Министерство образования Российской федерации
Тамбовский государственный технический университет

НАЧАЛО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Учебно-методическое пособие

Тамбов

Издательство ТГТУ
2001

УДК 517(075)
ББК В161я73
Н36

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Рецензент
Доктор физико-математических наук, профессор
А. И. Булгаков

Н36 Начало математического анализа: Учеб.-метод. пособие / Авт.-сост.: А. Я. Алеева, Ю. Ю. Громов, О. Г. Иванова, А. В. Лагутин. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. 56 с.

Учебно-методическое пособие знакомит иностранных учащихся с основными понятиями математического анализа. Пособие содержит тексты, лексико-грамматические материалы, вопросы и упражнения, позволяющие студентам-иностранцам овладеть основами математического анализа. Содержание пособия соответствует программе по математике на подготовительных факультетах для иностранных граждан.

Предназначено для студентов-иностранцев, проходящих предвузовскую подготовку.

УДК 517(075)
ББК В161я73

ВВЕДЕНИЕ

Структура и содержание пособия соответствуют отраслевому стандарту по математике и разработаны с учетом специфических особенностей системы обу-чения иностранных студентов, а также принципа преемственности в обучении на предвузовском этапе подготовки и первых курсах высших учебных заведений.

Изложение материала рассчитано на завершение чтения основного курса лекций по математике после изучения иностранными студентами вводного курса по математике, направленного на изучение научного стиля речи, и основного курса по алгебре.

В лекциях приведен необходимый объем учебной информации, обеспе-чивающий овладение основами математического анализа. Материал, необхо-димый для изучения, дается в сжатом виде и освещает основные понятия производной, интеграла, исследования функций. Для обеспечения доступности усвоения учебного материала иностранными студентами текст лекций адаптирован.

Содержание лекций соответствует программе по курсу "Математика" на подготовительных факультетах для иностранных граждан.

Глава 1. ПРОИЗВОДНАЯ

1.1. *ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ*

I. Текст для чтения

Пусть некоторая точка движется по прямой. За время t от начала движения точка прошла расстояние $S(t)$. Зависимость S от t, задаваемую функцией $S(t)$, называют законом движения точки.

За промежуток времени от t до $t + \Delta t$ ($\Delta t \neq 0$) точка прошла расстояние $S(t + \Delta t) - S(t)$.

Средняя скорость движения точки за этот промежуток времени равна отношению

$$V_{\text{ср.}} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Из курса физики мы знаем, что если $\Delta t \to 0$, то это отношение приближается к некоторому числу, которое называется мгновенной скоростью и обозначается $V(t)$, т.е.

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

П р и м е р . Свободно падающее тело под влиянием силы притяжения Земли движется в безвоздушном пространстве по закону

$$S = g\frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}gt^2.$$

Мгновенная скорость тела в момент времени t ($t > 0$) равна

$$V(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=\lim\frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}=$$

$$=\frac{1}{2}g\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2t\times\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t}=\frac{g}{2}\times 2t=gt.$$

Получим известную формулу для скорости равномерно ускоренного движения $V(t)=gt$.

Мгновенную скорость $V(t)$ называют производной функции $S(t)$. Дадим теперь определение производной.

Пусть функция $y=f(x)$ (рис. 1) определена на промежутке $[a; b]$. Точка $x\in[a; b]$. В точке x функция $y=f(x)$ имеет значение $f(x)$.Точка $(x+\Delta x)\in[a; b]$. В точке $(x+\Delta x)$ функция $y=f(x)$ имеет значение $f(x+\Delta x)$. Разность $(x+\Delta t)$ - x называется приращением аргумента

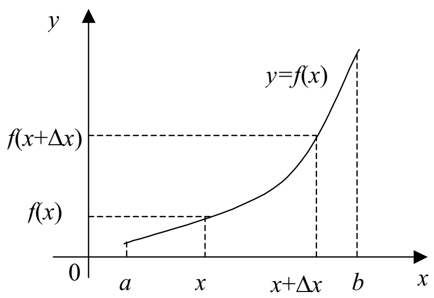


Рис. 1

$$f(x+\Delta x)-x=\Delta x.$$

Разность $f(x+\Delta x)$ - $f(x)$ - называется приращением функции

$$(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y.$$

Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Если $\Delta x\to 0$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Этот предел называется производной функции $y=f(x)$ в точке x.

Определение. Производной функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю. Обозначают производную: $f'(x)$ или y'_x или y':

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Операция нахождения производной называется дифференцированием. Функция $y=f(x)$, которая имеет производную в точке x, называется дифференцируемой в этой точке. Функция $y=f(x)$, которая имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, называется дифференцируемой на этом промежутке.

Задача 1. Найти производную функции $f(x)=x^2$.

Составим отношение $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=$

$$=\frac{x^2+2x\times\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\frac{2x\times\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

Но $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$

Значит, $(x^2)'=2x$.

З а д а ч а 2. Найти производную функции $f(x) = 5x + 7$.

Составим отношение

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{5(x+\Delta x)+7-(5x+7)}{\Delta x}=\frac{5x+5\Delta x+7-5x-7}{\Delta x}=\frac{5\Delta x}{\Delta x}=5.$$

Но $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=5$.

Значит, $(5x + 7)' = 5$.

З а д а ч а 3. Найти производную функции $f(x) = ax + b$.

Составим отношение

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{a(x+\Delta x)+b-(ax+b)}{\Delta x}=\frac{ax+a\times\Delta x+b-ax-b}{\Delta x}=$$

$$\frac{a\Delta x}{\Delta x}=a;\ f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=a;$$

$$(ax + b)' = a.$$

З а д а ч а 4. Найти производную функции $f(x) = C$ (Const).

$$f(x)'=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{C-C}{\Delta x}=0;$$

$$(C)' = 0.$$

З а д а ч а 5. Найти производную функции $f(x) = x$.

$$f(x)'=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1;$$

$$(x)' = 1.$$

II. Вопросы для самопроверки

1) Что называется приращением аргумента?
2) Что называется приращением функции?
3) Что называется производной функции $y = f(x)$ в точке x?
4) Как называется операция нахождения производной?
5) Какая функция называется дифференцируемой в точке?
6) Какая функция называется дифференцируемой на отрезке?

III. Упражнения

1) С помощью определения найти производную функций: а) $y=3-2x$; б) $y=8x+7$; г) $f(x)=x^3$; д) $y=ax^2+bx+c$; е) $y=x^2-x$; ж) $y=\frac{1}{x}+1$.

2) С помощью определения производной найти производную функций в точке x_0: 1) $y=\frac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$; 2) $y=x^2-4$, $x_0=0$; 3) $y=2^x$, $x_0=1$.

1.2. *ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ*

I. Вопросы для повторения

1) Что называется производной функции $y = f(x)$ в точке x?
2) Как называется операция нахождения производной?
3) Какая функция называется дифференцируемой на промежутке?

II. Текст для чтения

Пусть точка движется с переменной скоростью по закону $S(t)$ (рис. 2).

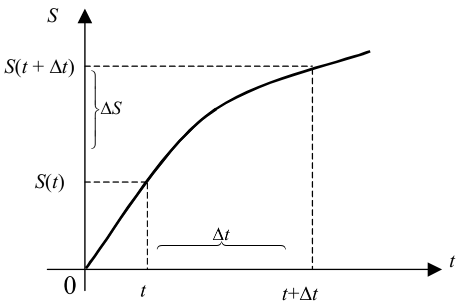


Рис. 2

В момент времени t тело прошло путь $S(t)$. В момент времени $(t + \Delta t)$ тело прошло путь $S(t + \Delta t)$. За время Δt тело прошло путь ΔS:

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t).$$

Средняя скорость точки за время Δt

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Если $\Delta t \to 0$, то средняя скорость приближается к неко-торому числу, которое называется мгновенной скоростью и обозначается $V_{\text{мгн}}$.

$$\lim_{\Delta t \to 0} V_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S'(t) = V_{\text{мгн}}.$$

Физический смысл производной состоит в том, что производная функции в точке равна мгновенной скорости изменения функции в этой точке.

З а д а ч а . Тело движется прямолинейно по закону

$$S(t) = 3t^2 + 2t + 1.$$

Найти скорость движения тела в момент времени $t = 4$ с. S измеряется в метрах.

Решение: $S'(t) = 6t + 2 = V_{\text{мгн}}$; $\quad V(4) = 4 \times 6 + 2 = 26\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

III. Упражнения

1) Найти мгновенную скорость в момент времени t точки, движущейся по закону:

а) $S = 2e + 4$; б) $S = t^3$.

2) Прямолинейное движение точки задано уравнение $S = 3t^2 - 2t + 5$. Найти скорость движения точки в момент $t = 5$.

1.3. *ПРОИЗВОДНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО ФУНКЦИЙ*

I. Вопросы для повторения

1) Что называется производной функции $y = f(x)$ в точке x?

2) Как называется операция нахождения производной функции?

II. Текст для чтения

1 Производная алгебраической суммы функций

Т е о р е м а 1. Производная алгебраической суммы двух дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных этих функций.

Доказательство:

Есть функции $u(x)$ и $v(x)$; $u'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и $v'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$.

Нужно доказать, что $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$.

Пусть $u(x) + v(x) = f(x)$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x))-(u(x)+v(x))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x+\Delta x)-u(x))+(v(x+\Delta x)-v(x))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x)+v'(x).$$

Значит, $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$.

Аналогично можно доказать, что $(u(x) - v(x)') = u'(x) - v'(x)$.

З а м е ч а н и е . Можно доказать справедливость теоремы 1 для суммы любого конечного числа дифференцируемых функций, т.е.

$$(u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x))'=u_1'(x)+u_2'(x)+u_3'(x)+\ldots+u_n'(x).$$

З а д а ч а . Найти производную функции $f(x) = x^2 + x - 7$.

Вычислить $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(3)$.

Решение:

$$f'(x)=(x^2+x-7)'=(x^2)'+(x)'-(7)'=2x+1-0=2x+1;$$
$$f'(-1)=2\times(-1)+1=-1;$$
$$f'(0)=2\times 0+1=1;$$
$$f'(3)=2\times 3+1=7.$$

2. Производная произведения функций

Т е о р е м а 2. Производная произведения двух дифференцируемых функ-ций равна сумме произведений каждой функции на производную другой.

Доказательство:

Есть функции $u(x)$ и $v(x)$; $u'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и $v'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$.

Нужно доказать, что $\left(u(x)\times v(x)\right)' = u'(x)\times v(x) + v'(x)\times u(x)$.

Пусть $u(x)\times v(x) = f(x)$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-u(x)+v(x)}{\Delta x} = \\
&= \left|\begin{matrix}\Delta u = u(x+\Delta x)-u(x) \Rightarrow u(x+\Delta x) = u(x)+\Delta u \\ \Delta v = v(x+\Delta x)-v(x) \Rightarrow v(x+\Delta x) = v(x)+\Delta v\end{matrix}\right| = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x)+\Delta u)\times(v(x)+\Delta v)-u(x)\times v(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\times v(x)+u(x)\times\Delta v+v(x)\times\Delta u+\Delta u\times\Delta v-u(x)\times v(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\times\Delta v+v(x)\times\Delta u+\Delta u\times\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(u(x)\times\frac{\Delta v}{\Delta x}+v(x)\times\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}u(x)\times\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}v(x)\times\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\times\Delta v.
\end{aligned}
$$

Множители $u(x)$ и $v(x)$ не зависят от Δx. Функция $v(x)$ имеет производную, поэтому она непрерывна и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$.

Имеем:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= u(x)\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}v(x)\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\times\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = \\
&= u(x)\times v'(x)+v(x)\times u'(x)+0.
\end{aligned}
$$

Мы доказали, что $\left(u(x)\times v(x)\right)' = u'(x)\times v(x) + v'(x)\times u(x)$.

Эта формула называется формулой Лейбница.

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что производная произведения любого конечного числа множителей равна сумме произведений производной каждого из них на все остальные.

$$
\begin{aligned}
(u\times v\times w\times\ldots\times N)' &= u'\times v\times w\times\ldots\times N+u\times v'\times w\times\ldots\ldots\times N+u\times v\times w'\times\ldots \\
&\ldots\times N+\ldots+u\times v\times w\times\ldots\times N'.
\end{aligned}
$$

С л е д с т в и е 1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $\left(C\times u(x)\right)' = C\times u'(x)$.

Доказательство:

По теореме 2 имеем: $\left(C\times u(x)\right)' = C'\times u(x)+u'(x)\times C$.

Но $C' = 0$, поэтому $\left(C\times u(x)\right)' = C\times u'(x)$.

С л е д с т в и е 2. Производная функции $f(x) = x^n$, где $n\in N$, $n\geq 2$, равна произведению показателя n на степень x^{n-1}.

Доказательство:

$$f'(x)=\left(x^n\right)'=\left(\underbrace{x\times x\times x\times\ldots\times x}_{n\ \text{множителей}}\right)'=x'\left(\underbrace{x\times x\times\ldots\times x}_{(n-1)\text{множителей}}\right)+x'\left(\underbrace{x\times x\times\ldots\times x}_{(n-1)\text{множителей}}\right)+$$
$$+\ldots+x'\left(\underbrace{x\times x\times\ldots\times x}_{(n-1)\text{множителей}}\right).$$

Но $x'=1$, $\underbrace{x\times x\times\ldots\times x}_{(n-1)\ \text{множителей}}$, а число слагаемых равно числу множителей *n*, поэтому имеем $f'(x)=\left(x^n\right)'=n\times x^{n-1}$.

З а д а ч а . Найти производную функции $f(x) = x^3(x - 1)$.
Решение:

$$f'(x)=\left(x^3(x-1)\right)'=\left(x^3\right)'\times(x-1)+x^3\times(x-1)'=3x^2(x-1)+$$
$$+x^3\times 1=3x^3-3x^2+x^3=4x^3-3x^2.$$

3. Производная частного двух функций

Т е о р е м а 3. Производную частного двух дифференцируемых функций можно найти по формуле

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{v^2(x)},\ \text{где}\ v(x)\neq 0.$$

Доказательство:

Есть функции $u(x)$ и $v(x)$; $u'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ и $v'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$.

Нужно доказать, что $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{v^2}$.

Пусть $\dfrac{u(x)}{v(x)}=f(x)$.

Умножим обе части равенства на $v(x)$ и найдем производную от обеих частей равенства.

Получим $\left(f(x)\times v(x)\right)'=u'(x)$ или $f'(x)\times v(x)+f(x)\times v'(x)=u'(x)$.

Но $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$. Тогда $f'(x)\times v(x)+\dfrac{u(x)}{v(x)}\times v'(x)=u'(x)\Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{u'(x)-\dfrac{u(x)}{v(x)}\times v'(x)}{v(x)}\ \text{или}\ f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}.$$

Мы доказали, что $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{v^2(x)}$.

З а д а ч а . Найти производную функции

$$f(x)=\frac{3x-2}{1-4x}.$$

Решение:

$$f'(x)=\left(\frac{3x-2}{1-4x}\right)'=\frac{(3x-2)'(1-4x)-(1-4x)'(3x-2)}{(1-4x)^2}=$$

$$=\frac{3(1-4x)-(-4)\times(3x-2)}{(1-4x)^2}=\frac{3-12x+12x-8}{(1-4x)^2}=\frac{-5}{(1-4x)^2}.$$

III. Вопросы для самопроверки

1) Верно ли, что:

а) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то в этой точке дифференцируема и функция $\varphi(x)=f(x)+g(x)$?

б) Если функция $f(x)=v(x)+u(x)$ дифференцируема в точке x_0, то функции $u(x)$ и $v(x)$ тоже дифференцируемы в этой точке.

2) Чему равна производная функции $f(x)$ в точке x_0, если $f(x)=u(x)\times v(x)$ и функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в этой точке?

3) Чему равна производная функции $f(x)$ в точке x_0, если $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$, $v(x)\neq 0$ и функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в этой точке?

IV. Упражнения

Найти производные функций:

1) $f(x)=x-2$; 2) $f(x)=x^2+6x$; 3) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}-4x$;

4) $y=(3x-4)(2x+5)$; 5) $y=(x+2)(2x+3)\left(\frac{x}{3}+5\right)$; 6) $y=x^2+5$;

7) $y=x^5-7x^2+8$; 8) $f(x)=\frac{7}{3}x(x+4)$; 9) $f(x)=x\times\sqrt[5]{x^2}$; 10) $y=-\frac{1}{x^2+8}$;

11) $y=\frac{15x-1}{x+3}$; 12) $f(t)=\frac{t^2-1}{t^2+1}$; 13) $y_n=\frac{n^2}{2-n^2}$.

1.4. *ПРОИЗВОДНЫЕ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ*

I. Текст для чтения

Мы уже знаем, что $(C)'=0$; $(x^n)'==n\times x^{n-1}$.

Используя определение производной функции, можно доказать, что

$(e^x)'=e^x$; $(\ln x)'=\frac{1}{x}(x>0)$; $(\sin x)'=\cos x$; $(\cos x)'=-\sin x$;

$(a^x)'=a^x\ln a\ (a>0, a\neq 1)$; $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$; $(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ $(\cos x\neq 0)$;

$$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (\sin x \neq 0).$$

Докажем некоторые из них.

З а д а ч а 1. Доказать, что $\left(a^x\right)' = a^x \ln a \; (a > 0,\, a \neq 1)$.

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \left| \begin{array}{l} \text{Пусть} \quad a^{\Delta x} - 1 = z, \\ \Delta x \to 0, \quad \text{то} \quad z = 0 \\ \Delta x = \log_a(1+z) \end{array} \right| =$$

$$= a^x \lim_{z \to 0} \frac{z}{\log_a(1+z)} = a^x \times \frac{1}{\lim\limits_{z \to 0} \log_a (1+z)^{1/z}} = a^x \frac{1}{\log_a e} = a^x \ln a.$$

Если $a = e$, то $\left(e^x\right)' = e^x \ln e = e^x$.

З а д а ч а 2. Доказать, что $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$.

$$\left(\log_a x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

Если $a = e$, то $(\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$.

З а д а ч а 3. Доказать, что $(\sin x)' = \cos x$.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos x\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \times \lim_{\Delta x \to 0} \cos x\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

З а д а ч а 4. Доказать, что $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\cos x \neq 0)$.

$$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \times \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \times \cos x + \sin x \times \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

III. Упражнения

Найти производную функций:

1) $y = 3x^5 - 8\ln x$; 2) $y = 3\sqrt[3]{x} - 4\cos x$; 3) $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \sin x$;

4) $y = \frac{1}{4}x^2 - e^x + 2\sin x$; 5) $y = 5^x + \log_5 x$ 8; 6) $y = \lg x - \mathrm{tg}x$; 7) $y = \ln x + 3\mathrm{ctg}x$;

8) $y = 8\sqrt[4]{x} + 16e^x$; 9) $y = x^9 + 3x^{\frac{1}{9}} - 4^x$; 10) $y = \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{5}\mathrm{tg}\, x$.

1.5. *ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ*

I. Текст для чтения

1. Угловой коэффициент прямой

Пусть функция $y = f(x)$ задана графически. Точка M принадлежит графику функции $y = f(x)$ и имеет координаты $M\ (x; f(x))$ (рис. 3).

MT - касательная к графику функции, MN - секущая. Дадим аргументу приращение Δx. Точка N принадлежит графику функции $y = f(x)$ и имеет координаты $N(x + \Delta x; f(x + \Delta x))$.

$\angle\alpha$ - это угол между касательной MT и положительным направлением оси OX.

$\angle\varphi$ - это угол между секущей MN и положительным направлением оси OX; из ΔMNK: $\frac{NK}{MK} = \mathrm{tg}\ \varphi = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

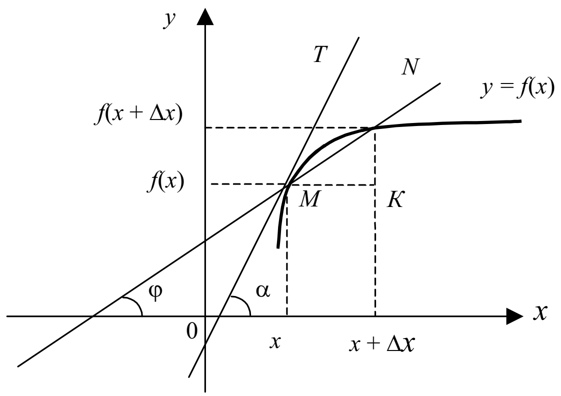


Рис. 3

Если $\Delta x \to 0$, то $N \to M$ и $\angle\varphi \to \angle\alpha$,

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

В ы в о д . Если график $y = f(x)$ в точке $(x; f(x))$ имеет касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то функция $y = f(x)$ имеет в этой точке производную. Верно и обратное утверждение.

Тангенс угла α называется угловым коэффициентом касательной. Обозначается: $\operatorname{tg}\alpha = R$. Значит, геометрический смысл производной состоится в том, что значение производной функции $y = f(x)$ в точке x равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x:

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = R .$$

З а д а ч а 1. Найти угловой коэффициент прямой:

а) $y = x + 4$; б) $y = -2x + 1$; в) $y = 3$; г) $y = \frac{1}{2}x + 3$.

З а д а ч а 2. Найти угол между прямой и осью абсцисс:

а) $y = x + 1$; б) $y = -x + 2$; в) $y = \sqrt{3}x + 2$; г) $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

З а д а ч а 3. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 2x^2 + 3x + 1$ в точке $x = -1$.

2. Уравнение касательной к кривой

Как найти уравнение касательной?

Касательная - это прямая линия. Уравнение прямой $y = kx + b$. Чтобы написать уравнение касательной, нужно знать числа k и b. k - это угловой коэффициент касательной, который равен производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 :

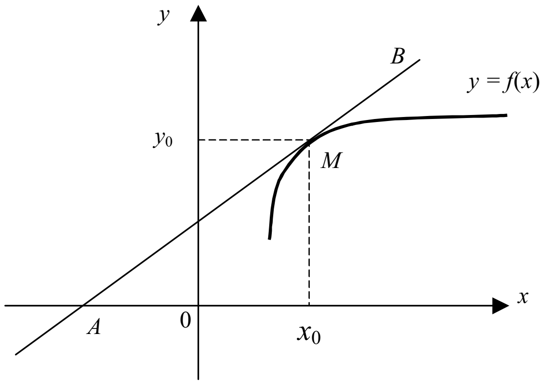


Рис. 4

$$k = f'(x_0) \Rightarrow y = f'(x_0) \times x + b\,. \qquad (1)$$

Точка *M* принадлежит касательной *AB* (рис. 4), поэтому координаты удовлетворяют уравнению касательной:

$$f(x_0) = f'(x_0) \times x_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0) \times x_0\,. \qquad (2)$$

Тогда уравнение касательной (1):

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 можно найти по плану:

1. Написать уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
2. Найти $f(x_0)$.
3. Найти производную функции $f'(x)$.
4. Найти значение производной $f'(x)$ в точке x_0: $f'(x_0)$.
5. Подставить значение x_0, $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ в уравнение касательной.

З а д а ч а . Написать уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Решение:

1. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
2. $f(x_0) = (-1)^2 - 2(-1) = 3$.
3. $f'(x) = (x^2 - 2x)' = 2x - 2$.
4. $f'(x_0) = f'(-1) = 2(-1) - 2 = -4$
5. $y = 3 + (-4)(x - (-1)) \Rightarrow y = 3 - 4x - 4 \Rightarrow y = -4x - 1$.

II. Упражнения

1. Написать уравнения касательной к графику функции $y=\dfrac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0=0{,}5$.

2. Написать уравнение касательной к графику функции $y=2x^3-3x^2+4x-6$ в точке с абсциссой:

а) x_0; б) $x_0=1$; в) $x_0=3$.

3. Найти координаты точки, принадлежащей параболе, если известно, что касательная, проведенная к параболе $y=x^2-2x+6$ в этой точке, образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45°.

4. В каких точках кривой $y=x^3-3x^3+9x+6$ касательная параллельна оси *Ox*?

5. Написать уравнение касательной, проведенной к графику функции $y=x^3$ параллельно прямой $y=12x-5$.

6. Докажите, что на графике функции $y=x^3+x^2+x-5$ нет точек, касательная в которых параллельна оси абсцисс.

1.6. *ПРОИЗВОДНАЯ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ*

I. Вопросы для повторения

1) Какая функция называется непрерывной в точке?
2) Какая функция называется непрерывной на промежутке?
3) Какие точки называются точками разрыва?
4) Что называется производной функции $y=f(x)$ в точке x?
5) Как называется операция нахождения производной?
6) Какая функция называется дифференцируемой на промежутке?

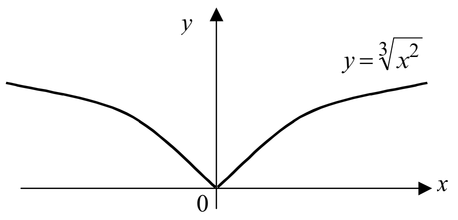
II. Текст для чтения

Существование производной функции в точке связано с непрерывностью этой функции.
Т е о р е м а . Если функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет производную, то она непрерывна в этой точке.
Доказательство:
Пусть в точке x_0 функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$.
Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Напишем $f(x)$ как сумму:

$$f(x)=f(x)+f(x_0)-f(x_0)=f(x_0)+\left(f(x)-f(x_0)\right)=f(x_0)+\Delta f(x)=$$
$$=f(x_0)+\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\times\Delta x.$$

Если $x\to x_0$, то $\Delta x\to 0$ и

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)+\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\times\Delta x\right)=\lim_{x\to x_0} f(x_0)+\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\times\lim_{x\to x_0}\Delta x=$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)\times 0=f(x_0).$$



По определению непрерывности функции в точке функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. Обратная теорема неверна.

Пример.

Функция $y=\sqrt[3]{x^2}$ непрерывна в точке x_0.

Но эта функция не имеет производной в этой точке, т.к.

$$y'_x=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3x^{1/3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

$y'(0)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{0}}$ - не существует.

III. Упражнения

1. Доказать, что функция $y = |x - 2|$ непрерывна в точке $x = 1$, но не имеет производной в этой точке.
2. Верно ли, что функция $y=x^2$ непрерывна в точке $x = 3$?

Доказать это с помощью теоремы о непрерывности дифференцируемой функции.

1.7. *ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ*

I. Текст для чтения

Есть функция $y = f(z)$, где $z=\varphi(x)$.

Функция, заданная формулой $y=f(\varphi(x))$, называется сложной функцией.

Пример: функция $f(x)=2^{x^2+1}$ - сложная $f(z)=2^z$, $z=\varphi(x)=x^2+1$.

Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z=\varphi(x)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ тоже дифференцируема и справедлива теорема:

Производную сложной функции $y=f(\varphi(x))$ можно найти по формуле: $y'=f'(\varphi(x))\times\varphi'(x)$.

Доказательство:

Пусть x имеет приращение $\Delta x\neq 0$. Тогда $z=\varphi(x)$ имеет приращение Δz, а $y=f(z)$ имеет приращение Δy.

Если $\Delta z\neq 0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta z}=\dfrac{\Delta z}{\Delta x}$.

Если $\Delta x\to 0$, то $\Delta z\to 0$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta z}\times\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta x}\Rightarrow y'=f''(z)z'(z)$, но так как $z=\varphi(x)$, то $y'=f'(\varphi(x))\times\varphi'(x)$.

Задача 1. Найти производную функции $y=\left(3x^2-1\right)^5$.

Решение:

Пусть $3x^2-1=u$, тогда $y=u^5$.

По теореме о производной сложной функции

$$y'_u=\left(u^5\right)'=5u^4;\ \ u'_x=\left(3x^2-1\right)'=6x .$$

Тогда $y'_x=5\left(3x^2-1\right)^4 6x=30x\left(3x^2-1\right)^4$.

II. Упражнения

Найти производную функций:

1) $y=(3x+2)^{50}$; 2) $y=7\sin(2x+5)$; 3) $y=\ln(\mathrm{tg}3x)$; 4) $y=\dfrac{2\sin 5x}{1-x^2}$;

5) $y=8\cos 2x+e^{4x-1}$; 6) $y=2^{6x}\sin 5x$; 7) $y=e^{x\times\ln(x+2)}$; 8) $y=\sin^3\left(x-x^2\right)$.

1.8. *ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ*

I. Вопросы для повторения

1) Что называется функцией?
2) Что называется областью определения функции?
3) Что называется областью изменения функции?
4) Какая функция называется обратной?
5) Признак обратимости функции.
6) Имеет ли функция $y=\cos x$ обратную? На каком промежутке?
7) Имеет ли функция $y=\sin x$ обратную? На каком промежутке?
8) Имеет ли функция $y=\mathrm{tg}x$ обратную? На каком промежутке?
9) Имеет ли функция $y=\mathrm{ctg}x$ обратную? На каком промежутке?

II. Текст для чтения

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывная и возрастающая на $[a; b]$. Значит, на этом промежутке она имеет обратную функцию $x=\varphi(y)$.

Т е о р е м а . Если функция $y=f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на $[a; b]$ и в точке $x_0\in[a; b]$ имеет производную $f'(x_0)$, то обратная функция $x=\varphi(x)$ имеет производную в точке $y_0=f(x_0)$, которую можно найти по формуле $\varphi'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$, т.е. производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции (без доказательства).

Производная функции $\boldsymbol{y=\arcsin x}$

Из равенства $y=\arcsin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ следует $x=\sin y\ (-1\le x\le 1)$. По теореме о производной обратной функции имеем

$$(\arcsin x)'=y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Значит, $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.

З а д а ч а . Найти производную функции $y = \arcsin\sqrt{2x}$.

Пусть $\sqrt{2x} = t$, тогда $y = \arcsin t$.

$$y' = (\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \times t'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{2x}\right)^2}} \times \left(\sqrt{2x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x} \times \sqrt{1-2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x-(1-2x)}}.$$

Производная функции $y = \mathrm{arctg}x$

Из равенства $y = \mathrm{arctg}x \left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ следует $x = \mathrm{tg}y$ $(-\infty < x < +\infty)$.

По теореме о производной обратной функции имеем

$$(\mathrm{arctg}x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\mathrm{tg}y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Значит, $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(-\infty < x < +\infty)$

З а д а ч а . Найти производную функции $y = \mathrm{arctg}(\sin 3x)$.

Пусть $\sin 3x = t$, тогда $y = \mathrm{arctg}t$.

$$y' = (\mathrm{arctg}t)' = \frac{1}{1+t^2} \times t'_x = \frac{1}{1+\sin^2 3x} \times (\sin 3x)' = \frac{1}{1+\sin^2 3x} \times 3 \times \cos 3x = \frac{3\cos 3x}{1+\sin^2 3x}.$$

III. Упражнения

1. Доказать, что $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Доказать, что $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. Найти производную функций:

а) $y = \arccos\dfrac{x-a}{x+a}$; б) $y = \dfrac{1}{x^2}\arcsin x$; в) $y = \mathrm{arcctg}(\mathrm{tg}2x)$; г) $y = \dfrac{\mathrm{arcctg}x}{2^x + x^2}$.

1.9. *ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ И ПРАВИЛ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ*

Доказанные правила дифференцирования и найденные производные некоторых функций напишем в таблицу.

Функция	Производная
$y = C$	$y' = 0$
$y = x^n$	$y' = n \times x^{n-1}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln x,\ x > 0$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \log_a x,\ \ x > 0$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \mathrm{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ \cos^2 x \neq 0$
$y = \mathrm{ctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\ \sin^2 x \neq 0$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \mathrm{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
$y = \mathrm{arcctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$
$y = C\, u_x$	$y' = C\, u'_x$
$y = u_x \pm v_x$	$y' = u'_x \pm v'_x$

Продолжение табл.

Функция	Производная
$y = u_x\ v_x$	$y' = u'_x \times v_x \pm u_x \times v'_x$
$y = \dfrac{u_x}{v_x},\ \ v_x \neq 0$	$y' = \dfrac{u'_x v_x - u_x v'_x}{v_x^2}$
$y = f_z,\ \ z = \varphi_x$	$y = f'_z \times \varphi'_x$

$y=f(x)\Rightarrow x=\varphi(y)$	$\varphi'_y=\dfrac{1}{f'_x}$

II. Упражнения

С помощью таблицы найти производные функций:

1) $y=e^x+\cos x$;

2) $y=\dfrac{1}{x}+\ln x$;

3) $y=3x^5-\log_3 x$;

4) $y=6\sqrt[3]{x}+5\times 9^x$;

5) $y=\dfrac{4}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{5}\cos x$;

6) $y=4x\times\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}e^x$;

7) $y=(x+3)^8$;

8) $y=x\times(2x+1)^2$;

9) $y=\dfrac{2}{(5x-3)^3}$;

10) $y=(2-4x)^4$;

11) $y=\cos 7x$;

12) $y=e^{4x-7}$;

13) $y=\ln\dfrac{2-5x}{3}$;

14) $y=\ln(2x+5)+\dfrac{x^2}{x-1}$;

15) $y=5\sin(1-3x)$;

16) $y=(3x^2-7)(2+\sin 5x)$;

17) $y=\dfrac{3}{\sin 2x}$;

18) $y=\log_2(8x-3)\cos 5x$;

19) $y=\sqrt[3]{(3x+2)^2}$;

20) $y=\dfrac{3x-1}{(x-2)^3}$;

21) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;

22) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{4}\right)$;

23) $y=e^{-x^2}$;

24) $y=\sqrt[3]{x^2+x}$;

25) $y=\ln\left(x=\sqrt{a^2+x^2}\right)$;

26) $y=\sin^3 x^x$;

27) $y=\operatorname{tg}^2 3x$;

28) $y=2^{x^2+x+1}$;

29) $y=e^{x\ln(x+2)}$;

30) $y=\sin^2\left(\cos^3 4x\right)$;

31) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\cos x\ln\operatorname{tg}x$;

32) $y=\sin^2\dfrac{1}{x}+\cos^2\dfrac{1}{x}$;

33) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^2$;

34) $y=\dfrac{(1+2x)^2}{\sqrt{x}}$;

35) $y=\left(x+\dfrac{1}{x}-2\sqrt{x}\right)^3$;

36) $y=\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x$;

37) $y=\dfrac{1}{x^2-x+2}$;

38) $y=\dfrac{2^x}{3^x}$;

41) $y=\sqrt[3]{\sin 2x}$;

42) $y=4\operatorname{tg}2\sqrt{x}$;

45) $y=\dfrac{\ln 2x}{\sqrt{x+3}}$;

46) $y=-2e^{\sin^2 x+\cos 2e^{x^2}}$.

39) $y = 3^x - \log_{1/3} 2x$; 43) $y = \frac{2}{3}\left(x^3 - \sqrt{(x^2-1)^2 - x}\right)$;

40) $y = \sqrt{\arcsin(1+2x)}$; 44) $y = (x^3+1)\cos 2x$;

1.10. *ПРОИЗВОДНАЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ*

I. Текст для чтения

Производная $f'(x)$ от функции $y = f(x)$ тоже будет функцией от аргумента x. Значит, ее можно дифференцировать, т.е. найти производную от производной.

О п р е д е л е н и е. Производная от производной называется производной второго порядка или просто второй производной и обозначается символами: y'' или $f''(x)$ или y''_{xx} . Так как вторая производная тоже функция от аргумента x, то ее можно дифференцировать, т.е. найти третью производную. Обозначают: y''' или $f'''(x)$ или y'''_{xxx} . Аналогично можно найти производную любого порядка.

З а д а ч а 1. Найти производную третьего порядка от функции $y = 4x^3 + 7x^2 + 1$.

$$y' = (4x^3 + 7x^2 + 1)' = 12x^2 + 14x;\ \ y'' = (12x^2 + 14x)' = 24x + 14;\ \ y''' = (24x + 14)' = 24.$$

З а д а ч а 2. Найти производную второго порядка от функции $y = \sin ax$.

$$y' = a\cos ax ;$$

$$y'' = (a\cos ax)' = -a^2 \sin ax.$$

З а д а ч а 3. Закон прямолинейного движения точки $S = t^3 + 2t^2$.
Найти: 1) скорость движения точки в момент t; 2) ускорение в момент t = 3 с.

1) $V = S'_t = 3t^2 + 4t$;

2) $a = V'_t = S''_t = 6t + 4 \Rightarrow 6 \times 3 + 4 = 22\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

II. Упражнения

1. Найти производную второго порядка от функций:

1) $y = (1-x)^2$; 2) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$; 3) $y = x^3(1-x^2)$; 4) $y = 5\ln 2x$; 5) $y = 2\cos(3x-1)$;

6) $y = 3\mathrm{tg}x + 0{,}1\mathrm{ctg}x$; 7) $y = -12x^5 + 25x^3 - 15x$; 8) $4\cos^2 3x$; 9) $y = 8e^{2x} \times x^4$;

10) $y = \frac{5\ln x}{x+1}$.

2. Найти производную третьего порядка от функций:

1) $y = \frac{x^2-9}{x}$; 2) $y = \frac{1}{x} + 4x^2$; 3) $y = x + \frac{1}{x}$; 4) $y = (3x^2-1)(4x+2)$;

5) $y = x \times \sqrt[3]{x}$; 6) $y = \frac{3-2x}{x+4}$.

Глава 2. ИНТЕГРАЛ

2.1. *ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА*

I. Повторение

З а д а н и е 1. Повторите таблицу производных элементарных функций.

Таблица 1

1. $(x)' = 1$	7. $(\sin x)' = \cos x$
2. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^{\alpha}$	8. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$	9. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
4. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$	10. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	12. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

II. Текст для чтения

Понятие неопределенного интеграла

Мы изучали дифференцирование функции. Дифференцирование функции - это вычисление ее производной. Мы будем изучать обратное действие.

З а д а н и е 2. Дана функция $f(x) = 2x$. Найти функцию $F(x)$, для которой $f(x)$ является производной.

То есть $(F(x))' = 2x$.

Решение:

$F(x)=x^2$, потому что $\left(x^2\right)' = 2x$;

$F(x)=x^2+1$, потому что $\left(x^2+1\right)' = 2x$;

$F(x)=x^2-8$, потому что $(x^2-8)' = 2x$;

. . .

$F(x)=x^2+C$, потому что $\left(x^2+C\right)' = 2x$.

Эта задача имеет бесконечно много решений.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $y = F(x)$ называется первообразной функции $y = f(x)$ на интервале $]a; b[$, если для всех x из этого интервала верно $(F(x))' = f(x)$.

В ы в о д : если $y = F(x)$ - первообразная функции $y = f(x)$, то $y = F(x) + C$, где C - константа, тоже первообразная функции $y = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ имеет бесконечно много первообразных.

О п р е д е л е н и е 2. Множество всех первообразных функции $y = f(x)$ на интервале $]a; b[$ называется неопределенным интегралом функции $y = f(x)$.

Обозначают: $\int f(x)dx$.

Читают: интеграл эф от икс де икс.

$f(x)$ - это подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - это подынтегральное выражение.

Определение 2 пишут символами так:

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C, \quad C \in R\}, \quad a < x < b.$$

П р и м е р : $\int 2xdx = x^2 + C$.

Интегрирование - это вычисление первообразной для данной функции. Интегрирование - это действие, обратное дифференцированию.

Правила вычисления неопределенного интеграла

1. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$,

где C - константа.

Читают: постоянный множитель можно вынести за знак интеграла.

2. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$.

Читают: интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от каждой из этих функций.

3. Правило интегрирования сложной функции $y = f(kx + b)$, имеющей линейную внутреннюю функцию:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C .$$

П р и м е р : $\int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Таблица основных интегралов

Формулы для вычисления интеграла функций можно получить с помощью табл. 1, используя определение первообразной $(F'(x) = f(x))$.

П р и м е р : 1) Найти интеграл от функции $y = x^\alpha$. В табл. 1 есть формула $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha$.

Разделим обе части этого равенства на α +1: $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$.

Отсюда $\int x^2 dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

2. Найти интеграл от функции $y = a^x$:

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a .$$

Разделим обе части равенства на $\ln a$: $\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$.

Следовательно, $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

Запомните таблицу интегралов.

Таблица 2

1. $\int 1dx = \int dx = x + C$	6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$	10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C$

Способы вычисления неопределенного интеграла

1. Вычисление интеграла с помощью табл. 2.
П р и м е р ы :

1) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \dfrac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \dfrac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C = \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C$;

2) $\int \dfrac{dx}{\cos x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$; 3) $\int 2^x \times 3^x dx = \int 6^x dx = \dfrac{6^x}{\ln 6} + C$.

2. Вычисление интеграла с помощью правил 1 и 2.
П р и м е р ы :

1) $\int 2\sqrt{x} dx = 2\int \sqrt{x} dx = 2\int x^{\frac{1}{2}} dx = \dfrac{4}{5} x\sqrt{x} + C$;

2) $\int\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int x^3dx+\int\frac{dx}{x^2}=\frac{x^4}{4}+\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}+C$;

3) $\int\frac{2x\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx=\int 2xdx+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=x^2-\mathrm{ctg}x+C.$

3. Интегрирование сложной функции.

1) $\int\underset{k=2}{(2x-5)^3}dx=\frac{1}{2}\times 3(2x-5)^3+C=\frac{3}{2}(2x-5)^2+C$;

2) $\int\underset{k=-3}{\sqrt{4-3x}}dx=\int(4-3x)^{1/2}dx=-\frac{1}{3}\frac{(4-3x)^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}(4-3x)^{3/2}+C$;

3) $\int\frac{dx}{\cos^2\underset{k=5}{(5x+4)}}=\frac{1}{5}\mathrm{tg}(5x+4)+C$;

4) $\int\sin\underset{k=3}{3x}dx=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$.

III. Задачи и упражнения

1 (устно). Прочитайте и вычислите интегралы:

а) $\int 10^x dx$; б) $\int x^5dx$; в) $\int(e^x+5)dx$; г) $\int\sin 2xdx$; д) $\int e^{5x}dx$; е) $\int\frac{dx}{1+x^2}$.

2. Вычислите неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{2x^2+2}{1+x^2}dx$; б) $\int\frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}}dx$; в) $\int\sin^2 xdx$; г) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;

д) $\int\sin x\sin 4xdx$; е) $\int\mathrm{tg}^2 xdx$; ж) $\int a^x\times e^x dx$; з) $\int\frac{dx}{x+4}$; и) $\int\frac{dx}{8-x}$;

к) $\int\frac{dx}{x^2+4x+4}$; л) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$.

3. Для функции $y=f(x)$ найдите первообразную $y=F(x)$, график которой проходит через точку M:

а) $f(x)=x^4$, $M(-1;\ 2)$; б) $f(x)=7^{x/4}$, $M\left(8;\frac{1}{\ln 7}\right)$; в) $f(x)=\sin 2x$, $M(0;1)$.

IV. Вопросы к тексту

1) Что такое первообразная функция?

2) Что называется неопределенным интегралом функции $y=f(x)$?

3) Что такое интегрирование?

4) Назовите три правила вычисления неопределенного интеграла?

5) Как найти интеграл элементарной функции $y=x^{\alpha}$ с помощью табл. 1?

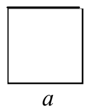
V. Выучите слова и словосочетания:

интегрирование	первообразная функции
интеграл	неопределенный интеграл
подынтегральная функция	подынтегральное выражение

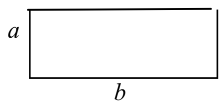
2.2. *ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И СПОСОБЫ ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЯ*

I. Повторение

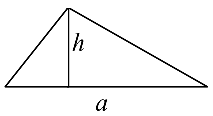
З а д а н и е 1. Повторите формулы для вычисления площади фигур:



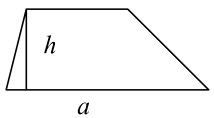
- квадрат, $S = a^2$.



- прямоугольник, $S = ab$.



- треугольник, $S = \frac{1}{2}ah$.



- трапеция, $S = \frac{a+b}{2}h$.

Как найти площадь любой фигуры? Например, фигуры, изображенной на рис. 5.

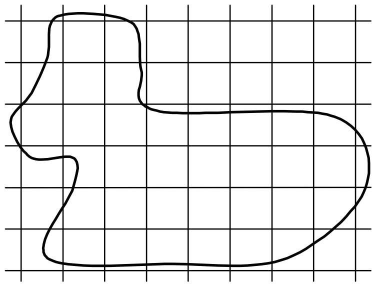


Рис. 5

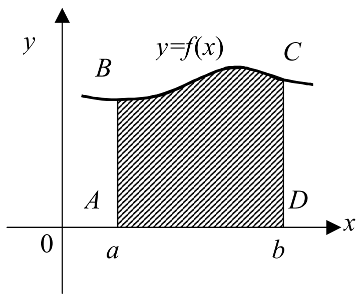


Рис. 6

Площадь этой фигуры можно вычислить приближенно, если разделить ее на квадраты площадью 1 см^2. Для точного значения площади такой фигуры формулы нет.

II. Текст для чтения

Понятие определенного интеграла.

Пусть функция $y = f(x)$ не изменяет знак на отрезке $[a; b]$. График этой функции изображен на рис. 6.

О п р е д е л е н и е 1. Фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс, называется криволинейной трапецией, $ABCD$ - это криволинейная трапеция.

Вычислим площадь криволинейной трапеции $ABCD$ (рис. 7).

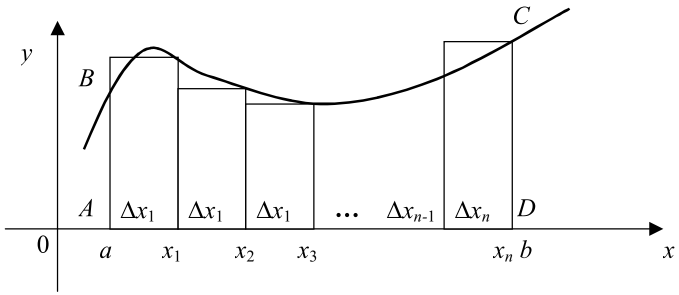


Рис. 7

Для этого разделим отрезок $[a; b]$ на n равных частей точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$. Обозначим длину каждого отрезка $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$. Проведем через точки $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ прямые, параллельные оси OY. На каждом отрезке Δx_i, $i = 1, 2, ..., n$ построим прямоугольник, высота которого равна $f(x_i)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Тогда площадь первого прямоугольника равна $\Delta S_1 = f(x_1)\Delta x_1$, площадь второго прямоугольника равна $\Delta S_2 = f(x_2)\Delta x_2, ..., \Delta S_n = f(x_n)\Delta x_n$.

Площадь криволинейной трапеции $ABCD$ приближенно равна сумме площадей всех прямоугольников:

$$S_{ABCD} \approx \Delta S_1 + \Delta S_2 + ... + \Delta S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + ... + f(x_n)\Delta x_n,$$

или пишут так $S_{ABCD} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

Выражение $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ называется интегральной суммой.

Если увеличить n (число отрезков, на которые мы делим $[a; b]$), то можно получить более точное значение площади трапеции $ABCD$, т.е. при $n \to \infty$ $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \to S_{ABCD}$.

Если существует предел интегральной суммы при $n \to \infty$, то этот предел называется площадью криволинейной трапеции $ABCD$:

$$S_{ABCD}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \ .$$

Этот предел называют определенным интегралом.

О п р е д е л е н и е 2. Определенный интеграл - это предел, к которому стремится интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ при $n\to\infty$.

Обозначают: $\int_a^b f(x)dx$.

Читают: интеграл от а до бэ эф от икс де икс;
a - нижний предел интегрирования;
b - верхний предел интегрирования.
В ы в о д : определенный интеграл - это число, это площадь криволинейной трапеции.

Пишут: $S_{ABCD}=\int_a^b f(x)dx$.

Теорема Лейбница - Ньютона

Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$ (без доказательства).

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Это формула Лейбница - Ньютона, которая дает способ вычисления определенного интеграла с помощью первообразной.
П р и м е р :

1) $\int_2^3 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3=\frac{3^3}{3}-\frac{2^3}{3}=\frac{27-8}{3}=\frac{19}{3}$;

2) $\int_0^{\pi} 2\sin x dx=-2\cos x\big|_0^{\pi}=-(2\cos\pi-2\cos 0)=4$.

Свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

2. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждой из этих функций:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx \ .$$

3. $\int\limits_a^b f(kx+p)\,dx = \frac{1}{k}\int\limits_a^b f(kx+p)\,dx$.

П р и м е р :

$$\int\limits_{-\pi}^{-2\pi}\frac{dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{3}\right)} = -3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{3}\right)\Bigg|_{-\pi}^{-2\pi} = -3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)-\left(-3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$= -3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -3\sqrt{3}.$$

4. Пусть $a < c < b$ и функция $y = f(x)$ имеет интеграл на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx .$$

П р и м е р :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, \text{ если } 1 \le x \le 2\,; \\ x^2, \quad \text{если } \ 2 < x \le 3\,. \end{cases}$$

$$\int\limits_1^3 f(x)dx = \int\limits_1^2 (1-x)dx + \int\limits_2^3 x^2\,dx = \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 + \frac{x^3}{3}\Bigg|_2^3 =$$

$$= \left(2-\frac{4}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{27}{3}-\frac{8}{3}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{19}{3} = \frac{-3+38}{6} = \frac{35}{6}.$$

5. Если верхний и нижний предел интегрирования поменять местами, то знак интеграла изменится на противоположный:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx .$$

III. Вопросы к тексту

1. Что такое криволинейная трапеция?
2. Как можно приближенно вычислить площадь криволинейной трапеции?
3. Что называется интегральной суммой?
4. Что такое определенный интеграл?
5. Как читается выражение $\int\limits_a^b f(x)dx$?
6. Что такое a и b в выражении $\int\limits_a^b f(x)dx$?
7. Какие свойства определенного интеграла вы знаете?

IV. Задачи

1. Вычислите определенный интеграл:

а) $\int_{-1}^{1} x^4 dx$; б) $\int_{\pi}^{\pi/2} \cos x dx$; в) $\int_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; г) $\int_{0}^{\pi/2} \sin x \cos x dx$; д) $\int_{-\pi}^{\pi/2} \sin^2 2x dx$;

е) $\int_{1}^{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^1} \right) dx$; ж) $\int_{0}^{3} 2e^x dx$.

2. Вычислите определенный интеграл от сложной функции:

а) $\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 3x \right) dx$; б) $\int_{0}^{0,5} \sqrt{1-x} dx$; в) $\int_{0}^{-4} \frac{xdx}{\sqrt{1-2x}}$; г) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(2x+1)}$;

д) $\int_{0}^{\pi} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6} \right) dx$; е) $\int_{0}^{2\pi} \sin 3x \cos 5x dx$.

V. Выучите слова и словосочетания:

криволинейная трапеция
интегральная сумма
определенный интеграл

2.3. *ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПЛОЩАДИ И РАБОТЫ*

I. Текст для чтения

С помощью определенного интеграла можно вычислить площади фигур, которые являются криволинейными трапециями или их комбинациями.

З а д а ч а 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 + x - x^2$ и $y = 0$.

Решение:

Построим в системе координат график функции $y = 2 + x - x^2$.

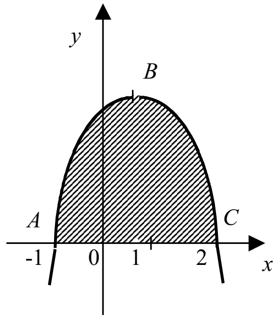


Рис. 8

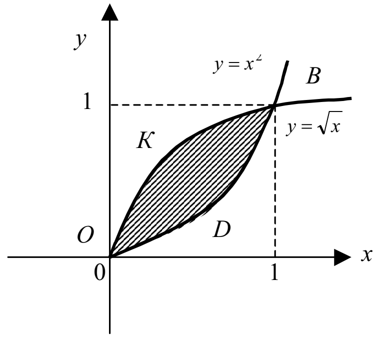


Рис. 9

Это парабола (рис. 8), ветки которой направлены вниз, она пересекает ось *Ox* в точках $x = 2$ и $x = 1$. Координаты вершины этой параболы $B(0{,}5;\ 2{,}25)$.

$y = 0$ - это ось *Ox*.

Нужно найти площадь фигуры *ABC*.

$$S_{ABC} = \int_{-1}^{2}\left(2 + x - x^2\right)dx = \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right)\Big|_{-1}^{2} = 4 + 2 - \frac{8}{3} - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 4{,}5.$$

О т в е т: $S = 4{,}5$ кв. ед.

З а д а ч а 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Р е ш е н и е:

На рис. 9 заштрихована фигура, площадь которой нужно вычислить.

Ее площадь равна разности площадей двух криволинейных трапеций *OKBC* и *ODBC*.

$$S_{OKBD} = S_{OKBC} - S_{ODBC} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 x^{1/2} dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

От в е т: $S_{OKBD} = \dfrac{1}{3}$ кв. ед.

Варианты комбинаций криволинейных трапеций при вычислении площадей фигур изображены на рис. 10.

С помощью определенного интеграла можно вычислить работу силы при прямолинейном перемещении.

Пусть тело движется по оси *x*, в каждой точке которой приложены силы $F = F(x)$. Вычислим работу, которую надо сделать, чтобы переместить тело из точки *a* в точку *b*. Эту работу можно вычислить по формуле $A = \int_a^b F(x)dx$.

З а д а ч а 2. Сила упругости пружины, растянутой на 5 см, равна 3 Н. Какую работу нужно выполнить, чтобы растянуть эту пружину на 6 см?

Р е ш е н и е : по закону Гука сила F, растягивающая пружину на величину x, вычисляется по формуле $F = kx$, где k - постоянный коэффициент.

Вычислим k. По условию $k \times 0{,}05 = 3$, отсюда $k = 60$.

$$A = \int_0^{0{,}06} 60x\,dx = 60 \times \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0{,}06} = 0{,}108 \text{ Дж.}$$

О т в е т : $A = 0{,}108$ Дж.

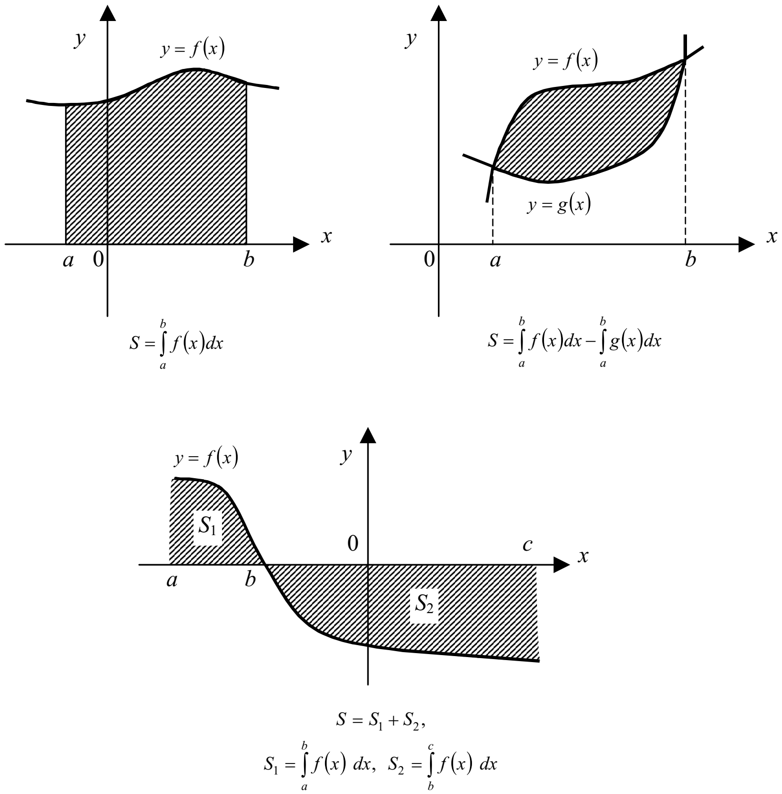


Рис. 10

II. Задачи

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = x^3$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$. Сделайте чертеж.

О т в е т : 20 кв. ед.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 1 - x$ и $y - 3 - 2x - x^2$; б) $y = 4x - x^2$ и $y = 4 - x$;

в) $y = x^2 - 2x + 2$ и $y = 2 + 4x - x^2$; г) $y = \dfrac{5}{x}$ и $y = 6 - x$,

д) $y = 0{,}5x^2 + 2{,}5$ и $y = x^2 + 2$.

О т в е т : а) 4,5; б) 4,5; в) 9; г) $5\ln 5$; д) $\dfrac{2}{3}$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной одной аркой синусоиды и осью Ox (рис. 11).

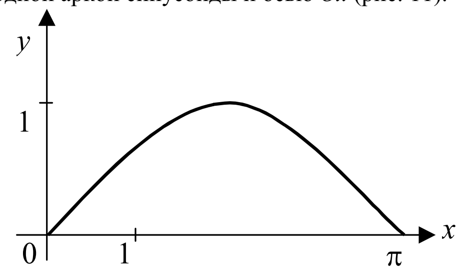


Рис. 11

О т в е т : 2 кв. ед.

4. Какую работу надо затратить на сжатие пружины на 4 см, если известно, что сила 2 Н сжимает эту пружину на 1 см?

О т в е т : 0,16 Дж.

5. Постройте на бумаге в клетку систему координат, где единичный отрезок -1 см. Найдите приближенные значения следующих интегралов с помощью графиков подынтегральных функций:

а) $\int\limits_0^{10} 0{,}1x^2 dx$; б) $\int\limits_1^{10} \dfrac{10}{x} dx$; в) $\int\limits_0^{10} 5\sin\dfrac{\pi x}{10} dx$.

Проверьте свой результат, вычисляя точное значение интеграла.

6. Какая фигура имеет большую площадь: полукруг радиуса 1 или фигура, ограниченная осью Ox и графиком функции $y = 1 - x^4$?

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 0,\ y = 5,\ y = x^2 - 3x - 4.$$

Ответ: $23^{2/3}$ кв. ед.

Глава 3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ
К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

3.1. *ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ НА ПРОМЕЖУТКЕ*

I. Вопросы для повторения

1) Что называется функцией $y = f(x)$?
2) Какая функция называется возрастающей на промежутке?
3) Какая функция называется убывающей на промежутке?
4) Какая функция называется монотонной на промежутке?

II. Текст для чтения

С помощью производной можно определить монотонность функции на любом промежутке области определения.

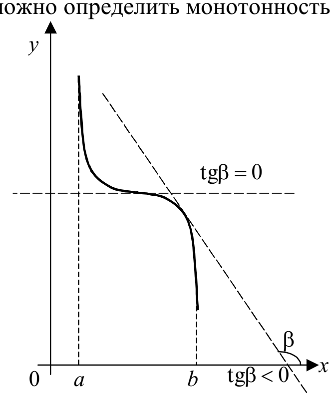


Рис. 12

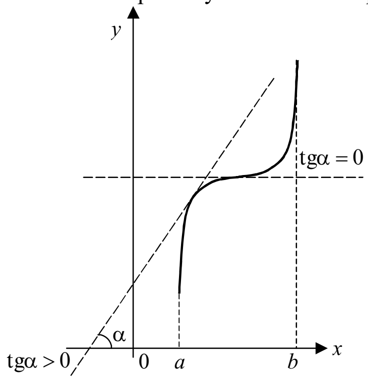


Рис. 13

Функция $y = f(x)$ (рис. 12) возрастает на промежутке $]a;\ b[$. Касательная в любой точке функции $y = f(x)$ образует с положительным направлением оси Ox острый угол или угол, равный 0. Значит, $\operatorname{tg}\alpha \ge 0$. Но $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) \ge 0$.

Производная функции $y = f(x)$ в каждой точке$]a;\ b[$ неотрицательна.

Справедлива т е о р е м а 1 (необходимое условие возрастания функции).

Если функция $y = f(x)$ возрастает на $]a;\ b[$, то $f'(x) \ge 0$ для всех x, которые принадлежат $]a;\ b[$ (без доказательства).

Эту теорему можно записать символами:

$$f(x) \nearrow \quad \forall x \in \left]a; b\right[\Rightarrow f'(x) \ge 0 \qquad \forall x \in \left]a; b\right[.$$

П р и м е р . Функция $y = x^2$ возрастает на $\left[0; +\infty\right[$, так как $y' = 2x \ge 0 \quad \forall x \in \left[0; +\infty\right[$.

Функция $y = \varphi(x)$ (рис. 13) убывает на $]a;\ b[$.

Касательная в любой точке графика функции $y = \varphi(x)$ образует с положительным направлением оси Ox или тупой угол, или угол, равный нулю. Значит, $\operatorname{tg}\beta \le 0$.

Но $\operatorname{tg}\beta = f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) \le 0{,}3$.

Справедлива т е о р е м а 2 (необходимое условие убывания функции).

Если функция $y = f(x)$ убывает на $]a; b[$, то $f'(x) \le 0$ для всех x, принадлежащих $]a; b[$ (без доказательства).

Эту теорему можно записать символами:

$f(x) \searrow \ \forall x \in]a;b[\Rightarrow f'(x) \le 0 \ \ \forall x \in]a;b[$.

П р и м е р : функция $y = x^2$ убывает на $]-\infty ; 0]$.

Справедливы и обратные теоремы.

Т е о р е м а 3 (достаточное условие возрастания функции).

Если $f'(x) > 0$ для всех x, принадлежащих $]a; b[$, то функция $y = f(x)$ возрастает на $]a; b[$.

Т е о р е м а 4 (достаточное условие убывания функции).

Если $f'(x) < 0$ для всех x, принадлежащих $]a; b[$, то функция $y = f(x)$ убывает на $]a; b[$.

Значит, чтобы найти промежутки монотонности, нужно:

1) найти область определения функции $y = f(x)$,

2) вычислить производную функции $f'(x)$,

3) определить знак производной $f'(x)$ на этом промежутке.

З а д а ч а 1. Найти промежутки монотонности функции

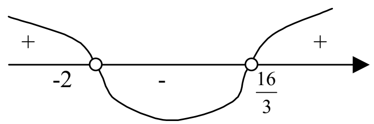
$$y = x^3 - 5x^2 - 32x + 9.$$

1. $D(x) = \mathbf{R}$.

2. $y' = 3x^2 - 10x - 32$.

3. Решить неравенства $3x^2 - 10x - 32 > 0$ и $3x^2 - 10x - 32 < 0$ методом интервалов.

$$3x^2 - 10x - 32 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{16}{3};\ x_2 = -2 \Rightarrow 3x^2 - 10x - 32 = 3(x+2)\left(x + \frac{16}{3}\right).$$



Начертим таблицу:

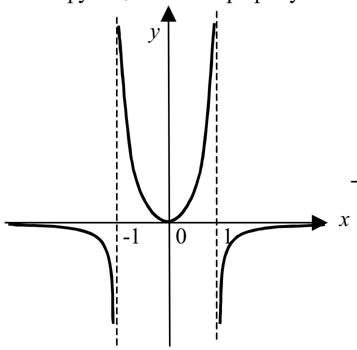
x	$]-\infty;\ -2[$	$\left]-2;\ \frac{16}{3}\right[$	$\left]\frac{16}{3};\ +\infty\right[$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

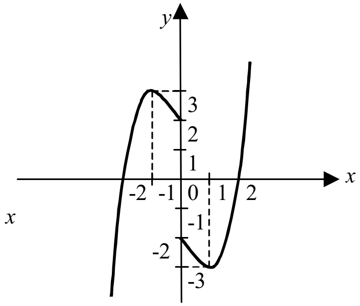
О т в е т : функция $y = f(x)$ возрастает на $\left]-\infty; -2\right[$ и $\left]\frac{16}{3}; +\infty\right[$; убывает на $\left]-2; \frac{16}{3}\right[$.

З а д а ч а 2. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = 2x^2 - 24x$.

III. Вопросы для самопроверки

1) Необходимое условие возрастания функции на промежутке $]a; b[$.
2) Необходимое условие убывания функции на промежутке $]a; b[$.
3) Достаточное условие возрастания функции на промежутке $]a; b[$.
4) Достаточное условие убывания функции на промежутке $]a; b[$.
5) Записать эти теоремы символами.
6) Закончить текст:
   а) если $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in]a; b[$, то . . .
   б) если . . . , то функция $y = f(x)$ убывает на этом промежутке.
7) Найти промежутки монотонности функции по ее графику:





8) В каких точках области определения дифференцируемой функции ее монотонность изменяется: возрастание изменяется на убывание и наоборот?

IV. Упражнения

Найти промежутки монотонности функций:

1) $y = 3x + 2$; 2) $y = x^2 + x - 2$; 3) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3$; 4) $y = \frac{3}{x-1}$;

5) $y = 2\sqrt{x}$; 6) $y = x^3 - 3x$; 7) $y = x^4 - 2x^2$; 8) $y = \frac{2}{x} + 1$.

3.2. *ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА*

I. Вопросы для повторения

1. Какая точка называется внутренней?

2. Какие точки называется точками экстремума?
3. Какая точка называется точкой максимума?
4. Какая точка называется точкой минимума?
5. Сколько точек экстремума может иметь функция $y = f(x)$ на промежутке $]a;\ b[$?
6. Функция $y = f(x)$ определена на $]a;\ b[$. Могут ли точки a и b быть точками экстремума?

II. Текст для чтения

Т е о р е м а Ф е р м а (необходимое условие существования функции).

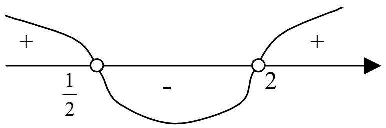
Если функция имеет производную в каждой точке промежутка $]a;\ b[$ и x_0 - точка экстремума, то в этой точке производная равна нулю $\left(f'(x_0)=0\right)$ (без доказательства).

З а д а ч а 1. Найти промежутки монотонности функции $y = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 1$.

1) $D(x) = \mathbf{R}$.

2) $y' = 12x^2 - 30x + 12$.

3) $12x^2 - 30x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 12x^2 - 30x + 12 = 12(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.



x	$\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$	$\frac{1}{2}$	$\left]\frac{1}{2}; 2\right[$	2	$]2; +\infty[$
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

В каких точках области определения этой функции изменилась ее монотонность?

В точках $x = 2$ и $x = \frac{1}{2}$.

Чему равно значение производной в этих точках?

$$f'(2) = 0 \text{ и } f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

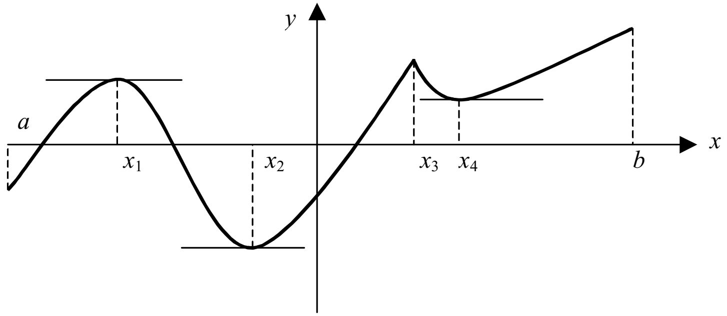
З а д а ч а 2. На чертеже функция $y = f(x)$ определена на промежутке $]a;\ b[$.

Функция $y = f(x)$ убывает на промежутках $]x_1; x_2[,\ ]x_3; x_4[$ и возрастает на промежутках $]a; x_1[,\ ]x_2; x_3[,\ ]x_4; b[$.

В каких точках области определения этой функции изменилась ее монотонность? В точках x_1, x_2, x_3, x_4.

Чему равна производная функции $y = f(x)$ в этих точках?

$f'(x_1) = 0, f'(x_2) = 0, f'(x_3)$ - не существует, $f(x_4) = 0$.



Точки x_1, x_2, x_3, x_4 - внутренние точки промежутка $]a; b[$.

Определение. Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются критическими.

Задача 3. Найти критические точки функции $y = x^2 - 4x$.

1) $D(x) = \mathbf{R}$.

2) $y' = 2x - 4$.

3) $y' = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \in D(x)$.

Ответ: $x = 2$ - критическая точка.

Задача 4. Найти критические точки функции $y = \dfrac{1}{x}$.

1) $D(x) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

2) $y' = -\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow y' \neq 0$ для $x \in D(x)$,

y' - не существует для $x = 0$.

Но точка $x = 0 \notin D(x) \Rightarrow$ нет критических точек.

Ответ: функция не имеет критических точек.

На основании теоремы Ферма можно сделать вывод: функция может иметь экстремум только в критических точках. Но обратное утверждение верно не всегда.

Теорема (достаточное условие существования экстремума).

Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема на $]a; b[$ и x_0 - это критическая точка.

Тогда

1) если при переходе через точку x_0 производная функции изменяет свой знак с "-" на "+", то точка x_0 - это точка минимума;

2) если при переходе через точку x_0 производная функции изменяет свой знак с "+" на "-", то точка x_0 - это точка максимума.

Значит, чтобы найти точки экстремума функции $y = f(x)$ на $]a; b[$, нужно:

1) найти $f'(x)$;

2) найти критические точки функции $y = f(x)$;

3) определить знак $f'(x)$ на каждом из промежутков, на которые разделили промежуток $]a; b[$ критические точки;

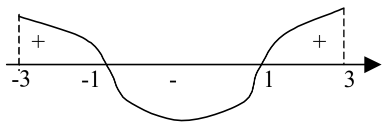
4) с помощью теоремы, выражающей достаточное условие существования экстремума, найти точки максимума и минимума.

З а д а ч а 5. Найти точки экстремума функции $y = x^3 - 3x$ на]-3; 3[.

1) $y' = 3x^2 - 3$

2) $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \; x = \pm 1 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

3)



4)

x	$]-3; -1[$	-1	$]-1; 1[$	1	$]1; 3[$
y'	+	0	+	0	-
y	↗	2	↘	-2	↗
		max		min	

О т в е т : точка максимума (-1; 2), точка минимума (1; -2)

III. Вопросы для самопроверки

1. Какие точки называются критическими?
2. Необходимое условие существования экстремума функции.
3. Достаточное условие существования экстремума функции.
4. Верны ли утверждения:

а) если точка x_0 - точка экстремума функции $f(x)$, то она ее критическая точка;

б) если точка x_0 критическая точка функции $f(x)$, то она ее точка экстремума;

в) если функция не имеет критических точек, то она не имеет и точек экстремума;
г) точки, в которых $f'(x) = 0$, будут точками экстремума функции;
д) в точках экстремума функции ее производная равна нулю;
е) в точках экстремума функции ее производная существует.

IV. Упражнения

Найти экстремумы функций:

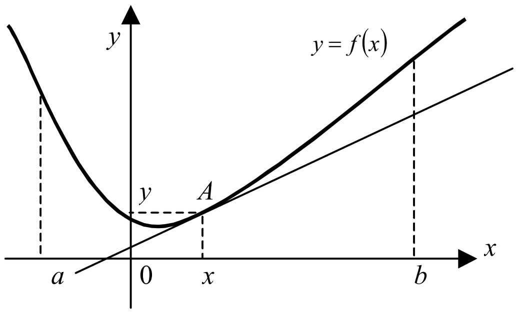
1) $f(x) = 5x - 3$; 2) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x$; 3) $\varphi(x) = 2x + \frac{1}{2x}$;

4) $g(x) = 4x^3 + 12x^2 - 3$; 5) $y(x) = 2x^3 - 3x^2$; 6) $V(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$;

7) $y = \frac{x+6}{x^2+13}$.

3.3. *ВЫПУКЛОСТЬ (ВОГНУТОСТЬ) И ТОЧКИ ПЕРЕГИБА*

I. Текст для чтения

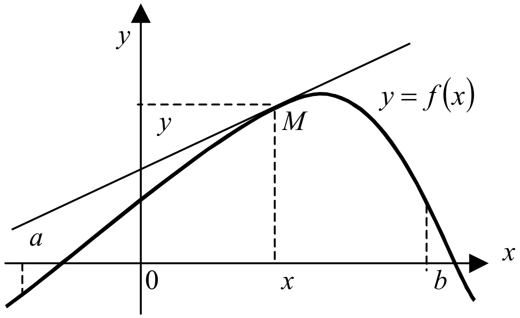


Пусть функция $y = f(x)$ задана графически на $]a; b[$. Точка A принадлежит графику функции. Точка A имеет координаты $(x;\ y)$. В точке A начертим касательную к графику функции $y = f(x)$.

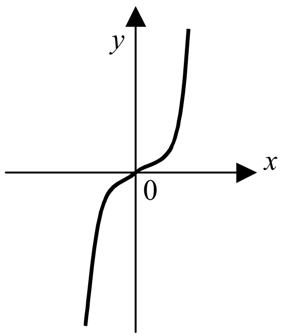
О п р е д е л е н и е 1. Если для всех $x \in\ ]a; b[$ точки, принадлежащие кривой, находятся выше соответствующих точек, принадлежащих касательной, то кривая назы-вается выпуклой вниз (или вогнутой вверх) на проме-жутке $]a; b[$.

Есть график функции $y = f(x)$ на $]a; b[$. Точка M принадлежит графику и имеет координаты $(x;\ y)$. В точке M начертим касательную к графику этой функции.

О п р е д е л е н и е 2. Если для всех $x \in\ ]a; b[$ точки, принадлежащие кривой, находятся выше соответствующих точек, принадлежащих касательной, то кривая $y = f(x)$ называется выпуклой вверх (или вогнутой вниз) на $]a; b[$.



П р и м е р .



Кривая $y = x^3$:

1) вогнута вверх на $]\ 0; +\infty\ [$;

2) вогнута вниз на $]\ -\infty; 0\ [$.

Вогнутость (выпуклость) графика функции зависит от знака ее второй производной.

Определим признак вогнутости кривой.

1. Кривая $y = f(x)$ вогнута вверх на $]a; b[$, если для всех $x \in\ ]a; b[$ вторая производная положительна:

$$y'' > 0 \Rightarrow y \bigcup.$$

2. Кривая $y = f(x)$ вогнута вниз на $]a; b[$, если для всех $x \in\ ]a; b[$ вторая производная отрицательна:

$$y'' < 0 \Rightarrow y \bigcap.$$

З а д а ч а 1. Найти промежутки вогнутости функции $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 2\frac{1}{4}$

1) $D(x) = \mathbf{R}$.

2) $y' = \frac{1}{2}x - 2$.

3) $y' = \frac{1}{2} > 0 \forall_{x \in D(x)} \Rightarrow y \bigcup \forall_{x \in R}$.

Функция вогнута вверх для всех $x \in \mathbf{R}$.

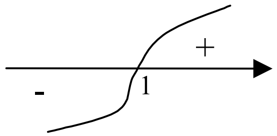
З а д а ч а 2. Найти промежутки вогнутости функции $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

1) $D(x) = \mathbf{R}$.

2) $y' = x^2 - 2x$.

3) $y'' = 2x - 2$.

$y'' = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$.



$y'' > 0$ для $x \in \,]1; +\infty[$;
$y'' < 0$ для $x \in \,]-\infty; 1[$.

Точка $x = 1$ будет одновременно концом промежутка вогнутости вверх и концом промежутка вогнутости вниз. Такие точки называются точками перегиба.

Признак существования точек перегиба

Если в точке x_0 вторая производная функции $y = f(x)$ равна нулю, и при переходе через эту точку вторая производная изменяет свой знак, то x_0 - это точка перегиба.

З а д а ч а 3. Найти точки перегиба кривой $y = x^3 - 4x$.

1) $D(x) = \mathbf{R}$.

2) $y' = 3x^2 - 4$.

3) $y'' = 6x$.

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; +\infty[$
y''	-	0	+
y	$\cap$	-4	$\cup$
		точка перегиба	

В точке $x = 0$ вторая производная равна нулю. При переходе через точку $x = 0$ она изменяет знак. Значит, точка (0; -4) - точка перегиба для графика функции $y = x^3 - 4x$.

II. Вопросы для самопроверки

1) Какая кривая называется вогнутой вверх (или выпуклой вниз) на $]a; b[$?
2) Какая кривая называется вогнутой вниз (выпуклой вверх) на $]a; b[$?
3) Какие точки называются точками перегиба?
4) Признак вогнутости (выпуклости) кривой.

III. Упражнения

Найти промежутки вогнутости (выпуклости) функций:

1) $y = x^4 - x^2$; 2) $y = 12x - x^3$; 3) $y = x^3 - 3x^2$; 4) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$;

5) $y = x^4 - 18x^2 + 17$; 6) $y = x + \dfrac{1}{x}$; 7) $y = (x-1)(x+1)^2$; 8) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$;

9) $y = \sqrt[3]{x-2}$; 10) $y = \dfrac{4}{1+x^2}$.

3.4. *ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ*

I. Текст для чтения

В курсе элементарной математики мы чертили графики функций по точкам. Этот способ имеет ряд существенных недостатков:

1) большой объем работы (вычисление координат большого числа точек);

2) невозможность определить характерные свойства функций: точки экстремума, точки перегиба и промежутки вогнутости на любом малом промежутке.

Сейчас мы можем чертить графики функций более совершенным способом с помощью первой и второй производной.

Исследование функции делают в следующем порядке:

1. Область определения функции.
2. Непрерывность функции и точки разрыва.
3. Точки пересечения с осями координат.
4. Четность, нечетность и периодичность функции.
5. Промежутки знакопостоянства.
6. Промежутки монотонности и точки экстремума.
7. Промежутки вогнутости и точки перегиба.
8. Асимптоты графика функции.
9. Построение графика функции.
10. Область изменения функции.

Следует иметь в виду, что при построении графика функции можно не всегда следовать указанному плану. Например, не всегда можно найти нули функции, даже если они существуют. Иногда дополнительно находят координаты некоторых точек графика.

Рассмотрим примеры исследования функций и построения их графиков с помощью производной.

З а д а ч а 1. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x^2$ и построить ее график.

1. Область определения функции. $D(x)$ = **R**.

2. Непрерывность функции и точки разрыва. Функция $y = x^3 - 3x^2$ непрерывна на всей области определения. Точек разрыва нет.

3. Точки пересечения с осями координат.

$Ox : y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 3.$

$(0; 0), (3; 0)$ - точки пересечения с осью Ox.

$Oy : x = 0 \Rightarrow y = 0$.

(0; 0) - точка пересечения с осью Oy.

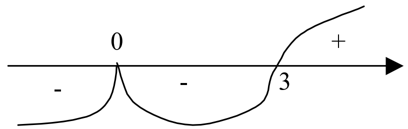
4. Четность, нечетность, периодичность.

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 = -x^3 - 3x^2 = -(x^3 + 3x^2) \neq f(x) - f(x).$$

Функция не будет четной и не будет нечетной. Функция непериодическая.

5. Промежутки знакопостоянства.

$y = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$.



$y > 0 : x \in \left]3; +\infty\right[$;

$y < 0 : x \in \left]-\infty; 0\right[$; $x \in \left]0; 3\right[$.

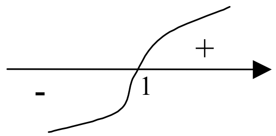
6. Промежутки монотонности и точки экстремума.

$y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$ - критические точки.

x	$\left]-\infty; 0\right[$	0	$\left]0; 2\right[$	2	$\left]2; +\infty\right[$
y'	+	0	+	0	-
y	↗	0	↘	-2	↗
		max		min	

7. Промежутки вогнутости и точки перегиба.

$y'' = 6x - 6$; $y'' = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$.



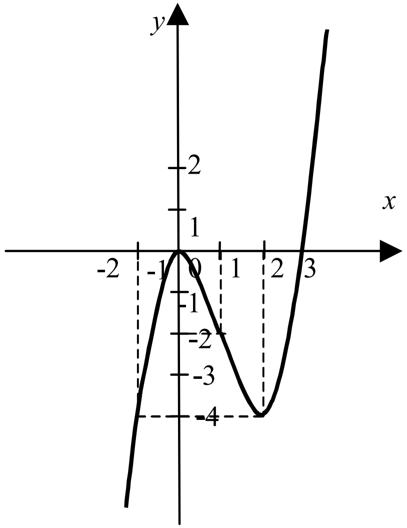
$x = 1$ - точка перегиба.

x	$\left]-\infty; 1\right[$	1	$\left]1; +\infty\right[$
y''	-	0	+
y	$\cap$	-2	$\cup$
		точка перегиба	

8. Асимптоты графика функции.
Нет вертикальной асимптоты.
$y = kx + d$ - это уравнение наклонной асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} (x^2 - 3x) = \infty .$$

Нет наклонной асимптоты.



9. Построение графика функции.

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2=-1-3=-4.$$

10. Область изменения функции.

$$E(y)=\mathrm{R}.$$

З а д а ч а 2. Исследовать функцию $y=x+\dfrac{1}{x}$ и построить ее график.

1. $D(x)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$.
2. $x = 0$ - точка разрыва.
3. Ox: $y=0 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow \dfrac{x^2+1}{x}\neq 0 \Rightarrow$ нет точек пересечения с осью Ox.

   Oy: $y=0$, но $x=0\notin D(x)$, нет точек пересечения с осью Oy.

4. $f(-x)=-x-\dfrac{1}{x}=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-f(x) \Rightarrow$ функция нечетная $\Longrightarrow$ график ее симметричен относительно начала координат. Значит, можно начертить только половину графика для $x > 0$ или $x < 0$, а потом с помощью симметрии закончить вторую половину графика. Функция непериодическая.

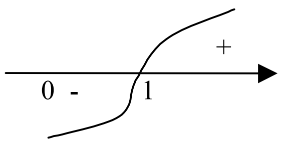
$$y=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$$

5. $y>0: x>0$;
   $y<0: x<0$.

6. $y'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$;

   $y'=0 \Rightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2}=0 \Rightarrow x=\pm 1.$

Возьмем только $x > 0$:



$x = 1$ - критическая точка.

x	$]0;1[$	1	$]1;+\infty[$
y'	-	0	+
y	$\searrow$	2	$\nearrow$
		min	

7. $y'' = \dfrac{2x \times x^2 - 2x\left(x^2-1\right)}{x^4} = \dfrac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3} \neq 0$.

Нет точек перегиба.

$y'' > 0$: $x > 0 \Rightarrow y \cup$ на $]0; +\infty[$;

$y'' < 0$: $x < 0 \Rightarrow y \cap$ на $]-\infty; 0[$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \infty \Rightarrow x = 0$ - уравнение вертикальной асимптоты.

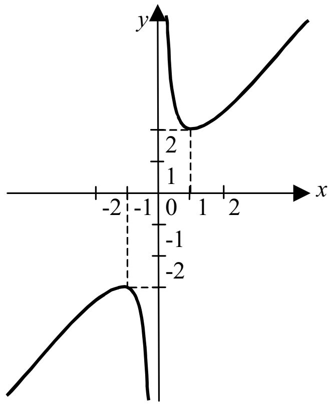
$y = kx+b$;

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$.

$b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x + \dfrac{1}{x} - x\right) = 0$.

$y = x$ - уравнение наклонной асимптоты.

9.



10. $E(y) = \left]-\infty; -2\right] \cup \left[2; +\infty\right[$.

З а д а ч а 3. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ и построить ее график.

1. $D(x) = \mathbf{R}\backslash[-1;1]$.

2. $x = -1$; $x = 1$ - точки разрыва.

3. Ox: $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \neq 0 \Rightarrow$ нет точек пересечения с осью Ox.

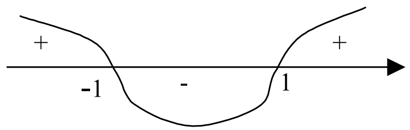
Oy: $y = 0 \Rightarrow y = -1$.

(0; -1) - точка пересечения с осью Oy.

4. $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=f(x)\Rightarrow$ функция четная.

График функции симметричен относительно оси Oy. Функция непериодическая.

5. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.



$y>0: \,]-\infty;-1[\,\cup\,]1;+\infty[$;

$y<0: \,]-1;\ 1[$.

6. $y'=\dfrac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)}=\dfrac{2x(x^2-1-x^2-1)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$.

$y'>0: x<0$;

$y'<0: x>0$;

$y'=0\Rightarrow x=0$;

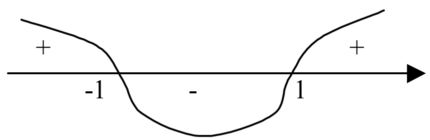
$x=0$ - критическая точка.

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;+\infty[$
y'	-	0	+
y	↗	-1	↘
		max	

7. $y''=\dfrac{-4(x^2-1)^2-(4x^3-4x)(-4x)}{(x^2-1)^4}=\dfrac{-4(x^2-1)^2+4x(x^2-1)4x}{(x^2-1)^3}=$

$=\dfrac{4(x^2-1)(-(x^2-1)+4x^2)}{(x^2-1)^4}=\dfrac{4-(x^2+1+4x^2)}{(x^2-1)^3}=\dfrac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}\neq 0\Rightarrow$

нет точек перегиба.



x	$]-\infty;\ -1[$	1	$]1;1[$	1	$]1;+\infty[$
y''	+		-		+
y	$\cup$		$\cap$		$\cup$

8. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\infty;$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\infty;$

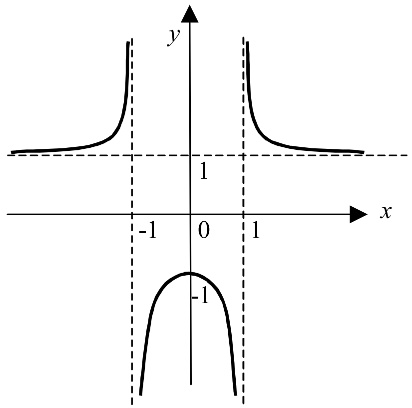
$x=-1,\ x=1$ - уравнение вертикальных асимптот.

$y=kx+b;$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=0\ ;$$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1\Rightarrow y=1$ - уравнение горизонтальной асимптоты. Нет наклонной асимптоты.

9.



10. $E(y)=\,]\infty;-1[\,\cup[\,1;+\infty\,[.$

З а д а ч а 4. Исследовать функцию $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.

1. $D(x)=\mathbf{R}\backslash\{-1;\ 1\}$.
2. $x=-1,\ x=1$ - точки разрыва.

3. Ox: $y=0 \Rightarrow \dfrac{x}{1-x^2}=0 \Rightarrow x=0$;

(0; 0) - точка пересечения с осью Ox.

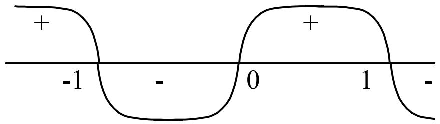
Oy: $x=0 \Rightarrow y=0$;

(0; 0) - точка пересечения с осью Oy.

4. $f(-x)=\dfrac{-x}{1-(-x)^2}=\dfrac{-x}{1-x^2}=-f(x) \Rightarrow$ функция нечетная.

График ее симметричен относительно начала координат. Функция непериодическая.

5. $y=\dfrac{x}{1-x^2}$.



$y>0: \left]-\infty;-1\right[\cup \left]0;1\right[$;

$y<0: \left]-1;\ 0\right[\cup \left]1;+\infty\right[$.

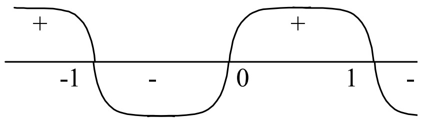
6.

$$y'=\frac{1(1-x^2)-2xx}{(1-x^2)^2}=\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}>0\ \forall\, x\in D(x) \Rightarrow y \nearrow \ \forall\, x\in D(x) \Rightarrow$$

нет точек экстремума.

7. $$y''=\frac{2x(1-x^2)^2-(-4x+4x^3)(1+x^2)}{(1-x^2)^4}=\frac{2x(1-x^2)^2+4x(1-x^2)(1+x^2)}{(1-x^2)^4}=$$

$$=\frac{2x(1-x^2)(1-x^2+2(1+x^2))}{(1-x^2)^4}=\frac{2x(1-x^2)(x^2+3)}{(1-x^2)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$



$y''=0 \Rightarrow x=0$.

x	$\left]-\infty;-1\right[$	-1	$\left]-1;0\right[$	0	$\left]0;1\right[$	1	$\left]1;+\infty\right[$
y''	+		-	0	+		
y	$\cup$		$\cap$	0	$\cup$		$\cap$
				точка перегиба			

$x = 0$ - точка перегиба.

8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{1-x^2} = -\infty$,

$x = -1$ - уравнение вертикальной асимптоты.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x^2} = +\infty$,

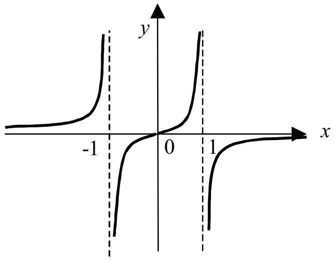
$x = 1$ - уравнение вертикальной асимптоты.

$y = kx+b$;

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1-x^2} = 0$; $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1-x^2} = 0$;

$y = 0$ - уравнение горизонтальной асимптоты.

9.



10. $E(y) = \left]-\infty; +\infty\right[$.

З а д а ч а 5. Исследовать функцию $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$ и построить ее график.

1. $D(x) = \mathbf{R}\backslash\{0\}$.
2. $x = 0$ - точка разрыва.
3. Ox: $y = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} + 4x^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{1+4x^3}{x} = 0 \Rightarrow 1+4x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{-\dfrac{1}{4}}$.

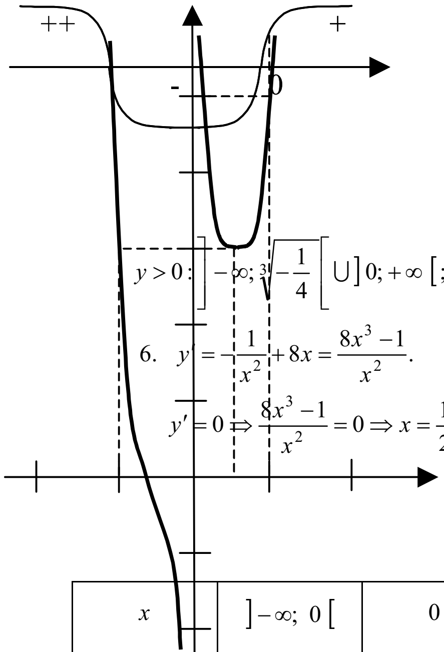
$\left(\sqrt[3]{-\dfrac{1}{4}};\ 0\right)$ - точка пересечения с осью Ox.

Oy: $x \neq 0 \Rightarrow$ нет точек пересечения с осью Oy.

4. $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)} + 4(-x)^2 = -\dfrac{1}{x} + 4x^2 = -\left(\dfrac{1}{x} - 4x^2\right) \neq -f(x) \neq f(x)$.

Функция не будет четной и не будет нечетной. Функция непериодическая.

5. $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2 = \dfrac{1+4x^3}{x}$.

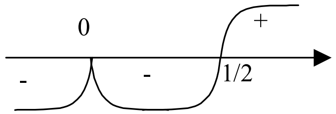


$\sqrt[3]{-1/4}$

$y>0:\ \left]-\infty;\ \sqrt[3]{-\frac{1}{4}}\right[\ \cup\ ]0;+\infty\,[;\quad y<0:\ \left]\sqrt[3]{-\frac{1}{4}};\ 0\right[.$

6. $y' = -\dfrac{1}{x^2} + 8x = \dfrac{8x^3-1}{x^2}.$

$y' = 0 \Rightarrow \dfrac{8x^3-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}.$



x	$]-\infty;\ 0\,[$	0	$\left]0;\frac{1}{2}\right[$	$\frac{1}{2}$	$\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$
y'	-		-	0	+
y	↘		↘	3	↗
				min	

7. $y'' = \dfrac{24x^2 \times x^2 - 2x\left(8x^3-1\right)}{x^4} = \dfrac{24x^4 - 16x^4 + 2x}{x^4} = \dfrac{8x^4+2x}{x^4} = \dfrac{2x\left(4x^3+1\right)}{x^4} = \dfrac{2\left(4x^3+1\right)}{x^3}.$

$\sqrt[3]{-1/4}$

x	$\left]-\infty;\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}\right[$	$\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}$	$\left]\sqrt[3]{-\frac{1}{4}};\ 0\right[$	0	$]\,0;-\infty\,[$
y''	+	0	-		+
y	$\cup$	3	$\cap$		$\cup$
			точка перегиба		

$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{4}};\ 0\right)$ - точка перегиба.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}+4x^2\right)=\infty$.

$x = 0$ - уравнение вертикальной асимптоты.

$y = kx + b$;

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2+4x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+4x^3}{x^2}=\infty .$$

Нет наклонной асимптоты.

9.

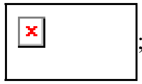
$$y(-1)=3;$$
$$y(1)=5 .$$

10. $E(y) = \mathbf{R}$.

II. Упражнения

Исследовать функции и построить их графики:

1) $y=\frac{x^2}{1+x^3}$; 2) $y=\frac{1-x}{(x-2)^3}$;

3) $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$; 4)  ;

5) $y=\frac{x^3}{x-1}$; 6) $y=\frac{x+2}{x^2-9}$;

7) $y=\frac{x^2-3x+2}{x+1}$; 8) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2$;

9) $y=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}$; 10) $y=\frac{2x^2+x-1}{2x^2-x-1}$.

3.5. *НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ*

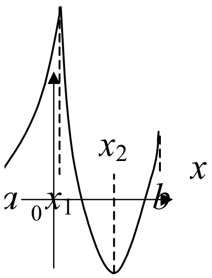
I. Текст для чтения

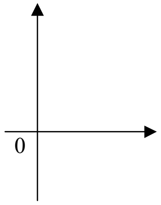
На рисунке изображены графики четырех функций. Анализ этих графиков показывает, что эти функции непрерывные на промежутке [a; b], имеют наибольшие и наименьшие значения или на концах промежутка, или в критических точках. Значит, чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = f(x)$ на промежутке [a; b], нужно:

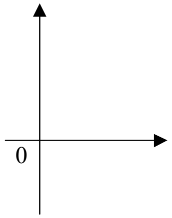
1) Найти критические точки функции $y = f(x)$ на промежутке [a; b].

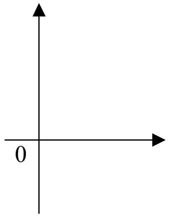
2) Найти значения функции в критических точках и на концах промежутка [a; b].

3) Из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.









$f_{\text{наиб.}} = f(x_1)$	$f_{\text{наиб.}} = f(a)$	$f_{\text{наиб.}} = h(x_1)$	$g_{\text{наиб.}} = g(x_1)$
$f_{\text{наим.}} = f(x_2)$	$f_{\text{наим.}} = f(x_1)$	$f_{\text{наим.}} = h(x_2)$	$g_{\text{наим.}} = g(a)$

П р и м е р : Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + \dfrac{3}{x}$ на промежутке $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$

1) $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{3x^4 - 3}{x^2}$;

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{3x^4 - 3}{x^2} = 0 \Rightarrow x = -1 \notin \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$; $x = 0 \notin D(x)$;

$x = 1 \notin \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$ - критическая точка.

2) $f(1) = 4$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 6\dfrac{1}{8}$, $f(2) = 9\dfrac{1}{2}$.

3) Наибольшее значение функции равно $9\dfrac{1}{2}$.

Наименьшее значение функции равно 4.

Есть два утверждения, которые часто используются при решении задач.

1. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на промежутке $(a; b)$ и имеет на этом промежутке только одну критическую точку x_0 - точку максимума (минимума). Тогда $f(x_0)$ - наибольшее (наименьшее) значение функции $y = f(x)$ на промежутке $(a; b)$.

2. Если функция $y = g(x)$ положительна на некотором промежутке, то функции $y = g(x)$ и $y = [g(x)]^n \ (n \in N)$ имеют наибольшее (наименьшее) значение на этом промежутке в одной и той же точке.

З а д а ч а 1. Найти наибольшее значение функции $y = 1 - x^4 - x^6$ на (-3; 3).

$y' = -4x^3 - 6x^5$;

$y' = 0 \Rightarrow -4x^3 - 6x^5 = 0 \Rightarrow -2x^3(2 + 3x^2) = 0 \Rightarrow x = 0$;

$x = 0 \in (-3; 3)$ - критическая точка.

Функция $\boxed{}$ имеет только одну критическую точку на (-3; 3).

При переходе через точку $x = 0$ производная изменяет свой знак с "+" на "-". Значит, в точке $x = 0$ функция имеет максимум. Но тогда в этой точке функция имеет наибольшее значение: $f(0) = 1$.

Наибольшее значение функции равно 1.

З а д а ч а 2. Найти наибольшее значение функции

на (0; 2).

Функция положительна на (0; 2).

Значит, функции $\psi=\sqrt{\xi(2-\xi)}$ и имеют наибольшее значение на (0; 2) в одной и той же точке.

;

- критическая точка.

При переходе через критическую точку $x = 1$ производная изменяет свой знак с "+" на "-". Значит, в точке $x = 1$ функция имеет максимум и наибольшее значение.

Тогда и функция в этой точке тоже имеет наибольшее значение: $f(1) = 1$.

II. Упражнения

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

на [-2; 1].

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на [1; 2].

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \ln x - x$ на [; 3].

4. Найти наибольшее значение функции на (-1; 1).

5. Найти наименьшее значение функции на (0; 2).

6. Найти наибольшее значение функции на (0; 4).

7. Найти наибольшее значение функции на (-2; 3).

8. Найти наименьшее значение функции на промежутке $x > 0$.

9. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$ на промежутке $x < 0$.

3.6. *ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ*

1. Найти промежутки монотонности функций и точки экстремума.

а) ; б) $y = -x^2 + 2x$; в) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$; г) $y = 0,5x^4 + 8x$;

д) $y = \frac{3x - 1}{1 - 4x}$; е) $y = \frac{x - 3}{2x + 4}$; ж) $y = \frac{(x - 2)(8 - x)}{x^2}$; з) $y = x^4(x - 12)^2$.

2. Найти промежутки вогнутости (выпуклости) функций:

а) $y = 5x - 3$; б) $y = \frac{1}{2}x^2 - 5x$; в) $y = 2x + \frac{1}{2x}$; г) $y = 4x^3 + 12x^2 - 3$;

д) ; е) $y = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$.

3. Найти наибольшее значение функции $y = x + 2\sqrt{x}$ на [0; 4].

4. Найти наибольшее значение функции $y = x^5 - x^4 + 3$ на (— —)

5. Найти наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 6\sqrt{x}$ на промежутке $x > 0$.
6. Написать число 50 в виде суммы двух чисел, у которых сумма кубов будет наименьшей.
7. Найти такое положительное число, которое в сумме с обратным ему числом, будет иметь наименьший результат.
8. Разложить число 40 на два таких слагаемых, чтобы их произведение было наибольшим.

Список литературы

1. Цыпкин А. Г. Справочник по математике для средней школы. 2-е изд. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981.
2. Егерев В. К., Зайцев В. В., Кордемский Б. А. и др. Сборник задач по математике для поступающих в вузы (с решениями). В 2 кн. Кн. 1. Алгебра: Учеб. пособие. 8-е изд., испр. М.: Высш. шк., 1998. 528 с.
3. Кузнецова Л. Н. Применение производной к исследованию функции: Методические указания для самостоятельной работы студентам-иностранцам подготовительного факультета. Тверь, 1995.
4. Гаганова Л. М. Интеграл: Методические указания для самостоятельной работы студентам-иностранцам подготовительного отделения. Тверь, 1995.
5. Кузнецова Л. Н. Производная: Методические указания для самостоятельной работы. Тверь, 1994.

Содержание

НАЧАЛО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Издательство ТГТУ

Учебное издание

НАЧАЛО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Учебно-методическое пособие

Авторы-составители: АЛЕЕВА **Анна Яковлевна,**
ГРОМОВ **Юрий Юрьевич,**
ИВАНОВА **Ольга Геннадьевна,**
ЛАГУТИН **Андрей Владимирович**

Редактор Т. М. Глинкина
Инженер по компьютерному макетированию
Г. Ю. Корабельникова