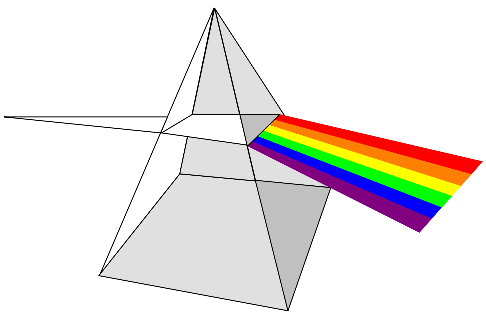
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ

Теоретическая механика. Методы интегрирования уравнений динамики материальной точки. Метод. указания. / Сост. В. И. Галаев, Ю. В. Кулешов. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. 28 с.

Рассматриваются некоторые типы дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядков и методы их решения применительно к основной задаче динамики материальной точки.

Предназначены для студентов 1-го и 2-го курсов дневного и заочного отделений технических специальностей.

Министерство образования Российской Федерации
ТАМБОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Методические указания для студентов 1 и 2 курсов
дневного и заочного отделений
технических специальностей

Тамбов
Издательство ТГТУ
2001

1 ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Основой классической механики являются основные законы динамики материальной точки, одним из которых устанавливается пропорциональность силы и ускорения (2-ой закон Ньютона). Он может быть сформулирован следующим образом.

Ускорение, которое приобретает материальная точка под действием силы в инерциальной системе отсчета пропорционально величине силы и имеет направление вектора силы. Аналитически закон выражается следующим уравнением

$$m\overline{W} = \overline{F}\ , \tag{1.1}$$

где $\overline{F}$ – сила, действующая на материальную точку; m – масса материальной точки; $\overline{W}$ – ее ускорение.

Уравнение (1.1) называется основным уравнением динамики материальной точки.

В случае одновременного действия на материальную точку нескольких сил $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n}$, на основании принципа независимости действия сил можно записать основное уравнение динамики в виде

$$m\overline{W} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F_k}\ , \tag{1.2}$$

где $\sum_{k=1}^{n} \overline{F_k}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке.

Таким образом, движение материальной точки при одновременном действии системы сил будет таким же, как и при действии одной силы, равной их геометрической сумме, т.е. равнодействующей.

Если движение материальной точки исследуется по отношению к не инерциальной системе отсчета, то на основании теоремы о сложении ускорений при сложном движении точки

$$\overline{W} = \overline{W_r} + \overline{W_e} + \overline{W_c}\ , \tag{1.3}$$

где $\overline{W_r}$ – относительное; $\overline{W_e}$ – переносное; $\overline{W_c}$ – кориолисово ускорение.

Подставляем (1.3) в (1.2), запишем его в форме

$$m\overline{W_r} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F_k} - m\overline{W_e} - m\overline{W_c}\ . \tag{1.4}$$

Введем обозначения

$$\overline{\Phi_e} = -m\overline{W_e}, \overline{\Phi_c} = -m\overline{W_c}\ . \tag{1.5}$$

Векторы: $\overline{\Phi_e}$ и $\overline{\Phi_c}$ называются, соответственно, переносной и кориолисовой силами инерции.

Уравнение (1.4) принимает следующий вид

$$m\overline{W_r} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F_r} + \overline{\Phi_e} + \overline{\Phi_c}\ . \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) называется основным уравнением динамики относительного движения материальной точки.

Таким образом, относительное движение материальной точки можно рассматривать как абсолютное, если к действующим на точку силам добавить переносную и кориолисову силы инерции.

Основному уравнению динамики материальной точки (1.1) можно придать другую форму. Для этого запишем ускорение в виде 2-й производной от радиуса вектора $\overline{r}$, определяющего положение материальной точки в инерциальной системе отсчета. Учтем также, что равнодействующая сил, действующих на материальную точку, может, в общем случае, зависеть от времени, положения и скорости материальной точки. В результате получаем уравнение

$$m\ddot{\overline{r}} = \overline{F}(t, \overline{r}, \dot{\overline{r}})\ . \tag{1.7}$$

Предположим, что закон движения материальной точки не известен и разыскивается в векторной форме $\overline{r} = \overline{r}(t)$. Тогда (1.7) следует рассматривать как уравнение, содержащее наряду с неизвестной векторной функцией $\bar{r}(t)$ ее производные $\dot{\bar{r}}$ и $\ddot{\bar{r}}$, то есть как дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме.

От векторной формы основного уравнения (1.7) можно перейти к уравнениям в проекциях на оси. Так, если движение материальной точки исследуется по отношению к декартовой системе осей координат, то (1.7) будет эквивалентно 3-м скалярным уравнениям

$$m\ddot{x} = F_x, m\ddot{y} = F_y, m\ddot{z} = F_z, \tag{1.8}$$

где x, y, z – координаты движущейся точки; F_x, F_y, F_z – проекции равнодействующей сил на оси координат.

Совокупность уравнений (1.8) называется системой дифференциальных уравнений движения материальной точки в декартовой системе осей координат в скалярной форме.

Следует отметить, что в соответствии с видом правой части уравнения (1.7), правые части (1.8), в общем случае, могут являться функциями вида

$$F_x = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),\; F_y = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

$$F_z = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \tag{1.9}$$

Запишем векторное уравнение (1.1) в проекциях на оси естественного трехгранника, т.е. на касательную, главную нормаль и бинормаль к траектории материальной точки: $mW_\tau = F_\tau$, $mW_n = F_n$, $mW_b = F_b$. Используем кинематические выражения для проекций ускорения

$$W_\tau = \frac{dv}{dt},\; W_n = \frac{v^2}{\rho},\; W_b = 0,$$

где v – скорость точки, ρ – радиус кривизны траектории точки.

В результате получаем систему естественных дифференциальных уравнений движения материальной точки

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau,\; m\frac{v^2}{\rho} = F_n,\; 0 = F_b. \tag{1.10}$$

Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки могут быть получены проектированием уравнения (1.6) на оси подвижной системы отсчета. Так, при использовании декартовой системы осей координат получаем

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} + \varPhi_{ex} + \varPhi_{cx},\; m\ddot{y} = \sum F_{ky} + \varPhi_{ey} + \varPhi_{cy},$$

$$m\ddot{z} = \sum F_{kz} + \varPhi_{ez} + \varPhi_{cz}. \tag{1.11}$$

Составив дифференциальные уравнения движение материальной точки в виде (1.7), (1.8), (1.10) или (1.11), можно решать 2-е основные задачи динамики материальной точки.

Первая основная задача. Зная массу материальной точки и ее кинематические уравнения движения, найти силу, действующую на материальную точку.

Вторая основная задача. Зная массу материальной точки, силы, действующие на нее, а так же ее начальное положение и начальную скорость, найти кинематические уравнения движения материальной точки.

Решение первой основной задачи может быть найдено простым дифференцированием по времени кинематических уравнений движения.

В дальнейшем будет рассматриваться решение второй основной задачи динамики материальной точки, связанной с необходимостью интегрирования дифференциальных уравнений (1.7), (1.8), (1.10), (1.11).

Предварительно рассмотрим основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений, необходимые при решении указанной выше задачи динамики материальной точки.

2 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При изучении физических явлений очень часто не удается непосредственно найти закон, связывающий независимую переменную, которую мы будем обозначать "t" (в механике – это время, отсчитываемое от момента начала движения) и искомую (неизвестную) функцию, под которой в механике понимается координата или скорость материальной точки ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $v(t)$). Однако возможно установить связь между неизвестной функцией и ее производными и эта связь выражается дифференциальным уравнением. К дифференциальным уравнениям приводят многие задачи из механики, физики и других естественных наук, а также многие проблемы техники.

Определение. Уравнение, связывающее независимую переменную t, искомую функцию $x(t)$ и хотя бы одну из ее производных $\dot{x}(t), \ddot{x}(t), ..., x^{(n)}(t)$ называется дифференциальным уравнением.

Если искомая функция $x(t)$ является функцией одного аргумента t, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

Произвольное обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0 . \qquad (2.1).$$

Здесь F есть заданная (известная) функция от $n + 2$ переменных, удовлетворяющая определенным условиям непрерывности и дифференцируемости; $x = x(t)$ – функция от "t" – решение дифференциального уравнения, которое надо найти.

Определение. Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Определение. Решением дифференциального уравнения (2.1) называется любая функция, определенная вместе с соответствующими производными в некоторой области, которая, будучи подставлена в уравнение, обращает его в тождество, справедливое для всех точек этой области.

Пример. Дифференциальное уравнение $t\dot{x}(t) = \ln(t)$ есть уравнение первого порядка. Его решением, например, является функция

$$x(t) = \frac{1}{2}\ln^2(t) .$$

Действительно,

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2} 2\ln(t)\frac{1}{t} = \frac{\ln(t)}{t} .$$

Подставляя в уравнение, получим

$$t\dot{x}(t) = t\frac{\ln(t)}{t} = \ln(t) ,$$

что совпадает с правой частью данного уравнения. Заметим, что решением этого уравнения будет и любая функция

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\ln^2(t) + C ,$$

где C – произвольная постоянная.

График решения дифференциального уравнения на плоскости $0tx$ называется интегральной кривой этого уравнения.

Если задачу об отыскании решений, которая называется интегрированием дифференциального уравнения, удается свести к вычислению конечного числа интегралов и производных от известных функций и к алгебраическим операциям, то говорят, что уравнение интегрируется в квадратурах.

Для исследования дифференциальных уравнений, не интегрируемых в квадратурах, широко применяются приближенные и численные методы их решения.

Проинтегрировать дифференциальное уравнение – это значит найти те или иные его решения, что всегда связанно с необходимостью интегрировать входящие в это уравнение функции.

3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальное уравнение первого порядка - это уравнение, в которое входит лишь первая производная неизвестной функции. Такое уравнение имеет вид

$$F(t, v(t), \dot{v}(t)) = 0 . \tag{3.1}$$

Если это уравнение можно разрешить относительно $\dot{v}(t)$, то его можно записать в форме

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{m} \cdot R_x(t, v(t)), \tag{3.2}$$

где m – масса материальной точки. В механике $v(t)$ – это скорость прямолинейного движения материальной точки, $R_x(t, v(t))$ – проекция равнодействующей сил, приложенных к точке на направление движения. Уравнение в таком виде называется дифференциальным уравнением в нормальной форме.

Любое дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений. Для описания этих множеств вводится понятие общего решения.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения (3.1) первого порядка в некоторой области D плоскости $0tv$ называется функция $v(t) = \varphi(t, C)$, зависящая от t и от одного произвольного постоянного параметра C и удовлетворяющая следующим условиям:

1) эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению, то есть является его решением при любом конкретном значении постоянной $C = C_0$;

2) для любой пары значений (t_0, v_0), определяющих внутреннюю точку области D, можно найти такое единственное значение параметра $C = C_0$, что функция $v(t) = \varphi(t, C_0)$ будет удовлетворять условию: $v(t)|_{t=t_0} = v_0$, т.е. при $t = t_0$ $v = v_0$.

При определении общего решения дифференциального уравнения (3.1) часто получается соотношение вида $\Phi(t, v(t), C) = 0$, из которого выразить $v(t)$ в элементарных функциях не всегда возможно; в таких случаях общее решение оставляют в неявном виде.

Определение. Равенство $\Phi(t, v(t), C) = 0$, определяющее общее решение $v(t) = v(t, C)$ как неявную функцию, называется общим интегралом дифференциального уравнения. Эта функция $\Phi(t, v(t), C)$ тождественна равна нулю при замене $v(t)$ любым частным решением, которое получается из общего решения при соответствующем значении постоянной C.

Определение. Частным решением дифференциального уравнения (3.1) называется любая функция $v(t) = \varphi(t, C_0)$, которая получается из общего решения $v(t) = \varphi(t, C)$, если в последнем произвольную постоянную принять равной C_0. Соотношение $\Phi(t, v(t), C_0) = 0$ называется в этом случае частным интегралом дифференциального уравнения.

С геометрической точки зрения общий интеграл есть семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от одной производной постоянной С. Эти кривые называются интегральными кривыми данного уравнения.

Частному интегралу соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через некоторую заданную точку плоскости.

Отметим важнейшую задачу, которая называется задачей Коши для дифференциального уравнения (3.1) первого порядка: среди всех решений требуется найти такое решение $v = v(t)$ данного дифференциального уравнения, которое удовлетворяет условию $v(t_0) = v_0$, где (t_0, v_0) – заданная точка области D (или все равно что, такое решение $v = v(t)$, в котором функция $v = v(t)$ принимает заданное числовое значение v_0 при заданном значении t_0 переменной t, то есть $v(t_0) = v_0$).

Условие, что при $t = t_0$ функция $v(t)$ должна равняться v_0 называется начальным условием; числа t_0, v_0 называются начальными данными.

Задачу Коши геометрически можно сформулировать следующим образом: среди всех интегральных кривых дифференциального уравнения найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M_0(t_0, v_0)$ области D.

При определенных условиях, налагаемых на правую часть дифференциального уравнения, существует решение задачи Коши и оно единственно.

Вопрос о единственности задачи Коши представляет значительный интерес для многочисленных приложений дифференциальных уравнений, так как зная, что решение единственно, мы уверены, что других решений, удовлетворяющих тем же начальным условиям, нет. В вопросах механики, физики и т.д. это приводит к тому, что мы получаем вполне определенный, единственный закон явления, определяемый только дифференциальным уравнением и начальным условием.

4 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = 0$$

или

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} \cdot R_x(t, x(t), \dot{x}(t)). \tag{4.1}$$

В механике $x(t)$ – это координата, определяющая положение точки при ее прямолинейном движении.

Общим решением дифференциального уравнения (4.1) второго порядка в некоторой области D называется функция $x(t) = \varphi(t, C_1, C_2)$, зависящая от t и от двух произвольных постоянных C_1, C_2, которая при любых значениях этих постоянных является решением этого уравнения.

Уравнение вида $\Phi(t, C_1, C_2) = 0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Любая функция (или интеграл), которая получается из общего решения при конкретных значениях постоянных C_1, C_2, называется частным решением (частным интегралом) уравнения.

Задачей Коши для дифференциального уравнения (4.1) второго порядка называется задача определения среди всех решений такого решения $x(t)$ этого уравнения, которое удовлетворяет заданным начальным условиям, т.е. функция $x(t)$ вместе с ее производной $\dot{x}(t)$ принимает заданные значения $x_0, \dot{x}_0$ при заданном значении t_0 переменной t.

Характерная особенность задачи Коши в том, что условия, налагаемые на решение $x(t)$ задаются при одном и том же значении независимой переменной.

Если известно общее решение уравнения второго порядка, то для решения задачи Коши постоянные C_1, C_2 определяются из системы уравнений $x_0 = \varphi(t_0, C_1, C_2)$, $\dot{x}_0 = \dot{\varphi}(t_0, C_1, C_2)$.

Всякое решение $x = x(t)$ в механике соответствует некоторому движению, выражает закон этого движения, которым является зависимость положения точки от времени.

Поэтому задача Коши состоит в том, чтобы из всех движений, определяемых этим уравнением, найти движение $x = x(t)$, которое удовлетворяет начальным условиям движения: $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$ при $t = 0$, то есть найти такое движение, в котором точка занимала бы в заданный (начальный) момент времени $t = 0$ заданное (начальное) положение x_0 и имело бы заданную (начальную) скорость v_0.

5 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решении многих задач требуется найти функции $v_1(t), v_2(t)$, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, содержащих аргумент t, неизвестные функции $v_1(t)$, $v_2(t)$ и их производные. К рассмотрению систем дифференциальных уравнений приводят физические задачи, в частности, задачи динамики материальной точки (в этом случае $v_1(t)$, $v_2(t)$ есть проекции вектора скорости точки на оси прямоугольной системы координат).

Система дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид

$$\begin{cases} m\dot{v}_1(t) = R_x(t, v_1(t),\ v_2(t)), \\ m\dot{v}_2(t) = R_y(t, v_1(t),\ v_2(t)), \end{cases} \tag{5.1}$$

где m – масса материальной точки. $R_x(t, v_1(t), v_2(t))$, $R_y(t, v_1(t), v_2(t))$ – известные функции (в механике – это проекции на оси координат равнодействующей сил, приложенных к материальной точке, при ее криволинейном движении).

Система, в которой левые части есть производные первого порядка неизвестных функций, а правые части не содержат производных, называется нормальной. Если функции $R_x(t, v_1(t), v_2(t))$, $R_y(t, v_1(t), v_2(t))$ не зависят явно от времени *t*, то система уравнений называется автономной (стационарной).

Решением системы дифференциальных уравнений (5.1) называется любая совокупность функций $v_1(t) = \varphi_1(t)$, $v_2(t) = \varphi_2(t)$, обращающих вместе со своими производными все уравнения системы в тождества.

Общим решением системы дифференциальных уравнений (5.1) называется совокупность функций $v_1(t) = \varphi_1(t, C_1, C_2)$, $v_2(t) = \varphi_2(t, C_1, C_2)$, зависящих от двух произвольных постоянных C_1, C_2, которые при любых значениях постоянных C_1, C_2 обращают уравнения системы в тождества, то есть являются ее решением.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (5.1) ставится следующим образом: среди всех решений системы найти решение $v_1(t), v_2(t)$ этой системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$v_t(t)\,|_{t=t_0} = v_{10},\ v_2(t)\,|_{t=t_0} = v_{20}\,,$$

где v_{10}, v_{20} – заданные числа. Другими словами, функции $v_1(t), v_2(t)$ принимают заданные числовые значения v_{10}, v_{20} при заданном значении t_0 переменной *t*.

Совокупность двух функций, получающихся из общего решения системы при определенных значениях постоянных C_1^0, C_2^0 называется частным решением системы. Решая задачу Коши, мы всегда находим частное решение системы. Для этого надо решить систему уравнений $\varphi_1(t_0, C_1, C_2) = v_{10}$, $\varphi_2(t_0, C_1, C_2) = v_{20}$ относительно C_1 и C_2 и подставить найденные значения постоянных C_1^0, C_2^0 в общее решение системы.

К системе дифференциальных уравнений может быть сведена задача динамики прямолинейного движения точки. Дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет в этом случае вид $\ddot{x}(t) = R_x(t, x(t), \dot{x}(t))$.

Учитывая, что

$$\dot{x}(t) = v(t)\,,$$

где $v(t)$ – алгебраическая величина скорости точки, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t), \\ \dot{v}(t) = R_x(t, x(t), v(t)). \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений определяет положение и скорость движения точки в любой момент времени *t*. Начальные условия движения задают положения точки и ее скорость в начальный момент времени t_0

$$x(t)\,|_{t=t_0} = x_0,\ v(t)\,|_{t=t_0} = v_0\,.$$

6 ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДЫ ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1) Дифференциальное уравнение вида

$$\dot{v}(t) = f_1(t) f_2(v)\,, \tag{6.1}$$

где правая часть есть произведение функции, зависящей только от "*t*" на функцию, зависящую только от *v*, называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Заменяя $\dot{v}(t)$ как $\frac{dv}{dt}$, запишем это уравнение в виде $\frac{dv}{f_2(v)} = f_1(t)dt$. Интегрируя левую часть равенства по "v", а правую по "t", получим общий интеграл уравнения (6.1) $\int \frac{dv}{f_2(v)} = \int f_1(t)dt + C$.

Замечание. Простейшим дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными есть уравнение вида $\frac{dv}{dt} = f(t)$. Его общий интеграл $v = \int f(t)dt + C$.

2) Дифференциальное уравнение вида

$$\dot{v}(t) = f\left(\frac{v}{t}\right), \tag{6.2}$$

когда функция $f\left(\frac{v}{t}\right)$ зависит только от отношения $\frac{v}{t}$, называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

При решении такого уравнения вместо функции $v(t)$ вводится новая функция $\xi(t) = \frac{v(t)}{t}$. Тогда $v(t) = \xi(t)t,\ \dot{v}(t) = \dot{\xi}(t)t + \xi(t)$. Подставляя в исходное уравнение, получим уравнение $\dot{\xi}(t)t + \xi(t) = f(\xi(t))$, являющееся уравнением с разделяющимися переменными

$$\frac{d\xi}{f(\xi,t) - \xi(t)} = \frac{dt}{t}. \tag{6.3}$$

Общий интеграл уравнения (6.3) есть

$$\int \frac{d\xi}{f(\xi,t) - \xi(t)} = \int \frac{dt}{t} + C.$$

Определив функцию $\xi(t)$, получим $v(t) = \xi(t)t$ – общее решение уравнения (6.2).

3) Дифференциальное уравнение вида

$$v(t) + P(t)v(t) = Q(t), \tag{6.4}$$

называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. В этом уравнении $P(t)$, $Q(t)$ заданные, непрерывные функции от "t".

Если $Q(t) = 0$, то уравнение $\dot{v}(t) + P(t)v(t) = 0$ называется линейным однородным, которое является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Решение уравнения (6.4) ищется в виде произведения двух функций $v(t) = u_1(t)u_2(t)$.

Функция $u_1(t)$ определяется как частное решение уравнения $\dot{u}_1(t) + P(t)u_1(t) = 0$, после этого функция $u_2(t)$ определяется как общее решение уравнения $\dot{u}_2(t)u_1(t) = Q(t)$.

Уравнения для $u_1(t), u_2(t)$, как не трудно видеть, есть уравнение с разделяющимися переменными.

4) Дифференциальное уравнение вида

$$\dot{v}(t) + P(t)v(t) = Q(t)v(t)^n \tag{6.5}$$

называется уравнением Бернулли $(n \neq 0, n \neq 1)$, которое можно записать в виде

$$v(t)^{-n}\dot{v}(t) + P(t)v(t)^{-n+1} = Q(t) \tag{6.6}$$

Уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению заменой $u(t) = v(t)^{-n+1}$. Тогда $\dot{u}(t) = (-n+1)v(t)^{-n}\dot{v}(t)$ и подставляя в уравнение (6.6) получим линейное уравнение $\dot{u}(t) + (-n+1)P(t)u(t) = (-n+1)Q(t)$.

5) Дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\ddot{x}(t) = f(t). \tag{6.6}$$

Общее решение этого уравнения получается путем двукратного интегрирования $x(t) = \int\left(\int f(t)dt\right)dt + C_1t + C_2$.

6) Уравнение вида

$$\ddot{x}(t) = f(\dot{x}(t), t), \tag{6.7}$$

не содержащее явно неизвестной функции $x(t)$. Вводится новая функция $u(t) = \dot{x}(t)$, тогда $\dot{u}(t) = \ddot{x}(t)$. В результате, относительно функции $u(t)$ получается дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{u}(t) = f(u(t),t). \qquad (6.8)$$

Определив общее решение уравнения (6.8), однократным интегрированием этого решения получается общее решение уравнения (6.7).

6) Уравнение вида

$$\ddot{x}(t) = f(x(t),\dot{x}(t)) \qquad (6.9)$$

не содержащее явным образом независимую переменную "*t*".

Вводится также, как и в предыдущем случае, новая функция, но здесь она считается функцией от " x ", а не от "*t*" как в п. 6

$$\dot{x}(t) = P(x), \ddot{x}(t) = \frac{dP(x)}{dt} = \frac{dP(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = P(x)\frac{dP(x)}{dx}.$$

В результате получим уравнение первого порядка относительно функции $P(x)$. $P(x)\frac{dP(x)}{dx} = f(x(t),P(x))$. Интегрируя это уравнение, находим $P = P(x,C_1)$. Для определения $x(t)$ получаем уравнение с разделяющимися переменными $\dot{x}(t) = P(x,C_1)$.

7) Дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_2x(t) = f(t) \qquad (6.10)$$

называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если $f(t) = 0$, то уравнение называется однородным.

Квадратное уравнение $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ называется характеристическим для уравнения (6.10).

Пусть λ_1,λ_2 – корни характеристического уравнения (они могут быть действительными или комплексными). Корни λ_1,λ_2 в случае, если они комплексные, будем записывать в виде $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $\lambda_2 = \alpha_1 - i\beta_1$ $\quad (i = \sqrt{-1})$.

Относительно правой части рассмотрим только случай, когда она имеет специальный вид

$$f(t) = P(t)e^{\lambda\cdot t} \text{ или } f(t) = e^{\alpha\cdot t}(q_1(t)\cos(\beta t) + q_2(t)\sin(\beta t)),$$

где $P(t),q_1(t),q_2(t)$ – многочлены от "*t*", (в частном случае это могут быть постоянные) λ,α,β – действительные постоянные.

Теория дифференциальных уравнений указанного типа позволяет находить их общее решение по корням характеристического уравнения и виду правой части, не выполняя операции интегрирования.

Если известны два линейно-независимых решения $x_1(t),x_2(t)$ однородного уравнения, то общее решение этого уравнения равно

$$x_0(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t),$$

где C_1,C_2 – произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения определяется как сумма общего $x_0(t)$ решения соответствующего однородного уравнения и частного $x_ч(t)$ решения неоднородного уравнения. $x(t) = x_0(t) + x_ч(t)$.

Каким образом записывать общее решение однородного и частное решение не однородного линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами указано в табл. 1. В этой таблице $P(t)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами той же степени, что и многочлен $p(t)$; $Q_1(t),Q_2(t)$ – многочлены, степень которых равна наибольшей из степеней многочленов $q_1(t),q_2(t)$.

Отметим общий вид многочлена степени "*n*"

$$P(t) = A_1t^n + A_2t^{n-1} + ... + A_nt + A_{n+1} \quad (A_1 \neq 0).$$

В частности: $P(t) = A_1t + A_2$ – многочлен первой степени; $P(t) = A_1t^2 + A_2t + A_3$ – многочлен второй степени и т.д.

В случае, если один из многочленов $q_1(t)$ или $q_2(t)$ равен нулю, в формуле для частного решения должны быть учтены как многочлен $Q_1(t)$, так и $Q_2(t)$.

Если правая часть $f(t)$ уравнения (6.10) есть сумма нескольких функций $f_1(t), f_2(t),..., f_n(t)$, то надо найти частные решения этого уравнения, соответствующие этим функциям. Частное решение уравнения (6.10) в этом случае будет равно сумме указанных частных решений.

8) Относительно систем дифференциальных уравнений отметим систему вида

$$\begin{cases} \dot{v}_1(t) = A_{11}v_1(t) + A_{12}v_2(t) + f_1(t), \\ \dot{v}_2(t) = A_{21}v_1(t) + A_{22}v_2(t) + f_2(t). \end{cases} \tag{6.11}$$

Система уравнений (6.11) называется линейной (неизвестные функции и их производные входят в систему в первой степени и линейным образом).

Одним из приемов решения системы линейных дифференциальных уравнений является метод исключения. Для этого дифференцируют по "t" обе части одного из уравнений системы, например, первого

$$\ddot{v}_1(t) = A_{11}\dot{v}_1(t) + A_{12}\dot{v}_2(t) + \dot{f}_1(t). \tag{6.12}$$

В полученном уравнении $\dot{v}_2(t)$ заменяют согласно второму уравнению системы, что приводит к уравнению

$$\ddot{v}_1(t) = A_{11}\dot{v}_1(t) + A_{12}(A_{21}v_1(t) + A_{22}v_2(t) + f_2(t)) + \dot{f}_1(t). \tag{6.13}$$

Выражая $v_2(t)$ из первого уравнения системы (6.11) и подставляя в уравнение (6.13), получим дифференциальное уравнение второго порядка (в общем случае не однородное) с постоянными коэффициентами относительно функции $v_1(t)$.

Находим общее решение этого уравнения $v_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2)$ и подставляя в первое уравнение системы (6.11), определяем неизвестную функцию $v_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2)$.

7 ПРИМЕРЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Рассмотрим применение методов интегрирования дифференциальных уравнений на конкретных примерах динамики материальной точки.

Будем считать, что под действием сил материальная точка совершает прямолинейное движение, поэтому величина $x(t)$ – это координата, определяющая положение точки; $v(t)$ – алгебраическая величина ее скорости (проекция скорости на ось, направленную по прямой, по которой движется точка). Правые части дифференциальных уравнений движения материальной точки в указанных ниже примерах следует рассматривать как величину проекций на указанную выше ось равнодействующей сил, приложенных к точке, приходящуюся на единицу массы этой точки.

1) Скорость точки $v(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{v}(t) = -\frac{tv(t)}{t+1}. \tag{7.1}$$

Правая часть уравнения (7.1) показывает, что на материальную точку действует сила, зависящая от времени и скорости точки. В начальный момент времени

$$t = 0:\ v = 1, \text{ м/с}. \tag{7.2}$$

Определить закон изменения скорости материальной точки от времени.

Уравнение (7.1) есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$v(t) = \frac{dv(t)}{dt};\ \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{tv(t)}{t+1};\ \frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{t}{t+1}dt;\ \int\frac{dv(t)}{v(t)} = -\int\frac{t}{t+1}dt.$$

Находим неопределенные интегралы

$$\int\frac{dv(t)}{v(t)} = \ln|v(t)|;\ \int\frac{t}{t+1}dt = \int\frac{(t+1)^{-1}}{t+1}dt = \int\frac{t+1}{t+1}dt - \int\frac{1}{t+1}dt = \int dt - \int\frac{dt}{t+1} =$$

$$= t - \ln|t+1| + \ln|C|.$$

Произвольная постоянная записывается в виде $\ln|C|$, что является часто удобным при записи общего решения уравнения

$$\ln|v(t)| = -t + \ln|t+1| + \ln|C|, \ln\left|\frac{v(t)}{(t+1)C}\right| = -t, \frac{v(t)}{(t+1)C} = e^{-t}, v(t) = Ce^{-t}(t+1), \tag{7.3}$$

общее решение уравнения (7.1).

Находим постоянную *C*, используя начальное условие (7.2). Подставляем в правую часть (7.3) $t = 0$, в левую $v = 1$ м/с. $1 = C_1e^0(0+1)$ $C = 1$.

Тогда

$$v(t) = (t+1)e^{-t} \tag{7.4}$$

частное решение уравнения (7.1), удовлетворяющее начальному условию (7.2).

Уравнением (7.4) определяется закон изменения скорости материальной точки от времени.

2) Скорость материальной точки удовлетворяет дифференциальному уравнению вида $\dot{v} = -2tv + e^{-t^2}\sin(t)$.

В начальный момент времени

$$t = 0;\ v = 2 \text{ м/с}. \tag{7.5}$$

Определить закон изменения скорости материальной точки от времени. Перенесем член уравнения $-2tv$, содержащий неизвестную функцию влево

$$\dot{v} + 2tv = e^{-t^2}\sin(t). \tag{7.6}$$

Уравнение (7.6) есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. Его решение ищем в виде произведения двух функций $v = u_1u_2$. Функция $u_1(t)$ определяется как частное решение уравнения $\dot{u}_1 + 2tu_1 = 0$, которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Тогда

$$\frac{du_1}{dt} = -2tu_1,\ \frac{du_1}{u_1} = -2tdt, \ln|u_1| = -t^2,\ u_1 = e^{-t^2}.$$

Теперь функция $u_2(t)$ ищется как общее решение уравнения

$$\dot{u}_2e^{-t^2} = e^{-t^2}\sin(t),$$

или

$$\frac{du_2}{dt} = \sin(t),$$

которое так же является уравнением с разделяющимися переменными. $u_2 = -\cos(t) + C, v = e^{-t^t}(-\cos(t) + C) = Ce^{-t^2} - e^{-t^2}\cos(t)$.

Используя начальное условие (7.5) находим постоянную *C*

$$2 = C - 1;\ C = 3.$$

Тогда $v = (3 - \cos(t))e^{-t^2}$ частное решение уравнения (7.6), удовлетворяющее начальному условию (7.5), определяющее закон изменения скорости материальной точки от времени.

3) Скорость материальной точки $v(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\dot{v} = 2vtg(t) - v^2\sin(t). \tag{7.7}$$

В начальный момент времени

$$t = 0;\ v = 0{,}2 \text{ м/с}. \tag{7.8}$$

Определить закон изменения скорости материальной точки от времени.

Запишем уравнение (7.7) в следующей форме $\dot{v} - 2vtg(t) = -v^2\sin(t)$. Это уравнение есть дифференциальное уравнение Бернулли. Запишем его в виде $v^{-2}\dot{v} - 2v^{-1}tg(t) = -\sin(t)$, используя замену $u(t) = v^{-1}(t)$, получаем линейное неоднородное уравнение $\dot{u}(t) + 2u(t)tg(t) = \sin(t)$ решение которого ищем в виде произведения двух функций $u(t) = u_1(t)u_2(t)$. Выполняя далее действия аналогичные примеру 2), имеем

$$\frac{du_1}{dt} = -2tg(t)u_1, \frac{du_1}{u_1} = -2tg(t)dt, \ln|u_1| = 2\ln|\cos(t)|, u_1(t) =$$
$$= \cos^2(t), \dot{u}_2(t)\cos^2(t) = \sin(t),$$
$$du_2 = \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}dt, u_2 = \frac{1}{\cos(t)} + C, u(t) = (1 + C\cos(t))\cos(t),$$
$$v(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{\sec(t)}{1 + C\cos(t)} \tag{7.9}$$

общее решение уравнения (7.7). Находим постоянную *C*, используя начальные условия (7.8)

$$0{,}2 = \frac{1}{1+C}, C = 4,$$

тогда $v(t) = \dfrac{\sec(t)}{1 + 4\cos(t)}$ есть искомый закон изменения скорости материальной точки от времени.

4) Определить закон движения материальной точки под действием силы, зависящей от времени по дифференциальному уравнению движения

$$\ddot{x} = 3t^2 + 5\cos(2t), \tag{7.10}$$

(x измеряется в метрах, t – в секундах) и начальным условиям

$$t = 0;\ x = -0{,}25 \text{ м}; \dot{x} = 2 \text{ м/с}. \tag{7.11}$$

Так как $\dot{x}(t) = v(t)$, то $\ddot{x}(t) = \dot{v}(t)$ и порядок дифференциального уравнения понижается до первого $\dot{v} = 3t^2 + 5\cos(2t)$, дальнейшее решение может быть выполнено следующим образом

$$\frac{dv}{dt} = 3t^2 + 5\cos(2t), \int dv = \int(3t^2 + 5\cos(2t))dt, v = t^3 + \frac{5}{2}\sin(2t) + C_1, \tag{7.12}$$

но
$$v = \frac{dx}{dt},$$

отсюда
$$\frac{dx}{dt} = t^3 + \frac{5}{2}\sin(2t) + C_1,$$

$$\int dx = \int(t^3 + \frac{5}{2}\sin(2t) + C_1)dt, \ x = \frac{t^4}{4} - \frac{5}{4}\cos(2t) + C_1t + C_2. \tag{7.13}$$

Подставляя в (7.12) и в (7.13) начальные данные, имеем: $-0{,}25 = -1{,}25 + C_2, C_1 = 2, C_2 = 1$. Найденные значения постоянных C_1, C_2 подставляем в общее решение (7.13)

$$x = 0{,}25t^4 - 1{,}25\cos(2t) + 2t + 1 \text{ (м)} \tag{7.14}$$

есть частное решение уравнения (7.10), удовлетворяющее начальным условиям (7.11) и, одновременно, определяющее закон движения материальной точки.

5) Дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$\ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{e^t + 1}. \tag{7.15}$$

Следовательно сила, действующая на материальную точку, зависит от скорости ее движения и от времени. Найти закон движения материальной точки, если в начальный момент времени $t = 0$ она располагалась в положении с координатой $x = 1$ м и имела скорость $v = 4$ м/с.

Так как $\dot{x}(t) = v(t)$ – скорость точки, то $\ddot{x}(t) = \dot{v}(t)$. В результате, относительно $v(t)$ получаем дифференциальное уравнение первого порядка $\dot{v}(t) = -\dfrac{v(t)}{e^t + 1}$. Применяя метод разделения переменных, имеем

$$\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dt}{e^t + 1}. \tag{7.16}$$

Интеграл, стоящий в правой части, найдем, применив подстановку $e^t = u$

$$\int \frac{dt}{e^t+1} = \int \frac{du}{u(u+1)} = \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u+1} = \ln(e^t) - \ln(e^t+1) = t - \ln(1+e^t) .$$

Из (7.16) находим

$$\ln|v| = -t + \ln(1+e^t) + \ln|C_1| , \ \ln\left|\frac{v}{C_1(1+e^t)}\right| = -t ,$$

$$v = C_1(1+e^t)e^{-t} , \quad v = C_1(1+e^{-t}) . \qquad (7.17).$$

Так как скорость точки есть первая производная от координатной функции $v = \frac{dx}{dt}$, то снова применяя метод разделения переменных, получаем

$$\int dx = \int C_1(1+e^{-t})dt \quad x = C_1(t-e^{-t}) + C_2 . \qquad (7.18)$$

Используя начальные условия $t = 0; x = 1$ м; $\dot{x} = 4$ м/с, а также выражение для скорости (7.17) и общее решение (7.18), определяем значение постоянных C_1, C_2. $4 = C_1 \cdot 2, C_1 = 2, -C_1 + C_2 = 1, C_2 = 3$. Подставляем значения постоянных C_1, C_2 в общее решение (7.18) и находим искомый закон движения материальной точки $x = 2(t - e^{-t}) + 3$ (м).

6) Дифференциальное уравнение движения материальной точки под действием силы, зависящей от скорости движения точки и от координаты точки имеет вид

$$\ddot{x} = \frac{2\dot{x}^2}{2x+3} . \qquad (7.19)$$

Определить закон изменения скорости материальной точки от координаты и закон движения точки, если начальные условия движения таковы

$$t = 0; \ x = 2 \text{ м}, \ \dot{x} = 14 \text{ м/с} . \qquad (7.20)$$

Введем функцию скорости материальной точки, считая ее зависящей от координаты точки $\dot{x}(t) = v(x)$, тогда $\ddot{x}(t) = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v(x)\frac{dv(x)}{dx}$. Дифференциальное уравнение (7.19) приводится к следующему виду

$$\frac{vdv}{dx} = \frac{2v^2}{2x+3} .$$

Применяя метод разделения переменных, имеем

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{2x+3}, \ \ln|v| = \ln|2x+3| + \ln(C_1), \ v = C_1(2x+3) ,$$

$$\frac{dx}{dt} = C_1(2x+3), \int \frac{dx}{2x+3} = \int C_1 dt , \qquad (7.21)$$

$$\frac{1}{2}\ln|2x+3| = C_1 t + \frac{1}{2}\ln|C_2|, \ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x+3}{C_2}\right| = C_1 t,$$

$$\frac{2x+3}{C_2} = e^{2 \cdot C_1 \cdot t}, \ x = \frac{1}{2}\left(C_2 e^{2 \cdot C_1 \cdot t} - 3\right) \qquad (7.22).$$

Используя (7.20), (7.21), (7.22) находим значения постоянных C_1, C_2

$$2 = \frac{1}{2}(C_2 - 3), C_2 = 7 , \ \ 14 = C_1(2 \cdot 2 + 3) , \ C_1 = 2 .$$

Подставив найденные значения постоянных C_1, C_2 в (7.21) и в общее решение (7.22), находим закон изменения скорости материальной точки от координаты $v = 2(2x+3)$, м/с и закон движения материальной точки $x = 0{,}5(7e^{4t} - 3)$, м.

7) Дифференциальное уравнение движения материальной точки под действием силы, зависящей от координаты точки, ее скорости и времени имеет вид

$$\ddot{x} = 3\dot{x} - 2x + 2e^{-3 \cdot t} .$$

В начальный момент $t = 0$ точка находилась в состоянии покоя в положении с координатой x = 0,1 м. Определить закон движения материальной точки.

Запишем дифференциальное уравнение в форме

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^{-3\cdot t}. \qquad (7.23)$$

Уравнение (7.23) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение ищем в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$ и частного решения неоднородного уравнения $x = x_0 + x_ч$. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ равны $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение однородного уравнения записывается в соответствии с первой строкой таблицы, в форме $x_0 = C_1 e^{2\cdot t} + C_2 e^t$. Так как $\lambda = -3 \neq \lambda_1, \lambda \neq \lambda_2$, то частное решение неоднородного уравнения имеет вид $x_ч = Ae^{-3\cdot t}$. Постоянную A находим из условия, что эта функция должна обращать неоднородное уравнение в тождество

$$\dot{x}_ч = -3Ae^{-3\cdot t}, \ddot{x}_ч = 9Ae^{-3\cdot t},\ (9A + 9A + 2A)e^{-3t} = 2e^{-3t},\ 20A = 2, A = 0{,}1.$$

Общее решение уравнения (7.23) запишем теперь в виде суммы

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + 0{,}1e^{-3t}. \qquad (7.25)$$

Дифференцируя его, получаем

$$\dot{x} = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^t - 0{,}3e^{-3t}. \qquad (7.26)$$

Постоянные C_1, C_2 найдем из (7.25), (7.26) и начальных условий

$$t = 0;\ x = 0{,}1\text{м},\ \dot{x} = 0;$$

$$\begin{cases} 0{,}1 = C_1 + C_2 + 0{,}1; \\ 0 = 2C_1 + C_2 - 0{,}3; \end{cases}$$

$$C_1 = 0{,}3;\ C_2 = -0{,}3.$$

Подставляя значения постоянных в общее решение (7.25), находим закон движения материальной точки

$$x = 0{,}3(e^{2t} - e^t) + 0{,}1e^{-3t}\ (\text{м}).$$

8) Сила, действующая на материальную точку, отнесенная к массе материальной точки, зависит от координаты точки, ее скорости и времени $F_x / m = 5v - 6x + 3e^{2t}$. В начальный момент времени $t = 0$ точка находилась в начале оси x и имела скорость $v_0 = 3$ м/с. Определить закон движения материальной точки.

Используя основной закон динамики материальной точки, получаем следующее дифференциальное уравнение движения

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 3e^{2t}. \qquad (7.27)$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ равны $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$. Общее решение однородного уравнения запишем в виде

$$x_0 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t}.$$

Так как $\lambda = 2 \neq \lambda_1, \lambda = \lambda_2$, то частное решение неоднородного уравнения выберем в соответствии со второй строкой таблицы $x_ч = Ate^{2t}$. Подставляя это решение в уравнение (7.27), определяем A

$$4Ae^{2t} = 4Ate^{2t} + 5Ae^{2t} - 10Ate^{2t} + 6Ate^{2t} = 3e^{2t};\ -Ae^{2t} = 3e^{2t}; A = -3.$$

Таким образом $x_ч = -3te^{2t}$. Общее решение дифференциального уравнения (7.27) представим в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} - 3te^{2t}.$$

Дифференцируя $\dot{x} = 3C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{2t} - 3e^{2t} - 6te^{2t}$ и используя начальные условия $t = 0:\ x = 0,\ \dot{x} = 3$ м/с получаем систему уравнений для определения постоянных C_1, C_2

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2; \\ 3 = 3C_1 + 2C_2 - 3, \end{cases}$$

откуда находим $C_1 = -C_2 = 6$ искомый закон движения материальной точки имеет вид

$$x = 6(e^{3t} - e^{2t}) - 3te^{2t}.$$

9) Восстанавливающая сила, действующая на материальную точку, отнесенная к массе точки, равна $F_x / m = -9x$. Возмущающая сила отнесенная к массе материальной точки равна $P_x / m = 2\sin(2t)$. Найти закон колебаний материальной точки при начальных условиях

$$t = 0;\ x = 0{,}2 \text{ м},\ \dot{x} = -0{,}1 \text{ м/с}.$$

Дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$\ddot{x} + 9x = 2\sin(2t). \qquad (7.28)$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 9 = 0$ мнимые $\lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i$. Таким образом $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 3$ и общее решение однородного уравнения запишем в соответствии со строкой 7 таблицы $x_0 = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)$ так как $\alpha = 0, \beta = 2, \beta_1 \neq \beta$, то частное решение неоднородного уравнения выбираем в форме: $x_ч = A\cos(2t) + B\sin(2t)$. Дифференцируя, имеем

$$\ddot{x}_ч - 4A\cos(2t) - 4B\sin(2t).$$

Подставим эти функции в уравнение (7.28)

$$-4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) + 9A\cos(2t) + 9B\sin(2t) = 2\sin(2t).$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos(2t)$ и $\sin(2t)$ в левой и правой частях, получаем A = 0, B = 0,4. Таким образом $x_ч = 0{,}4\sin(2t)$, а общее решение неоднородного уравнения находим суммированием. $x = x_0 + x_ч = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t) + 0{,}4\sin(2t)$. Дифференцируем это выражение $\dot{x} = -3C_1\sin(3t) + 3C_2\cos(3t) + 0{,}8\cos(2t)$. Постоянные C_1, C_2 находим отсюда по начальным условиям. $C_1 = 0{,}2;\ C_2 = -0{,}3$. Таким образом закон колебаний материальной точки имеет вид

$$x = 0{,}2\cos(3t) - 0{,}3\sin(3t) + 0{,}4\sin(2t) \text{ (м)}.$$

10) Восстанавливающая сила, действующая на материальную точку, отнесенная к массе точки, равна $F_x / m = -16x$. Возмущающая сила отнесенная к массе материальной точки равна $P_x / m = \sin(4t)$. Найти закон колебаний материальной точки при начальных условиях: $t = 0:\ x = 0{,}3 \text{ м},\ \dot{x} = 0{,}875 \text{ м/с}$.

Дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$\ddot{x} + 16x = \sin(4t). \qquad (7.29)$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 16 = 0$ мнимые $\lambda_1 = 4i,\ \lambda_2 = -4i$. Таким образом $\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 4$ и общее решение однородного уравнения запишем в соответствии со строкой 6 таблицы

$$x_0 = C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t).$$

Так как $\alpha = 0, \beta = 4, \beta_1 = \beta$, то частное решение неоднородного уравнения выбираем в соответствии с той же строкой 6 таблицы в форме $x_ч = (A\cos(4t) + B\sin(4t))t$; дифференцируя, имеем

$$\dot{x}_ч = (-4A\sin(4t) + 4B\cos(4t))t + A\cos(4t) + B\sin(4t),$$
$$\ddot{x}_ч = (-16A\cos(4t) - 16B\sin(4t))t - 8A\sin(4t) + 8B\cos(4t).$$

Подставим эти функции в уравнение (7.29)

$$(-16A\cos(4t) - 16B\sin(4t))t - 8A\sin(4t) + 8B\cos(4t) + (16A\cos(4t) + 16B\sin(4t))t = \sin(4t).$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin(4t)$ и $\cos(4t)$ в левой и правой частях, получаем $A = -\frac{1}{8}$, B = 0. Таким образом $x_ч = -\frac{1}{8}t\cos(4t)$, а общее решение неоднородного уравнения находим суммированием

$$x = C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t) - \frac{1}{8}t\cos(4t).$$

Дифференцируем это выражение

$$\dot{x} = -4C_1\sin(4t) + 4C_2\cos(4t) - \frac{1}{8}\cos(4t) + \frac{1}{2}t\sin(4t);$$

постоянные C_1, C_2 находим отсюда по начальным условиям $C_1 = 0{,}3;\ C_2 = 0{,}25$. Таким образом, закон колебаний материальной точки имеет вид

$$x = (0{,}3 - 0{,}125t)\cos(4t) + 0{,}25\sin(4t)\ \text{(м)}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Бутенин Н. В, Лунц Я. Л, Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: В 2-х т. М.: Наука, 1985. Т. 2. 496 с.

2 Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 352 с.

3 Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2-х т. М.: Наука, 1978. Т. 2. 576 с.

Таблица

Корни характеристического уравнения	Общее решение однородного уравнения	Правая часть уравнения $f(t) = p(t)e^{\lambda t}$	Вид частного решения неоднородного уравнения	Правая часть уравнения $f(t) = e^{\alpha t}(q_1(t)\cos\beta t + q_2(t)\sin\beta t)$, $(\beta \neq 0)$	Вид частного решения неоднородного уравнения
Действительные					
$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$	$\lambda \neq \lambda_1; \lambda \neq \lambda_2$	$P(t)e^{\lambda \cdot t}$	-	$e^{\alpha \cdot t}(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)$
$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$	$\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \lambda_2$	$P(t)e^{\lambda \cdot t} t$	-	$e^{\alpha \cdot t}(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)$
$\lambda_1 = \lambda_2$	$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_1 t} t$	$\lambda \neq \lambda_1$	$P(t)e^{\lambda \cdot t}$	-	$e^{\alpha \cdot t}(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)$
$\lambda_1 = \lambda_2$	$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_1 t} t$	$\lambda = \lambda_1$	$P(t)e^{\lambda \cdot t} t^2$	-	$e^{\alpha \cdot t}(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t))$

Продолжение табл.

Корни характеристического уравнения	Общее решение однородного уравнения	Правая часть уравнения $f(t) = p(t)e^{\lambda t}$	Вид частного решения неоднородного уравнения	Правая часть уравнения $f(t) =$ $= e^{\alpha t}(q_1(t)\cos\beta t +$ $+ q_2(t)\sin\beta t)$, $(\beta \neq 0)$	Вид частного решения неоднородного уравнения
Комплексные					
$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ $\lambda_2 = \alpha_1 - i\beta_1, (\beta_1 \neq 0$	$e^{\alpha_1 \cdot t}(C_1\cos(\beta_1 t) +$ $+ C_2\sin(\beta_1 t))$	-	$P(t)e^{\lambda \cdot t}$	$(\alpha_1 \neq \alpha)$ или $(\beta_1 \neq \beta)$	$e^{\alpha \cdot t} \times$ $\times (Q_1(t)\cos(\beta t) +$ $+ Q_2(t)\sin(\beta t)$
$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ $\lambda_2 = \alpha_1 - i\beta_1, (\beta_1 \neq 0$	$e^{\alpha_1 \cdot t}(C_1\cos(\beta_1 t) +$ $+ C_2\sin(\beta_1 t))$	-	$P(t)e^{\lambda \cdot t}$	$\alpha_1 \neq \alpha, \beta_1 \neq \beta$	$e^{\alpha \cdot t} \times$ $\times (Q_1(t)\cos(\beta t) +$ $+ Q_2(t)\sin(\beta t))t$
$\lambda_1 = i\beta_1$ $\lambda_2 = -i\beta_1, (\alpha_1 = 0$	$C_1\cos(\beta_1 t) +$ $+ C_2\sin(\beta_1 t)$	-	$P(t)e^{\lambda \cdot t}$	$\beta_1 \neq \beta$	$e^{\alpha \cdot t} \times$ $\times (Q_1(t)\cos(\beta t) +$ $+ Q_2(t)\sin(\beta t))$
$\lambda_1 = i\beta_1$ $\lambda_2 = -i\beta_1, (\alpha_1 = 0$	$C_1\cos(\beta_1 t) +$ $+ C_2\sin(\beta_1 t)$	-	$P(t)e^{\lambda \cdot t}$	$\alpha = 0, \beta_1 = \beta$	$(Q_1(t)\cos(\beta t) +$ $+ Q_2(t)\sin(\beta t))t$