Шифры перестановки. Шифры гаммирования

Занятие 2 (лекция)

§ 1. Основная часть

Простейшие шифры

Напомним, что среди всех шифров можно выделить два больших класса: *шифры замены* и *шифры перестановки*. На прошлом занятии мы подробно рассмотрели шифры замены. На данном занятии перейдем к рассмотрению так называемых шифров перестановки.

Шифр, преобразования которого изменяют только порядок следования символов исходного текста, но не изменяют их самих, называется *шифром перестановки*.

Понятие шифра перестановки

Каждое преобразование шифра перестановки, предназначенное для зашифрования сообщения длиной n символов, можно задать с помощью следующей таблицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

где i_1 - номер места шифртекста, на которое перемещается первая буква исходного сообщения при выбранном преобразовании, i_2 - номер места для второй буквы и т. д. В верхней строке таблицы выписаны по порядку числа от 1 до n, а в нижней - те же числа, но в произвольном порядке. Такая таблица называется *подстановкой степени* n. Зная подстановку, задающую преобразование, можно осуществить как зашифрование, так и расшифрование текста.

Таким образом, подстановка является ключом шифра перестановки, при этом легко видеть, что число всех возможных шифров перестановок для текста заданной длины равно в точности числу ключей, или таблиц указанного вида (см. задачу № 1).

Например, если для преобразования используется подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

и в соответствии с ней зашифровывается слово МОСКВА, то получится КОСВМА.

1	2	3	4	5	6
М	О	С	К	В	А
К	О	С	В	М	А

Зададимся вопросом расшифрования шифра перестановки. Для этого также используется таблица – подстановка. Пусть на том же ключе, что и в предыдущем примере, зашифровано некоторое слово и получен шифртекст: НЧЕИУК. Покажем, как его нужно расшифровать.

Для этого составим подстановку (таблицу) «обратную» к нашему ключу, а именно, поменяем местами первую и вторую строки исходной таблицы и затем упорядочим столбцы по возрастанию номеров в первой строке.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

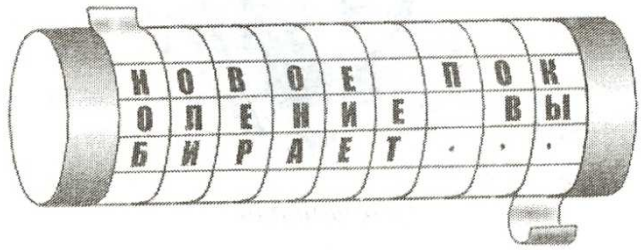
Термин «обратная» употреблен не зря, поскольку полученная таким образом таблица (подстановка) является ключом расшифрования. Действительно, если исходная таблица нам «говорила», что k-ую букву надо поставить на место i_k, то полученная же нам «говорит» обратное, то есть i_k-ую букву надо поставить на место с номером k.

И таким образом, применив преобразование перестановки используя ключ расшифрования, мы получим открытый текст.

1	2	3	4	5	6
Н	Ч	Е	И	У	К
У	Ч	Е	Н	И	К

Примеры шифров перестановки

1. ***Шифр Сцитало***. Еще в V-IV вв до н.э. греки применяли специальное шифрующее устройство. Оно состояло из двух палок одинаковой длины и толщины. Одну оставляли себе, другую отдавали отъезжающему. Эти палки называли *сциталами (скиталами)*. Когда правителям нужно было сообщить какую-нибудь важную тайну, они вырезали длинную и узкую, вроде ремня, полоску папируса, наматывали ее на свою сциталу, не оставляя на ней никакого промежутка, так чтобы вся поверхность палки была охвачена этой полосой. Затем оставляя папирус на сцитале в том виде, как он есть, писали на нем все что нужно, а написав, снимали полосу и отправляли адресату без палки. А так как буквы на этой полоске разбросаны в беспорядке, то прочитать написанное адресат мог, только взяв свою сциталу и намотав на нее без пропусков полосу.



Отметим, что при использовании шифра Сцитало первая буква открытого текста переходит в первую букву шифртекста, дальше из открытого текста выбирается через определенное и постоянное число букв вторая буква шифрсообщения и т. д., пока не достигается конец сообщения. Затем в качестве следующей буквы шифртекста выбирается вторая буква открытого текста и процедура продолжается, пока не будут переставлены все буквы сообщения.

2. ***Шифр маршрутной перестановки.*** Широкое распространение получили шифры перестановки, использующие некоторую геометрическую фигуру. Преобразования из этого шифра состоят в том, что в некоторую фигуру, обычно прямоугольник, исходный текст вписывается по ходу одного «маршрута», а затем по ходу другого выписывается с нее. Такой шифр называют маршрутной перестановкой. Например, можно вписывать исходное сообщение в прямоугольную таблицу, выбрав такой маршрут: по горизонтали, начиная с левого верхнего угла поочередно слева направо и справа налево. Выписывать же сообщение будем по другому маршруту: по вертикали, начиная с верхнего правого угла и двигаясь поочередно сверху вниз и снизу вверх.

   Зашифруем, например, фразу:

   ПРИМЕРМАРШРУТНОЙПЕРЕСТАНОВКИ

   используя прямоугольник размера 4×7:

П	**Р**	**И**	**М**	**Е**	**Р**	**М**
Н	**Т**	**У**	**Р**	**Ш**	**Р**	**А**
О	**Й**	**П**	**Е**	**Р**	**Е**	**С**
И	**К**	**В**	**О**	**Н**	**А**	**Т**

   Зашифрованная фраза выглядит так:

   МАСТАЕРРЕШРНОЕРМИУПВКЙТРПНОИ

Теоретически маршруты могут быть значительно более изощренными, например обход конем шахматной доски таким образом, чтобы в каждой клетке побывать один раз. Один из таких замкнутых маршрутов был найден знаменитым математиком Леонардом Эйлером в 1759 г.

3. ***Шифр вертикальной перестановки.*** Также хорошо известна разновидность шифра маршрутной перестановки - шифр вертикальной перестановки. Для построения этих шифров используется прямоугольник с m столбцами, в который сообщение вписывается обычным способом (по строкам слева направо). Затем задается ключ,

то есть выбирается некоторая подстановка степени m. Выписываются буквы по вертикали, а столбцы при этом берутся в порядке, определяемом этим ключом.

Пусть, например, этот ключ такой:

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 5\,1\,4\,7\,2\,6\,3 \end{pmatrix}$$

и с его помощью надо зашифровать сообщение:

ВОТПРИМЕРШИФРАВЕРТИКАЛЬНОЙПЕРЕСТАНОВКИ

Впишем сообщение в прямоугольник, столбцы которого пронумерованы в соответствии с ключом.

5	1	4	7	2	6	3
В	О	Т	П	Р	И	М
Е	Р	Ш	И	Ф	Р	А
В	Е	Р	Т	И	К	А
Л	Ь	Н	О	Й	П	Е
Р	Е	С	Т	А	Н	О
В	К	И	-	-	-	-

Теперь, выбирая столбцы в порядке, заданном ключом, и выписывая последовательно буквы каждого из них сверху вниз, получаем такую криптограмму:

ОРЕЬЕКРФИЙА-МААЕО-ТШРНСИВЕВЛРВИРКПН-ПИТОТ-

Шифры гаммирования

На данной части занятия будем рассматривать шифры, которые относятся к шифрам замены, но выделяются в собственный класс в связи со своими характерными свойствами и особенностями. Эти шифры получили название *шифров гаммирования*.

В алфавите любого естественного языка буквы следуют друг за другом в определенном порядке. Это дает возможность присвоить каждой букве алфавита ее естественный порядковый номер. Так, в английском

алфавите букве *A* присваивается порядковый номер 1, букве *Q* - порядковый номер 17, а букве *Z* - порядковый номер 26. Аналогичное отождествление можно осуществить и для русского алфавита, например для RUS30 (где *Ё=Е*, *Й=И*, *Ъ=Ь*). Буква *А* будет иметь порядковый номер 1, *О* - номер 14, *Я* - 30.

Если в открытом сообщении каждую букву заменить ее естественным порядковым номером в рассматриваемом алфавите, то преобразование числового сообщения в буквенное позволяет однозначно восстановить исходное открытое сообщение. Например, числовое сообщение

1 11 20 1 3 9 18

в алфавите RUS30 преобразуется в буквенное сообщение:

АЛФАВИТ

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ы	Ь Ъ	Э	Ю	Я
1	2	3	4	5	6		7	8	9		10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Зададим теперь преобразования зашифрования f и преобразования расшифрования g для произвольного шифра гаммирования. Пусть:

- необходимо зашифровать сообщение $X = x_1, \dots, x_T$ в алфавите $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$.
- n - мощность алфавита.
- Каждая буква отождествляется со своим порядковым номером в алфавите.
- Выберем некоторую последовательность, составленную из букв Ω: $\gamma_1, \dots, \gamma_T$ - данная последовательность называется *гаммой* шифра, или *ключевой последовательностью*.

Тогда преобразованием зашифрования f_{k_i} будет являться преобразование, при котором i-ая буква шифртекста y_i равна:

$$y_i = f_{k_i}(x_i) = r_n(x_i + \gamma_i),$$

где $k_i = \gamma_i$ - используемый знак гаммы последовательности для шифрования i-той буквы сообщения x_i; $r_n(b)$ - остаток от деления числа числа b на n (полагаем, что $r_n(n) = n$).

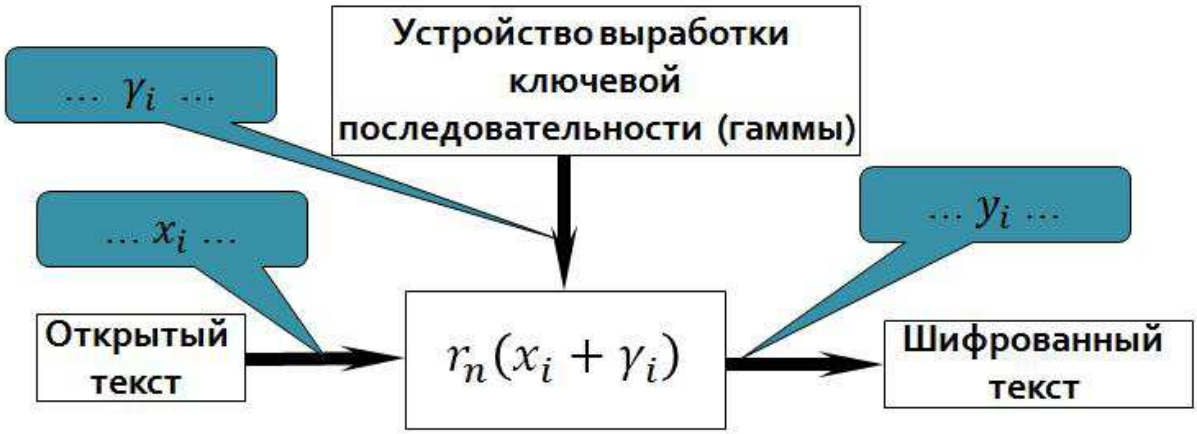
Итак, зашифрование шифром гаммирования означает «сложение» или, как говорят, «наложение» некоторой последовательности (гаммы) на знаки (буквы) открытого текста. Очевидно, что в таком случае для расшифрования нужно вычесть из букв шифртекста знаки гаммы:

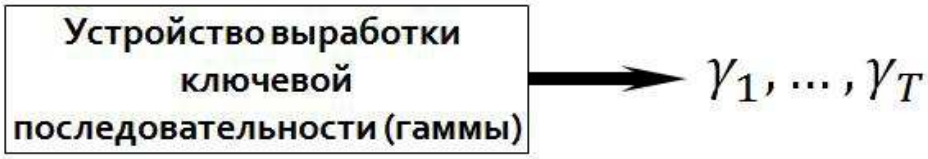
$$x_i = g_{k_i}(y_i) = r_n(y_i - \gamma_i).$$

Соответственно, в силу сказанного, весь отрезок гаммы (то есть вся последовательность) является ключом данного шифра, именно поэтому ее называют ключевой последовательностью.

Отметим, что аналогичные формулы для шифрования и расшифрования мы видели на прошлом занятии, когда рассматривали сдвиговые шифры. Все дело в том, что сдвиговый шифр на самом деле является частным случаем шифра гаммирования, когда вся гамма представляется одним и тем же значением k (то есть, другими словами, когда все элементы гаммы γ_i равны k).

На данной схеме изображен процесс зашифрования сообщения шифром гаммирования.





В каждый момент времени в устройство шифрования (шифратор) подается очередная буква открытого текста x_i и подается знак гаммы γ_i, сгенерированный по некоторому правилу (закону) устройством выработки ключевой последовательности. Согласно формуле $y_i = r_n(x_i + \gamma_i)$ шифратор вырабатывает очередную букву шифрованного текста. Данный процесс продолжается до тех пор пока в через шифратор не «пройдут» все буквы открытого текста.

Зашифруем слово **АЛФАВИТ** на следующей гамме: **ИДФНТВХ**.

$$y_1 = r_{30}(\text{А} + \text{И}) = r_{30}(1 + 9) = 10 = \text{К},$$
$$y_1 = r_{30}(\text{Л} + \text{Д}) = r_{30}(11 + 5) = 16 = \text{Р},$$
$$y_1 = r_{30}(\text{Ф} + \text{Ф}) = r_{30}(20 + 20) = 10 = \text{К},$$
$$y_1 = r_{30}(\text{А} + \text{Н}) = r_{30}(1 + 13) = 14 = \text{О},$$
$$y_1 = r_{30}(\text{В} + \text{Т}) = r_{30}(3 + 18) = 21 = \text{Х},$$
$$y_1 = r_{30}(\text{И} + \text{В}) = r_{30}(9 + 3) = 12 = \text{М},$$
$$y_1 = r_{30}(\text{Т} + \text{Х}) = r_{30}(18 + 21) = 9 = \text{И}.$$

Получим шифртекст: **КРКОХМИ**.

Шифр Виженера

Одним из частных случаев шифра гаммирования является шифр Виженера, описанный в 1585 году французом Блезом де Виженером в его "Трактате о шифрах". Опишем данный шифр.

Шифр Виженера является шифром гаммирования с краткопериодической гаммой (то есть гаммой, которая является повторением некоторого короткого слова – периода).

Пусть в алфавите Ω задан открытый текст $X = x_1, \dots, x_T$. Выберем некоторое слово длины t $\gamma_1^*, \dots, \gamma_t^*$ из букв рассматриваемого алфавита. Данное слово будет являться ключом (ключевым словом). Сформируем

гамму с длиной, равной длине открытого текста (то есть T) путем **повторения** ключевого слова необходимое число раз:

$$\gamma_1^*, \dots, \gamma_t^*, \gamma_1^*, \dots, \gamma_t^*, \dots$$

Наложим эту периодическую гамму (периодом которой является ключевое слово) на открытый текст $x_1, \dots, x_T$. Получим шифртекст $y, \dots, y_T$.

Математически процесс зашифрования можно описать следующей формулой:

$$y_i = f_{k_i}(x_i) = r_n(x_i + \gamma^*_{r_t(i)}),$$

где $k_i = \gamma^*_{r_t(i)}$, $r_n(b)$ – остаток от деления числа b на n.

Уравнение расшифрования:

$$x_i = g_{k_i}(y_i) = r_n(y_i - \gamma^*_{r_t(i)})$$

Например, зашифруем слово АЛФАВИТ шифром Виженера (в алфавите RUS30). Для этого выберем ключевое слово, скажем, МИР. Поскольку открытый текст имеет длину 7, а ключевое слово – 3, то гамма шифра будет следующая:

МИРМИРМ

Сложим полученную гамму и открытый текст, получим:

АЛФАВИТ

+МИРМИРМ

НФЕНМЩЯ

Таким образом, шифртекст НФЕНМЩЯ.

§ 2. Решение задач

Задача № 1

Известно, что ключом шифра перестановки является таблица – подстановка степени n, где n – длина текста. Найдите число всех возможных ключей шифра перестановки для текста длины n.

Решение:

Ключом шифра перестановки является таблица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

Число ключей равно числу различных наборов $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, являющихся перестановками чисел $\{1, 2, \dots, n\}$. Посчитаем сколькими способами можно выбрать набор $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$.

- значение i_1 можно выбрать n способами, то есть сделать любым из $\{1, 2, \dots, n\}$;
- значение i_2 можно выбрать n-1 способом, поскольку оно может быть любым из $\{1, 2, \dots, n\}$, но не может совпадать с i_1, которое уже выбрано;
- значение i_3 можно выбрать n-2 способом, поскольку оно может быть любым из $\{1, 2, \dots, n\}$, но не может совпадать с i_1 и i_2, которые уже выбраны;
- …
- значение i_n можно выбрать 1 способом, поскольку оно определяется однозначно по уже выбранным n-1 значениям.

Таким образом, число таких наборов равно:

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$$

то есть числу, равному произведению первых n подряд идущих натуральных чисел, оно обозначается $n!$ и читается «*эн факториал*».

Ответ: $n!$

Задача № 2

Сообщение

IT IS MORE THAN A FEELING

зашифровано с помощь шифра Сцитало. Может ли начало этого сообщения перейти в один из указанных фрагментов шифрованного текста:

- IMTF…
- IEEI…
- TSOE…

- IOAE…

Решение:

При использовании шифра Сцитало для формирования шифртекста сначала выбирается 1-ая буква открытого текста (вариант 3 не удовлетворяет этому требованию), затем (k+1)-буква, (2k+1)-буква и т.д., для некоторого k, равного числу букв в каждой строке сциталы.

Значение k является постоянной величиной для данной сциталы, в связи с чем:

- вариант 1 отвергается, так как для варианта 1 параметр k = 4 и после символа *T* должна идти буква *A*.
- вариант 2 тоже не верный, поскольку для него k = 7 и поэтому после *E* должна идти буква *T*;

Остается единственный правильный вариант 4 при котором k = 5.

Ответ: *4 вариант*.

Задача № 3

Сообщение

SOKYDIOLIGCWUUHO

зашифровано с помощь шифра вертикальной перестановки на ключе

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 3\,5\,4\,1\,6\,2 \end{pmatrix}$$

Прочитайте данный текст.

Решение:

Известна длина ключа. В данном случае, число столбцов в ключевой таблице равна 6. Всего букв шифрованного текста 16. 16=2·6+4. Таким образом, приходим к выводу, что в таблице, в которую записывался изначально текст, находится три строки, последняя самая короткая, содержит 4 символа. В частности это означает, что в каждом из столбцов содержится по три буквы, за исключением последних двух 5 и 6 - в них по две буквы.

В условии задачи дан ключ зашифрования, поэтому можно выписать ключ расшифрования, просто поменяв его строки местами:

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,6\,1\,3\,2\,5 \end{pmatrix}$$

Так как первый столбец согласно ключу расшифрования должен стать четвертым, а он является «длинным» (то есть в нем 3 буквы), то его содержимое: SOK. Далее, второй столбец должен стать шестым, а он является «коротким» (то есть в нем 2 буквы), то его содержимое: YD и т.д. Получим следующую разбивку на столбцы.

S	Y	I	I	W	H
O	D	O	G	U	O
K		L	C	U	

Меняем их местами в соответствии с ключом расшифрования

I	W	I	S	H	Y
O	U	G	O	O	D
L	U	C	K		

Получаем открытое сообщение: I WISH YOU GOOD LUCK.
Ответ: *I WISH YOU GOOD LUCK*.

Задача № 4

Сколько различных шифртекстов можно получить, используя шифр перестановки, если открытый текст:

- РЕВОЛЮЦИЯ;
- КАРТИНА;
- ИГРАЛЬНАЯДОСКА.

Решение:

- Рассмотрим первое слово. В нем все буквы различны поэтому число различных слов, которые можно получить из данного, просто равно числу перестановок его букв, или что то же самое, числу ключей

шифра перестановки при n = 9. Как известно из задачи 1, данное число равно 9!.

- Второе слово имеет длину 7. Число перестановок его букв равно 7!. В то же время надо заметить, что не всякая перестановка букв дает разные шифртексты. Это так, поскольку в данном слове 2 одинаковые буквы А, поэтому если их менять местами, получим один и тот же шифртекст (но при этом перестановки разные). Пусть имеем некоторую перестановку букв данного слова, и при этом буквы А оказались на местах i_1 и i_2 соответственно. Тогда та же перестановка, но в которой буквы А будут стоять на местах i_2 и i_1 соответственно, будет давать один и тот же шифртекст. Таким образом, каждому шифртексту соответствует в точности 2 различных перестановки (при этом очевидно, что различным шифртекстам соответствуют различные перестановки). Пусть теперь x – число различных шифртекстов. Поскольку число всех перестановок равно 7!, то $2 \cdot x$ равно 7!. Значит, $x = \frac{7!}{2}$.
- Данное словосочетание имеет длину 14. Число перестановок его букв равно 14!. В то же время надо заметить, что не всякая перестановка букв дает разные шифртексты. Это так, поскольку в данном словосочетании 3 одинаковые буквы A, поэтому если их менять местами, получим один и тот же шифртекст (но при этом перестановки разные). Пусть имеем некоторую перестановку букв данного словосочетания, и при этом буквы A оказались на местах $i_1,\ i_2,\ i_3$ соответственно. Тогда та же перестановка, но в которой буквы A будут стоять на местах, скажем, $i_2,\ i_3,\ i_1$ соответственно, будет давать один и тот же шифртекст. Более того каким бы образом мы не переставляли между собой места $i_1,\ i_2,\ i_3$ - будем получать все тот же шифртекст. Таким образом, каждому шифртексту соответствует столько различных перестановок, сколько всего существует перестановок элементов

множества $\{i_1,\ i_2,\ i_3\}$. А их всего в точности 3! = 6. Пусть теперь x – число различных шифртекстов, тогда $6 \cdot x$ равно 14!. Значит, $x = \frac{14!}{6}$.

Ответ: *362 880*; *2 520*; *14 529 715 200*.

Задача № 5

Для зашифрования сообщения на русском языке его записывают в одну строку без пробелов и знаков препинания. В получившейся цепочке буквы нумеруются слева направо числами от 1 до L. Зашифрование происходит путем перестановки букв исходной цепочки по следующему правилу. Фиксируем два натуральных числа a и b. Буква с номером n в исходной цепочке должна в зашифрованной цепочке иметь номер, равный остатку от деления числа $a \cdot n + b$ на L (с одним исключением: если $a \cdot n + b$ нацело делится на L, то остаток полагается равным L). Известно, что в результате применения этого метода зашифрования к цепочке из 43 букв

СВЕТИТНЕЗНАКОМАЯЗВЕЗДАСНОВАМЫОТОРВАНЫОТДОМА

была получена цепочка

ТАЫТОЕОНСООВЗМЕВТРАДАЗЕДВМАЯНТОАЫСЗАИМНОНВК

При этих же значениях a и b, проведено зашифрование еще некоторой цепочки из 38 букв. Получилось вот что:

ВИДХЬВРЛМАОЯООАОДДСЕМДРОИВВОЕОЗТООБНЗО

Найдите значения a и b и восстановите исходное сообщение.

Решение:

Для начала найдём в открытом тексте две уникальные буквы (по возможности близкие). Это, например, К и Я, стоящие соответственно на 12 и 16 позициях в открытом тексте. В шифрованном тексте они стоят соответственно на местах 43 и на 28.

Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} 12a + b = 43k \\ 16a + b = 28 + 43l \end{cases}$$

Следовательно $4a = 28 + 43m$. При $m = 0$ находим $a = 7$, из первого уравнения находим $b = 2$.

Расшифровав второй текст, получим искомое сообщение:

МОРОЗВОЕВОДАДОЗОРОМОБХОДИТВЛАДЕНЬЯСВОИ

Ответ: МОРОЗВОЕВОДАДОЗОРОМОБХОДИТВЛАДЕНЬЯСВОИ.

Задача № 6

Сообщение записано в таблицу размера 7×3 слева направо сверху вниз. Затем сверху вниз были выписаны буквы из таблицы: сначала из пятого столбца таблицы, затем из первого, потом из седьмого, второго, четвертого, шестого и третьего:

ВАБОЛВЕЫЕКЬТСРТЙЕ.

Что это было за сообщение?

Решение:

Всего в данную таблицу вмещается 21 буква. В то же время сообщение имеет длину, равную 17. Это означает, что в третьей (последней) строке таблицы последние 4 ячейки не заполнены, а значит столбцы с номерами с 4 по 7 являются короткими, то есть в них содержится только по две буквы.

1	2	3	4	5	6	7

Зная это, определим разбивку текста на столбцы.

ВА БОЛ ВЕ ЫЕК ЬТ СР ТЙЕ.

Остается только вписать в соответствии с этой разбивкой буквы в столбцы, как сказано в условии задачи.

1	2	3	4	5	6	7
Б	Ы	Т	Ь	В	С	В
О	Е	Й	Т	А	Р	Е

Л	К	Е				

Получим ответ:

БЫТЬ В СВОЕЙ ТАРЕЛКЕ

Ответ: *БЫТЬ В СВОЕЙ ТАРЕЛКЕ.*

Задача № 7

Для передачи сообщения на русском языке Крокодил Гена и Чебурашка выполняют следующие действия. Каждый из них выбирает свою последовательность, состоящую из целых чисел в пределах от 0 до 32, длина которой равна длине сообщения. Буквы сообщения заменяются числами по табл. 2.

Таблица 2

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	0

Сначала Гена шифрует сообщение, используя свою последовательность. Для этого числовое значение первой буквы сообщения и первое число его последовательности складываются, а полученная сумма заменяется остатком от деления на 33 и вновь заменяется буквой по табл. 2. Затем эта процедура повторяется для вторых, третьих и т.д. чисел сообщения и последовательности. Полученный результат: **ЁЛИСУВШОЮЦОМЮВЫЗПЭЪМО** передаётся Чебурашке. После этого Чебурашка шифрует полученное сообщение с помощью своей последовательности. Получается строка **ЪЭЛВШРЕЭЭТЖЩЮИГВФБСЦХ.** Эту строку он и передает Гене.

Гена вычитает из числовых значений букв полученного сообщения числа своей последовательности (к отрицательной разнице прибавляется число 33) и передаёт результат **ЖЪЫХЙТСЖЫАШШЬЯМЫШЗЬВГ** Чебурашке**.** Какое сообщение зашифровал Крокодил Гена?

Решение:

В условии задачи имеется 3 зашифрованных сообщения:

$C_1 = M + K_Г$ = **ЁЛИСУВШОЮЦОМЮВЫЗПЭЪМО**;

$C_2 = C_1 + K_Ч = M + K_Г + K_Ч$ = **ЪЭЛВШРЕЭЭТЖЩЮИГВФБСЦХ**;

$C_3 = C_2 - K_Г = M + K_Ч$ = **ЖЪЫХЙТСЖЫАШШЬЯМЫШЗЬВГ**,

где M – исходное сообщение, $K_Г$ – последовательность, выбранная Крокодилом Геной; $K_Ч$ – последовательность, выбранная Чебурашкой.

Итак, в данной задаче идет речь о шифре гаммирования. Гена и Чебурашка вырабатывают свою гамму, а затем происходит обмен сообщениями, как это описано в задаче. Рассмотрим процесс обмена сообщениями:

1. Гена отправляет Чебурашке сообщение $C_1 = M + K_Г$.
2. Чебурашка накладывает на полученное сообщение гамму и отправляет обратно Гене: $C_2 = M + K_Г + K_Ч$.
3. Гена вычитает из полученного C_2 свою гамму и отправляет сообщение: $C_3 = C_2 - K_Г = M + K_Ч$.

Далее Чебурашка, зная свою гамму расшифровывает в итоге сообщение *M*.

Не смотря на казалось бы, сложный протокол обмена сообщениями, сторонний наблюдатель, обладая всеми тремя сообщениями (но не зная гаммы) так же может определить М. Итак, зная $C_1,\ C_2, C_3$ наблюдатель может по следующей формуле найти М:

$$M = C_1 - C_2 + C_3 = M + K_Г - (M + K_Г + K_Ч) + M + K_Ч.$$

Раскрыв скобки, несложно убедиться, что это действительно верно.

Найдем по указанной формуле исходное сообщение. В итоге, можно получить следующее предложение:

ТИШЕ ЕДЕШЬ ДАЛЬШЕ БУДЕШЬ.

Ответ: *ТИШЕ ЕДЕШЬ ДАЛЬШЕ БУДЕШЬ***.**

Задача № 8

Осмысленная фраза на русском языке записана **два раза подряд** без пробелов и знаков препинания и зашифрована шифром Виженера. Сообщение было зашифровано с использованием ключевого слова из пяти букв. Результат зашифрования выглядит так:

МХЛЩЛИФЦБДЮГИШСПТАИВПБЬДЮОЛДЬУЭЮЫЙЕМХЛ

Восстановите исходное сообщение и ключевое слово, если известно, что его первой буквой является одна из четырех: Л, П, К, Р.

Табл. 2

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

Решение:

Убеждаемся, что шифрованный текст имеет длину 38. Осмысленное предложение имеет тогда длину 19.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}
γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
м	**х**	**л**	**щ**	**л**	**и**	**ф**	**ц**	**б**	**д**	**ю**	**г**	**и**	**ш**	**с**	**п**	**т**	**а**	**и**

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}
γ_5	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_1	γ_2	γ_3
в	**п**	**б**	**ь**	**д**	**ю**	**о**	**л**	**д**	**ь**	**у**	**э**	**ю**	**ы**	**й**	**е**	**м**	**х**	**л**

$$r_{33}(x + \gamma) = y$$

Табл. 2

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

в	**п**	**б**	**ь**	**д**
м	**х**	**л**	**щ**	**л**
22	27	22	3	25

Выписываем друг под другом известные 5 первых знаков второй и первой половины шифрованного текста и находим разность позиций соответствующих букв, исходя из отождествления, указанного в таблице.

в	**п**	**б**	**ь**	**д**
м	**х**	**л**	**щ**	**л**
22	27	22	3	25

Получаем: 22 27 22 3 25 … . Если $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ - ключевое слово, то при первом шифровании использовалось оно само, а при втором - $\gamma_5, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. Таким образом, найденные разности равны соответственно:

$$r_{33}(\gamma_5 - \gamma_1), r_{33}(\gamma_1 - \gamma_2),\ r_{33}(\gamma_2 - \gamma_3),\ r_{33}(\gamma_3 - \gamma_4), r_{33}(\gamma_4 - \gamma_5).$$

$$\begin{cases} \gamma_5 - \gamma_1 = 22 \\ \gamma_1 - \gamma_2 = 27 \\ \gamma_2 - \gamma_3 = 22 \\ \gamma_3 - \gamma_4 = 3 \\ \gamma_4 - \gamma_5 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_2 = \gamma_1 + 6 \\ \gamma_3 = \gamma_1 + 17 \\ \gamma_4 = \gamma_1 + 14 \\ \gamma_5 = \gamma_1 + 22 \end{cases}$$

Тогда при известной 1-ой букве гаммы γ_1 остальные вычисляются по формулам, указанным выше. Далее перебирая все 4 варианта для первой буквы γ_1 (указанных в условии задачи), приходим к одному осмысленному слову КРЫША.

Далее остается расшифровать текст на данном слове, получим:

В Е Р Б Л Ю Д Ы И Д У Т Н А С Е В Е Р В Е Р Б Л Ю Д Ы И Д У Т Н А С Е В Е Р .

Ответ: *В Е Р Б Л Ю Д Ы И Д У Т Н А С Е В Е Р, КРЫША.*