

Лабораторная работа N 2

Построение математических моделей объектов исследования по экспериментальным данным

Цель работы: научиться строить математические модели объектов исследования по экспериментальным данным.

Задание:

1. Изучить автоматизированную систему обработки экспериментальных данных АСОД.
2. По заданному варианту экспериментальных данных с помощью системы АСОД произвести их аппроксимацию методами средних, выбранных точек, наименьших квадратов и сплайнов.
3. Сравнить полученные результаты.

Содержание отчета.

1. Постановка задачи.
2. Распечатка заданного варианта исходных данных в виде таблицы и графика.
3. Расчет выбора вида аппроксимирующей функции.
4. Распечатка таблицы и графика заданной и аппроксимирующей функции методом средних.
5. Распечатка таблицы и графика заданной и аппроксимирующей функции методом выбранных точек.
6. Распечатка таблицы и графика заданной и аппроксимирующей функции методом наименьших квадратов.
7. Распечатка таблицы и графика заданной и аппроксимирующей функции методом сплайнов.
8. Выводы по оценке работоспособности методов аппроксимации.

Методические указания

1. Описание автоматизированной системы обработки экспериментальных данных

Программа ASOD.EXE предназначена для обработки данных, полученных в ходе эксперимента либо моделированием эксперимента на ПЭВМ. Она позволяет вводить данные с клавиатуры, читать их с диска, производить редактирование и запись на диск, в ходе обработки - автоматически выбрать вид функциональной зависимости $y=f(x)$ из семи предложенных, провести поиск коэффициентов уравнения $y=f(x)$, а также производить построение и вывод графика полученной функции совместно с исходными данными и результатами обработки в численном виде на дисплей и на принтер.

Для моделирования эксперимента на ПЭВМ предназначена программа LAB5V.EXE. При запуске она запрашивает номер варианта N, в соответствии с которым создает на текущем диске файлы LABN.TXT и LABN.DAT, в которых содержатся соответственно текстовые и численные данные (30 точек { X, Y }).

Перед началом работы с программой необходимо распечатать исходные данные из файла LABN.TXT.

После запуска программы LAB5.EXE на экране дисплея появляется меню и строка статуса. В строке статуса отображаются две "горячие" клавиши : Alt-X и F10. При нажатии Alt-X происходит выход из программы, при нажатии F10 - переход в меню. Меню состоит из трех подменю: "Данные", "Работа", "Настройка".

В подменю "Данные" содержится весь интерфейс для работы с исходными данными, в подменю "Работа" - обработка данных, в подменю "Настройка" - настройка системы.

I. Операции с исходными данными

Операции с исходными данными включают в себя следующие операции: ввод данных с клавиатуры, чтение данных с диска и их редактирование, запись данных на диск, вывод исходных данных в графической и текстовой форме на экран и на принтер.

Подменю "Данные" включает в себя следующие элементы: "Ввод данных", "Чтение и редактирование", "Записать", "Исходные данные в тексте", "Исходные данные в графике" и "Выход".

I.1. Ввод данных с клавиатуры

Данная возможность реализуется при выборе элемента подменю "Ввод данных". При этом на экране появляется диалоговое окно с запросом величин координат точки X и Y и четырьмя кнопками: "Следующая", "Завершить", "Переход", "Прервать".

Кнопка - прямоугольный видимый элемент с меткой внутри, поясняющей, какое событие произойдет при ее "нажатии".

"Нажать" кнопку можно следующими способами: с клавиатуры - нажимая клавишу Tab до тех пор, пока интересующая вас кнопка не изменит свой цвет (или не выделится по сторонам символами ">" и "<"), затем нажав клавишу ввода Enter. С помощью "мышки" - установив маркер мышки на кнопку и нажав левую кнопку мышки.

Переход от одного элемента подменю к другому осуществляется при нажатии клавиши Tab. При нажатии кнопки "Следующая" происходит фиксация введенных значений координат { X, Y } и появление запроса на следующую пару { X, Y }, если количество введенных точек { X, Y } не превышает 200. В противном случае выводится сообщение о превышении возможного количества точек. При нажатии "Завершить" ввод завершается, а введенные точки можно использовать в дальнейшей работе.

При нажатии кнопки "Переход" происходит запрос номера точки из уже введенных и осуществляется переход на нее, если номер точки допустим. В противном случае выдается сообщение об ошибке.

При нажатии кнопки "Прервать" результаты всего ввода сбрасываются и осуществляется выход из режима ввода данных.

I.2. Чтение и редактирование данных

Данная возможность реализуется при выборе элемента "Чтение и редактирование" либо нажатии "горячей" клавиши F3. Сначала происходит запрос

имени файла, а затем работа происходит аналогично вводу данных. Отличием является то, что предварительно устанавливаются считанные данные, а при нажатии кнопки "Завершить" все непросмотренные данные сохраняются. При нажатии кнопки "Прервать" все оставшиеся данные (после текущей точки) обрезаются и осуществляется выход из режима редактирования. В дальнейшем оставшиеся данные можно использовать.

I.3. Запись данных на диск

Данная возможность реализуется при выборе элемента подменю "Записать". При этом на дисплее появляется диалоговое окно с запросом имени файла с расширением .DAT. После набора либо выбора имени файла следует нажать кнопку "Выбрать", и система запишет данные в файл, если это возможно. Данная возможность запрещена, если не было предварительного ввода либо чтения данных.

I.4. Вывод исходных данных в цифровой форме

Данная возможность реализуется при выборе элемента подменю "Исходные данные в тексте" либо при нажатии клавиши Alt-T. При этом на экране дисплея появляется диалоговое окно со списком исходных данных, которые можно просмотреть, и двумя кнопками: "Печать" и "Выход". При нажатии кнопки "Печать" производится печать исходных данных на принтере. Данная возможность запрещена, если не было предварительного ввода либо чтения данных.

I.5. Вывод исходных данных в графической форме

Если исходные данные не вводились и не читались, то данная возможность запрещена. Вывод исходных данных в графической форме осуществляется при выборе элемента подменю "Исходные данные в графике" либо при нажатии клавиши Alt-G. При этом инициализируется графический режим и выводятся точки исходных данных.

В случае ошибки инициализации графики вывод точек не происходит, выводится сообщение об ошибке и осуществляется выход из режима. Полученное изображение можно распечатать на принтере, нажав клавишу "P".

I.6. Выход из программы

Выход из программы осуществляется при выборе элемента меню "Выход" либо при нажатии клавиш Alt-X.

II. Обработка данных

Обработка данных заключается в предварительном анализе вида функциональной зависимости $y=f(x)$, поиске коэффициентов уравнения $y=f(x)$, выводе графика полученной функции совместно с исходными данными и выводе численных результатов на дисплей и принтер. Реализация обработки данных осуществляется при выборе подменю "Работа". Подменю "Работа" содержит следующие элементы: "Выбор вида функции", "Метод выбранных точек", "Метод средних", "Метод наименьших квадратов", "Метод сплайнов", "Вывод графика", "Вывод результатов".

Выбор вида функции запрещен, пока не введены либо не считаны данные, обработка данных одним из методов запрещена, пока пользователь не выберет вид

функции, вывод результатов и графики запрещен, пока вы не обработали данные каким-либо из методов.

II.1. Выбор вида функции

Выбор осуществляется по алгоритму, описанному ниже в методических указаниях раздел 2 либо в [1]. Для выбора вида функции следует выбрать элемент "Выбор вида функции" либо нажать F5. При этом на дисплее появляется окно с запросом на автоматический выбор. Если вы хотите выбрать вид функциональной зависимости автоматически, то нажмите кнопку "Да". При нажатии кнопки "Нет" программа устанавливает вид функциональной зависимости по запросу без предварительного определения возможного вида.

При автоматическом выборе на экране появляется окно с запросом двух точек $\{X_1, Y_1\}$ и $\{X_2, Y_2\}$, соответствующих точкам $\{X_1, Y_1\}$ и $\{X_n, Y_n\}$ в алгоритме. Для окончания ввода и продолжения работы следует нажать кнопку "Ввод". При нажатии кнопки "Выход" процесс выбора вида функциональной зависимости прерывается.

После запроса точек $\{X_1, Y_1\}$ и $\{X_n, Y_n\}$ рассчитываются $X_{ар}$, $X_{геом}$ и $X_{гарм}$ и запрашиваются $Y_1(X_{ар})$, $Y_2(X_{геом})$, $Y_3(X_{гарм})$ согласно алгоритму. При нажатии кнопки ввод выводится окно с рассчитанными значениями $Y_{ар}$, $Y_{геом}$, $Y_{гарм}$ и E_i , $i=1..7$. Для продолжения работы следует нажать кнопку "Выход". На экране появляется диалоговое окно с каталогом видов функций $y=f(x)$, в котором подсвечен (или выделен ">" и "<") элемент, соответствующий предполагаемому виду функциональной зависимости в случае автоматического выбора либо установлен первый элемент в списке в случае ручного выбора. Если вы не согласны с указанным видом функции, то вы можете изменить его, подсвечивая (выделяя) другой элемент из предложенных вариантов. Выбор вида функции осуществляется при нажатии кнопки "Выбрать". В случае нажатия кнопки "Выход" все предыдущие действия по выбору вида функциональной зависимости будут сброшены.

II.2. Метод выбранных точек

Данный метод реализуется при выборе элемента "Метод выбранных точек" либо нажатии клавиши F6. На дисплее появляется запрос двух достаточно удаленных точек $\{X_1, Y_1\}$ и $\{X_2, Y_2\}$, лежащих на экспериментальной кривой. Для просчета коэффициентов функциональной зависимости необходимо нажать кнопку "Ввод". При нажатии кнопки "Выход" происходит сброс введенных значений и выход из метода.

После просчета появляется окно "Просчет окончен". Для сброса окна следует нажать кнопку "Выход".

II.3. Метод средних

Данный метод реализуется при выборе элемента "Метод средних" либо нажатии F7. Ввод значений не требуется. После просчета появляется окно с сообщением "Просчет окончен".

II.4. Метод наименьших квадратов

Данный метод реализуется при выборе элемента "Метод наименьших квадратов" либо нажатии клавиши F8. Ввод значений не требуется. После завершения расчета появляется окно с сообщением "Просчет окончен".

II.5. Вывод графика результатов обработки

Данная возможность реализуется при выборе элемента меню "Вывод графика" либо нажатии на клавишу F9. На экран выводятся результаты обработки последним из примененных методов. В случае ошибки инициализации графического режима выводится сообщение об ошибке. Печать данных и функции осуществляется при нажатии клавиши "P". Для правильной работы необходимо установить путь графического драйвера в подменю "Настройка".

II.6. Вывод результатов обработки в цифровом виде

Данная возможность реализуется при выборе элемента "Вывод результатов" либо нажатии клавиши F2. На экране появляется диалоговое окно с результатами обработки: видом функциональной зависимости, значениями коэффициентов, значениями аргументов X, экспериментальных значений Y_{эксп}, аппроксимирующих значений Y_{аппр}, погрешностей E, вычисляющихся по формуле:

$$E = (Y_{\text{эксп}} - Y_{\text{аппр}}) / Y_{\text{аппр}} * 100\%$$

Просмотр результатов можно осуществить нажатием клавиш "Left", "Right", "Up", "Down", "PageUp", "PageDown", "Home", "End".

Печать результатов на принтере осуществляется при нажатии кнопки "Печать".

III. Настройка

Для правильной инициализации графики необходимо настроить программу. Подменю "Настройка" содержит элементы "Путь VGI-драйвера" и "Записать".

III.1. Путь VGI - драйвера

При выборе элемента "Путь VGI-драйвера" путь запрашивается в диалоговом окне. Для окончания ввода необходимо нажать клавишу Enter. При неправильной установке пути графические возможности данной программы не реализуются.

III.2. Запись настройки

При выборе элемента "Записать" происходит запись настройки в файл LAB5.CFG. Изменять данный файл вне программы недопустимо.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Ознакомиться с методом отыскания вида функциональной зависимости, методами поиска коэффициентов функциональной зависимости, описанием программ LAB5.EXE и LAB5V.EXE.

2. Получить у преподавателя номер варианта N или экспериментальные данные для обработки.

3. Распечатать текстовый файл LABN.TXT.
4. Запустить программу LAB5.EXE.
5. Войти в подменю "Настройка", настроить путь BGI-драйвера и записать настройку.
6. Загрузить данные из файла LABN.DAT.
7. Вывести на принтер графическое изображение исходных данных.
8. Произвести автоматический выбор вида функциональной зависимости $y=f(x)$, для чего аппроксимировать вручную графическое изображение исходных данных. Значения запрашиваемых точек $\{X_i, Y_i\}$ вводить с аппроксимирующей кривой с максимально возможной точностью. Записать значения $\{X_i, Y_i\}$ и E_i , используемые для выбора вида функциональной зависимости.
9. Провести обработку данных методом выбранных точек и произвести вывод результатов обработки в графической и цифровой форме на принтер.
10. Провести обработку данных методом средних и вывести на принтер результаты обработки в графическом и цифровом виде.
11. Провести обработку данных методом наименьших квадратов и вывести результаты в графическом и текстовом виде на принтер.
12. Оформить отчет.

2.Методика определения вида функциональной зависимости при обработке экспериментальных данных

Под статикой промышленного объекта обычно понимается совокупность его установившихся состояний, т.е. такие режимы работы, когда все входные и выходные координаты с определенной степенью точности постоянны во времени. Статической характеристикой объекта с m входами и одним выходом будем называть функциональную зависимость между входными X_1, X_2, \dots, X_m и выходной координатами в установившемся режиме: $Y=F(X_1, X_2, \dots, X_m)$ Определение этой зависимости является первым этапом при составлении математического описания объекта регулирования. Как правило, статическая характеристика объекта используется для выбора оптимального режима его работы. В том случае, когда исследуемый объект является одним из элементов оптимизируемой системы и характеристику системы в дальнейшем рассчитывают по характеристикам ее элементов, статическую характеристику определяют для широкого диапазона изменений входных воздействий. Если же исследуется оптимизируемая система в целом, то обычно интересуются лишь областью вблизи экстремальных значений. Динамические характеристики объекта определяют его переходной режим. Эти характеристики находят приближенно в линеаризованном виде для использования их при синтезе систем автоматической стабилизации. При переводе объекта из одного режима в другой требуется знание динамических характеристик в широком диапазоне. В этом случае их определяют в виде нелинейных дифференциальных уравнений. Процесс экспериментального определения характеристик промышленного объекта можно разделить на три основных этапа: 1) подготовку и планирование эксперимента; 2) проведение эксперимента и 3) обработку результатов. На первом этапе основное внимание сосредотачивается на изучении технологического режима работы объекта, на выявлении основных входных возмущающих и регулирующих воздействий, выходных регулируемых и

контролируемых величин, определение допустимых правилами технической эксплуатации пределов изменения режимных координат объекта, оценки уровня шумов и т.п. Подобное предварительное ознакомление позволяет составить априорную структурную схему объекта, на которой изображаются основные входные и выходные координаты и каналы воздействий (связи) между ними. Производится разделение общей структурной схемы на элементарные схемы с одним входом и одним выходом, двумя входами и выходом и т.п. При наличии у объекта нескольких входов и выходов и внутренних прямых и перекрестных связей между ними можно всегда преобразовать его структурную схему к схеме с несколькими входами и одним выходом. То же можно сделать и при наличии в объекте внутренних обратных связей, если не требуется знания статических характеристик цепей обратной связи. Целью обработки результатов эксперимента является аппроксимация полученной в табличной форме зависимости некоторым возможно более простым аналитическим выражением. Наиболее употребительными методами нахождения аналитической функции, мало отличающейся от заданной, являются интерполирование и приближение. При интерполировании искомая аналитическая зависимость $P(X)$ в ряде указанных точек должна принимать те же значения, что и данная функция $Y(X)$, т.е. в заданных точках разность $P(X)-Y(X)$ должна обращаться в нуль. Для приближения характерна минимизация некоторого функционала, характеризующего различие $P(X)$ и $Y(X)$ во всем промежутке изменения независимого переменного. В приложениях чаще всего используется квадратичное приближение. Будем считать, что некоторое явление характеризуется двумя варьируемыми величинами x и y , из которых x выбирается как независимая, а y - как зависимая переменная величина. Предположим, что между переменными x и y существует однозначное соответствие, т. е. каждому значению независимой переменной величины x соответствует с заданной степенью точности одно значение зависимой переменной. В общем виде задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть в результате исследования некоторой величины x значениям x_1, x_2, \dots, x_n поставлены в соответствие значения y_1, y_2, \dots, y_n некоторой величины y . Требуется подобрать вид аналитической зависимости $y = f(x)$, связывающей переменные x и y . Будем называть аналитические зависимости, полученные в результате наблюдений, эмпирическими. Выявление эмпирических зависимостей делится на два основных этапа - выбор эмпирической формулы и уточнение коэффициентов выбранной формулы. Для второго этапа мы рассмотрим три наиболее распространенных метода определения коэффициентов формульных зависимостей: метод выбранных точек, метод средних и метод наименьших квадратов.

2.1 Выбор вида эмпирической формулы.

Пусть y есть функция одной переменной с двумя параметрами a и b . В качестве набора функций, из которых будем выбирать эмпирическую зависимость, рассмотрим следующие варианты:

- 1) линейную функцию $y = a x + b$;
- 2) показательную функцию $y = a b^x$;
- 3) дробно-рациональную функцию $y = 1 / (a x + b)$
- 4) логарифмическую функцию $y = a \ln x + b$;

5) степенную функцию $y = a x^b$ (она определяет параболическую зависимость, если параметр $b > 0$, и гиперболическую зависимость, если $b < 0$; если же параметр $b = 0$, то зависимость вырождается в линейную);

6) гиперболическую функцию вида $y = a + b / x$

7) дробно-рациональную функцию вида $y = x / (ax + b)$.

Для наилучшего выбора вида аналитической зависимости $y = f(x, a, b)$, соответствующей построенному графику, выполним следующие промежуточные вычисления.

На заданном отрезке измерения независимой переменной выберем точки, достаточно надежные и, по возможности, далеко отстоящие друг от друга. Для простоты будем считать, что это точки x_1 и x_n . Вычислим среднее арифметическое $x_{ар} = (x_1 + x_n) / 2$, среднее геометрическое $x_{геом} = \sqrt{x_1 x_n}$ и среднее гармоническое $x_{гарм} = 2x_1 x_n / (x_1 + x_n)$. По вычисленным значениям независимой переменной найдем из построенного графика соответствующие значения зависимой переменной $y_1^* = f(x_{ар})$, $y_2^* = f(x_{геом})$, $y_3^* = f(x_{гарм})$ для пока еще неизвестной аналитической зависимости $y = f(x, a, b)$. Выполним вспомогательные вычисления для зависимой переменной. Вычислим среднее арифметическое крайних значений $y_{ар} = (y_1 + y_n) / 2$, их среднее геометрическое значение $y_{геом} = \sqrt{y_1 y_n}$ и среднее гармоническое $y_{гарм} = 2y_1 y_n / (y_1 + y_n)$. Сравним найденные из графика значения y_1^* , y_2^* , y_3^* с вычисленными значениями $Y_{ар}$, $Y_{геом}$, $Y_{гарм}$ и оценим следующие погрешности результата сравнения:

$$| y_1^* - Y_{ар} | = \varepsilon_1; \quad | y_1^* - Y_{геом} | = \varepsilon_2; \quad | y_1^* - Y_{гарм} | = \varepsilon_3;$$

$$| y_2^* - Y_{ар} | = \varepsilon_4; \quad | y_2^* - Y_{геом} | = \varepsilon_5; \quad | y_3^* - Y_{ар} | = \varepsilon_6;$$

$$| y_3^* - Y_{гарм} | = \varepsilon_7;$$

Найдем из этих ошибок минимальную: $\varepsilon = \min \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_7 \}$. По наименьшей из погрешностей выбираем вид функциональной зависимости по следующему алгоритму:

1. Если наименьшей среди всех абсолютных ошибок окажется ε_1 , то в качестве аналитической зависимости для данного графика хорошим приближением служит линейная функция $y = a x + b$

2. Если наименьшей среди всех абсолютных ошибок окажется ε_2 , то в качестве эмпирической зависимости следует выбрать показательную функцию $y = a x^b$.

3. Если наименьшей среди всех абсолютных ошибок окажется ε_3 , то искомая эмпирическая зависимость определяется дробно - рациональной функцией $y = 1 / (ax + b)$.

4. Если наименьшей среди всех абсолютных ошибок окажется ε_4 , то хорошим приближением служит логарифмическая функция $y = a \ln x + b$

5. Если наименьшей среди всех абсолютных ошибок окажется ε_5 , то в качестве эмпирической зависимости выбирается степенная функция $y = a x^b$.

6. Если наименьшей среди всех абсолютных ошибок окажется ε_6 , то за искомую зависимость следует выбрать гиперболическую функцию $y = a + b / x$

7. Если наименьшей среди всех абсолютных ошибок окажется ε_7 , то в качестве аналитической зависимости выбирается дробно - рациональная функция $y = x / (ax + b)$.

2.2 Уточнение коэффициентов эмпирической зависимости

Для уточнения коэффициентов выбранной аналитической зависимости $y=f(x,a,b)$ воспользуемся тремя различными методами.

1. **Метод выбранных точек.** На построенной кривой возьмем две произвольные точки $M_1(x_1^*, y_1^*)$ и $M_2(x_2^*, y_2^*)$. Составляем систему

$$\begin{cases} y_1^* = f(x_1^*, a, b) \\ y_2^* = f(x_2^*, a, b) \end{cases}$$

Разрешаем ее относительно искомым параметров a и b и подставляем найденные числовые значения параметров в функцию $y=f(x, a, b)$.

2. **Метод средних.** В эмпирическую формулу $y=f(x, a, b)$. последовательно подставляем табличные значения x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Полученные значения функции $y_i = f(x_i, a, b)$ вообще говоря, будут отклоняться от табличных значений: $y_i - f(x_i, a, b) = \varepsilon_i$. Согласно методу средних, за наилучшее положение кривой принимается то, для которого алгебраическая сумма отклонений равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b)] = 0$$

Для определения параметров a и b по методу средних вся совокупность ε_i ($i=1,2,\dots,n$) разбивается на две группы так, чтобы алгебраическая сумма уклонений каждой группы равнялась нулю. Таким образом, для определения параметров a и b мы получаем следующую систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m [y_j^I - f(x_j^I, a, b)] = 0 \\ \sum_{k=1}^{n-m} [y_k^{II} - f(x_k^{II}, a, b)] = 0 \end{cases}$$

где m и $n-m$ - число табличных данных соответственно для первой и второй группы.

Заменяв сумму разностей разностью сумм в каждом уравнении системы, получим

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m y_j^I = \sum_{j=1}^m f(x_j^I, a, b) \\ \sum_{k=1}^{n-m} y_k^{II} = \sum_{k=1}^{n-m} f(x_k^{II}, a, b) \end{cases}$$

Совместное решение этой системы определяет численное значение двух параметров a и b , подставив которые в выражение $y=f(x, a, b)$ получим искомое эмпирическое соотношение.

3. **Метод наименьших квадратов.** Согласно методу наименьших квадратов, наилучшими параметрами a и b считаются те, для которых сумма квадратов уклонений минимальна:

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b)]^2 = \min$$

Найдем частные производные функции $F(a, b)$ по варьируемым параметрам a и b :

$$\begin{cases} \frac{\partial F(a, b)}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b)] f'_a(x_i, a, b) \\ \frac{\partial F(a, b)}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b)] f'_b(x_i, a, b) \end{cases}$$

В силу необходимого условия экстремума функции многих переменных, наилучшими значениями параметров a и b служат те, при которых частные производные этой функции по варьируемым параметрам обращаются в нуль:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(a, b)}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial F(a, b)}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

$$\text{т.е.} \begin{cases} \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b)] f'_a(x_i, a, b) = 0 \\ \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b)] f'_b(x_i, a, b) = 0 \end{cases}$$

Решение этой системы относительно a и b дает искомые наилучшие значения числовых параметров.