Министерство образования Российской Федерации
Тамбовский государственный технический университет

СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Методические разработки
к практическим и индивидуальным занятиям
для студентов 4-го курса
специальности 0719 дневного отделения
по дисциплине «Теория принятия решений»

Тамбов 2001

УДК 519.22

ББК 22.172
Г 56

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Составитель
Т.Я. Лазарева
И.В. Диденко

Рецензент
В.Г. Серегина

Системы массового обслуживания: Метод. Разраб./Сост. Т.Я. Лазарева, И.В. Диденко Тамбов: Тамб. гос. техн. ун-т, 2001г. - с.

Даны общие положения теории систем массового обслуживания, приведены примеры решения конкретных задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов дневного отделения 4-го курса специальности 0719 по дисциплине «Теория принятия решений».

ВВЕДЕНИЕ

Одним из разделов «Теории принятия решения» является теория массового обслуживания, которая рассматривает и изучает вопросы организации и обслуживания потока требований или заявок. Математическую теорию массового обслуживания можно охарактеризовать двумя способами: указанием области практических задач, к решению которых она применяется, и указанием классов изучаемых ею случайных процессов. Практически задачи теории массового обслуживания связаны с исследованием любых операций, состоящих из многих однородных элементарных операций, на осуществление которых влияют случайные факторы. Задачи подобного типа возникают в самых разнообразных направлениях исследований: в естествознании, в технике, в экономике, организации производства и т.д.

Современный специалист по информационным системам в экономике должен владеть методами теории массового обслуживания. Предлагаемые методические разработки к практическим занятиям по теории массового обслуживания помогут студентам при изучении этого материала и выполнении индивидуального задания.

Тема 1 КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Цель занятия: 1 Знакомство с классификацией СМО.

2 Приобретение навыков классификации СМО.

Общие положения

Теория массового обслуживания занимается изучением вопросов организации и обслуживания потока требований или заявок.

Требованием или заявкой называется объект, который необходимо обслужить: железнодорожные составы, проходящие через железнодорожный узел, покупатели, приобретающие товар и т.д. Как видно, объект является носителем запроса. Поэтому в дельнейшем под требованием понимается и сам запрос на обслуживание. Например, запрос на ремонт станка, запрос на продажу товара покупателю и т.д.

Совокупность появляющихся требований называется потоком требований.

Устройства, удовлетворяющие запросу на обслуживание, называются обслуживающими устройствами, аппаратами или требованиями.

Совокупность всех обслуживающих устройств называется цехом.

Если время обслуживания велико, появляется очередь, т.е. множество требований, желающих быть обслуженными, но еще не обслуженных.

Цех вместе с очередью называется системой массового обслуживания. Эта система изображена на рис.1, сама непосредственно система выделена пунктирным контуром, который является внешним контуром системы.

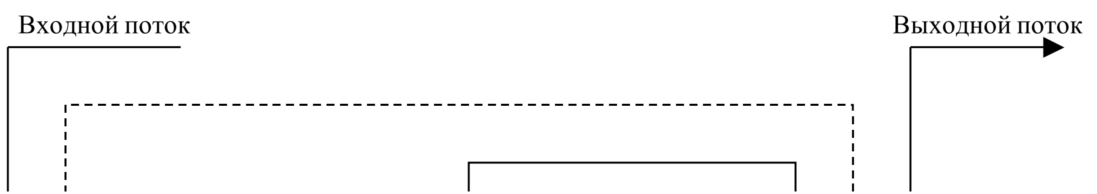


Рис. 1 Система массового обслуживания.

Работу системы массового обслуживания можно абстрактно представить следующим образом: генератор (источник) генерирует очередное требование, которое поступает в систему и либо становится в очередь на обслуживание, либо, если очереди нет, поступает в цех, где прибор начинает выполнять запрос на обслуживание.

Последовательность требований, входящих в систему массового обслуживания, называется входящим (входным) потоком, выходящие требования называются выходящим (выходным) потоком.

Целью теории массового обслуживания является создание моделей различных систем массового обслуживания для анализа операционных показателей этих систем и синтеза целесообразных систем массового обслуживания.

Теория массового обслуживания ставит своей целью получение математического описания, позволяющего рассчитать операционные показатели в зависимости от варьируемых параметров.

Таим образом, задачи, решаемые теорией массового обслуживания, чрезвычайно разнообразны, поэтому их следует каким либо образом классифицировать, например, по общим признакам.

Эта классификация систем массового обслуживания представлена на рис.2. Согласно ее система массового обслуживания разделяется на три подсистемы.

Первая подсистема - это система массового обслуживания без потерь. Под термином система без потерь (с полным ожиданием) понимают систему, в которой, если все приборы заняты, требование становится в очередь и не покидает ее до тех пор, пока не будет обслужено.

Вторая подсистема - это система с частичными потерями. Подобная подсистема характеризуется тем, что требование либо не становится в очередь, если эта очередь превышает по длине некоторую величину (система с ограниченной длиной очереди), либо становится в очередь, но покидает ее, если время пребывания в ней превышает определенную величину (система с ограниченным временем пребывания), или, если время ожидания в очереди начала обслуживания превышает определенную величину (система с ограниченным временем ожидания начала обслуживания).

Третья подсистема - это система без очередей. Под этим термином понимают систему, в которой требование покидает систему, если все обслуживающие устройства (приборы) заняты. В такой системе, очевидно, очереди не может быть.

Системы, имеющие очередь, подразделяются на системы с одной очередью и системы с несколькими очередями.

Все системы массового обслуживания делятся на системы с одним каналом и системы с конечным числом каналов обслуживания. Под термином канал понимают обслуживающее устройство в цехе, пропускающее через себя требование. В тех случаях, когда приборов много удобно (математически более просто) считать, что их бесконечное число.

Все системы массового обслуживания можно разделить на системы с бесконечным числом требований (например, запросы на телефонные переговоры, на обслуживание покупателей, автомашины на бензозаправках и т.д.) и с конечным числом требований в системе (группа ремонта станков в цехе: число станков известно, тренировка футболистов футбольной команды, лечение больных студентов в институтской поликлинике и т.п.).

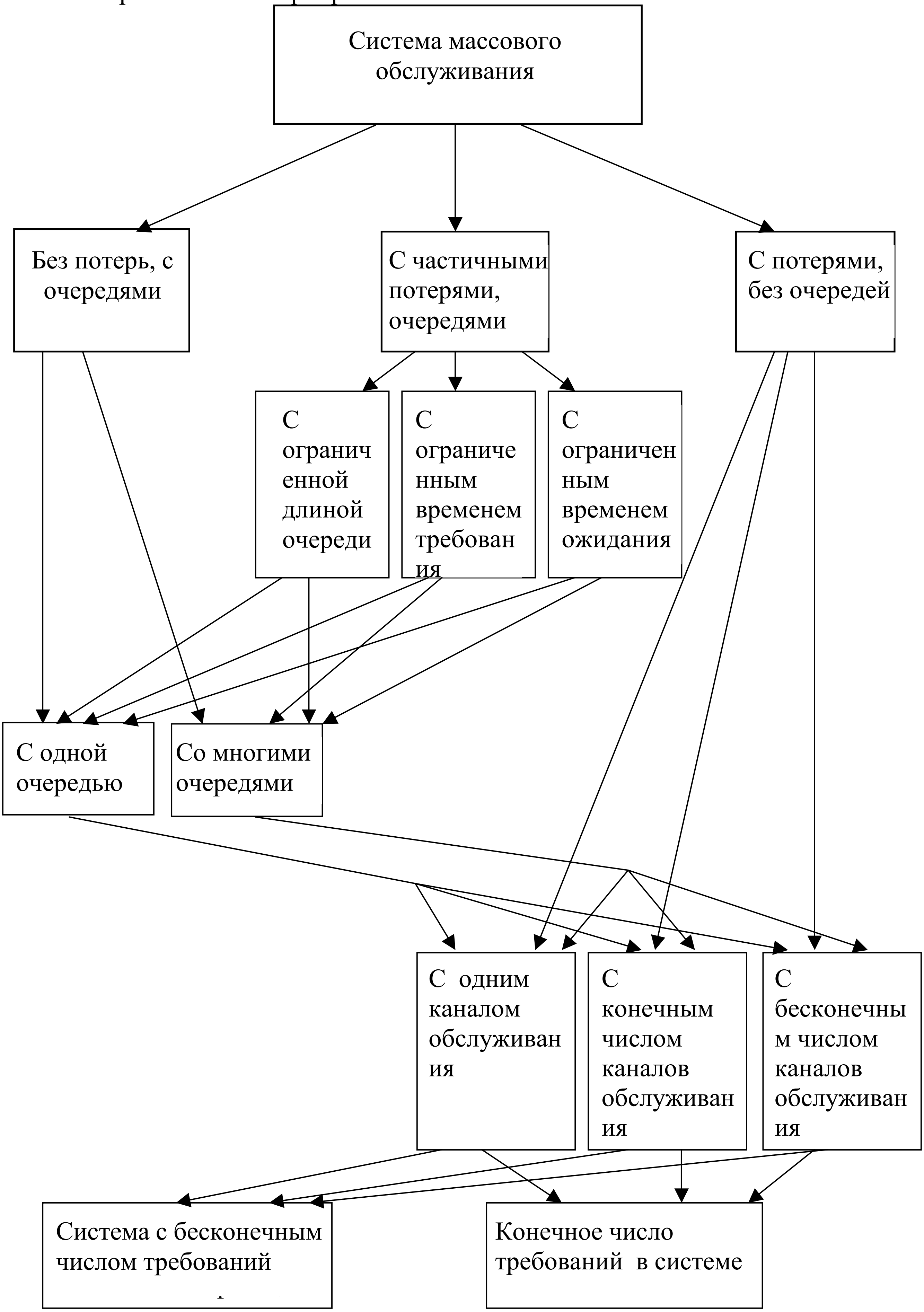
Представленная классификация, конечно, не исчерпывает все множество различных систем массового обслуживания. Эти системы могут классифицироваться и по другим признакам.

Так, весьма важной характеристикой является дисциплина обслуживания, под которой понимают порядок выбора требований из очереди. В соответствии с этим системы подразделяются на четыре вида.

1) СМО с типом дисциплины″первый пришел - первый обслуживается″ - дисциплина ″живой очереди″;
2) СМО с типом дисциплины ″последний пришел - первый обслуживается ″ - примером такой системы является склад, заполненный изделиями, из которого на доработку удобно брать изделия, поступившие последними;

3) СМО с типом дисциплины выбора требований случайным способом;

4) СМО с типом дисциплины выбора требований в соответствии с присвоенными приоритетами.



Другими вариантами классификации являются следующие.

Поступление требований может быть единичным и групповым.

Требования могут обслуживаться параллельно работающими приборами, но может быть и система, в которой приборы расположены последовательно так, что как только будет обслужено требование первым прибором, то начнет обслуживаться и другое и т.д.

Интенсивность обслуживания прибором может быть постоянной или зависеть от длины очереди, приоритетов или каких-либо других факторов.

Наконец, системы массового обслуживания различают по характеру входного потока и по характеру обслуживающих устройств.

Классификация входных потоков

По характеру входной поток требований разделяется на детерминированный поток требований и стохастический (рис.3).

Детерминированный входной поток может быть двух видов. В первом случае требования поступают через равные промежутки времени. Другим видом детерминированного потока является поток, в котором требования поступают по известной программе - расписанию, когда моменты поступления новых требований известны заранее.

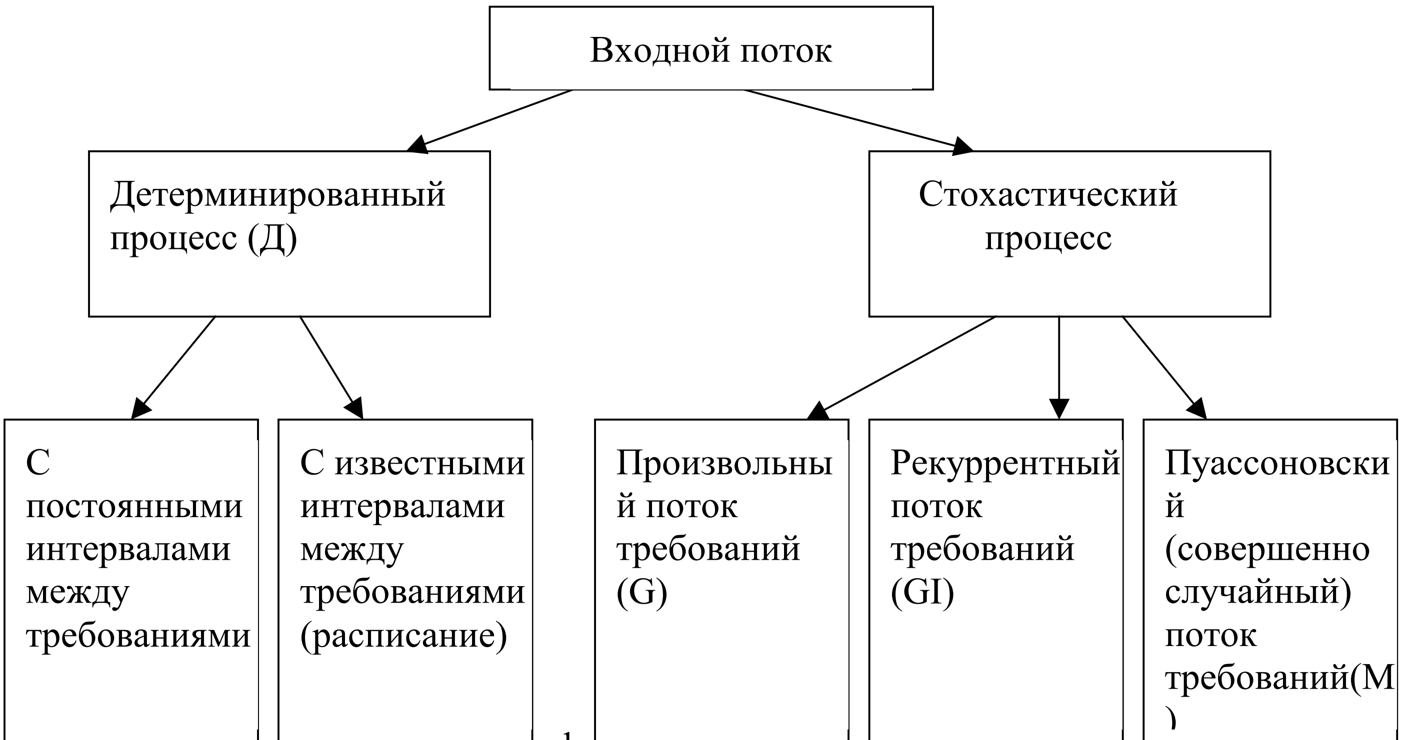


Рис. 3. Классификация входного потока

Если промежутки времени между поступлениями требований случайны, то это будет стохастический процесс.

Стохастический поток требований подразделяется на три вида: поток с произвольными стохастическими свойствами, рекуррентный поток и совершенно случайный или пуассоновский поток требований.

Произвольный поток требований характеризуется тем, что на него не накладывается никаких ограничений на стохастическую независимость интервалов между поступлениями требований, а также на характер вероятностных законов, описывающих интервалы между требованиями.

Входной поток называется рекуррентным, если он характеризуется следующими свойствами:

а) продолжительность интервалов между поступлениями требований стохастически независимы;

б) продолжительность интервалов описывается одной и той же плотностью распределения.

Входной поток называется совершенно случайным или простейшим, если для него характерно:

а) продолжительность интервалов между поступлениями требований статистически независимы;

б) продолжительность интервалов описывается одной и той же плотностью распределения;

в) вероятность поступления требований на достаточно малом интервале Δt зависит только лишь от величины Δt (это свойство называется стационарностью или однородностью прихода);

г) вероятность поступления требований на интервале Δt не зависит от предыстории процесса;

д) характер потока требований таков, что в любой момент времени может поступить только одно требование.

Таким образом, простейший поток требований или совершенно случайный поток - это поток, определяющейся свойствами стационарности, ординарности и отсутствием последствия одновременно.

Предположения о совершенно случайном входном потоке требований эквивалентно тому, что плотность распределения интервалов времени между последовательными поступлениями требований описывается экспоненциальным законом

$$g(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0 \ .$$

Если интервалы распределены по экспоненциальному закону, то процесс пуассоновский. Такие процессы называются М-процессами (марковскими).

Кроме закона Пуассона часто применяется закон распределения Эрланга.

$$g(t) = \frac{(\lambda k)(\lambda kt)^{k-1} e^{-\lambda kt}}{(k-1)!}, t \geq 0,$$

В соответствие с принятой терминологией Кендалла обозначают: М - экспоненциальное распределение, Д - детерминированное распределение, $E_к$ - к-фазное распределение Эрланга, GI - рекуррентный входной поток, G - общий вид распределения.

Классификация процессов обслуживания

Аналогично входному потоку процесс обслуживания требований может быть детерминированным и стохастическим.

Детерминированный процесс обслуживания характеризуется постоянной величиной времени обслуживания

$$t_0 = 1/\mu \ ,$$

где μ - интенсивность обслуживания, которая представляет собой число требований, обслуживаемых в единицу времени.

Стохастический процесс обслуживания может быть произвольным, рекуррентным или совершенно случайным, как и при описании входного потока требований.

Обозначения Кендалла систем массового обслуживания

Для систем массового обслуживания Кендаллом введены следующие обозначения:

$$H_1 | H_2 | i \, ,$$

где H_1- характеристика входного потока,

H_2 - характеристика времени обслуживания прибора,

i - число приборов (каналов).

В дальнейшем системы массового обслуживания будут обозначаться следующим образом

$$\frac{K}{R} = \frac{|H_1|H_2|i|}{|\pi|\lambda|\mu|s|r|p|},$$

где K - обозначения Кендалла, R - обозначения подсистем систем массового обслуживания типа, характеризуемого K.

Под R понимается следующая последовательность

$$R = |\pi|\lambda|\mu|s|r|p|,$$

где π - может быть либо числом N, либо числом ∞; число N обозначает, что в системе число требований оценимо и их не может быть более N; знак ∞ обозначает, что поток требований не ограничен (бесконечен);

λ - характеристика интенсивности входного потока, если на этом месте стоит λ, то это обозначает, что интенсивность постоянна (λ=const), если λ(x), то интенсивность зависит от параметра системы x;

μ - характеристика интенсивности обслуживания; знак μ обозначает, что μ=const; знак $\mu_п$ обозначает, интенсивность пропорциональна длине очереди; μ(x) обозначает, что интенсивность зависит от параметра системы x;

s - характеризует ″ терпеливость ″ требований; на этом месте может стоять Н, что обозначает отсутствие очереди или абсолютные потери (полностью нетерпеливые клиенты); Т обозначает отсутствие потерь - требования не уходят из очереди (безусловно терпеливые клиенты), уТ - условно терпеливые клиенты, при этом условия могут быть: $m \le M$ - очередь не может быть больше M, $t_0 \le \tau$ - время ожидания в очереди не может быть больше τ и т.д.;

r - число очередей;

p - обозначает наличие или отсутствие приоритетов; 0 - отсутствие, 1- наличие.

Примеры решения задач

Пример 1.1. Пусть система массового обслуживания обозначена

$$\frac{|M|M|2|}{|\infty|\lambda|\mu|T|1|0|},$$

согласно принятым обозначениям это система с пуассоновским входным потоком, экспоненциальным временем обслуживания, с двумя обслуживающими приборами, с неограниченным потоком требований, с одной очередью, без приоритетов.

Пример 1.2. Система массового обслуживания обозначена –

$$\frac{|G|M|3|}{|\infty|\lambda|\mu|yT|1|0|}.$$

Эта система отличается от предыдущей тем, что входной поток произволен, имеет три обслуживающих прибора, требования терпеливы при выполнении некоторого условия, так m ≤ 20 означает, что, если в очереди стоит уже 20 клиентов, то остальные требования теряются.

Задачи

1.1.Дать характеристику системы массового обслуживания, если она в соответствии с классификацией Кендалла. обозначена:

1. $\frac{|D|D|1|}{|N|\lambda(x)|\mu|H|0|0|}$;

2. $\frac{|GI|G|5|}{|\infty|\lambda|\mu|T|2|1|}$;

3. $\frac{|E_k|M|\infty|}{N|\lambda(x)|\mu(x)|yT|1|0|}$.

1.2. Как будет обозначена система массового обслуживания в соответствии с классификацией Кендалла:

1.Система массового обслуживания с одним каналом обслуживания, неограниченным потоком требований, совершенно случайным входным потоком требований с интенсивностью λ.с длительностью обслуживания, распределенной по показательному закону с параметром μ, параметры λ и μ постоянны.

2. Система массового обслуживания с L каналами обслуживания, без приоритетов, пуассоновским входным потоком, детерминированным временем обслуживания, с неограниченной очередью, постоянными характеристиками системы, терпеливыми клиентами и одной очередью.

3.Система массового обслуживания с 5 каналами обслуживания, с детерминированным входным потоком, со временем обслуживания, распределенным по двухфазному распределению Эрланга, с конечным числом требований, с интенсивностью, зависящей от параметров системы, постоянным временем обслуживания, условно терпеливыми клиентами, без приоритетов, с 3 очередями.

4.Система массового обслуживания с одним каналом обслуживания, с рекуррентным входным потоком, детерминированным временем обслуживания, с приоритетами, без очередей, с постоянными характеристиками системы, с нетерпеливыми клиентами.

5.Система массового обслуживания с 10 каналами обслуживания, с произвольным входным потоком требований, с экспоненциальным временем обслуживания, с интенсивностью входного потока и интенсивностью обслуживания, зависящими от параметров системы, без потерь, с одной очередью, с приоритетами.

Контрольные вопросы:

1. Что понимается под заявкой?
2. Что такое СМО с частичными потерями?
3. Что такое детерминированный входной поток и на какие виды он подразделяется?
4. На какие виды подразделяется стохастический входной поток требований?
5. Что такое произвольный входной поток требований?
6. Что такое рекуррентный входной поток требований?
7. Что такое совершенно случайный входной поток требований?
8. Чем характеризуется детерминированный процесс обслуживания?

ЛИТЕРАТУРА: [1, 3, 4, 5, 6, 7] .

Тема 2. МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Цель занятия: 1.Знакомство с понятием состояние системы массового обслуживания, понятием марковских процессов, моделью массового обслуживания.

2. Приобретение навыков определения состояния СМО, перехода СМО из одного состояния в другое, использования модели рождения и гибели.

Основные положения

Многочисленные примеры показывают, когда состояние некоторой системы описывается одной или несколькими величинами, зависящими от времени таким образом, что, хотя характер этой зависимости невозможно точно предвидеть, она тем не менее подчинена статистическим законам, позволяющим определить вероятности различных возможных значений рассматриваемых величин. Число возможных состояний системы может быть конечным или бесконечным, эти состояния обозначают порядковым номером, то есть для конкретной системы рассматриваются состояния $S_1, S_{2,...,} S_n$.Одним из параметров вероятностного процесса СМО является время, которое изменяется дискретным образом. Подобный случай имеет место, когда структура системы такова, что ее состояния изменяются только в заранее определенные моменты времени или для описания процесса достаточно знать состояние системы в отдельные моменты времени. Эти моменты можно пронумеровать и говорить о состоянии S_i Δ в момент i. Если переход из состояния S_i в S_{i+1} зависит только от этих состояний, то такая последовательность состояний во времени будет марковским процессом {последовательностью, цепью}, т.е. марковский процесс определяется как такой процесс, будущее состояние которого определяется только настоящим состоянием и не зависит от предыдущего состояния.

Каждой паре состояний $S_{i,}, S_j$ можно поставить в соответствие условную вероятность p_{ij} того, что система находится в состоянии j в момент $t + \Delta t$ при условии, что в момент t она находилась в состоянии i.

Системы массового обслуживания относятся к марковским системам, если они описываются с помощью дискретных марковских процессов. Как уже указывалось в первом занятии, простейшие СМО содержат два основных блока: блок очереди и блок обслуживания, каждый из которых подчиняется своим законам. Для того, чтобы система оставалась марковской, дисциплина очереди и закон обслуживания должны быть подчинены определенным условиям.

Марковская модель системы массового обслуживания включает в себя:

- Определение множества состояний системы.
- Определение операций, соответствующих состоянию системы.
- Определение переходов при окончании операции.

- Вычисление интенсивностей перехода марковского процесса.
- Задание начального распределения.

Рассмотрим некоторую систему, характеризующуюся событием S и состоящую из событий $S_{A,}$ S_B, S_C, S_D: $S = S_A + S_B + S_C + S_D$, которая представлена на рис. 4 Полная система событий $S_{A,} S_B, S_C . S_D$ представляет такие события, что событие S произойдет, если произойдет одно из этих событий. На рис. 4а и 4б показана ситуация когда в момент времени t состояние системы n, которое останется в момент времени t+Δt только в том случае, если в систему не поступит и не выйдет ни одного требования, или, если поступит и выйдет по одному требованию. Событие S_C (рис. 4в) заключается в том, что в момент времени t состояние системы было n-1, но за время Δt одно требование поступило, но ни одно не вышло. Событие S_D (рис. 4г) состоит в том, что в момент времени t состояние системы было n+1, за время Δt одно требование вышло из системы и ни одного не вошло.

Вероятности P_{sA}, P_{sB}, P_{sC}, $P_{sД}$ соответственно событий $S_{A,} S_B, S_C, S_D$ выражаются соотношениями

$$\begin{aligned}
P_{s_A} &= P_{in}(t) P^0(\Delta t) G^0(\Delta t) \approx P_{in}(t)(1-\lambda_n \Delta t)(1-\mu_n \Delta t), \\
P_{s_B} &= P_{in}(t) P^1(\Delta t) G^1(\Delta t) \approx P_{in}(t) \lambda_n \Delta t \mu_n \Delta t, \\
P_{s_C} &= P_{in-1}(t) P^1(\Delta t) G^o(\Delta t) \approx P_{in}(t) \lambda_{n-1} \Delta t (1-\mu_{n-1} \Delta t), \\
P_{s_Д} &= P_{in+1}(t) P^0(\Delta t) G^1(\Delta t) \approx P_{in+1}(t)(1-\lambda_{n+1} \Delta t)(\mu_{n+1} \Delta t).
\end{aligned} \tag{1}$$

В этих уравнениях индексы при λ и μ показывают, что в общем случае параметры λ и μ зависят от состояния системы.

Так как $S = S_A + S_B + S_C + S_D$, то $P_{in}(t+\Delta t) = P_{sA}+P_{sB}+P_{sC}+P_{sД}$

и следовательно

$$\begin{aligned}
P_{in}(t+\Delta t) &= P_{in}(t)(1-\lambda_n \Delta t)(1-\mu_n \Delta t) + P_{in}(t) \lambda_n \Delta t \mu_n \Delta t + \\
&+ P_{in}(t) \lambda_{n-1} \Delta t (1-\mu_{n-1} \Delta t) + P_{in}(t)(1-\lambda_{n+1} \Delta t) \mu_{n+1} \Delta t.
\end{aligned} \tag{2}$$

Если Δt→0, то получим дифференциальное уравнение, описывающее процессы рождения и гибели

$$\frac{dP_{in}}{dt} = \lambda_{n-1} P_{i_{n-1}}(t) - (\lambda_n + \mu_n) P_{in}(t) + P_{i_{n+1}}(t) \mu_{n+1} \tag{3}$$

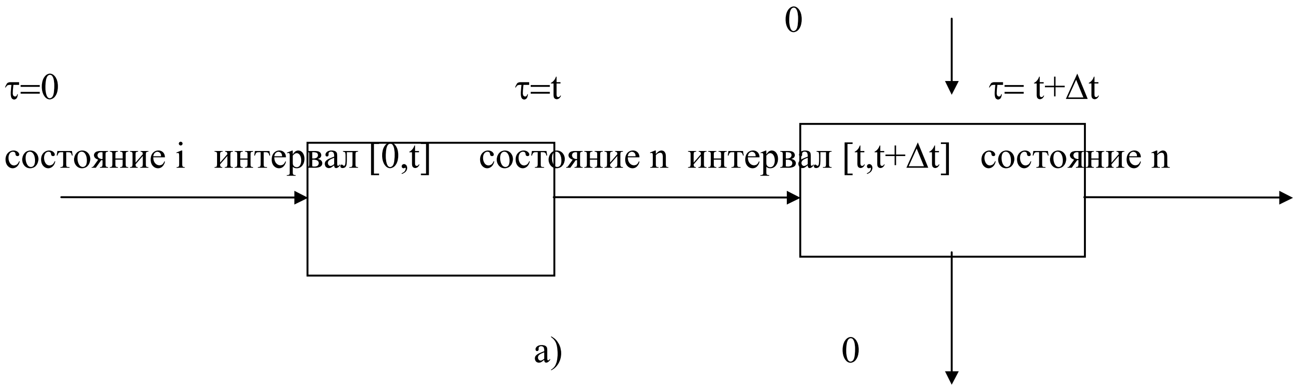
при начальных условиях

$P_{in}(0)=0$, n=0,1,2,…,i-1,i+1,…, (4)

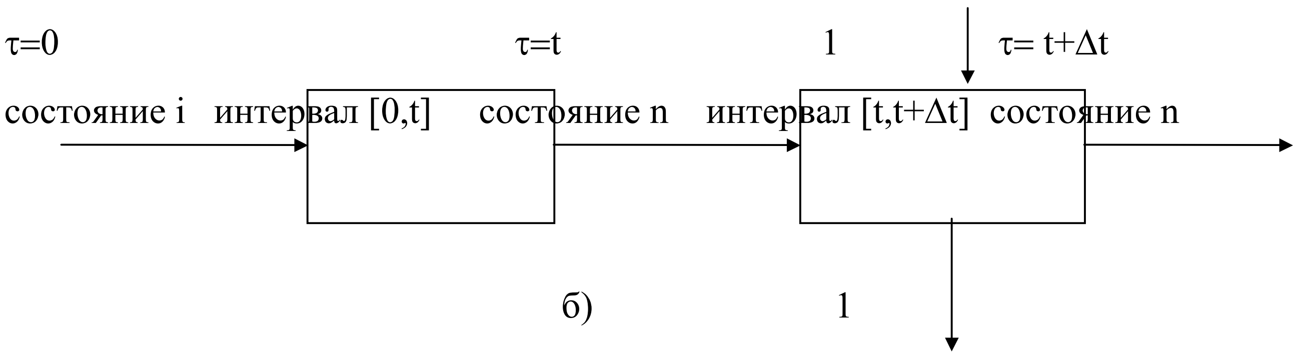
$P_{ii}(0)=1$.

Уравненние (3) справедливо для n=0,1,2,…. Если для n=0 считать, что $\lambda_{n-1}=\lambda_{-1}\equiv 0$ и $\mu_0\equiv 0$, то это уравнение преобразуется к виду

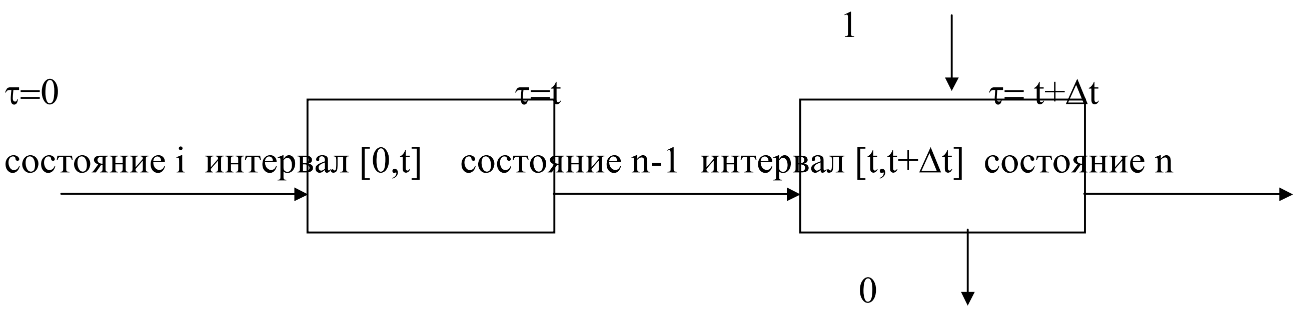
$$\frac{dP_{0i}}{dt} = -\lambda_0 P_{i0}(t) + P_{i1}\mu_1. \qquad (3а)$$



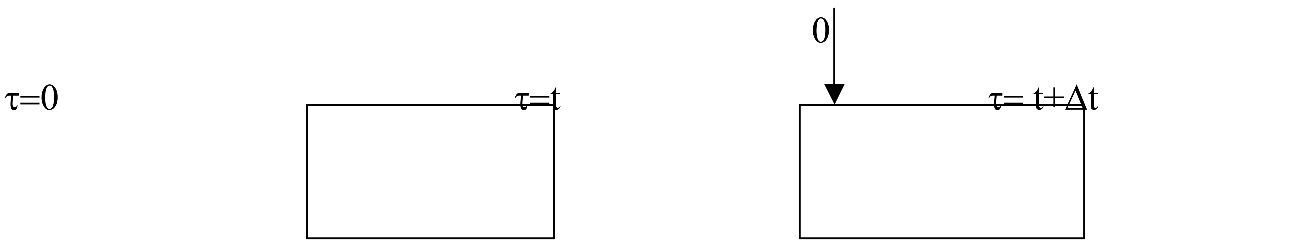
а)



б)



в)



состояние i $\longrightarrow$ интервал [0,t] состояние n+1 $\longrightarrow$ интервал [t,t+Δt] состояние n $\longrightarrow$

г) 1 $\downarrow$

Рис. 4 Событие $s=s_A+s_B+s_C+s_Д$, составляющие события s: а) s_A, б)s_B, в)s_C, г) $s_Д$.

Уравнение (3) называется моделью процессов рождения и гибели.

Если принять, что в момент времени t=0 состояние системы равно нулю и $\mu_n \equiv 0$ для n=0,1,2,…, то из модели (3) получается модель чистого рождения при условии, что $\lambda_{-1} \equiv 0$

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -\lambda_0 P_0(t), \\ \dfrac{dP_n}{dt} = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) - \lambda_n P_n(t), n = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{5}$$

P(0)=1, $P_n(0)=0$, n=1,2,…

Решение системы дифференциальных уравнений (5) в явном виде дает изменение вероятности состояния $P_n(t)$ во времени

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{n!},$$

Если принять, что в момент времени t=0, состояние системы будет равно S и $\lambda_n \equiv 0$ для n=0,1,2,3,…, то из модели (3) получается модель чистой гибели.

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = \mu_1 P_1(t) \\ \dfrac{dP_n}{dt} = -\mu_n P_n(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t), n = 1,2, \end{cases} \tag{6}$$

$P_n(0)=0$, n=0,1,2,…,s-1.s+1,…, $P_s(0)=1$.

Частным случаем общей модели рождения и смерти (3) является модель при t=0 n=0 параметры λ и μ - const. Этот случай соответствует очереди с одним клиентом, пуассоновским входным потоком и экспоненциальным временем обслуживания. Уравнения модели (3) можно записать в виде, оставив лишь один индекс

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \dfrac{dP_n}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), n = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{7}$$

Эта система дифференциальных уравнений описывает изменение во времени вероятностей состояния $P_n(t)$, n=0,1,2,…, которые называются неустановившимися вероятностями состояния. Решение этой системы уравнений сходится к статистически стационарному процессу

$$P_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t), n = 0,1,\text{K}$$

только при условии $\lambda/\mu<1$.

Интуитивно это понятно, поскольку статистическая стационарность наступает только тогда, когда средний интервал $1/\lambda$ между появлениями новых требований меньше среднего интервала $1/\mu$ обслуживания.

Состояние СМО удобно изображать с помощью графов.

Примеры решения задач

Пример 2.1. Построить граф состояний следующего случайного процесса: устройство S состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, продолжающийся заранее неизвестное случайное время (рис.5).

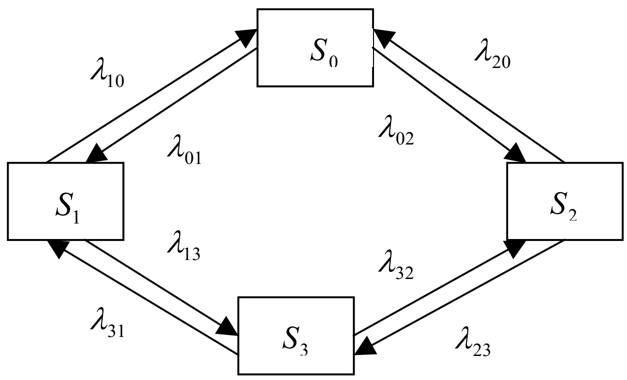


Рис.5 Граф состояний устройства S.

Возможные состояния системы: S_0 - оба узла исправны; S_1 - первый узел ремонтируется, второй исправен; S_2 - второй узел ремонтируется, первый исправен; S_3 - оба узла ремонтируются.

Стрелка, направленная из S_0 в S_1, означает переход системы в момент отказа первого узла из S_0 в S_1; из S_1 в S_0 - переход в момент окончания ремонта этого узла.

На графе отсутствуют стрелки из S_0 в S_3 и из S_1 в S_2. Это объясняется тем, что выходы узлов из строя предполагаются независимыми друг от друга и, например, вероятностями одновременного выхода из строя двух узлов (S_0 в S_3) и одновременного окончания ремонта двух узлов из S_3 в S_0 можно пренебречь.

1) Найти предельные вероятности для системы S при:

$\lambda_{01}=1$, $\lambda_{02}=2$, $\lambda_{10}=2$, $\lambda_{13}=2$,

$\lambda_{20}=3$, $\lambda_{23}=1$, $\lambda_{31}=3$, $\lambda_{32}=2$.

Система алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим для данной системы записывается из дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\frac{dP_0}{dt}= \lambda_{10} P_1+ \lambda_{20} P_2 - (\lambda_{01}+\lambda_{02}) P_0$$

$$\frac{dP_1}{dt}= \lambda_{01} P_0 + \lambda_{31} P_3 - (\lambda_{10}+\lambda_{13}) P_1$$

$$\frac{dP_2}{dt}= \lambda_{02} P_0 + \lambda_{32} P_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23}) P_2$$

$$\frac{dP_3}{dt}= \lambda_{13} P_1 + \lambda_{23} P_3 - (\lambda_{31} + \lambda_{32}) P_3 .$$

В левой части каждого из этих уравнений стоит производная вероятности i-го состояния. В правой части – сумма произведений вероятностей всех состояний (из которых идут стрелки в данное состояние) на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i-го состояния). Таким образом, для стационарного режима система уравнений записывается в виде

$$3P_0 = 2P_1 + 3P_2$$

$$4P_1 = P_0 + 3P_3$$

$$4P_2 = 2P_0 + 2P_3$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

Здесь вместо одного уравнения записано нормировочное условие. $\sum P_i =1$.

Решение системы дает условие P_0=0.4, P_1=0.2, P_2=0.27, P_3=0.13, т.е. в предельном стационарном режиме система S в среднем 40% времени будет находиться в состоянии S_0 (оба узла исправны), 20% - в состоянии S_1 (первый узел ремонтируется, второй работает), 27% - в состоянии S_2 (второй узел ремонтируется, первый работает), 13% - в состоянии S_3 (оба узла ремонтируются).

2) Найти средний чистый доход от эксплуатации в стационарном режиме системы S, если известно, что в единицу времени исправная работа первого и второго узлов приносит доход соответственно в 10 и 6 ден. ед., а их ремонт требует затрат соответственно в 4 и 2 ден. ед. Оценить экономическую эффективность имеющейся возможности уменьшения вдвое среднего ремонта каждого из двух узлов, если при этом придется вдвое увеличить затраты на ремонт каждого узла (в единицу времени).

В среднем первый узел исправно работает долю времени равную P_0+P_2 = 0.4 + 0.27 = 0.67, а второй P_0+P_1 = 0.4 + 0.2 = 0.6. В то же время первый узел находится в ремонте в среднем долю времени, равную P_1+P_3 = 0.2 + 0.13 = 0.33, а второй узел - P_2 + P_3 = 0.27 +0.13 = 0.4. Поэтому средний чистый доход в единицу времени от эксплуатации системы, т.е. разность между доходами и затратами, равен

D = 0.67*10 + 0.6*6 – 0.33*4 – 0.4*2 = 8,18.

Уменьшение вдвое среднего времени ремонта каждого из узлов в соответствии с $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ будет означать увеличение вдвое интенсивностей «окончания ремонтов» каждого узла, т.е. теперь λ_{10}=4, λ_{20}=6, λ_{31}=6, λ_{32}=4 и система линейных алгебраических уравнений, описывающая стационарный режим системы S_1 вместе с нормировочным условием примет вид:

$3P_0 = 4P_1 + 6P_2$

$6P_1 = P_0 + 6P_3$

$7P_2 = 2P_0 + 4P_3$

$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1,$

решение которой дает: P_0 =0.6, P_1 =0.15, P_2 =0.2, P_3 = 0.05.

Учитывая, что $P_0 + P_2 = 0.8$; $P_0 + P_1 = 0.75$; $P_1 + P_3 = 0.2$; $P_2 + P_3 = 0.25$, а затраты на ремонт первого и второго узла составляют теперь соответственно 8 и 4 дн. ед., вычислим средний доход в единицу времени.

D_1 = 0.8*10 = 0.75*6 – 0.2*8 – 0.25*4 = 9.9.

Так как D_1>D примерно на 20%, то экономическая целесообразность ускорения ремонта узлов очевидна

Пример 2.2. Пусть имеются 3 конкурирующих предмета потребления (продукта) S_1, S_2 и S_3. С целью определения спроса на эти продукты производится публичный опрос. Сначала клиентов опрашивают о том, каким из продуктов S_1, S_2 и S_3 они пользуются; предположим, что при этом выяснилась следующая доля (частота) клиентов, пользующихся соответственно каждым из продуктов $P_1(0)$ = 0,5; $P_2(0)$ = 0,2; $P_3(0)$ = 0,3. Через месяц клиентов, пользовавшихся продуктом S_1, спрашивают о том, продолжают ли они пользоваться продуктом S_1 или перешли к S_2 или S_3; пусть при этом получились следующие частоты, которые мы принимаем за приближенные значения вероятностей перехода: $P_{11}(1)$ = 0,9; $P_{12}(1)$ = 0,1; $P_{13}(1)$ = 0. Аналогично поступают с клиентами, которые пользовались продуктом S_2 и S_3; пусть $P_{21}(1)$ = 0,4; $P_{22}(1)$ = 0,3; $P_{23}(1)$ = 0,3; $P_{31}(1)$ = 0,7; $P_{32}(1)$ = 0,1; $P_{33}(1)$ = 0,2.

Итак, предполагая, что поведение клиентуры не меняется по времени, имеем стационарную цепь Маркова с матрицей перехода

$$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Граф переходов представлен на рис. 6.

Через месяц после опроса распределение клиентов будет следующим:

$(P_1(1); P_2(1); P_3(1))$ = (0,5;0,2;0,3)F = (0,74; 0,14; 0,12).

Через четыре месяца, если опросы приводят каждый раз к результату (1), получится

$(P_1(4); P_2(4); P_3(4))$ = (0,5;0,2;0,3) F^4 = (0,827; 0,125; 0,048).

Вероятности P_n(i), n = 1,2,3, стремятся к пределу при i $\longrightarrow \infty$. Эти пределы независимы от $P_n(0)$, n = 1,2,3, и равны

$$(P_1(\infty); P_2(\infty); P_3(\infty)) = \begin{pmatrix} \frac{53}{64} & \frac{8}{64} & \frac{3}{64} \end{pmatrix}.$$

Если бы матрица перехода изменялась от опроса к опросу, то результаты опросов описывались бы неоднородной цепью Маркова.

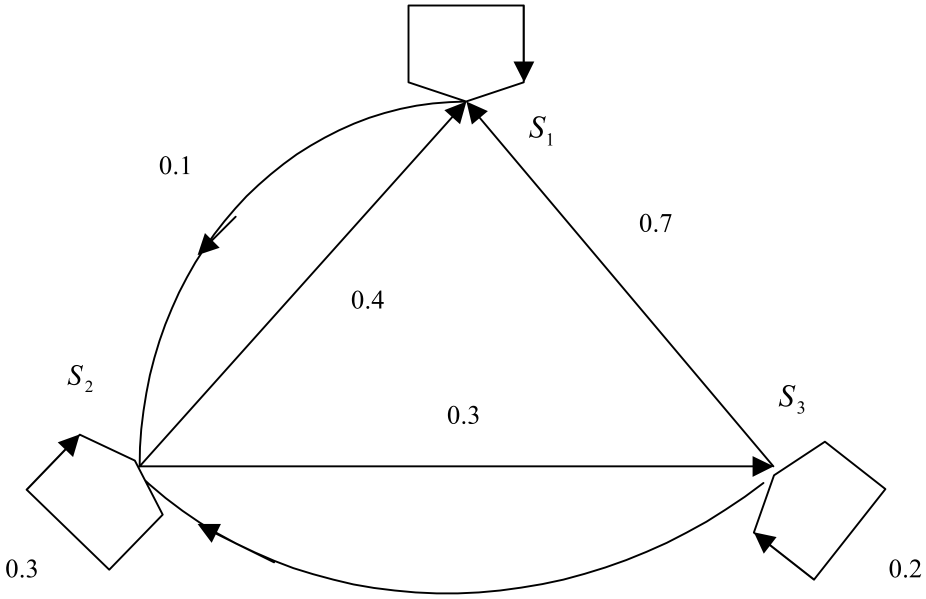


Рис.6 Граф перехода продуктов питания.

Задачи

2.1 Построить граф состояний следующего случайного процесса: система состоит из двух автоматов по продаже газированной воды, каждый из которых в случайный момент времени может быть либо занятым, либо свободным.

2.2 Построить граф состояний системы S, представляющей электрическую лампочку, которая в случайный момент времени может быть либо включена, либо выключена, либо выведена из строя.

2.3 Найти предельные вероятности для систем S, граф которых изображен на рис.7.а и 7.б соответственно.

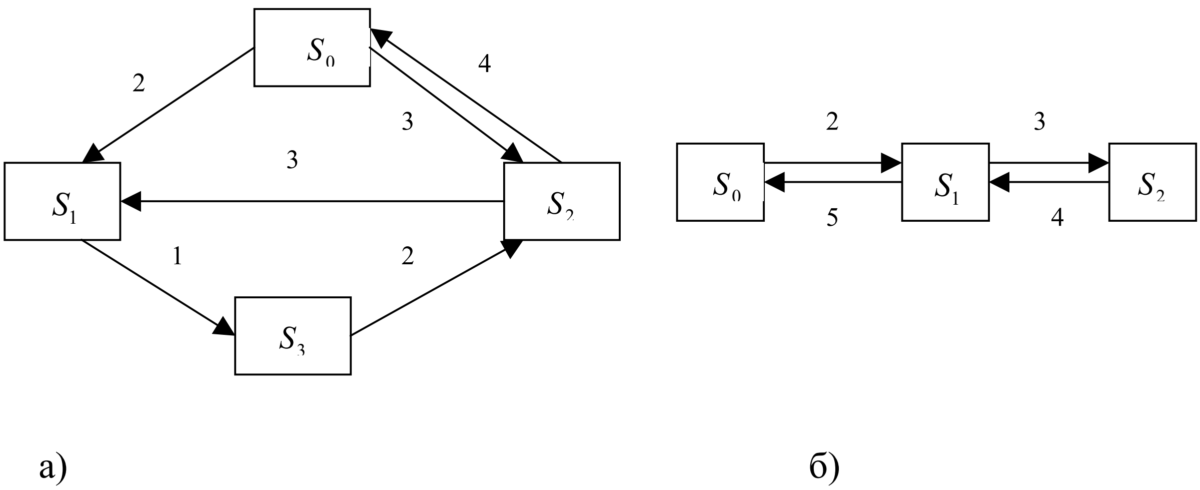


Рис. 7. Графы состояний систем S.

Контрольные вопросы

1. Чем характеризуется состояние СМО? Может ли быть число состояний бесконечным?
2. Дайте определение марковского процесса.
3. Какой процесс называют статистически стационарным?
4. Что такое интенсивность входного потока λ?
5. Какой физический смысл имеют вероятности состояний?
6. Что представляет собой модель рождения и модель гибели?

Литература: [1, 3, 5, 6, 7, 8].

Тема 3. РАСЧЕТ ОПЕРАЦИОННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СМО

Цель занятия: 1. Знакомство с основными операционными показателями СМО и методикой их расчета.
2. Приобретение навыков расчета различных СМО.

Основные положения

Большинство задач для систем массового обслуживания включают в себя экономический аспект; обычно стремятся найти максимальное или минимальное значение некоторого критерия, например , функции стоимости. При решении подобных задач методами исследования операций такая функция бывает задана и ее предполагается оптимизировать при некоторых ограничениях. Так, при исследовании явлений массового обслуживания находят условия получения минимума расходов из-за простоя приборов и издержек из-за ожидания требований. При этом приходится рассчитывать систему.

Расчет СМО заключается в расчете, так называемых, операционных показателей, которые для различных видов систем представлены в табл.1.

Для стационарных СМО выделяют следующие числовые характеристики:

- трафик-интенсивность ρ - отношение интенсивности входного потока к интенсивности обслуживания, если $\rho<1$, то всегда существует статистическое стационарное состояние;
- вероятность нахождения в системе не более n требований $F(n)$;
- среднее число требований в системе $\bar{n}$;
- средне число требований в очереди $\bar{m}$;
- время ожидания в очереди t_f
- среднее время ожидания в очереди $\bar{t}_f$;
- время ожидания в системе t_s;
- среднее время ожидания в системе $\bar{t}_s$;
- коэффициентом простоя обслуживающего устройства к ^{пр} $k_{пр}^{об}$;

- Вероятность, что время ожидания в очереди меньше t_f $F(t_f)$;
- Вероятность существования очереди $\underline{P}$;
- Среднее число требований, не находящихся в системе $\bar{l}$;
- Среднее число незанятых каналов $\overline{S}$;
- Коэффициент простоя требований $k_{пр}^{тр}$;
- Вероятность отказа очередному требованию в обслуживании V;
- Коэффициент занятости оборудования $k_{зан}^{об}$;
- Вероятность того, что поступившее требование получит отказ, т.е. не будет принято на обслуживание P_{L+M};
- Вероятность того, что все аппараты будут заняты (вероятность образования очереди) $П$;

Таблица 1

Операционные показатели для различных типов систем массового обслуживания

Обозначение	ρ	P_n	Др переменные	$\bar{n}$	F(t_f)
1 $\frac{\mid M\mid M\mid 1\mid}{\mid\infty\mid\lambda\mid\mu\mid T\mid 1\mid 0\mid}$	$\rho = \lambda/\mu$ $\rho = \bar{n}/(1-\bar{n})$	$P_n = \rho^n(1-\rho)$, $n = 0,1,2,K$ или $P_0 = 1-\rho$, $P_n = \rho P_{n-1}$, $n = 1,2,K$.	$F(n) = 1-\rho^{n+1}$	$\bar{n} = \rho/(1-\rho)$	$F(t_f) = 1 - \rho e^{-\mu t_f(1-\rho)}$
2 $\frac{\mid M\mid D\mid 1\mid}{\mid\infty\mid\lambda\mid\mu\mid T\mid 1\mid 0\mid}$	$\rho = \lambda/\mu$	-	-	$\bar{n} = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$	-
3 $\frac{\mid M\mid G\mid 1\mid}{\mid\infty\mid\lambda\mid\mu\mid T\mid 1\mid 0\mid}$	-	-	-	$\bar{n} = \rho + \frac{\rho^2+\lambda^2 Д_t}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2-\lambda^2 Д_t}{2(1-\rho)}$. При $Д_t = 0$ $\bar{n} = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$ При $Д_t = 1/\mu^2$	-

				$\bar{n} = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2 - \lambda^2 \frac{1}{\mu^2}}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho}$	
4 $\frac{\|M\|M\|1\|}{\|\infty\|\lambda\|\mu_n\|T\|1\|0\|}$	-	$P_n = \frac{(\frac{\lambda}{\mu_0})^n e^{-\lambda/\mu_0}}{n!}$	-	$\bar{n} = \lambda/\mu$ $\bar{n}(t) = \frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})$	-
5 $\frac{\|M\|M\|1\|}{\|N\|\lambda\|\mu\|T_\infty\|1\|0\|}$	$\rho = \lambda/\mu$	$P_n = (N-n+1)\rho P_{n-1}$ $n = 1,2,\ldots, N,$ $P_n = \frac{N!}{(N-n)!}\rho^n P_0,$ $n = 1,2,\ldots, N$ $P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N!\rho^n}{(N-n)!}}$	$\bar{l} = N - \bar{n}$	$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = N!P_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\rho^n}{(N-n)!} = N - \frac{1}{\rho}(1-P_0) = 1-\bar{l}$	-
6 $\frac{\|M\|M\|L\|}{\|\infty\|\lambda\|\mu\|T\|1\|0\|}$	$\rho = \lambda/\mu$	$P_n = P_0\frac{\rho^n}{n!}, 1\le n<L,$ $P_n = P_0\frac{\rho^n}{L!L^{n-1}}, n\ge L;$ или $P_n = \frac{\rho}{n}P_{n-1}, 1\le n\le L,$ $P_n = \frac{\rho}{L}P_{n-1}, n\ge L,$ $P_0 = \frac{1}{\frac{\rho^L}{L!(1-\rho/L)}+\sum_{n=0}^{L-1}\frac{\rho^n}{n!}}$	-	$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \bar{m} + L - \bar{s} = \bar{m} + \rho$	$F(t_f) = 1 - e^{-L\mu t_f(1-\rho/L)} * P_0\frac{\rho^L}{L!(1-\frac{\rho}{L})}$
7 $\frac{\|M\|M\|L\|}{\|N\|\lambda\|\mu\|T\|1\|0\|}$	$\rho = \lambda/\mu$	$P_n = P_0 a_n$ $P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{N} a_n}$	$\bar{l} = N - \bar{n}$	$\bar{n} = \sum_{n=0}^{L} nP_n = \bar{m} + L - \bar{s}$	-

2.1 $\frac{\lvert M\lvert M\lvert L\lvert}{\lvert\infty\lvert\lambda\lvert\mu\lvert H\lvert 1\lvert 0\lvert}$	$\rho=\lambda/\mu$	$P_n=\frac{P_0}{n!}\rho^n$, $n=1,2,\ldots,L$, $P_n=\frac{\rho}{n}P_{n-1}$, $n=1,2,\ldots,L$, $P_0=\frac{1}{\sum_{n=0}^{L}\frac{1}{n!}\rho^n}$	$V=P_L=$ $=\frac{\rho^L\frac{1}{L!}}{\sum_{n=0}^{L}\frac{1}{n!}\rho^n}$	$\overline{n}=\sum_{n=0}^{L}nP_0=$ $=\sum_{n=0}^{L}(\frac{1}{(n-1)!}\rho^n P_0$	-
2.2 $\frac{\lvert M\lvert M\lvert\infty\lvert}{\lvert\infty\lvert\lambda\lvert\mu\lvert H\lvert 1\lvert 0\lvert}$	-	$P_n(t)=$ $=\frac{1}{n!}\rho^n(1-e^{-\mu t})^n*$ $*e^{-\rho(1-\mu t)}$, $n=0,1,2,\ldots$, $P_n=\frac{1}{n!}\rho^n e^{-\rho}$ $P_0=e^{-\rho}$	-	$\overline{n}(t)=\rho(1-e^{-\mu t})$	-
3.1 $\frac{\lvert M\lvert M\lvert L\lvert}{\lvert\infty\lvert\lambda\lvert\mu\lvert yH\lvert 1\lvert 0\lvert}$	$\rho=\lambda/\mu$	$P_n=\begin{cases}\frac{1}{n!}\rho^n P_0, 1\le n<L\\ \frac{P_0}{L!L^{n-L}}\rho^n,\\ L\le n\le L+M\end{cases}$ $P_n=\begin{cases}\frac{1}{n!}\rho^n P_0, 1\le n<L\\ \frac{P_0}{L!L^{n-L}}\rho^n P_0,\\ L\le n\le L+M\end{cases}$ $P_m=\begin{cases}0, если\ 1\le n<L\\ \frac{1}{L!L^{n-L}}\rho^n,\\ L\le n\le L+M\end{cases}$ $P_0=1/(\sum_{n=0}^{L-1}\frac{1}{n!}\rho^n+$ $+\frac{1}{L!\left(1-\frac{\rho}{L}\right)}\rho^n*$ $*\left[1-\left(\frac{\rho}{L}\right)^{M+1}\right])$ $P_{L+M}=\frac{P_0}{L!L^M}\rho^{L+M}$	$П=P_L*$ $\frac{1-(\frac{\rho}{L})^{M+1}}{1-\frac{\rho}{L}}$		

$\overline{m}$	$\overline{S}$	$\overline{t_f}$	$\overline{t_s}$	k^{np}	$\underline{p}$
$\overline{m} = \rho^2/(1-\rho) = = \overline{n}\rho = \overline{n} - \rho$ 1	-	$\bar{t}_f = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho^2}{1-\rho} = = \bar{t}_s\rho = \bar{t}_s - 1/\mu$	$\bar{t}_s = \frac{1}{\mu}\frac{1}{1-\rho} = = \bar{t}_f + 1/\mu$	$k^{\cdot p} = P_0 = =1-\rho$	$\underline{p} = =1-P_0 = =\rho$
2-	-	$\bar{t}_f = \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{2(1-\rho)}$	-	-	-
3-	-	$\bar{t}_f = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho^2 + \lambda^2 Д_t}{2(1-\rho)}$. При $Д_t = 1/\mu^2$ $\bar{t}_f = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho^2+\lambda^2(\frac{1}{\mu^2})}{2(1-\rho)} = = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho^2}{1-\rho}$	$\bar{t}_s = \bar{t}_f + 1/\mu$	-	-
4-	-	-	-	-	-
5 $\overline{m} = = \sum_{n=2}^{N}(n-1)P_n = = N!P_0\sum_{n=2}^{N}\frac{n-1}{(N-n)!}\rho^n = N - \frac{1+\rho}{\rho}(1-P_0) = = \lambda(N-\overline{n})\bar{t}_f$	-	$\bar{t}_f = \frac{1}{\lambda(N-\overline{n})}\sum_{n=2}^{N}(n-1)P_n = \frac{1}{\mu}\left[\frac{N}{1-P_0} - \frac{1+\rho}{\rho}\right]$	$\bar{t}_s = \frac{\overline{n}}{\lambda(N-\overline{n})} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{N}{1-P_0} - \frac{\lambda}{\rho}\right]$	-	$\underline{P} = 1 - P_0$

6 $\overline{m}=\sum_{n=L+1}^{n}(n-L)P_n=$ $=\frac{\rho^{L+1}}{LL!\left(1-\rho/L\right)^2}P_0=$ $=\frac{P^L\rho}{L\left(1-\rho/L\right)^2}$	$\overline{s}=\sum_{n=0}^{L}(L-n)P_n=$ $=\overline{m}+L-\overline{n}=$ $=M-\rho$	$\bar{t}_f=\overline{m}/\lambda=$ $=\frac{\rho^L}{LL!\mu(1-\rho/L)^2}P_0$	-	-	$\underline{p}=$ $=\sum_{n=L}^{\infty}P_n=$ $P_0\frac{\rho^2}{L!\left(1-\frac{\rho}{L}\right)}$
7 $\overline{m}=\sum_{n=L+1}^{N}(n-L)P_n$	$\overline{s}=\sum_{n=0}^{L}(L-n)P_n$	$\bar{t}_f=\frac{\overline{m}}{\lambda(N-\overline{n})}=$ $=\frac{\overline{m}}{\lambda(L-\overline{s})}$	-	$k_{пп}^{тр}=$ $=\overline{m}/N$; $k_{пр}^{об}=$ $=\overline{s}/L$	$P=\sum_{n=L}^{N}P_n=$ $=1-\sum_{n=0}^{L-1}P_n$
2.1-	$\overline{s}=L-\overline{n}$	-	-	$k_{пр}^{об}=\overline{s}/L$ $k_{зан}^{об}=\overline{n}/L$	-
2.2-	-	-	-	-	-

3.1 $\overline{m}=\frac{P_L}{(1-\rho/L)^2}*$ $[\frac{\rho}{L}-(M+1)(\frac{\rho}{L})^{M+1}+$ $+M(\rho/L)^{M+2}]$	$\overline{s}=\sum_{n=0}^{L-1}\frac{L-n}{n!}\rho^n P_0$	-	-	-	-

Примеры решения задач

Пример 3.1 Известно, что заявки на телефонные переговоры в телефонном ателье поступают с интенсивностью λ, равной 90 заявок в час, а средняя продолжительность разговора по телефону $t_{об}$ = 2 мин.

1) Определить показатели эффективности работы СМО (телефонной связи) при наличии одного телефонного номера.

Решение

Имеем λ = 90 (1/ч);

$\overline{t_{об}}$ = 2 мин.

- Интенсивность потока обслуживания $\mu=\frac{1}{\overline{t_{об}}}=\frac{1}{2}=0{,}5$ (1/мин)=30 (1/ч).
- Относительная пропускная способность СМО

$Q=\frac{\mu}{\lambda+\mu}=\frac{30}{90+30}=0{,}25$,

т.е. в среднем только 25% поступающих заявок осуществляет переговоры по телефону.

- Вероятность отказа в обслуживании составит

$$P_{отк} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = 0{,}75.$$

- Абсолютная пропускная способность СМО

$A = \lambda Q = 90 * 0{,}25 = 22{,}5$;

т.е. в среднем в час будут обслужены 22,5 заявок на переговоры. Очевидно, что при наличии только одного телефонного номера СМО будет плохо справляться с потоком заявок.

2) Определить оптимальное число телефонных аппаратов в телефонном ателье, если условием оптимальности считать удовлетворение в среднем из каждых 100 заявок не менее 90 заявок на переговоры.

- Интенсивность нагрузки каналов – трафик-интенсивность

$\rho = \lambda / \mu = 90/30 = 3$,

т.е. за время среднего (по продолжительности) телефонного разговора $t_{об}$ = 2 мин поступает в среднем 3 заявки на переговоры.

Будем увеличивать постепенно число каналов (телефонных номеров) n= 2,3,4…. и определять ρ, Q, A для получаемой n-канальной СМО характеристики обслуживания.

N = 2 : $P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$

$$P_0 = \left(1 + 3 + \frac{3^2}{21}\right)^{-1} = 0.118 \approx 0.12$$

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0$$

$$Q = 1 - \left(\frac{3^2}{2!}\right) 0.118 = 0.471 \approx 0.47$$

$$A = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0\right) = \lambda Q$$

$A = 90 \cdot 0.471 = 48.4$ и т.д.

Характеристики сведены в следующую таблицу:

Характеристика обслуживания	**Число каналов**					
	1	2	3	4	5	6
Относительная пропускная способность Q	0,25	0,47	0,65	0,79	0,9	0,95
Абсолютная пропускная способность A	22,5	42,5	58,8	71,5	80,1	85,3

Из условия оптимальности $Q \geq 0.9$ следует, что в телевизионном ателье необходимо установить 9 телефонных номеров (в этом случае Q = 0,9). При этом в час будут обслуживаться в среднем 80 заявок (A = 80,1), а среднее число занятых телефонных номеров (каналов)

$\bar{k} = A / \mu$;

$\overline{k} = {}^{80.1}\!\!\diagup_{30} = 2.67$.

Пример 3.2 В вычислительном центре коллективного пользования с тремя ЭВМ поступают заказы от предприятий на вычислительные работы. Если работают все три ЭВМ, то вновь поступающий заказ не принимается, и предприятие вынуждено обратиться в другой ВЦ. Среднее время работы с одним заказом составляет 3 часа. Интенсивность потока заявок 0,25 (1/ч).

Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы ВЦ.

По условию n = 3, λ = 0,25 (1/ч), $\overline{t_{об}}$ = 2 мин.

- Интенсивность потока обслуживания $\mu = \frac{1}{\overline{t_{об}}} = 0.33$.
- Интенсивность нагрузки ЭВМ – трафик-интенсивность $\rho = \frac{0.25}{0.33} = 0.75$.
- Предельные вероятности

$$P_0 = \left(1 + 0.75 + \frac{0.75^2}{21} + \frac{0.75^3}{3!}\right)^{-1} = 0.476,$$

$$P_1 = (0.75 \cdot 0.476) = 0.357,$$

$$P_2 = \left(\frac{0.75^2}{21}\right)0.476 = 0.131,$$

$$P_3 = \left(\frac{0.75^3}{3!}\right)0.476 = 0.33,$$

т.е. в стационарном режиме работы ВЦ в среднем 47,6 % времени нет ни одной заявки; 35,7 % - имеется одна заявка (занята одна ЭВМ); 13,4 % - две заявки (две ЭВМ); 3,3 % времени – три заявки (заняты три ЭВМ).

- Вероятность отказа (когда заняты все три ЭВМ) таким образом составит

$$P_{отк} = P_3 = 0.033.$$

- Относительная пропускная способность центра

Q = 1 – 0,033 = 0,967,

т.е. в среднем из каждых 100 заявок ВЦ обслуживает 96,7 заявок.

- Абсолютная пропускная способность центра

$A = 0.25 \cdot 0.967 = 0.242$

т.е. за один час в среднем обслуживается 0,242 заявки.

- Число занятых ЭВМ

$\overline{k} = {}^{0.242}\!\!\diagup_{0.33} = 0.725$,

т.е. каждая их 3-х ЭВМ занята обслуживанием заявок в среднем лишь на ${}^{72.5}\!\!\diagup_{3} = 24.2\%$

Пример 3.3 В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. 1) Найти показатели эффективности работы причала, а также вероятность того, что ожидают разгрузку не более чем 2 судна.

Имеем $\rho = \lambda/\mu = \lambda\overline{t_{об}} = 0.4 \cdot 2 = 0.8$. Так как $\rho < 1$, то очередь на разгрузку не может бесконечно возрастать, и предельные вероятности существуют. Найдем их.

- Вероятность того, что причал свободен

$P_0 = 1 - 0.8 = 0.2$,

а вероятность того, что причал занят

$P_{зан} = 1 - 0.2 = 0.8$.

Вероятности того, что у причала находятся 1,2,3 судна (т.е. ожидают разгрузки 0,1,2 судна), равны соответственно

$P_1 = 0.8(1 - 0.8) = 0.16$

$P_2 = 0.8^2(1 - 0.8) = 0.128$

$P_3 = 0.8^3(1 - 0.8) = 0.1024$

Вероятность того, что ожидают разгрузку не более чем 2 судов, равна

$P = P_1 + P_2 + P_3 = 0.16 + 0.128 + 0.1024 = 0.3904$.

- Среднее число судов, ожидающих разгрузки составит

$\overline{m} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.8^2}{1-0.8} = 3.2$,

а среднее время ожидания разгрузки

$t_f = \frac{1}{\lambda} L_{оч} = \frac{3,2}{0,8} = 4$ (сутки).

Среднее число судов, находящихся у причала определяется как

$\overline{n} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.8}{1-0.8} = 4$ (сутки).

Среднее время пребывания судна у причала

$t_s = \frac{1}{\lambda} L_{сист} = \frac{4}{0,8} = 5$ (суток).

Очевидно, что эффективность разгрузки судов невысока. Для её повышения необходимо уменьшение среднего времени разгрузки судна $\overline{t_{об}}$, либо увеличения числа причалов n.

2)Найти показатели эффективности работы причала.

Известно, что приходящее судно покидает причал (без разгрузки), если в очереди на разгрузку стоит более 3 судов.

По условию m = 3.

- Вероятность того, что причал свободен

$P_0 = \frac{1 - 0.6}{1 - 0.8^{3+2}} = 0.297$

- Вероятность того, что приходящее судно покинет причал без разгрузки

$P_{отк} = 0.8^{3+1} \cdot 0.297 = 0.122$.

- Относительная пропускная способность причала

$Q = 1 - 0.122 = 0.878$.

- Абсолютная пропускная способность причала

$A = 0.4 \cdot 0.878 = 0.351$,

т.е. в среднем в сутки разгружается 0,35 судна.

- Среднее число судов, ожидающих разгрузку

$\overline{m} = \frac{0.8^2\left[1 - 0.8^3(3 + 1 - 3 \cdot 0.8)\right]}{\left(1 - 0.8^{3+2}\right)(1 - 0.8)} = 0.861$.

- Среднее время ожидания разгрузки

$\overline{t_f} = \frac{0,861}{0,8} = 1,076$ (сутки).

- Среднее число судов, находящихся у причала

$\overline{n} = 0.861 + (1 - 0.297) = 1.564$

- Среднее время пребывания судна у причала

$\overline{t_s} = \frac{1.564}{0.8} = 1.955$ (суток).

Пример 3.4 Железнодорожная касса с двумя окошками продает билеты в два пункта А и В. Интенсивность потока пассажиров, желающих купить билеты, для обоих пунктов одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0.45$ (пассажиров в минуту). На обслуживание пассажиров кассир тратит в среднем2 мин. Рассматриваются два варианта продажи билетов:

Первый – билеты продаются в одной кассе с двумя окошками одновременно в оба пункта А и В;

Второй – билеты продаются в двух специализированных кассах (по одному окошку в каждой), одна только в пункт А, другая – только в пункт В.

Необходимо:

а) сравнить два варианта продажи билетов по основным характеристикам обслуживания;

б) определить, как надо изменить среднее время обслуживания одного пассажира, чтобы по второму варианту продажи пассажиры затрачивали на приобретение билетов в среднем меньше времени, чем по первому варианту.

а) <u>По первому варианту</u> имеем двухканальную СМО, на которую поступает поток заявок интенсивностью $\lambda = 0.45 + 0.45 = 0.9$; интенсивностью потока обслуживания $\mu = 0.5$, трафик-интенсивностью $\rho = \lambda / \mu = 1.8$. Так как, $\frac{\rho}{n} = \frac{1.8}{2} = 0.9 < 1$, то предельная вероятность существует.

Вероятность простоя двух кассиров

$$P_0 = \left(1 + \frac{1.8}{1!} + \frac{1.8^2}{2!} + \frac{1.8^3}{2!(2 - 1.8)}\right)^{-1} = 0.0526.$$

Среднее число пассажиров в очереди

$$\overline{m} = \frac{1.8^3}{2 \cdot 2!\left(1 - \frac{1.8}{2}\right) 0.0526} = 7.67$$

Среднее число пассажиров у кассы

$\overline{n} = 7,67 + 1,8 = 9,47$.

Среднее время на ожидание в очереди и покупку билетов соответственно составляет:

$\overline{t_f} = \frac{7.67}{0.9} = 8.52$ (мин),

$\overline{t_s} = \frac{9.47}{0.9} = 10.5$ (мин).

<u>По второму варианту</u> имеем две одноканальные СМО (два специализированных окошка), на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0.45$. По прежнему $\mu = 0.5$, $\rho = 0.9 < 1$, предельная вероятность существует.

Для данного варианта

$$\overline{m}=\frac{0.9^2}{(1-0.9)}=8.1$$

$$\overline{n}=\frac{0.9}{1-0.9}=9.0$$

$$\overline{t_f}=\frac{8.1}{0.45}=18.0 \text{ (мин)},$$

$$\overline{t_s}=\frac{9.0}{0.45}=20.0 \text{ (мин)}.$$

Итак, по второму варианту увеличились и длина очереди, и среднее время ожидания в ней и в целом на покупку билетов. Такое различие объясняется тем, что в первом варианте (двухканальная СМО) меньше средняя доля времени, которую простаивает каждый их двух кассиров, если он не занят обслуживанием пассажира, покупающего билет в пункт А, и он, следовательно, может заняться обслуживанием пассажира, покупающего билет в пункт В, и наоборот. Во втором варианте такой взаимозаменяемости нет.

Можно заметить, что среднее время на покупку билетов по второму варианту увеличилось более чем в 2 раза. Такое значительное увеличение связано с тем, что СМО работает на пределе своих возможностей $(\rho=0.9)$: достаточно незначительно увеличить среднее время обслуживания $\overline{t_{об}}$, т.е. уменьшить μ и трафик-интенсивность ρ станет больше 1, т.е. очередь начнет неограниченно возрастать.

б) Выше было получено, что по первому варианту продажа билетов при среднем времени обслуживания одного пассажира $\overline{t_{об}}$ = 2 (мин), среднее время на покупку билетов составляет $\overline{t_{f1}}$ = 10,5 (мин). По условию для второго варианта продажи билетов $\overline{t_{f2}} < \overline{t_{f1}}$ или с учетом $\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\rho}{1-\rho}<\overline{t_{f1}}$.

Полагая $\rho=\lambda/\mu=\lambda\overline{t_{об}}$, получим $\frac{\overline{t_{об}}}{1-\lambda\overline{t_{об}}}<\overline{t_{f1}}$, откуда можно найти $\overline{t_{об}}<\frac{\overline{t_{f1}}}{1+\lambda\overline{t_{f1}}}$ или

$$\overline{t_{об}}<\frac{0,5}{1+0,45\cdot 0,5}=1,83.$$

Итак, средние затраты времени на покупку билетов по второму варианту продажи уменьшатся, если среднее время обслуживания одного пассажира уменьшится более чем на 0,17 мин, или более чем на 8,5 %.

Пример 3.5 В универсаме к углу расчета поступает поток (заявок) покупателей с интенсивностью λ = 81 чел. в час. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного покупателя $\overline{t_{об}}$ = 2 мин.

Определить:

1) Минимальное количество контролеров-кассиров $n_{\min}$, при котором очередь не будет расти до бесконечности, и соответствующие характеристики обслуживания при $n=n_{\min}$.

2) Оптимальное количество $n_{опт}$ контролеров-кассиров, при котором относительная величина затрат $C_{опт}$, связанная с издержками на содержание каналов обслуживания и с пребыванием в очереди покупателей, задаваемая, например, как $C_{опт}=\frac{1}{\lambda}n+3T_{оч}$, будет минимальна, и сравнить характеристики обслуживания при $n=n_{\min}$ и $n=n_{опт}$.

3) Вероятность того, что в очереди будет не более трех покупателей.

По условию $\lambda = 81$(1/час) = 1,35(1/мин)

$\rho = \lambda / \mu = \lambda \overline{t_{об}} = 1.35 \cdot 2 = 2.7$.

Очередь не будет возрастать до бесконечности при условии $\dfrac{\rho}{n} < 1$,т.е. при $n > \rho = 2.7$. Таким образом, минимальное количество контролеров-кассиров $n_{\min} = 3$.

Найдем характеристики обслуживания СМО при n = 3.

- Вероятность того, что в узле расчета отсутствуют покупатели:

$$P_0 = \left(1 + 2.7 + \frac{2.7^2}{2!} + \frac{2.7^3}{3!} + \frac{2.7^4}{3!(3-2.7)}\right)^{-1} = 0.025,$$

т.е. в среднем 2,5% времени контролеры-кассиры будут простаивать.

- Вероятность того, что в узле расчета будет очередь

$$\underline{P} = \left(\frac{2.7^4}{3!(3-2.7)}\right)0.025 = 0.735.$$

- Среднее число покупателей, находящихся в очереди

$$\overline{m} = \left(\frac{2.7^4}{3 \cdot 3!\left(1 - \frac{2.7}{3}\right)^2}\right)0.025 = 7.35$$

- Среднее время ожидания в очереди

$$\overline{t_f} = \frac{7.35}{1.35} = 5.44 \text{ (мин).}$$

- Среднее число покупателей в узле расчета

$$\overline{n} = 7.35 + 2.7 = 10.05$$

- Среднее время нахождения покупателей в узле расчет

$$\overline{t_s} = \frac{10.05}{1.35} = 7.44 \text{ (мин).}$$

- Среднее число контролеров-кассиров, занятых обслуживанием покупателей

$$\overline{k} = 2.7.$$

- Коэффициент (доля) занятых обслуживанием конторолеров-кассиров

$$\overline{k_з} = \rho / n = 2.7/3 = 0.9.$$

- Абсолютная пропускная способность узла расчета $A = 1.35$ (1/мин).

Анализ характеристик обслуживания свидетельствует о значительной перегрузке узла расчета при наличии трех контролеров-кассиров.

Относительная величина затрат при n = 3.

$$C_{отн} = \frac{1}{\lambda} n + 3T_{оч} = \frac{3}{1.35} + 3 \cdot 5.44 = 18.54.$$

Рассчитаем относительную величину затрат при других значениях n (табл.2).

Как видно из таблицы минимальные затраты получены при $n = n_{опт} = 5$ контролеров-кассиров.

Определим характеристики обслуживания узла расчета при $n = n_{опт} = 5$.

Получим $\underline{P} = 0.091$, $\overline{m} = 0.198$, $\overline{t_f} = 0.146$, $\overline{n} = 2.90$, $\overline{t_s} = 2.15$, $\overline{k} = 2.7$, $\overline{k_з} = 0.54$.

Характеристики работы контролеров-кассиров

Таблица 2

Характеристики обслуживания	Число контролеров-кассиров				
	3	4	5	6	7
Вероятность простоя контролеров-кассиров P_0	0,025	0,057	0,065	0,067	0,067
Среднее число покупателей в очереди $\overline{t_f}$	5,44	0,60	0,15	0,03	0,01
Относительная величина затрат $C_{отн}$	18,54	4,77	4,14	4,53	5,22

Как видно при n = 5 по сравнению с n = 3 существенно уменьшились вероятность возникновения очереди $\underline{P}$, длина очереди $\overline{m}$ и среднее время пребывания в очереди $\overline{t_f}$ и соответственно среднее число покупателей $\overline{n}$ и среднее время нахождения в узле расчета $\overline{t_s}$, а также доля занятых обслуживанием контролеров-кассиров $\overline{k}$ и абсолютная пропускная способность узла расчета А естественно не изменилось.

Вероятность того, что в очереди будет не более 3 покупателей, определяется как

$$P(\tau < 3) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_{5+1} + P_{5+2} + P_{5+3} = 1 - P_{оч} + P_{5+1} + P_{5+2} + P_{5+3},$$

(когда заняты от 1 до 5 кассиров) (когда в очереди стоят от 1 до 3 покупателей)

где $P_{n+1} = \dfrac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} P_0 + \ldots + P_{n+\tau} = \dfrac{\rho^{n+\tau}}{n^{\tau} \cdot n!} P_0$.

Получим при n = 5

$$P(\tau \le 3) = 1 - \frac{2.7^6}{5!(5-2.3)} 0.065 + \frac{2.7^6}{5 \cdot 5!} 0.065 + \frac{2.7^7}{5^2 \cdot 5!} 0.065 + \frac{2.7^8}{5^3 \cdot 5!} 0.065 = 0.986.$$

Заметим, что в случае n = 3 контролеров-кассиров та же вероятность существенно меньше.

$$P(\tau \le 3) = 0.46.$$

Задачи

1. Рассматривается круглосуточная работа пункта проведения профилактического ремонта автомашин с одним каналом обслуживания (одной группой проведения осмотра). На осмотр и выявление поступает в среднем 36 машин в сутки. Потоки заявок и обслуживаний – простейшие. Если машина, прибывшая в пункт осмотра не застает ни одного канала свободным, она покидает пункт осмотра необслуженной. Определить вероятности состояний и характеристики обслуживания профилактического пункта осмотра.

2. Решить задачу примера №3.3 для случая n = 4. Найти число каналов, при котором относительная пропускная способность пункта осмотра будет не менее 0,9.
3. Анализируется работа междугороднего переговорочного пункта в небольшом городке. Пункт имеет один телефонный аппарат для переговоров. В среднем за сутки поступает 240 заявок на переговоры. Средняя длительность переговоров (с учетом вызова абонентов в другом городе) составляет 5 мин. Никаких ограничений на длину очереди нет. Потоки заявок и обслуживаний простейшие. Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания переговорочного пункта в стационарном режиме.
4. Решить задачу № 3 для случая n = 3 телефонных аппаратов.
5. Решить задачу № 1 при условии, что машина, пребывшая на пункт осмотра, покидает этот пункт лишь в случае, если очереди на осмотр стоят более 5 машин.
6. Решить задачу № 3 при условии, что длина очереди не должна превышать 60 человек.
7. Решить задачу № 1 при условии, что длина очереди не должна превышать 60 человек.

Контрольные вопросы

1.Какие операционные показатели СМО Вам известны?

2.Что такое трафик-интенсивность?

3.В чем отличие расчета одноканальных СМО и многоканальных СМО?

4.В чем заключается расчет систем массового обслуживания?

5.С помощью какого показателя определяют разрешающую способность СМО?

ЛИТЕРАТУРА: [2,4, 6, 7] .

Список рекомендуемой литературы

1 Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. – М.: Изд-во «Советское радио», 1971. – 520с.

2 Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения. - М.: Изд-во «Мир», 1965. – 302с.

3 Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания: Учеб. Пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1982. – 256с.

4 Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987. – 336с.

5 Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высш. школа, 1990. – 382с.

6 Дегтярев Ю.И. Исследование операций. – М.: Высш. школа, 1986. – 320с.

7 Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Наука, 1980. – 208с.

8 Кузин . Основы кибернетики.

Содержание