. Остальные формулы, приведенные в п. 2^0 будут вытекать из (7.5.4), (7.5.2), (7.5.1) соответственно (эти соотношения применяются вместо (7.5.3)).

4^0 П р и м е р. Решить задачу Коши

Р е ш е н и е. Поскольку оригинал - "нетабличный", то решим сначала операционным методом вспомогательную задачу

Имеем, применяя преобразование Лапласа:

, т.е. .

Записав

,

получаем .

Теперь, по формуле (7.5.10)

или

.

Последний интеграл может быть вычислен следующим образом: пусть , тогда

; ; . Следовательно,

.

Итак, - искомое решение.

7.6 Решение систем линейных дифференциальных уравнений операционным методом

1^0 Преобразование Лапласа может быть использовано и для *решения систем линейных дифференциальных* уравнений с постоянными коэффициентами, если начальные условия заданы в точке . Продемонстрируем метод на случае системы вида

с начальными условиями

Здесь - постоянные числа, - заданные оригиналы, - искомые решения, - их производные. Положим ,

. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям каждого уравнения, получим:

Имеем теперь систему алгебраических линейных уравнений относительно X, Y, Z:

Найдя , восстановим соответствующие оригиналы.

2^0 Операционный метод можно применить и для систем уравнений, содержащих производные высших порядков. Продемонстрируем это на следующем примере. Решить задачу Коши:

, .

Р е ш е н и е. Применим преобразование Лапласа к каждому уравнению (при этом , т.к. интеграл Лапласа есть интеграл от нулевой функции). Получаем

, т.е. ,

т.е.

.

Поскольку

,

и ,

то

и .

Возвращаясь к оригиналам, получаем

.

3^0 Рассмотрим пример системы в случае разрывного данного оригинала, содержащегося в правой части:

; .

Р е ш е н и е. Запишем в виде одного аналитического выражения:

.

Применяя к каждому уравнению преобразование Лапласа, получим

, т.е. .

Умножив второе уравнение на и сложив с первым, получим:

, откуда

Из первого уравнения имеем

, т.е.

Заметим, что

Следовательно,

,

.

Отсюда, переходя к оригиналам (и используя теорему запаздывания), получим:

искомое решение системы.

7.7 Применение операционного метода к решению уравнений

в частных производных

1^0 Пусть - функция двух переменных, которую мы считаем оригиналом как функцию переменной *t*. Это означает, что при каждом фиксированном *x* выполнены условия а), б) п. 2^0 параграфа 6.1 и существуют постоянные *M* и (не зависящие от *x*) такие что при всех *x* и

.

Будем считать (в указанном смысле) оригиналами также и частные производные и . Рассматривая *x* как параметр, обозначим через *U* изображение для *u*:

.

Тогда

(7.7.1)

и (дифференцируя интеграл Лапласа по параметру *x* дважды, что можно сделать при сформулированных выше условиях и что мы здесь не доказываем)

; и . (7.7.2)

2^0 Обозначим

так называемый интеграл вероятностей (интегральную функцию Лапласа). Его значения имеются в многочисленных таблицах; например, . Тогда можно доказать, что

, (7.7.3)

и этим мы воспользуемся ниже.

3^0 В качестве примера операционного *решения краевой задачи для уравнения в частных производных* рассмотрим математическую модель процесса распределения температур в полубесконечном стержне (стержень расположен вдоль полуоси *OX*). Пусть, начиная с момента , на его левом конце поддерживается заданный температурный режим , причем - оригинал, и . Если - температура в точке *x* в момент *t*, то, как известно из теплофизики, является решением уравнения в частных производных

, (7.7.4)

где *a* - постоянная, зависящая от теплофизических свойств стержня, . Будем считать, что начальная температура стержня равна нулю, тогда имеем следующие краевое и начальное условия

, (7.7.5)

. (7.7.6)

Итак, следует решить краевую задачу (7.7.4) - (7.7.6).

4^0 В предположениях п. 1^0 применим преобразование Лапласа к обеим частям (7.7.4). С учетом соотношений (7.7.1), (7.7.5), а также (7.7.2) получаем

. (7.7.7)

Применяя преобразование Лапласа также к обеим частям (7.7.6), получим, что

. (7.7.8)

Остается решить краевую задачу (7.7.7) - (7.7.8) относительно *U* как функции от *x*; *p* - здесь играет роль параметра. Тогда (7.7.7) - уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет корни , и, следовательно,

(7.7.9)

- общее решение (7.7.7). Теперь мы утверждаем, что . Докажем это, предположив противное. Заметим, что - ограниченная (при) функция (это очевидным образом вытекает из физического смысла задачи); тогда ограниченной будет и , т.е. , где *M* - некоторая постоянная; доказательство последнего факта мы опускаем.

Однако, , если, например, *p* - действительные числа, . Следовательно, второе слагаемое в (7.7.9) растет неограниченно, (а первое стремится к нулю вместе с), если отлично от нуля. Остается считать , т.е. (7.7.9) принимает вид
.

Если учесть условие (7.7.8), то , а тогда
.

Теперь следует вернуться к оригиналу .

5^0 Запишем

. (7.7.10)

По формуле Дюамеля (см. п. 1^0 параграфа 7.5)

, (7.7.11)

в которой , а - соответствующий оригинал, имеем
.

В силу (7.7.3) при получаем:

т.к.

(7.7.12)

Из соотношений (7.7.10), (7.7.11), (7.7.12) будет следовать

. (7.7.13)

Остается заметить, что предположения относительно , сформулированные в п. 1^0 для найденной функции (7.7.13) могут быть непосредственно проверены.
Итак, краевая задача (7.7.4) - (7.7.6) решена в виде (7.7.13).

7.8 Упражнения к главе 7

1^0 Найти оригинал, соответствующий заданному изображению:

а) ; б) ; в) ; г) ;

д) ; е) ; д) .

2^0 Найти оригинал, изображением которого служит заданная рациональная дробь:

а) ; б) ; в) ; г) ;

д) ; е) ; ж) .

3^0 Найти оригинал по заданному изображению:

а) ; б) .

4^0 Пользуясь теоремой запаздывания, найти оригинал, соответствующий заданному изображению:

а) ; б) ; в) ; г) ;

д) ; е) .

5^0 Решить задачу Коши для следующего дифференциального уравнения первого порядка:

а) ; б) ; в) ;

г) ; д) .

6^0 Решить следующую задачу Коши:

а) ; б) ; в) ;

д) ; е) .

7^0 Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Араманович И. Г., Лунц Г. А., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1968. 416 с.

2 Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций. М.: Просвещение, 1977. 320 с.

3 Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1969. 640 с.

4 Нахман А. Д. Дифференциальные уравнения. Тамбов.: Тамб. гос. техн. ун-т, 1999. 96 с.

5 Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1978. Т.1. 456 с., Т. 2. 576 с.